

J. David Irwin e R. Mark Nelms



ANÁLISE BÁSICA DE
CIRCUITOS
PARA
ENGENHARIA

10ª Edição



ANÁLISE BÁSICA DE CIRCUITOS PARA ENGENHARIA



O GEN | Grupo Editorial Nacional reúne as editoras Guanabara Koogan, Santos, Roca, AC Farmacêutica, Forense, Método, LTC, E.P.U. e Forense Universitária, que publicam nas áreas científica, técnica e profissional.

Essas empresas, respeitadas no mercado editorial, construíram catálogos inigualáveis, com obras que têm sido decisivas na formação acadêmica e no aperfeiçoamento de várias gerações de profissionais e de estudantes de Administração, Direito, Enfermagem, Engenharia, Fisioterapia, Medicina, Odontologia, Educação Física e muitas outras ciências, tendo se tornado sinônimo de seriedade e respeito.

Nossa missão é prover o melhor conteúdo científico e distribuí-lo de maneira flexível e conveniente, a preços justos, gerando benefícios e servindo a autores, docentes, livreiros, funcionários, colaboradores e acionistas.

Nosso comportamento ético incondicional e nossa responsabilidade social e ambiental são reforçados pela natureza educacional de nossa atividade, sem comprometer o crescimento contínuo e a rentabilidade do grupo.

ANÁLISE BÁSICA DE CIRCUITOS PARA ENGENHARIA

Décima Edição

J. DAVID IRWIN

Universidade de Auburn

R. MARK NELMS

Universidade de Auburn

Tradução e Revisão Técnica

Fernando Ribeiro da Silva, D.Sc.

Professor do Centro Federal de Educação Tecnológica Celso Suckow da Fonseca
(CEFET-RJ)



Os autores e a editora empenharam-se para citar adequadamente e dar o devido crédito a todos os detentores dos direitos autorais de qualquer material utilizado neste livro, dispondo-se a possíveis acertos caso, inadvertidamente, a identificação de algum deles tenha sido omitida.

Não é responsabilidade da editora nem dos autores a ocorrência de eventuais perdas ou danos a pessoas ou bens que tenham origem no uso desta publicação.

Apesar dos melhores esforços dos autores, do tradutor, do editor e dos revisores, é inevitável que surjam erros no texto. Assim, são bem-vindas as comunicações de usuários sobre correções ou sugestões referentes ao conteúdo ou ao nível pedagógico que auxiliem o aprimoramento de edições futuras. Os comentários dos leitores podem ser encaminhados à LTC – Livros Técnicos e Científicos Editora Ltda.

Traduzido de

BASIC ENGINEERING CIRCUIT ANALYSIS, TENTH EDITION

Copyright © 2011, 2008, 2005 John Wiley & Sons, Inc.

All Rights Reserved. This translation published under license with the original publisher John Wiley & Sons Inc.

ISBN: 978-0-470-63322-9

Direitos exclusivos para a língua portuguesa

Copyright © 2013 by

LTC – Livros Técnicos e Científicos Editora Ltda.

Uma editora integrante do GEN | Grupo Editorial Nacional

Reservados todos os direitos. É proibida a duplicação ou reprodução deste volume, no todo ou em parte, sob quaisquer formas ou por quaisquer meios (eletrônico, mecânico, gravação, fotocópia, distribuição na internet ou outros), sem permissão expressa da editora.

Travessa do Ouvidor, 11
Rio de Janeiro, RJ – CEP 20040-040
Tels.: 21-3543-0770 / 11-5080-0770
Fax: 21-3543-0896
ltc@grupogen.com.br
www.ltceditora.com.br

Capa: Máquina Voadora DG

Editoração Eletrônica: EDEL

CIP-BRASIL. CATALOGAÇÃO-NA-FONTE

SINDICATO NACIONAL DOS EDITORES DE LIVROS, RJ

l72a

Irwin, J. David, 1939-

Análise básica de circuitos para engenharia/J. David Irwin, R. Mark Nelms; tradução e revisão técnica Fernando Ribeiro da Silva. – Rio de Janeiro: LTC, 2013.

il.; 28 cm

Tradução de: Basic engineering circuit analysis, 10th ed.

ISBN 978-85-216-2180-5

I. Circuitos elétricos – Análise. I. Nelms, R. M. II. Título.

12-8564.

CDD: 621.3192

CDU: 621.3.011.6

À minha amável família:
Edie
Gerl, Bruno, Andrew e Ryan
John, Julie, John David e Abi
Laura

A meus pais:
Robert e Elizabeth Nelms

SUMÁRIO GERAL

CAPÍTULO 1	Conceitos Básicos	1
CAPÍTULO 2	Circuitos Resistivos	22
CAPÍTULO 3	Técnicas de Análise Nodal e de Laços	85
CAPÍTULO 4	Amplificadores Operacionais	128
CAPÍTULO 5	Técnicas Adicionais de Análise	155
CAPÍTULO 6	Capacitância e Indutância	203
CAPÍTULO 7	Análise Transiente dos Circuitos de Primeira e Segunda Ordens	245
CAPÍTULO 8	Análise do Regime Estacionário dos Circuitos CA	304
CAPÍTULO 9	Análise da Potência no Regime Estacionário	359
CAPÍTULO 10	Redes Magneticamente Acopladas	406
CAPÍTULO 11	Circuitos Polifásicos	448
CAPÍTULO 12	Desempenho das Redes em Função da Frequência	478
CAPÍTULO 13	A Transformada de Laplace	546
CAPÍTULO 14	Aplicação da Transformada de Laplace na Análise de Circuitos	568
CAPÍTULO 15	Técnicas de Análise através das Séries de Fourier	612
CAPÍTULO 16	Quadripolos	651

SUMÁRIO

Prefácio	xiii	CAPÍTULO 4	
CAPÍTULO 1		AMPLIFICADORES OPERACIONAIS	128
CONCEITOS BÁSICOS	1	4.1 Introdução	129
1.1 Sistemas de Unidades	2	4.2 Modelos de Op-Amps	129
1.2 Grandezas Básicas	2	4.3 Circuitos Básicos que Utilizam Op-Amps	134
1.3 Componentes de um Circuito	6	4.4 Comparadores	141
Resumo	14	4.5 Exemplos de Aplicação	142
Problemas	14	4.6 Exemplos de Projeto	145
		Resumo	147
		Problemas	147
CAPÍTULO 2		CAPÍTULO 5	
CIRCUITOS RESISTIVOS	22	TÉCNICAS ADICIONAIS DE ANÁLISE	155
2.1 Lei de Ohm	23	5.1 Introdução	156
2.2 Leis de Kirchhoff	27	5.2 Superposição	157
2.3 Circuitos com um Único Laço	34	5.3 Teoremas de Thévenin e de Norton	162
2.4 Circuitos com um Único Par de Nós	38	5.4 Transferência de Potência Máxima	177
2.5 Combinações de Resistores em Série e em Paralelo	42	5.5 Exemplo de Aplicação	181
2.6 Circuitos com Combinações de Resistores em Série e em Paralelo	46	5.6 Exemplos de Projeto	182
2.7 Transformações Y (Estrela) \rightleftharpoons Δ (Delta)	51	Resumo	186
2.8 Circuito com Fontes Dependentes	53	Problemas	186
2.9 Tecnologia dos Resistores Utilizados na Fabricação de Componentes Eletrônicos	57		
2.10 Exemplos de Aplicação	60	CAPÍTULO 6	
2.11 Exemplos de Projeto	62	CAPACITÂNCIA E INDUTÂNCIA	203
Resumo	67	6.1 Capacitores	204
Problemas	68	6.2 Indutores	210
CAPÍTULO 3		6.3 Combinações de Capacitores e Indutores	219
TÉCNICAS DE ANÁLISE NODAL E DE LAÇOS	85	6.4 Circuitos com Amplificadores Operacionais RC	225
3.1 Análise Nodal	86	6.5 Exemplos de Aplicação	227
3.2 Análise dos Laços	100	6.6 Exemplos de Projeto	230
3.3 Exemplo de Aplicação	111	Resumo	231
3.4 Exemplo de Projeto	112	Problemas	231
Resumo	112		
Problemas	113		

CAPÍTULO 7**ANÁLISE TRANSIENTE DOS CIRCUITOS DE PRIMEIRA E SEGUNDA ORDENS 245**

- 7.1 Introdução 246
- 7.2 Circuitos de Primeira Ordem 247
- 7.3 Circuitos de Segunda Ordem 263
- 7.4 Exemplos de Aplicação 273
- 7.5 Exemplos de Projeto 280
 - Resumo 286
 - Problemas 287

CAPÍTULO 8**ANÁLISE DO REGIME ESTACIONÁRIO DOS CIRCUITOS CA 304**

- 8.1 Senoides 305
- 8.2 Funções de Forçamento Senoidais e Complexas 307
- 8.3 Fasores 309
- 8.4 Relações entre os Fasores dos Componentes de um Circuito 311
- 8.5 Impedância e Admitância 315
- 8.6 Diagramas de Fasores 320
- 8.7 Análise Básica de Circuitos Utilizando as Leis de Kirchhoff 322
- 8.8 Procedimentos de Análise 325
- 8.9 Exemplos de Aplicação 334
- 8.10 Exemplos de Projeto 336
 - Resumo 338
 - Problemas 339

CAPÍTULO 9**ANÁLISE DA POTÊNCIA NO REGIME ESTACIONÁRIO 359**

- 9.1 Potência Instantânea 360
- 9.2 Potência Média 361
- 9.3 Transferência Máxima de Potência Média 364
- 9.4 Valores Efetivos ou rms 368
- 9.5 O Fator de Potência 371
- 9.6 Potência Complexa 373
- 9.7 Correção do Fator de Potência 376
- 9.8 Circuitos Monofásicos com Três Condutores 379
- 9.9 Considerações sobre Segurança 382
- 9.10 Exemplos de Aplicação 388
- 9.11 Exemplo de Projeto 392
 - Resumo 393
 - Problemas 394

CAPÍTULO 10**REDES MAGNETICAMENTE ACOPLADAS 406**

- 10.1 Indutância Mútua 407
- 10.2 Análise através da Energia 416
- 10.3 O Transformador Ideal 418

III Considerações sobre Segurança 426

- 10.5 Exemplos de Aplicação 426
- 10.6 Exemplos de Projeto 430
 - Resumo 433
 - Problemas 434

CAPÍTULO 11**CIRCUITOS POLIFÁSICOS 448**

- 11.1 Circuitos Trifásicos 449
- 11.2 Conexões Trifásicas 453
- 11.3 Conexões Fonte/Carga 454
- 11.4 Relações de Potência 461
- 11.5 Correção do Fator de Potência 463
- 11.6 Exemplos de Aplicação 465
- 11.7 Exemplos de Projeto 467
 - Resumo 470
 - Problemas 471

CAPÍTULO 12**DESEMPENHO DAS REDES EM FUNÇÃO DA FREQUÊNCIA 478**

- 12.1 Análise da Resposta no Domínio da Frequência 479
- 12.2 Análise no Domínio da Frequência das Funções Senoidais 484
- 12.3 Circuitos Ressonantes 493
- 12.4 Escalonamento 508
- 12.5 Filtros 509
- 12.6 Exemplos de Aplicação 527
- 12.7 Exemplos de Projeto 531
 - Resumo 536
 - Problemas 536

CAPÍTULO 13**A TRANSFORMADA DE LAPLACE 546**

- 13.1 Definição 547
- 13.2 Duas Importantes Funções Singulares 547
- 13.3 Pares da Transformada 549
- 13.4 Propriedades da Transformada 550
- 13.5 A Transformada Inversa 552
- 13.6 Integral de Convolução 556
- 13.7 Teoremas do Valor Inicial e do Valor Final 559
- 13.8 Exemplos de Aplicação 559
 - Resumo 562
 - Problemas 562

CAPÍTULO 14**APLICAÇÃO DA TRANSFORMADA DE LAPLACE NA ANÁLISE DE CIRCUITOS 568**

- 14.1 Soluções de Circuitos por Laplace 569
- 14.2 Modelos dos Componentes de um Circuito 570
- 14.3 Técnicas de Análise 571

14.4	Função de Transferência	581
14.5	Relação entre o Diagrama de Polos-Zeros e o Diagrama de Bode	590
14.6	Resposta no Regime Estacionário	593
14.7	Exemplos de Aplicação	595
14.8	Exemplos de Projeto	596
	Resumo	600
	Problemas	601

CAPÍTULO 15

TÉCNICAS DE ANÁLISE ATRAVÉS DAS SÉRIES DE FOURIER 612

15.1	Séries de Fourier	613
15.2	Transformada de Fourier	628
15.3	Exemplos de Aplicação	632
15.4	Exemplos de Projeto	638
	Resumo	643
	Problemas	644

CAPÍTULO 16

QUADRIPOLOS 651

16.1	Parâmetros de Admitância	652
16.2	Parâmetros de Impedância	654
16.3	Parâmetros Híbridos	656
16.4	Parâmetros de Transmissão	657
16.5	Conversão de Parâmetros	658
16.6	Interconexão de Quadripolos	659
16.7	Exemplos de Aplicação	662
16.8	Exemplos de Projeto	665
	Resumo	666
	Problemas	666

APÊNDICE

NÚMEROS COMPLEXOS	673
Índice	677

Material Suplementar

Este livro conta com os seguintes materiais suplementares:

- Answers to Odd Numbered End of Chapter Problems (em inglês, acesso restrito a docentes);
- Capítulo 17 (acesso livre);
- Ilustrações da obra em formato de apresentação (acesso restrito a docentes);
- PowerPoint Lecture Slides (em inglês, acesso restrito a docentes);
- Manual Files (acesso livre);
- Problem Solving Companion (em inglês, acesso livre);
- Problem Solving Videos (em inglês, acesso livre);
- Solutions Manual (em inglês, acesso restrito a docentes).

O acesso ao material suplementar é gratuito, bastando que o leitor se cadastre em: <http://gen-io.grupogen.com.br>



GEN-IO (GEN | Informação Online) é o repositório de materiais suplementares e de serviços relacionados com livros publicados pelo GEN, Grupo Editorial Nacional, maior conglomerado brasileiro de editoras do ramo científico-técnico-profissional, composto por Guanabara Koogan, Santos, Roca, AC Farmacêutica, Forense, Método, LTC, E.P.U. e Forense Universitária. Os materiais suplementares ficam disponíveis para acesso durante a vigência das edições atuais dos livros a que eles correspondem.

PREFÁCIO

Para o Estudante

A análise de circuitos não é fundamental apenas para as áreas das engenharias elétrica e de computação – os conceitos aqui estudados se estendem para além dos limites dessas duas grandes áreas. Por essa razão, ela se mantém como ponto de partida para muitos futuros engenheiros que desejam trabalhar nesse campo do conhecimento. O texto e todo o material suplementar a ele associado o auxiliará a atingir esse objetivo. Recomendase fortemente que você leia todo o Prefácio e veja todas as fontes de consulta disponíveis a você enquanto estudante. E, como última sugestão, cabe lembrar que o aprendizado requer prática e repetição, portanto, aproveite cada oportunidade de trabalhar mais um problema, ou estude uma hora a mais do que você planejou. Ao final, você ficará satisfeito por tê-lo feito.

Para o Professor

A Décima Edição deste livro foi preparada com base em uma cuidadosa análise das sugestões recebidas de professores e estudantes. As revisões e mudanças realizadas representam as solicitações de uma grande diversidade de professores. Estamos cientes das importantes mudanças implementadas no sentido desse material se tornar didático e compreensível. Consequentemente, os autores e o editor geraram uma sequência notável de fontes de estudos tradicionais e não tradicionais, de modo a atender às necessidades de estudantes e professores envolvidos com as modernas técnicas de análise de circuitos

Destaques da Décima Edição

- Um novo projeto é empregado no sentido de melhorar e tornar mais claro tanto o texto quanto as ilustrações. Essa nova forma melhorou significativamente a apresentação pedagógica, particularmente pela inclusão de ilustrações complexas.
- A nova prévia dos capítulos oferece uma motivação ao estudo do material de cada capítulo. Veja um exemplo dessa

prévia. A compreensão dos objetivos de cada capítulo foi atualizada e aparece como parte da nova abertura.

- Os problemas sugeridos ao final dos capítulos foram substancialmente revisados e expandidos. Existem agora cerca de 1400 problemas na Décima Edição, dentre os quais 400 são novos! Os Problemas Típicos de Exames Profissionais de Engenharia, na forma de múltipla escolha, também são apresentados ao final de cada capítulo.
- As aplicações práticas são agora apresentadas próximas de cada tópico no texto. Como essas estão dispostas na forma de item, os estudantes naturalmente as encontrarão em um formato regular, e serão úteis para responder questões como “Por que isto é importante?” ou “Como poderei utilizar o que aprendi nesse curso?”.
- Os Problem Solving Videos foram criados para mostrar aos estudantes como resolver passo a passo os problemas apresentados na forma de Avaliação do Aprendizado de cada capítulo. Esta é uma forma especial de aprimorar de modo significativo a compreensão de cada subseção de um capítulo. Os vídeos são também disponíveis para iPods Apple.
- De modo a propiciar a máxima flexibilidade, os suplementos *online* contêm as soluções para os exemplos do livro utilizando os programas MATLAB, PSPICE ou Multisim. Os exemplos trabalhados podem ser fornecidos aos estudantes na forma de arquivos digitais, ou, um ou mais deles pode ser incorporado nas edições customizadas impressas do texto, dependendo da preferência dos professores.
- As Estratégias para a Solução de Problemas foram mantidas na Décima Edição. Elas são utilizadas como guia para as soluções disponibilizadas nos PSV (Problem Solving Videos).
- Um capítulo suplementar sobre diodos se encontra disponibilizado na página da LTC (<http://www.ltceditora.com.br>).

Organização

O texto foi escrito para ser apresentado nos cursos de um ou dois semestres letivos. Os primeiros sete capítulos são dedicados à análise de circuitos CC. Uma introdução aos amplificadores operacionais é apresentada no Capítulo 4. Esse capítulo

pode ser omitido sem nenhuma perda de continuidade; alguns poucos exemplos e problemas sugeridos nos últimos capítulos podem ser ignorados. Os Capítulos 8 a 12 abordam a análise de circuitos CA, começando com a análise de circuitos de uma única frequência (monofásico e trifásico) e terminando com o estudo dos circuitos que operam com diversas frequências. O cálculo da potência nos circuitos CA monofásicos e trifásicos também é apresentado. Os importantes tópicos da transformada de Laplace, da transformada de Fourier e dos quadripolos são apresentados nos Capítulos 13 a 16.

A organização do texto oferece aos professores a máxima flexibilidade no planejamento de seus cursos. Um professor pode decidir cobrir os primeiros sete capítulos em um único semestre, enquanto outro pode omitir o Capítulo 4 e cobrir os Capítulos 1 a 3 e 5 a 8. Outros podem ainda escolher cobrir os assuntos dos Capítulos 1 a 3, 5 a 6 e as Seções 7.1 e 7.2, para em seguida abordar os temas dos Capítulos 8 e 9. Os demais capítulos podem ser estudados em um curso de um segundo semestre.

Aspectos Pedagógicos do Texto

Os aspectos pedagógicos do texto são ricos e variados. A obra inclui o texto impresso e o material de mídia, e diversas ideias são estabelecidas para integrar seu uso. Para um melhor aproveitamento desse aspecto pedagógico, examine os elementos relacionados a seguir, disponíveis na maioria dos capítulos deste livro.

As **Metas de Aprendizagem** são apresentadas no início de cada capítulo. Esse conjunto de metas esclarece ao leitor o que é importante e qual será o ganho ao se estudar o material apresentado no capítulo.

Os **Exemplos** representam a espinha dorsal de qualquer texto sobre análise de circuitos, e os numerosos exemplos têm sido sempre uma marca registrada deste livro-texto. Esses exemplos são apresentados na ordem crescente de complexidade, desde os simples e médios até os mais difíceis e desafiadores. Além dos exemplos regulares, diversos **Exemplos de Projeto** e **Exemplos de Aplicação** são encontrados ao longo do texto.

Destaques para a Atenção do leitor, geralmente, podem ser encontrados nas margens das páginas. Esses destaques facilitam a compreensão e servem como lembretes de conceitos fundamentais.

As **Avaliações do Aprendizado** representam uma poderosa ferramenta de aprendizado neste texto. Esses exercícios testam os conceitos acumulados a respeito de um determinado ponto de uma dada seção ou seções. Tanto a situação-problema quanto a resposta são fornecidos, demonstrando a solução de detalhes, passo a passo. O estudante que resolver esses problemas estará pronto para caminhar adiante.

A **Estratégia para a Solução de Problemas** representa um procedimento passo a passo para a solução de problemas. Muitos estudantes consideram essa orientação particularmente útil.

Eles conseguem responder à seguinte pergunta frequentemente colocada: “por onde eu começo?” Praticamente todos os capítulos possuem um ou mais conjuntos dessas estratégias, as quais estabelecem um tipo de relação com os procedimentos para a solução de problemas associados aos conceitos apresentados.

Os **Problemas** foram exaustivamente revisados para a Décima Edição. Esta edição possui cerca de 400 novos problemas, elaborados para diversos níveis e aprofundamentos. Qualquer professor encontrará inúmeros problemas apropriados para um nível de aprendizado específico. A Décima Edição possui cerca de 1400 problemas sugeridos! Dentre esses, os **Problemas Típicos de Exames Profissionais de Engenharia** para cada capítulo. Caso você pretenda se submeter às provas de cunho profissional, esses problemas são do tipo encontrado nessa modalidade de avaliação.

Os **Programas de Simulação e Análise de Circuitos** representam uma etapa fundamental do projeto de circuitos na engenharia moderna. Os programas de simulação como **PSPICE®**, **MultiSim®** e **MATLAB®** permitem ao engenheiro projetar e simular circuitos de forma rápida e eficiente. Como ferramenta de grande flexibilidade, esses três programas podem ser empregados na Décima Edição. Para cada caso, são disponibilizados suplementos que contêm as soluções de numerosos exemplos associados a cada um desses programas. Os professores podem optar por tornar esse material disponível *online* ou torná-lo parte de uma edição impressa customizada, fazendo desse programa uma parte integral e efetiva da apresentação do material do curso.

Uma valiosa coleção de materiais elaborada para esta edição representa uma forma distinta e útil de exploração dos exemplos e exercícios do livro a serem resolvidos por diversas técnicas de simulação.

Agradecimentos

Ao longo das mais de duas décadas de existência deste livro, estima-se que mais de mil professores utilizem nossa obra para ensinar as técnicas de análise de circuitos a centenas de milhares de estudantes. Como autores, não existe maior satisfação do que ver seu trabalho utilizado por tantas pessoas. Estamos agradecidos pela confiança depositada em nosso texto e pelas numerosas avaliações e sugestões de professores e estudantes ao longo desses anos. Esse retorno nos tem ajudado a melhorar continuamente a apresentação da obra. Para esta Décima Edição, estamos especialmente agradecidos a Jim Rowland da Universidade de Kansas pela sua assistência na abertura dos capítulos e a Stephen Haddock juntamente com a Universidade de Auburn por seu apoio com os materiais suplementares que utilizam os programas **PSPICE®**, **MultiSim®** e **MATLAB®**. Os autores desejam ainda expressar um agradecimento especial a Sandy Johnson por sua diligência e dedicação à preparação desta Décima Edição.

Ficamos felizes de trabalhar com um conjunto excepcional de pessoas da faculdade que participou dos grupos de revisão e análise desta edição. São eles:

Jorge Aravena, Louisiana State University
 James Conrad, University of North Carolina, Charlotte
 Paul King, Vanderbilt University
 Gordon Lee, San Diego State University
 Tokunbo Ogunfunmi, Santa Clara University
 Michael Polis, Oakland University

Monty Rickles
 C. L. Rogers
 Tom Shumpert
 Les Simonton
 James Trivltayakhum
 Susan Williamson
 Jacinda Woodward

A preparação deste livro e o material que o apoia foi manuseado com entusiasmo e grande cuidado. A combinação de sabedoria e liderança de nossos colegas na Wiley resultou em um grande esforço de conjunto que direcionou cada aspecto da apresentação. Esta equipe incluiu os seguintes profissionais.

Muitos de nossos amigos em diversos locais dos Estados Unidos, alguns dos quais já estão aposentados, também contribuíram com numerosas sugestões para a melhoria do livro:

Editor Executivo, Don Fowley
 Editor Assistente, Dan Sayre
 Editor Executivo de Mídia, Tom Kulesa
 Gerente de Marketing Executivo, Chris Ruel
 Editor de Produção Sênior, Valerie Vargas
 Designer Sênior, Kevin Murphy
 Gerente de Produção, Dorothy Sinclair
 Editora de Ilustrações Sênior, Lisa Gee
 Editor de Mídia, Lauren Sapira
 Assistente de Edição, Katie Singelton

David Anderson, University of Iowa
 Jorge Aravena, Louisiana State University
 Les Axelrod, Illinois Institute of Technology
 Richard Baker, UCLA
 Charles P. Bunting, Oklahoma State University
 John Choma, University of Southern California
 David Conner, University of Alabama at Birmingham
 James L. Dodd, Mississippi State University
 Kevin Donahue, University of Kentucky
 John Durkin, University of Akron
 Prasad Enjeti, Texas A&M University
 Earl D. Eyman, University of Iowa
 Arvin Grabel, Northeastern University
 Paul Gray, University of Wisconsin-Platteville
 Ashok Goel, Michigan Technological University
 Walter Green, University of Tennessee
 Paul Greiling, UCLA
 Mohammad Habli, University of New Orleans
 John Hadjilogiou, Florida Institute of Technology
 Yasser Hegazy, University of Waterloo
 Keith Holbert, Arizona State University
 Aileen Honka, The MOSIS Service-USC Inf. Sciences Institute

Cada membro desse time desempenhou um papel vital na preparação do conjunto de materiais que forma a Décima Edição de *Análise Básica de Circuitos para Engenharia*. Estamos muito agradecidos por suas inúmeras contribuições.

Como no passado, estamos muito felizes em reconhecer o apoio que foi oferecido por várias pessoas às edições anteriores deste livro. Os colegas de Auburn que nos auxiliaram são:

Thomas A. Baginski
 Travis Blalock
 Henry Cobb
 Bill Dillard
 Zhi Ding
 Kevin Driscoll
 E. R. Graf
 L. L. Grigsby
 Charles A. Gross
 Stephen Haddock
 David C. Hill
 M. A. Honnell
 R. C. Jaeger
 Keith Jones
 Betty Kelley
 Ray Kirby
 Matthew Langford
 Aleck Leedy
 George Lindsey
 Jo Ann Loden
 James L. Lowry
 David Mack
 Paulo R. Marino
 M. S. Morse
 Sung-Won Park
 John Parr

Marty Kaliski, Cal Poly, San Luis Obispo
 Muhammad A. Khaliq, Minnesota State University
 Ralph Kinney, LSU
 Robert Krueger, University of Wisconsin
 K. S. P. Kumar, University of Minnesota
 Jung Young Lee, UC Berkeley student
 Aleck Leedy, Murray State University
 Hongbin Li, Stevens Institute of Technology
 James Luster, Snow College
 Erik Luther, National Instruments
 Ian McCausland, University of Toronto
 Arthur C. Moeller, Marquette University
 Darryl Morrell, Arizona State University
 M. Paul Murray, Mississippi State University
 Burks Oakley II, University of Illinois at Champaign-Urbana
 John O'Malley, University of Florida
 Arnost Neugroschel, University of Florida
 William R. Parkhurst, Wichita State University
 Peyton Peebles, University of Florida
 Jian Peng, Southeast Missouri State University
 Clifford Pollock, Cornell University
 George Prans, Manhattan College

Mark Rabalais, Louisiana State University
 Tom Robbins, National Instruments
 Armando Rodriguez, Arizona State University
 James Rowland, University of Kansas
 Robert N. Sackett, Normandale Community College
 Richard Sanford, Clarkson University
 Peddapullaiiah Sannuti, Rutgers University
 Ronald Schulz, Cleveland State University
 M. E. Shafeei, Penn State University at Harrisburg
 Martha Sloan, Michigan Technological University
 Scott F. Smith, Boise State University
 Karen M. St. Germaine, University of Nebraska
 Janusz Strazyk, Ohio University
 Gene Stuffle, Idaho State University
 Thomas M. Sullivan, Carnegie Mellon University
 Saad Tabet, Florida State University

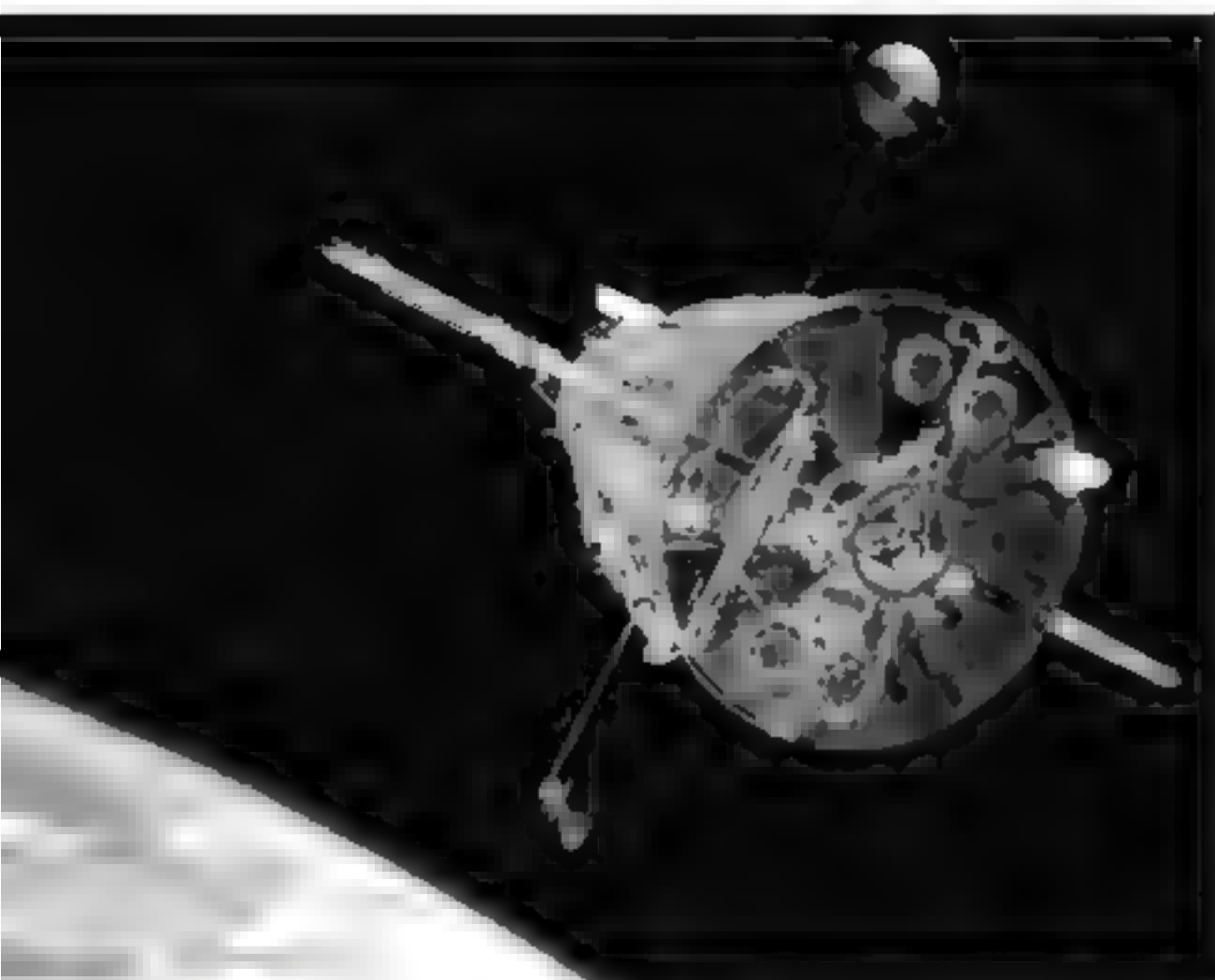
Val Tareski, North Dakota State University
 Thomas Thomas, University of South Alabama
 Leonard J. Tung, Florida A&M University/Florida State
 University
 Marian Tzolov, Lock Haven University
 Darrell Vines, Texas Tech University
 Carl Wells, Washington State University
 Seth Wolpert, University of Maine

Finalmente, Dave Irwin deseja expressar seu profundo reconhecimento à sua esposa, Edie, que deu um grande apoio ao nosso esforço para a realização desta obra. Mark Nelms gostaria de agradecer a seus pais, Robert e Elizabeth, por seu apoio e estímulo.

J. David Irwin e R. Mark Nelms

ANÁLISE BÁSICA DE CIRCUITOS PARA ENGENHARIA

CONCEITOS BÁSICOS



Cortesia NASA, 2009

AS METAS DE APRENDIZAGEM DESTE CAPÍTULO SÃO:

- Rever o Sistema Internacional de Unidades (SI) e os prefixos padronizados
- Conhecer as definições das grandezas elétricas básicas: tensão, corrente e potência
- Conhecer os símbolos e as definições das fontes dependentes e independentes
- Ser capaz de calcular a potência absorvida por um componente de circuito utilizando a convenção passiva de sinais

Telescópio Espacial Hubble Se pedissem para você identificar as maiores realizações da engenharia envolvendo correntes, tensões e potência em sistemas elétricos, o Telescópio Espacial Hubble da NASA faria parte da lista? Naturalmente que sim. Lançado há mais de vinte anos em uma órbita a 375 milhas acima da superfície da Terra, o Telescópio Hubble evita a distorção dos efeitos da atmosfera e fornece novos dados importantes sobre o universo. Ele possui múltiplos canais com diversos sistemas elétricos complexos que detectam diferentes comprimentos de onda da luz e permite a análise do sistema solar e de galáxias remotas. O sucesso do programa do Telescópio Espacial Hubble tem levado a outros planos da NASA. Em fevereiro de 2010, o Observatório Solar Dinâmico foi lançado com o objetivo de

estudar os fenômenos solares dinâmicos, como as med das de alta resolução das chamas solares; é a primeira missão do programa da NASA Vivendo com uma Estrela (LWS – *Living With a Star*).

Embora o Telescópio Espacial Hubble seja extremamente complexo, sua potência tem origem nos conceitos básicos que você começará a estudar neste capítulo – carga, corrente, tensão, potência e baterias. Esses princípios básicos representam os blocos do alicerce de seu entendimento da engenharia elétrica e de sua habilidade em analisar e projetar sistemas elétricos mais complexos. Da mesma forma que o Hubble tem levado a inovações cada vez maiores, não se pode imaginar, atualmente, o que mais está por vir.

1.1 Sistemas de Unidades

O sistema de unidades empregado neste livro é o Sistema Internacional de Unidades (*Système International des Unités*), normalmente referido como sistema padrão SI. Esse sistema, composto das unidades básicas metro (m), quilograma (kg), segundo (s), ampère (A), kelvin (K) e candela (cd), é definido em todos os textos de física moderna e, portanto, sua definição não será novamente aqui repetida. Entretanto, as unidades serão discutidas mais detalhadamente quando aparecerem nas análises subsequentes.

Figura 1.1 Prefixos padronizados pelo Sistema Internacional de Unidades – SI.



1.2 Grandezas Básicas

Antes de iniciar a análise dos circuitos elétricos, os termos que aqui serão empregados devem ser definidos. Entretanto, neste capítulo e ao longo do texto, as definições e as explicações serão o mais simples possível de modo a propiciar a compreensão do uso do material aqui abordado. Não será feita qualquer tentativa no sentido de se fornecerem as definições completas de muitas das grandezas, uma vez que essas definições não são apenas desnecessárias no nível de estudo aqui tratado, mas também, em muitos casos, bastante complexas. Embora muitos leitores possam ter um conceito intuitivo do que pode ser entendido como um circuito, neste texto trata-se apenas dos *circuitos elétricos*, que podem ser entendidos como uma interconexão de componentes elétricos, cada um dos quais será descrito por meio de um modelo matemático.

A grandeza mais elementar na análise de um circuito elétrico é a *carga elétrica*. O interesse no comportamento da carga elétrica está centrado no estudo de seu movimento, uma vez que a carga em movimento resulta em uma transferência de energia. As situações que nos interessam mais são aquelas em que o movimento é confinado a uma trajetória fechada definida.

Um circuito elétrico é, em sua essência, um “canal” que facilita a transferência de carga de um ponto para outro. A taxa de variação da carga com o tempo é denominada *corrente elétrica*. Matematicamente, essa relação pode ser expressa por

$$i(t) = \frac{dq(t)}{dt} \quad \text{ou} \quad q(t) = \int_{-\infty}^t i(x) dx \quad 1.1$$

em que i e q representam a corrente e a carga, respectivamente (as letras minúsculas representam dependência com o tempo, e as letras maiúsculas são reservadas para grandezas constantes). A unidade básica de corrente é o ampère (A), e 1 ampère é igual a 1 coulomb por segundo.

Embora se saiba que o fluxo de corrente em condutores metálicos resulta do movimento de elétrons, a convenção uni-

Os prefixos padronizados empregados no SI são mostrados na Fig. 1.1. Observe as relações decimais entre eles. Esses prefixos padronizados são empregados ao longo dos estudos de circuitos elétricos abordados neste livro.

A tecnologia dos circuitos tem sofrido mudanças drásticas ao longo dos anos. Por exemplo, no início da década de 1960, o espaço sobre uma placa de circuito ocupado pela base de um simples tubo a vácuo possuía a dimensão aproximada de uma moeda de 25 centavos. Atualmente, esse mesmo espaço pode ser ocupado por um chip com o circuito integrado de um Pentium da Intel contendo 50 milhões de transistores. Esses chips são os propulsores de um grande número de equipamentos eletrônicos.

versalmente adotada para o fluxo de corrente representa o movimento das cargas positivas. É importante que o leitor pense no fluxo de corrente como o movimento de cargas positivas, independentemente do fenômeno físico que esteja ocorrendo. O simbolismo que será utilizado para representar o fluxo de corrente é o mostrado na Fig. 1.2. A corrente $I_1 = 2$ A mostrada na Fig. 1.2a indica que, em qualquer ponto do condutor mostrado, uma carga de 2 C passará da esquerda para a direita a cada segundo. A corrente $I_2 = -3$ A mostrada na Fig. 1.2b indica que, em qualquer ponto do condutor, uma carga de 3 C passará da direita para a esquerda a cada segundo. Portanto, é importante especificar não apenas a intensidade da variável representativa da corrente, mas também seu sentido.

Existem dois tipos de correntes que podem ser encontradas com frequência no cotidiano: a corrente alternada (CA) e a corrente contínua (CC), cujos comportamentos em função do tempo são mostrados na Fig. 1.3. A *corrente alternada* é a corrente comumente encontrada em todas as residências e é utilizada no acionamento de refrigeradores, fogões elétricos, máquinas de lavar e outros aparelhos domésticos. As baterias, utilizadas em automóveis ou lanternas, são um dos tipos de fonte de *corren-*

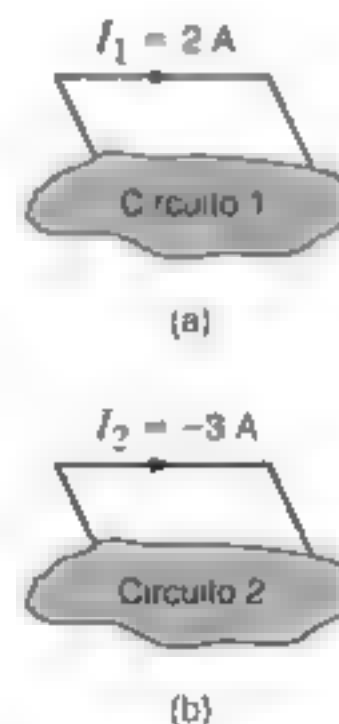


Figura 1.2 Convenção para o fluxo de corrente: (a) fluxo de corrente positivo; (b) fluxo de corrente negativo.

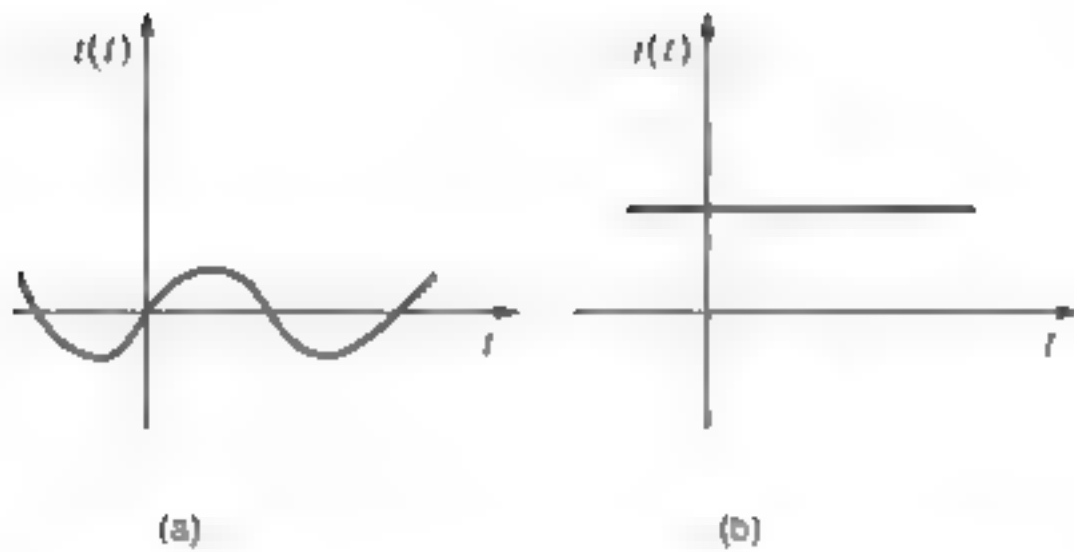


Figura 1.3 Dois tipos comuns de corrente: (a) corrente alternada (CA) e (b) corrente contínua (CC).

te contínua. Além desses dois tipos de corrente, que possuem os mais variados empregos, muitos outros podem ser gerados. Mais adiante, neste livro, serão examinados alguns desses outros tipos. No entanto, é interessante notar que as intensidades das correntes que alimentam os aparelhos e componentes conhecidos podem sofrer grandes variações, conforme mostrado na Fig. 1.4.

Foi mencionado anteriormente que as cargas em movimento propiciam uma transferência de energia. Define-se agora a *tensão* (também chamada de *força eletromotriz* ou *potencial*) entre dois pontos de um circuito como a diferença no nível da energia de uma carga unitária localizada em cada um desses pontos. A tensão é muito semelhante à força gravitacional. Imagine uma bola de boliche que caia de uma escada posicionada no interior de um reservatório de água. Tão logo a bola é liberada, a força da gravidade a puxa em direção ao fundo do reservatório. A energia potencial da bola de boliche diminui quando ela se aproxima do fundo. A força gravitacional empurra a bola pela água. Pense na bola de boliche como a carga e a tensão como a força que empurra a carga ao longo de um circuito. As cargas em movimento representam uma corrente; logo, o movimento da bola de boliche poderia ser imaginado como uma corrente. A água no reservatório resistirá ao movimento da bola. O movimento das cargas em um circuito elétrico também será impedido ou resistido. O conceito de resistência será introduzido no Capítulo 2 para descrever esse efeito.

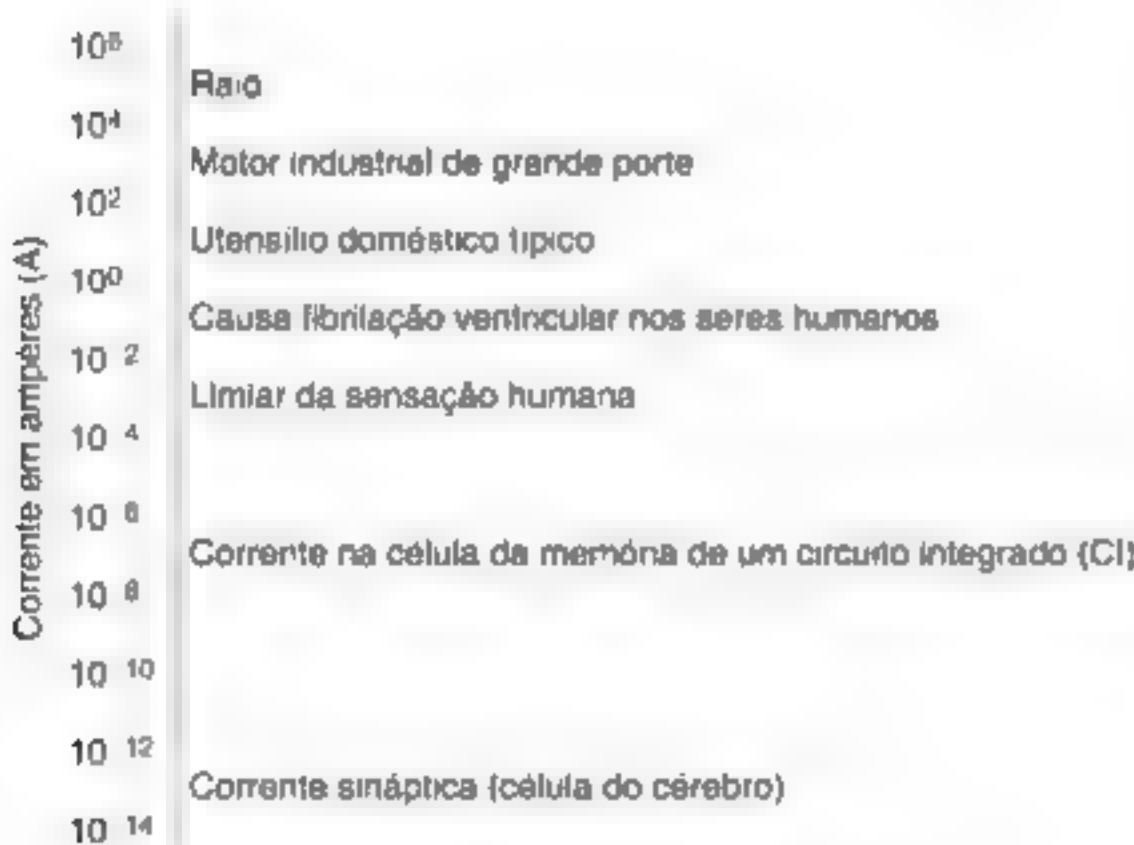


Figura 1.4 Valores típicos de algumas correntes.

O trabalho, ou a energia, $w(t)$ ou W , é medido em joules (J); 1 joule é igual a 1 newton metro (N·m). Logo, a tensão [$v(t)$ ou V] é medida em volts (V) e 1 volt é igual a 1 joule por coulomb, isto é, 1 volt = 1 joule por coulomb = 1 newton metro por coulomb. Se uma carga unitária positiva é movimentada entre dois pontos, a energia necessária para movê-la é igual à diferença no nível de energia entre os dois pontos e é definida como tensão. É extremamente importante que as variáveis utilizadas para representar a tensão entre dois pontos sejam definidas de forma que o resultado permita que se conclua qual ponto está com maior potencial em relação ao outro.

Na Fig. 1.5a, a variável que representa a tensão entre os pontos A e B foi definida como V_1 , e admite-se que o ponto A esteja com um potencial maior que o ponto B, conforme indicado pelos sinais + e - associados à variável e definidos na figura. Os sinais + e - definem um sentido de referência para V_1 . Se $V_1 = 2$ V, então a diferença no potencial entre os pontos A e B será de 2 V e o ponto A possui o maior potencial. Se uma carga unitária positiva for movimentada a partir do ponto A, passando pelo circuito até o ponto B, ela fornecerá energia ao circuito e terá 2 J a menos de energia quando atingir o ponto B. Se uma carga unitária positiva for movimentada do ponto B para o ponto A, uma energia extra deverá ser adicionada à carga pelo circuito e, assim, a carga ficará com 2 J a mais de energia no ponto A em relação ao que ela possuía quando estava no ponto B.

Para o circuito mostrado na Fig. 1.5b, $V_2 = -5$ V significa que o potencial entre os pontos A e B é igual a 5 V e que o ponto B possui o maior potencial. A tensão indicada na Fig. 1.5b pode ser expressa conforme mostrado na Fig. 1.5c. Nesse caso equivalente, a diferença no potencial entre os pontos A e B é $V_2 = 5$ V, e o ponto B possui o maior potencial.

Note que é importante definir uma variável com um sentido de referência, de modo que a resposta possa ser interpretada, fornecendo as condições físicas ocorrentes no circuito. Será visto posteriormente que em muitos casos não é possível definir a variável de forma que a resposta seja positiva e será também mostrado que não é necessário que assim seja.

Conforme demonstrado pelas Figs. 1.5b e c, um valor negativo para uma variável, por exemplo, V_2 na Fig. 1.5b, fornece exatamente a mesma informação que um valor positivo, como V_2 na Fig. 1.5c, porém com sentido de referência oposto. Assim, ao se definir uma corrente ou uma tensão, é absolutamente necessário especificar tanto sua intensidade quanto seu sentido. Portanto, não é suficiente afirmar que a tensão entre dois pontos é igual a 10 V ou que a corrente em um condutor é de 2 A, uma vez que apenas as intensidades foram definidas para as variáveis, faltando a definição de seus sentidos.

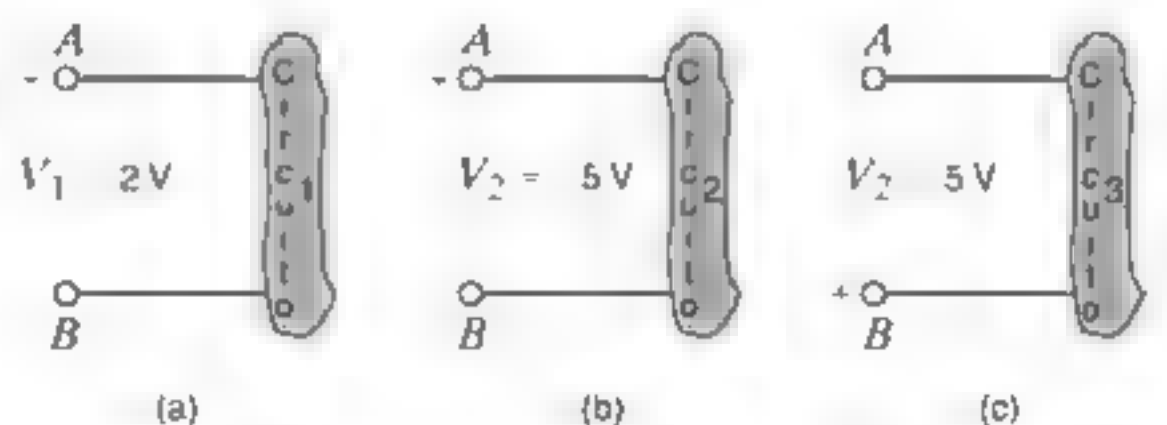


Figura 1.5 Representações da tensão.

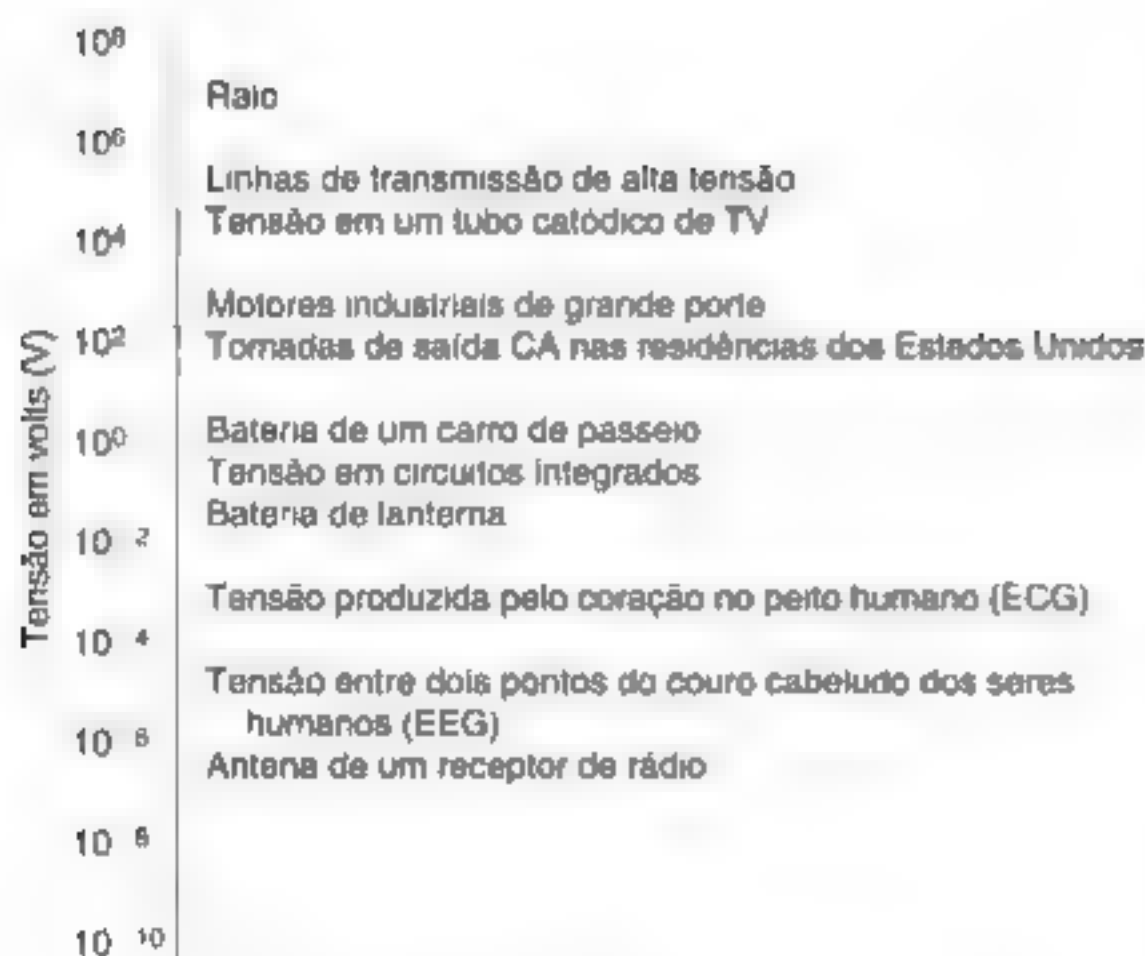


Figura 1.6 Valores típicos de algumas tensões.

A faixa de valores de tensão, equivalente àquela definida para as correntes na Fig. 1.4, é mostrada na Fig. 1.6. Uma vez mais, note que essa faixa abrange muitas ordens de grandeza.

Até agora, foram apresentadas as convenções empregadas nas discussões sobre corrente e tensão. A *energia* é também outra importante grandeza relacionada a um conceito básico. Considere a relação tensão-corrente associada à transferência de energia ocorrente no circuito que acende uma lanterna, conforme o esquema mostrado na Fig. 1.7. Os elementos básicos de uma lanterna são: uma bateria, uma chave liga-desliga, uma lâmpada e os condutores de conexão. Admitindo uma bateria em condições normais de utilização, sabe-se que a lâmpada acenderá quando a chave for fechada. Nessa situação, uma corrente fluirá no circuito fechado quando as cargas se moverem do terminal positivo da bateria, passando pela chave e pela lâmpada e retornando ao terminal negativo da bateria. A corrente aquecerá o filamento da lâmpada, causando sua incandescência e emitindo luz. A lâmpada converte energia elétrica em energia térmica; como resultado, as cargas que passam pela lâmpada perdem energia. Essas cargas recebem energia ao passarem pela bateria quando energia química é convertida em energia elétrica. Um processo de conversão de energia estará ocorrendo na lanterna quando a energia química na bateria é convertida em energia elétrica, a qual é então convertida em energia térmica na lâmpada.

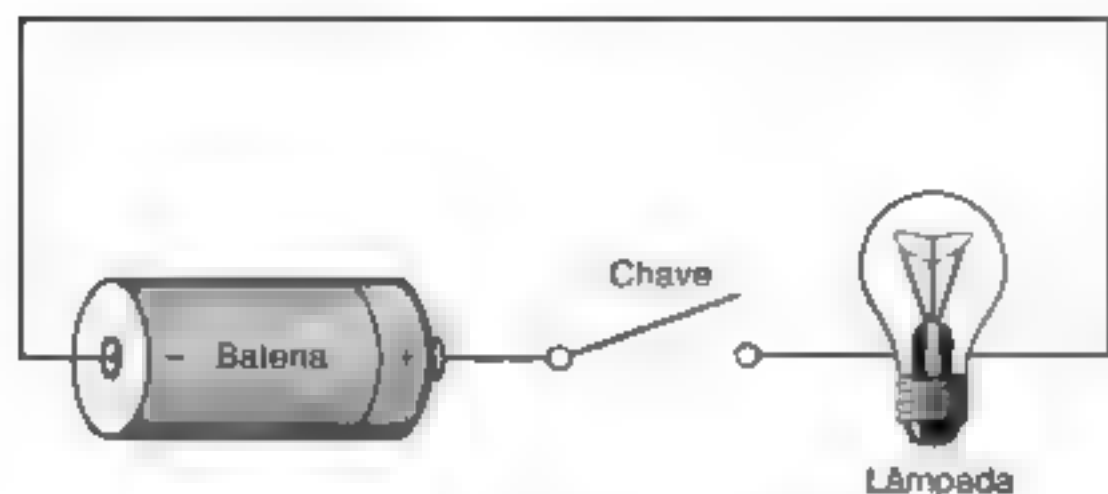


Figura 1.7 Circuito de uma lanterna elétrica.

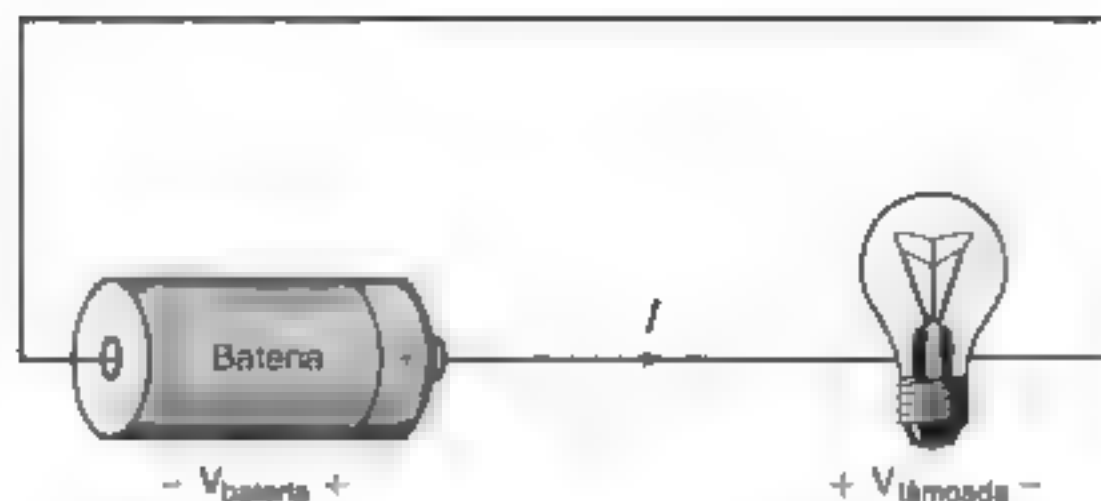


Figura 1.8 Circuito de uma lanterna com a indicação da corrente e das tensões.

Desenha-se agora o circuito da lanterna conforme mostrado na Fig. 1.8. Existe uma corrente I fluindo nesse circuito esquemático. Como se sabe que a lâmpada utiliza energia, as cargas que saem do bulbo possuem menos energia que aquelas que entram no bulbo. Em outras palavras, as cargas gastam energia ao se moverem no bulbo. Esse fato é constatado pela tensão indicada entre os terminais do filamento no bulbo. As cargas ganham energia quando passam pela bateria, o que é verificado pela indicação da tensão entre os terminais da bateria. Observe as relações tensão-corrente para a bateria e para a lâmpada. Sabe-se que a lâmpada absorve energia; a corrente está entrando no terminal indicado como positivo para a tensão. Na bateria, a corrente está deixando o terminal positivo, o que indica que a energia está sendo fornecida ao circuito.

Essa situação particular é agora ilustrada de forma genérica na Fig. 1.9, em que um componente de circuito foi isolado de um circuito maior para análise. Na Fig. 1.9a, a energia está sendo fornecida ao componente – seja ele qual for – que está ligado aos terminais. Note que a corrente é de 2 A, isto é, uma carga de 2 C está se movendo do ponto A para o ponto B passando pelo componente a cada segundo. Cada coulomb perde 3 J de energia ao passar pelo componente partindo do ponto A e chegando ao B. Portanto, o componente está absorvendo 6 J de energia por segundo. Observe que, quando o componente está *absorvendo* energia, uma corrente positiva entra no terminal positivo. Na Fig. 1.9b a energia está sendo fornecida *pelo* componente que está conectado aos terminais A-B, seja ele qual for. Nesse caso, note que, quando o componente está *fornecendo* energia, uma corrente positiva entra no terminal negativo e sai pelo terminal positivo. Nessa convenção, uma corrente negativa em um sentido é equivalente a uma corrente positiva no sentido oposto e vice-versa. Analogamente, uma tensão negativa em um sentido é equivalente a uma tensão positiva no sentido oposto.

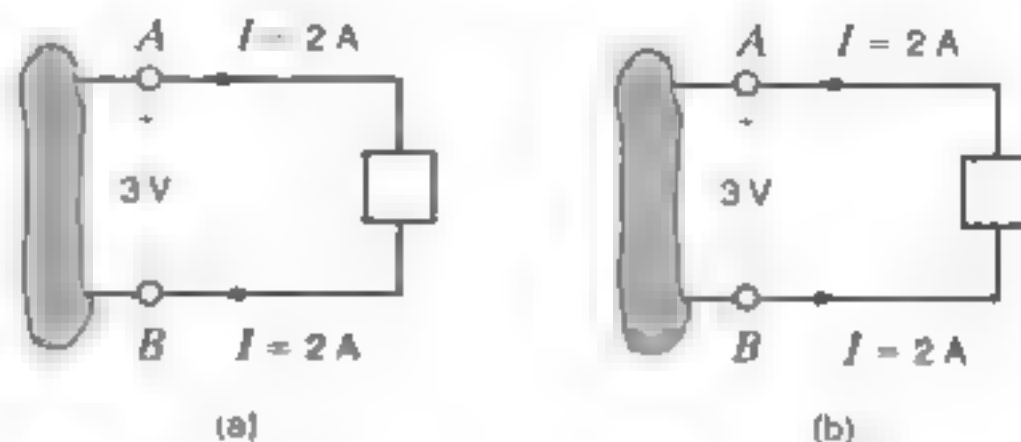


Figura 1.9 Relações tensão-corrente para (a) energia absorvida e (b) energia fornecida.

EXEMPLO 1.1

Suponha que você não esteja conseguindo dar a partida no motor de seu carro. Para determinar se a bateria está com problemas, você acende os faróis e verifica que as luzes estão muito fracas, indicando uma bateria fraca. Você pede emprestado o carro de um amigo e um conjunto de cabos. No entanto, como você conecta a bateria do carro de seu amigo à sua? Que resultado você espera dessa ligação?

SOLUÇÃO

Basicamente, a bateria do carro de seu amigo deve fornecer energia à sua e, portanto, ela deve ser conectada da forma mostrada na Fig. 1.10. Note que a corrente positiva deixa o terminal positivo da bateria boa (fornecendo energia) e entra no terminal positivo da bateria fraca (absorvendo energia). Observe também que as mesmas conexões são utilizadas para carregar uma bateria.

Nas aplicações práticas existem, em geral, outras considerações além das simples relações elétricas (por exemplo, questões de segurança). Esse é o caso da partida de veículos no “tranco”, isto é, engrenando-se a segunda marcha. As baterias utilizadas em veículos produzem gases explosivos que podem inflamar acidentalmente, causando sérios prejuízos à saúde. Seja prudente – siga os procedimentos descritos no manual de seu automóvel.



Figura 1.10 Diagrama esquemático para o Exemplo 1.1.

Definimos a tensão em joules por coulomb como a energia necessária para movimentar uma carga positiva de 1 C em um componente. Considerando-se uma quantidade infinitesimal de carga e de energia, pode-se escrever

$$v = \frac{dw}{dq} \quad 1.2$$

Multiplicando-se essa grandeza pela corrente no componente, tem-se

$$vi = \frac{dw}{dq} \left(\frac{dq}{dt} \right) = \frac{dw}{dt} = p \quad 1.3$$

que é a taxa de variação da energia com o tempo ou a potência medida em joules por segundo, ou watts (W). Como, em geral, tanto a tensão v quanto a corrente i são funções do tempo, a potência p será também uma grandeza que varia com o tempo. Portanto, a variação da energia desde o tempo t_1 até o tempo t_2 pode ser determinada pela integração da Eq. (1.3), ou seja,

$$\Delta w = \int_{t_1}^{t_2} p \, dt = \int_{t_1}^{t_2} vi \, dt \quad 1.4$$

[atenção]

A convenção passiva de sinais é utilizada para determinar se a potência está sendo absorvida ou fornecida.

Pode-se agora sintetizar a convenção de sinais para a potência. Para se determinar o sinal de qualquer uma das grandezas envolvidas, as variáveis corrente e tensão devem ser representadas conforme mostrado na Fig. 1.11. A variável tensão $v(t)$ é definida como a tensão entre os terminais do componente com a referência positiva no mesmo terminal em que a variável corrente $i(t)$ está entrando. Essa convenção é chamada de *convenção passiva de sinais* e será assim caracterizada ao longo deste livro. O produto de v por i , com seus respectivos sinais, determinará a intensidade e o sinal da potência. Se o sinal da potência for positivo, ela estará sendo absorvida pelo componente; caso o sinal seja negativo, a potência estará sendo fornecida pelo componente.

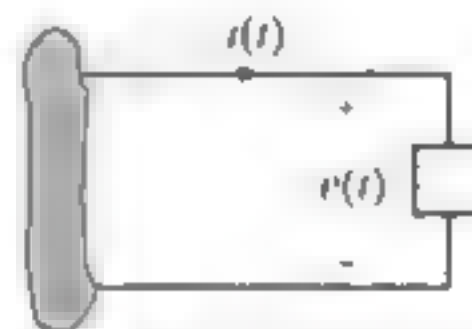


Figura 1.11 Convenção de sinais para potência.

EXEMPLO 1.2

Dados os dois diagramas mostrados na Fig. 1.12, determine se o componente está absorvendo ou fornecendo potência e quanto.

SOLUÇÃO

Na Fig. 1.12a a potência vale $P = (2 \text{ V})(-4 \text{ A}) = -8 \text{ W}$. Portanto, o componente está fornecendo potência. Na Fig. 1.12b, a potência vale $P = (2 \text{ V})(-2 \text{ A}) = -4 \text{ W}$. Portanto, o componente está fornecendo potência.

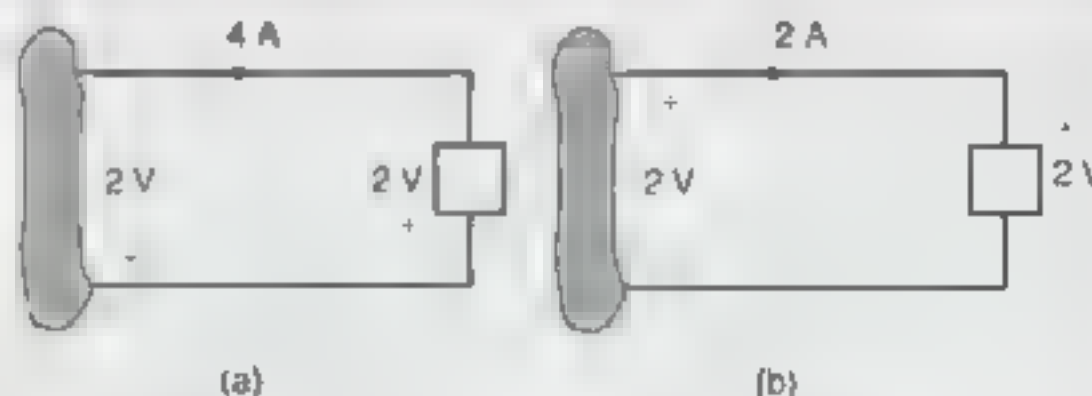


Figura 1.12 Componentes para o Exemplo 1.2.

Avaliação do Aprendizado

E1.1 Determine o valor da potência absorvida ou fornecida pelos componentes mostrados na Fig. E1.1

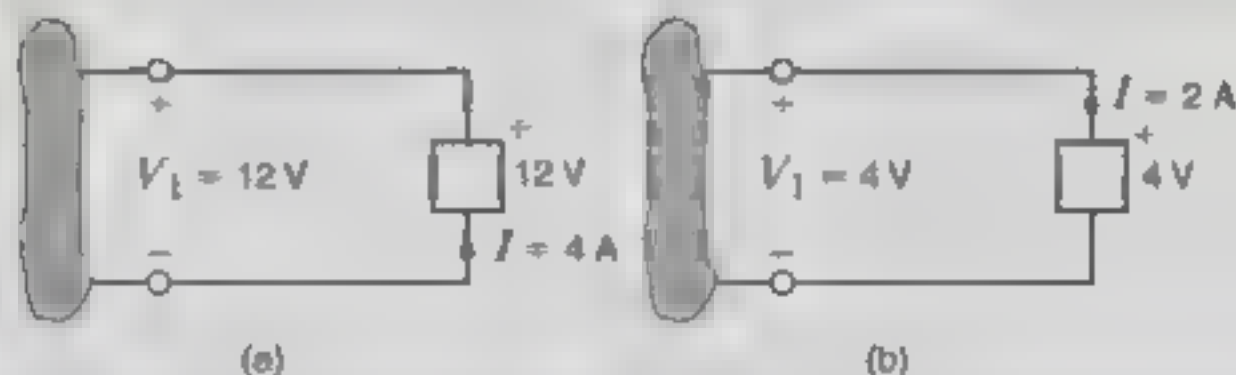


Figura E1.1

RESPOSTAS:

(a) $P = -48 \text{ W}$;

(b) $P = 8 \text{ W}$.

EXEMPLO 1.3

Deseja-se determinar a tensão e a corrente incógnitas indicadas na Fig. 1.13.

SOLUÇÃO

Na Fig. 1.13a, uma potência de -20 W indica que o componente está fornecendo potência. Portanto, a corrente entra no terminal negativo (terminal A) e, pela Eq. (1.3), a tensão vale 4 V . Assim, B é o terminal positivo, A é o terminal negativo e a tensão entre eles é de 4 V .

Na Fig. 1.13b, uma potência de $+40 \text{ W}$ indica que o componente está absorvendo potência e, portanto, a corrente deve

entrar no terminal positivo B. Portanto, a corrente possui um valor de -8 A , conforme mostrado na figura.

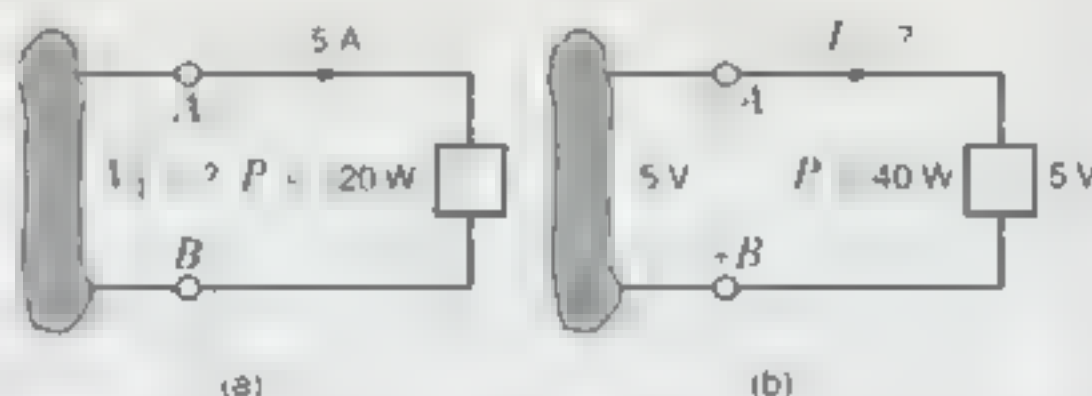


Figura 1.13 Componentes para o Exemplo 1.3.

Avaliação do Aprendizado

E1.2 Determine as variáveis incógnitas indicadas na Fig. E1.2.

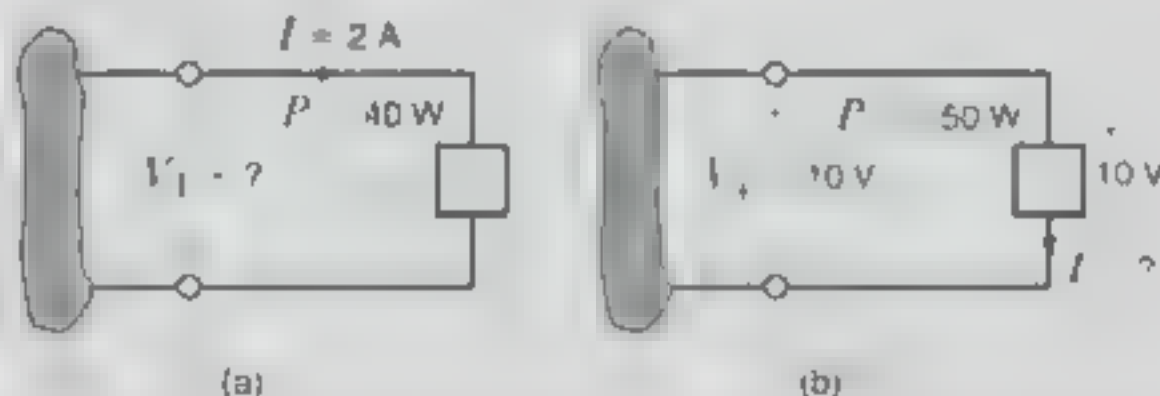


Figura E1.2

RESPOSTAS:

(a) $V = -20 \text{ V}$,

(b) $I = -5 \text{ A}$.

Finalmente, é importante notar que essas redes elétricas atendem ao princípio da conservação de energia. Considerando a relação existente entre energia e potência, pode-se concluir que a potência também é conservada em um circuito elétrico. Esse resultado foi formalmente estabelecido em 1952 por B. D. H. Tellegen, e é conhecido como teorema de Tellegen – a soma das potências absorvidas por todos os componentes de um circuito elétrico é nula. Outra forma de enunciar esse teorema é que a potência fornecida em um circuito é exatamente igual à potência absorvida. A verificação de que o teorema de Tellegen é atendido em um circuito particular é uma das formas de se assegurar a correção dos cálculos ao se analisarem os circuitos elétricos.

1.3 Componentes de um Circuito

Até agora foram apresentados os conceitos de tensão, corrente e potência. No restante deste capítulo serão definidas as fontes de tensão e de corrente, tanto independentes quanto dependentes. Embora seja admitido que os componentes são ideais, tentar-se-á indicar as implicações dessa hipótese ao longo das discussões.

Em geral, os componentes que serão definidos são dispositivos completamente caracterizados pela corrente que por eles passam e/ou pela tensão entre seus terminais. Esses componentes, que serão empregados na construção de circuitos elétricos,

serão classificados, de forma ampla, como ativos ou passivos. A distinção entre essas duas classes depende essencialmente de um único aspecto — se os componentes fornecem ou absorvem energia. Como os próprios nomes sugerem, um componente *ativo* é capaz de gerar energia e um componente *passivo* não pode gerar energia.

Entretanto, será mostrado posteriormente que alguns componentes passivos são capazes de armazenar energia. Componentes típicos ativos são as baterias e os geradores. Os três componentes passivos mais comuns são os resistores, os capacitores e os indutores.

No Capítulo 2 faz-se uma análise dos componentes passivos, discutindo-se o resistor em detalhe. Entretanto, antes de proceder-se a essa análise, apresentam-se alguns componentes ativos muito importantes.

1. Fonte de tensão independente.
2. Fonte de corrente independente.
3. Duas fontes de tensão dependentes.
4. Duas fontes de corrente dependentes.

FONTES INDEPENDENTES Uma *fonte de tensão independente* é um componente com dois terminais que mantém uma tensão específica entre seus terminais *independentemente da corrente que passa por ele*, conforme mostrado no gráfico $v-i$ da Fig. 1.14a. O símbolo genérico de uma fonte independente, um círculo, é também mostrado na Fig. 1.14a. Conforme indicado na figura, o terminal A apresenta um potencial de $v(t)$ volts positivo em relação ao terminal B .

A *fonte de corrente independente*, ao contrário da fonte de tensão independente, é um componente com dois terminais que mantém uma corrente específica *independentemente da tensão entre seus terminais*, conforme ilustrado no gráfico $v-i$ da Fig. 1.14b. O símbolo genérico de uma fonte de corrente independente é também mostrado na Fig. 1.14b, em que $i(t)$ é a corrente especificada e a seta indica o sentido positivo do fluxo da corrente.

Em seu modo normal de operação, as fontes independentes fornecem potência ao restante do circuito. Entretanto, elas também podem ser conectadas em um circuito de forma a absorverem potência. Um exemplo dessa situação é o caso do circuito de um carregador de baterias como o mostrado no Exemplo 1.1.

É importante que seja feito um breve comentário a respeito das limitações dos modelos. Em geral, os modelos matemáticos aproximam os sistemas físicos reais apenas para certas condições específicas. Raramente um modelo representa exatamente um sistema físico sujeito a todas as condições de operação. Para ilustrar essa situação, considere o modelo da fonte de tensão mostrada na Fig. 1.14a. Admite-se que a fonte de tensão forneça v volts independentemente do que está conectado a seus terminais. Teoricamente, poder-se-ia ajustar o circuito externo de modo que uma corrente infinita pudesse fluir e, portanto, a fonte de tensão fornecesse uma potência também infinita. Essa condição é, certamente, impossível do ponto de vista físico. Um argumento similar poderia ser utilizado para uma fonte de corrente independente. Assim, o leitor deve ser cauteloso, lembrando-se de que os modelos possuem limitações e, portanto, são representações válidas de sistemas físicos sujeitos apenas a certas condições de operação.

Por exemplo, poderia a fonte de tensão independente ser utilizada para modelar a bateria em um automóvel sujeito a todas as condições de operação? Com os faróis acesos, ligue o rádio do veículo. A luminosidade dos faróis diminui com o rádio ligado? Provavelmente não haverá alteração se o sistema de som de seu automóvel foi instalado de fábrica. Ao tentar dar a partida em seu carro com os faróis acesos, você notará que a intensidade das luzes diminui. O motor de partida de seu carro consome uma corrente considerável, causando, assim, uma queda da tensão entre os terminais da bateria e, conseqüentemente, a intensidade das luzes dos faróis diminui. A fonte de tensão independente é um bom modelo para a bateria na condição do rádio ligado; todavia, seria necessário um modelo mais aprimorado para prever seu desempenho nas condições de arranque do motor.

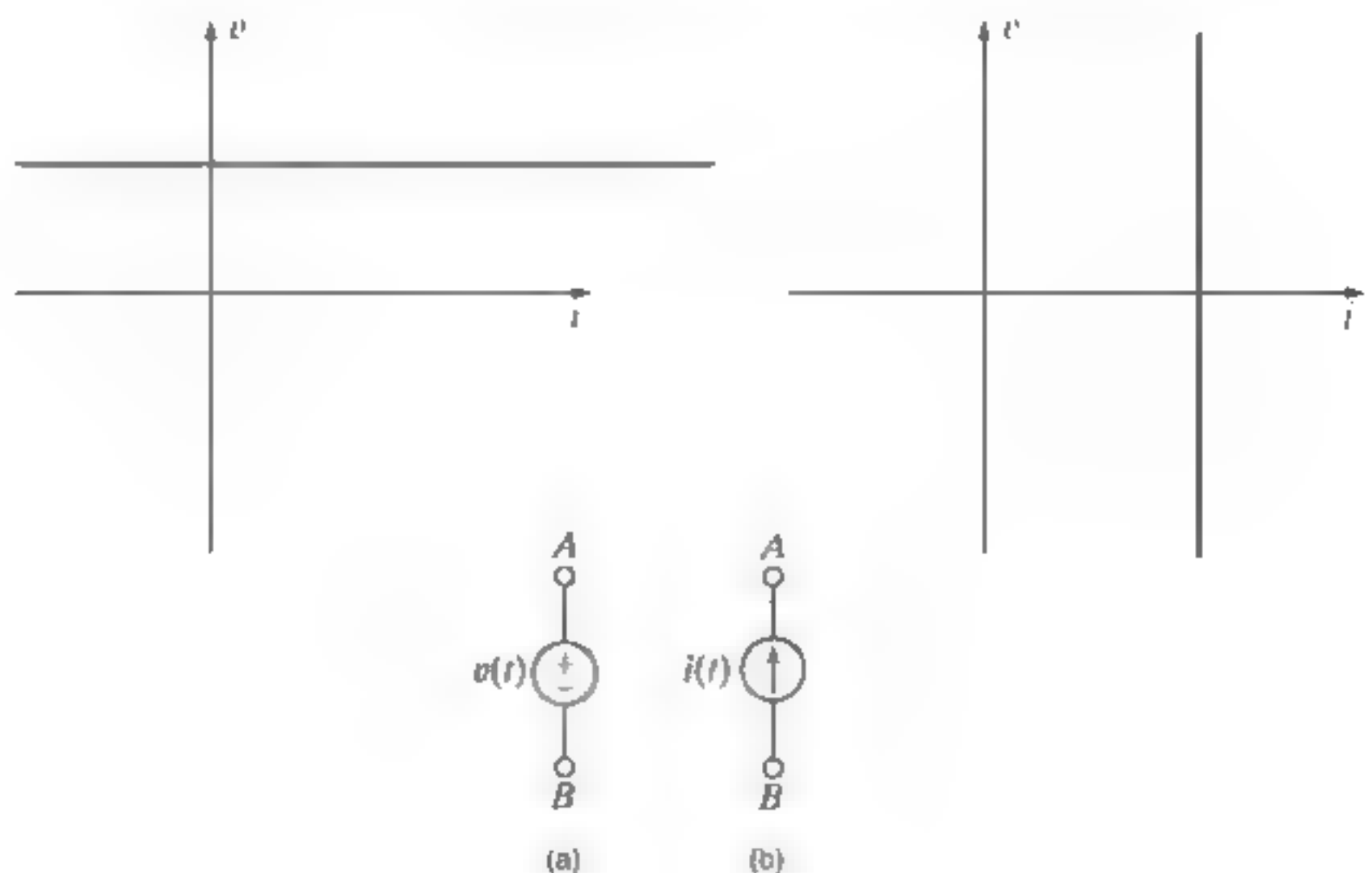


Figura 1.14 Símbolos de uma (a) fonte de tensão independente e (b) fonte de corrente independente.

EXEMPLO 1.4

Determine a potência absorvida ou fornecida pelos componentes presentes no circuito mostrado na Fig. 1.15.

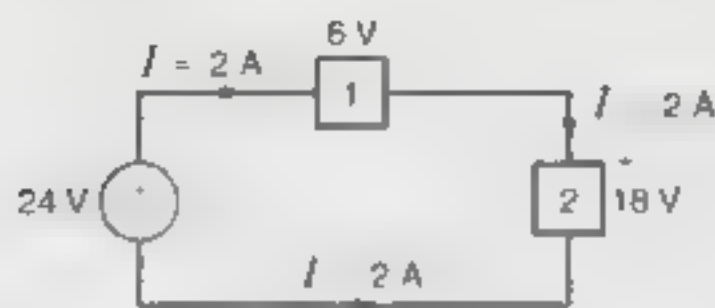


Figura 1.15 Circuito para o Exemplo 1.4.

SOLUÇÃO

O fluxo de corrente está saindo do terminal positivo da fonte de 24 V e, portanto, esse componente está fornecendo uma potência de $(2)(24) = 48$ W. A corrente está entrando nos terminais positivos dos componentes 1 e 2 e, dessa forma, esses componentes estão absorvendo potências cujos valores são $(2)(6) = 12$ W e $(2)(18) = 36$ W, respectivamente. Note que a potência fornecida é igual à potência absorvida.

[atenção]

Os componentes conectados em série estão sujeitos a uma mesma corrente.

Avaliação do Aprendizado

E1.3 Determine as potências absorvidas ou fornecidas pelos componentes mostrados na Fig. E1.3

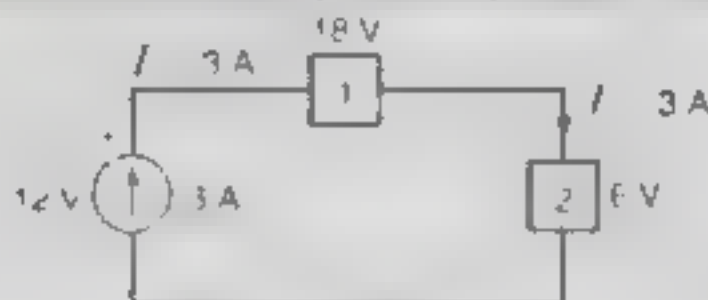


Figura E1.3

RESPOSTAS: A fonte de corrente fornece 36 W, o componente 1 absorve 54 W e o componente 2 fornece 18 W.

FONTES DEPENDENTES Ao contrário das fontes independentes, que produzem uma tensão ou uma corrente determinada que não é afetada pelo que ocorre no restante do circuito, as fontes dependentes geram uma tensão ou uma corrente que é determinada pela tensão ou pela corrente em um local específico do circuito. Essas fontes são muito importantes porque fazem parte integral dos modelos matemáticos utilizados para descrever o comportamento de muitos componentes de circuitos eletrônicos.

Por exemplo, o transistor de efeito de campo fabricado com semicondutor metal-óxido (MOSFET – *metal-oxide-semiconductor field-effect transistors*) e os transistores bipolares, ambos comumente encontrados nos equipamentos eletrônicos, são modelados por meio de fontes dependentes e, portanto, a

análise de seus circuitos eletrônicos envolve o uso desses componentes controlados.

Diferentemente do círculo utilizado para representar as fontes independentes, um losango é utilizado para representar uma fonte dependente ou controlada. A Fig. 1.16 ilustra os quatro tipos de fontes dependentes. Os terminais de entrada à esquerda representam a tensão ou a corrente que controla a fonte dependente, e os terminais de saída à direita representam a corrente ou a tensão de saída da fonte controlada. Observe que nas Figs. 1.16a e d as quantidades μ e β são constantes adimensionais, uma vez que transformam tensão em tensão e corrente em corrente. Esse não é o caso das Figs. 1.16b e c; assim, quando esses componentes são utilizados deve-se, logo em seguida, descrever as unidades dos fatores r e g .

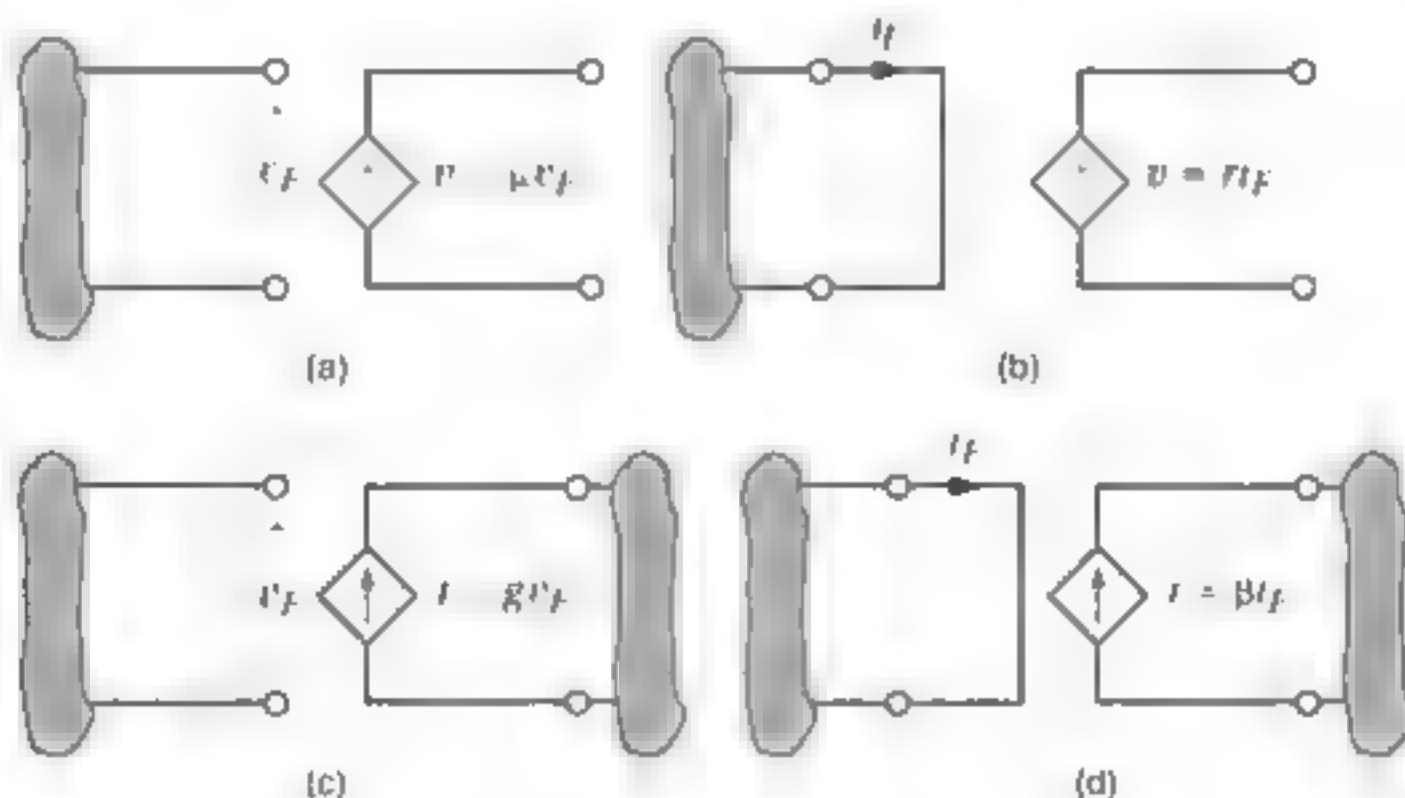


Figura 1.16 Quatro tipos diferentes de fontes dependentes.

EXEMPLO 1.7

Utilize o teorema de Tellegen para determinar a corrente I_x indicada no circuito mostrado na Fig. 1.19.

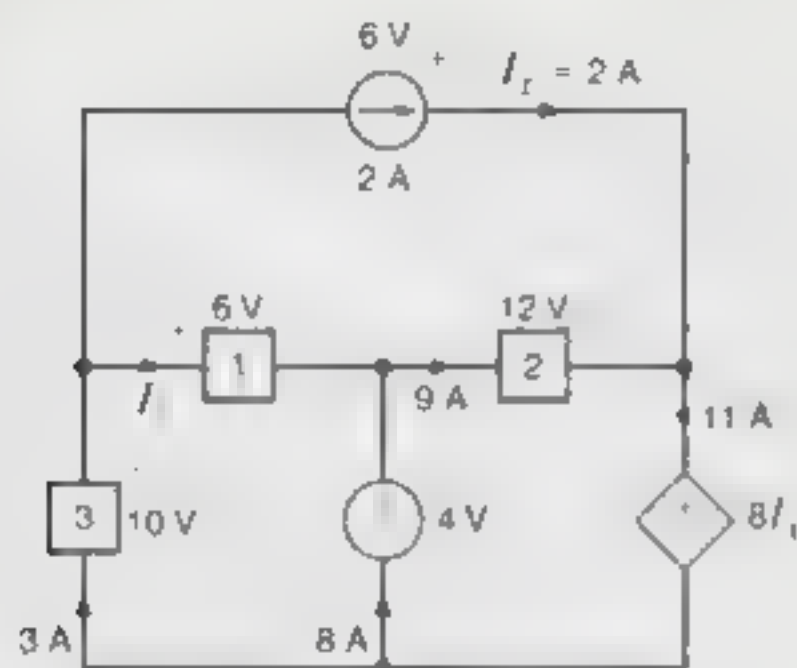


Figura 1.19 Circuito utilizado no Exemplo 1.7.

SOLUÇÃO

Inicialmente, deve-se determinar a potência absorvida por componente do circuito. Utilizando a convenção de sinais para potência, obtém-se

$$P_{2A} = (6)(-2) = -12 \text{ W}$$

$$P_1 = (6)(I_x) = 6I_x \text{ W}$$

$$P_2 = (12)(-9) = -108 \text{ W}$$

$$P_3 = (10)(3) = 30 \text{ W}$$

$$P_{4V} = (4)(-8) = -32 \text{ W}$$

$$P_{8I_x} = (8I_x)(11) = (16)(11) = 176 \text{ W}$$

A aplicação do teorema de Tellegen fornece

$$-12 + 6I_x - 108 - 30 - 32 + 176 = 0$$

ou

$$6I_x + 176 = 12 + 108 + 30 + 32$$

Portanto,

$$I_x = 1 \text{ A}$$

Avaliação do Aprendizado

E1.5 Obtenha a potência absorvida ou fornecida pelos componentes de circuito mostrados na rede ilustrada na Fig. E1.5.

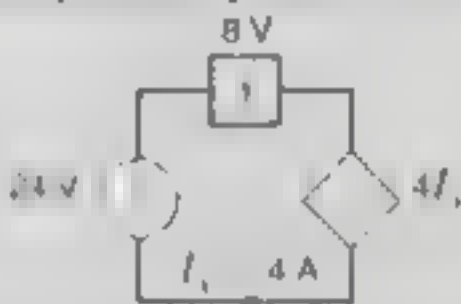


Figura E1.5

RESPOSTAS:

$$P_{24V} = 96 \text{ W fornecida,}$$

$$P_1 = 32 \text{ W absorvida e}$$

$$P_{4I_x} = 64 \text{ W absorvida.}$$

E1.6 Obtenha a potência absorvida ou fornecida pelos componentes de circuito mostrados na rede ilustrada na Fig. E1.6.

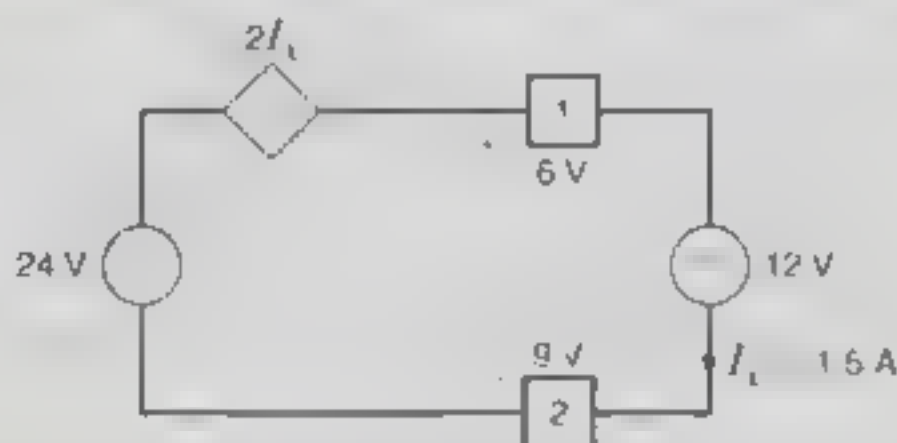


Figura E1.6

RESPOSTAS:

$$P_{24V} = 36 \text{ W fornecida,}$$

$$P_{12V} = 18 \text{ W absorvida,}$$

$$P_{2I_x} = 4,5 \text{ W fornecida,}$$

$$P_9 = 9 \text{ W absorvida e}$$

$$P_2 = 13,5 \text{ W absorvida.}$$

E1.7 Determine a corrente I_x do circuito mostrado na Fig. E1.7 utilizando o teorema de Tellegen.

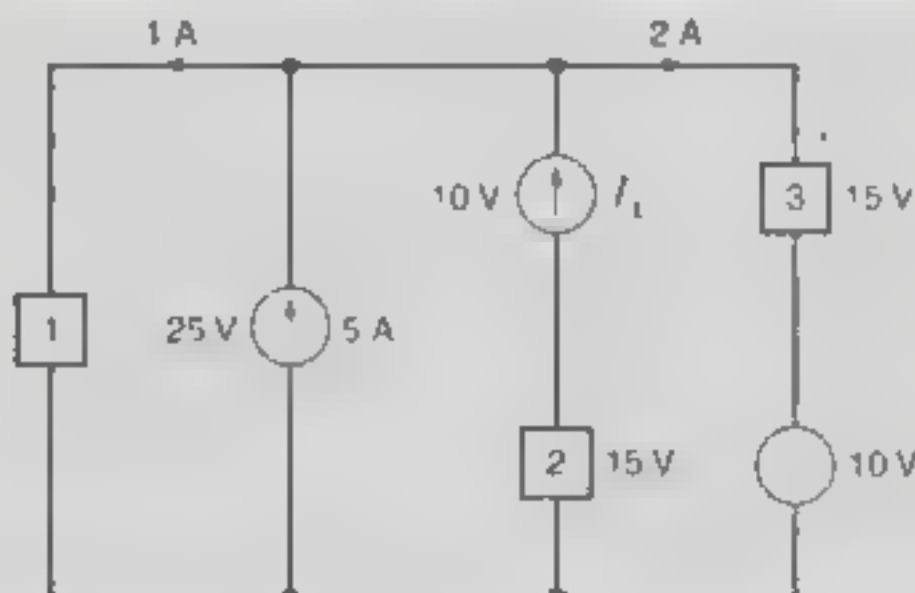


Figura E1.7

RESPOSTA:

$$I_x = -2 \text{ A.}$$

EXEMPLO 1.8

O comportamento da carga que entra na CAIXA é mostrado na Fig. 1.20. Calcule e represente esquematicamente a corrente que entra na CAIXA e a potência absorvida pela CAIXA entre 0 e 10 milissegundos

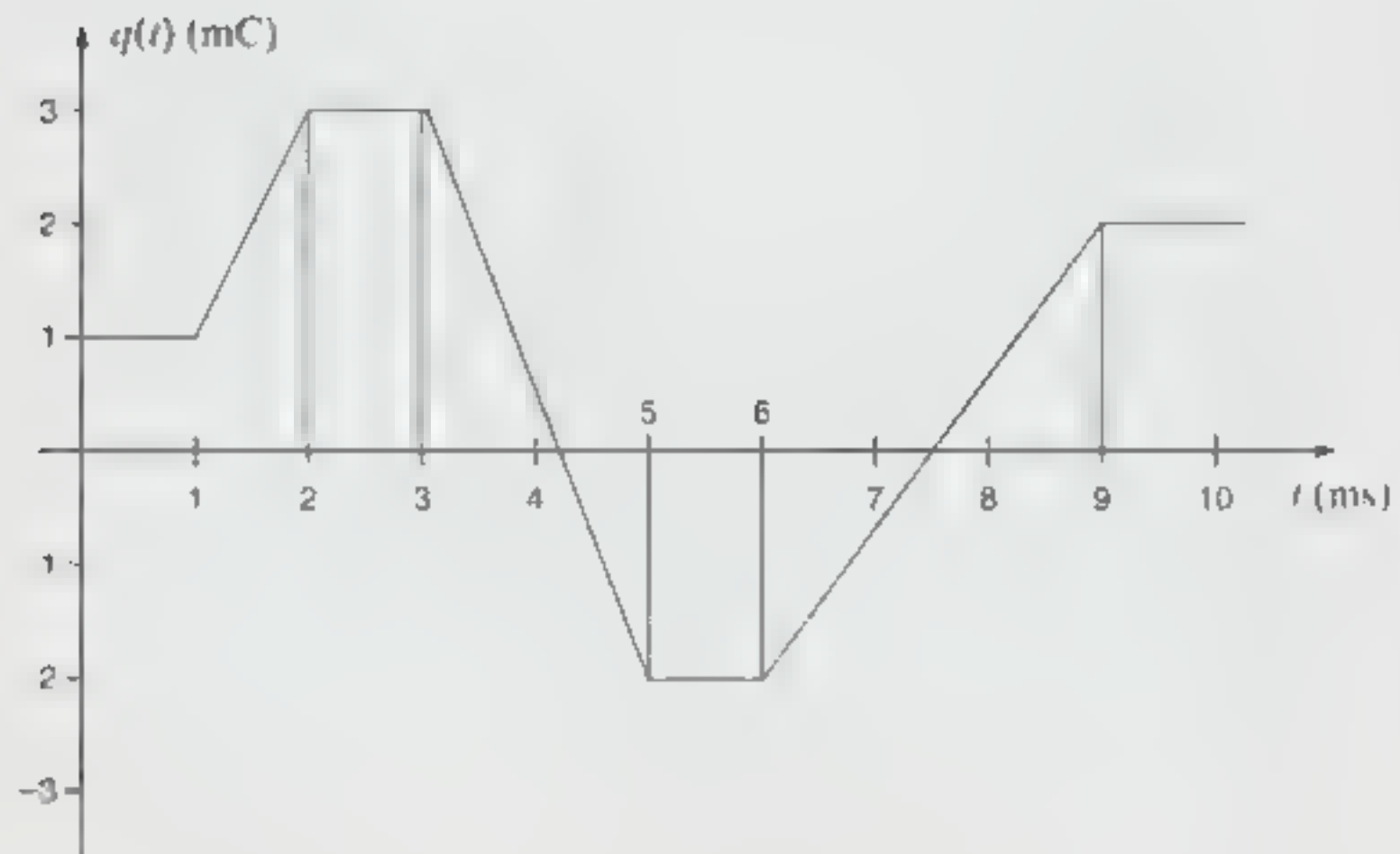
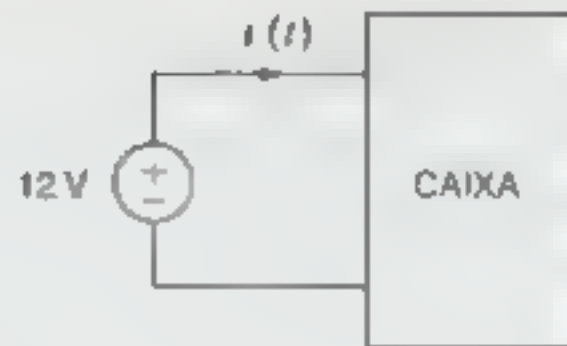


Figura 1.20 Diagramas esquemáticos para o Exemplo 1.8.

SOLUÇÃO

Lembre-se de que a corrente está relacionada à carga por $i(t) = \frac{dq(t)}{dt}$. A corrente é igual à inclinação da curva representativa da carga. Assim,

$$i(t) = 0 \quad 0 \leq t < 1 \text{ ms}$$

$$i(t) = \frac{3 \times 10^{-3} - 1 \times 10^{-3}}{2 \times 10^{-3} - 1 \times 10^{-3}} = 2 \text{ A} \quad 1 \leq t < 2 \text{ ms}$$

$$i(t) = 0 \quad 2 \leq t < 3 \text{ ms}$$

$$i(t) = \frac{-2 \times 10^{-3} - 3 \times 10^{-3}}{5 \times 10^{-3} - 3 \times 10^{-3}} = -2,5 \text{ A} \quad 3 \leq t < 5 \text{ ms}$$

$$i(t) = 0 \quad 5 \leq t < 6 \text{ ms}$$

$$i(t) = \frac{2 \times 10^{-3} - (-2 \times 10^{-3})}{9 \times 10^{-3} - 6 \times 10^{-3}} = 1,33 \text{ A} \quad 6 \leq t < 9 \text{ ms}$$

$$i(t) = 0 \quad t \geq 9 \text{ ms}$$

A corrente é representada graficamente com a curva da carga na Fig. 1.21. Observe que a corrente é nula durante os intervalos de tempo em que a carga possui um valor constante. Quando a carga é aumentada, a corrente é positiva e, quando a carga diminui, a corrente é negativa.

A potência absorvida pela CAIXA vale $12 \cdot i(t)$. Portanto,

$$p(t) = 12 \cdot 0 = 0 \quad 0 \leq t < 1 \text{ ms}$$

$$p(t) = 12 \cdot 2 = 24 \text{ W} \quad 1 \leq t < 2 \text{ ms}$$

$$p(t) = 12 \cdot 0 = 0 \quad 2 \leq t < 3 \text{ ms}$$

$$p(t) = 12 \cdot (-2,5) = -30 \text{ W} \quad 3 \leq t < 5 \text{ ms}$$

$$p(t) = 12 \cdot 0 = 0 \quad 5 \leq t < 6 \text{ ms}$$

$$p(t) = 12 \cdot 1,33 = 16 \text{ W} \quad 6 \leq t < 9 \text{ ms}$$

$$p(t) = 12 \cdot 0 = 0 \quad t \geq 9 \text{ ms}$$

A potência absorvida pela CAIXA é representada graficamente na Fig. 1.22. Para os intervalos de tempo, $1 \leq t \leq 2 \text{ ms}$ e $6 \leq t \leq 9 \text{ ms}$, a CAIXA está absorvendo potência. Durante o intervalo de tempo $3 \leq t \leq 5 \text{ ms}$, a potência absorvida pela CAIXA é negativa, o que indica que a CAIXA está fornecendo potência para a fonte de 12 V.

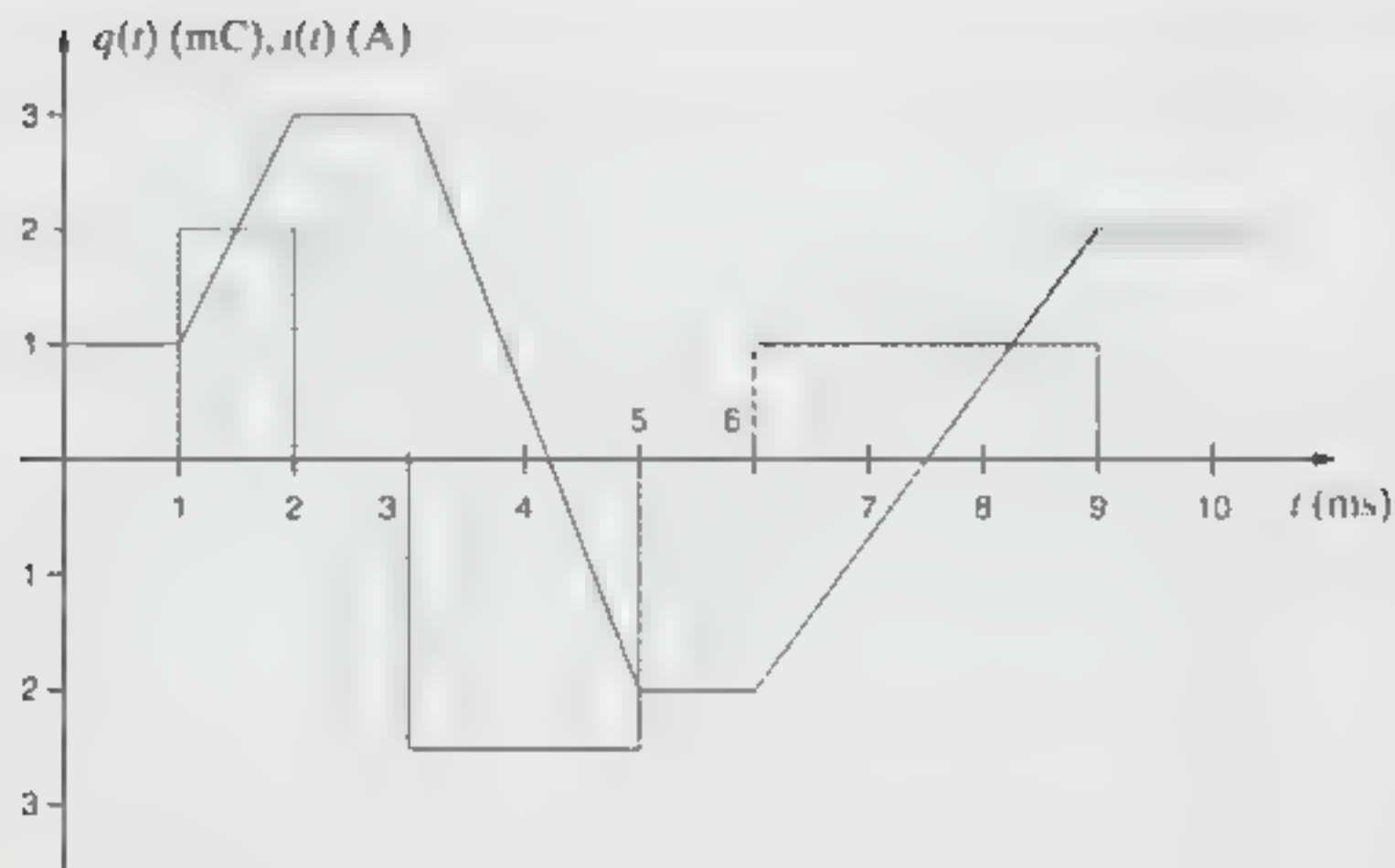


Figura 1.21 Representação gráfica da carga e da corrente para o Exemplo 1.8.

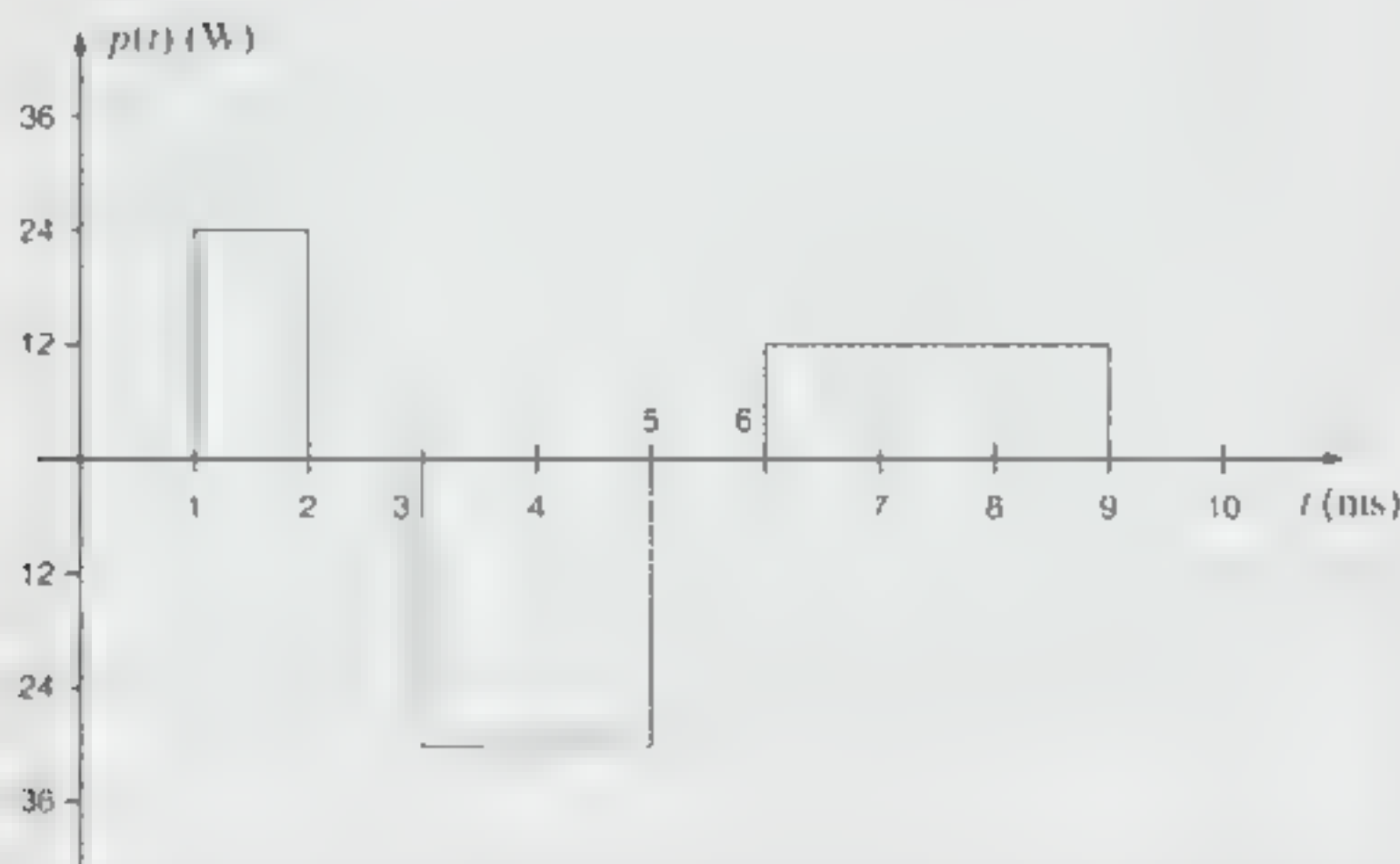
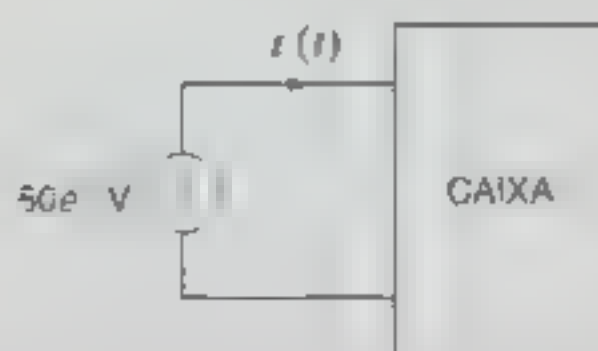


Figura 1.22 Representação gráfica da potência para o Exemplo 1.8.

Avaliação do Aprendizado

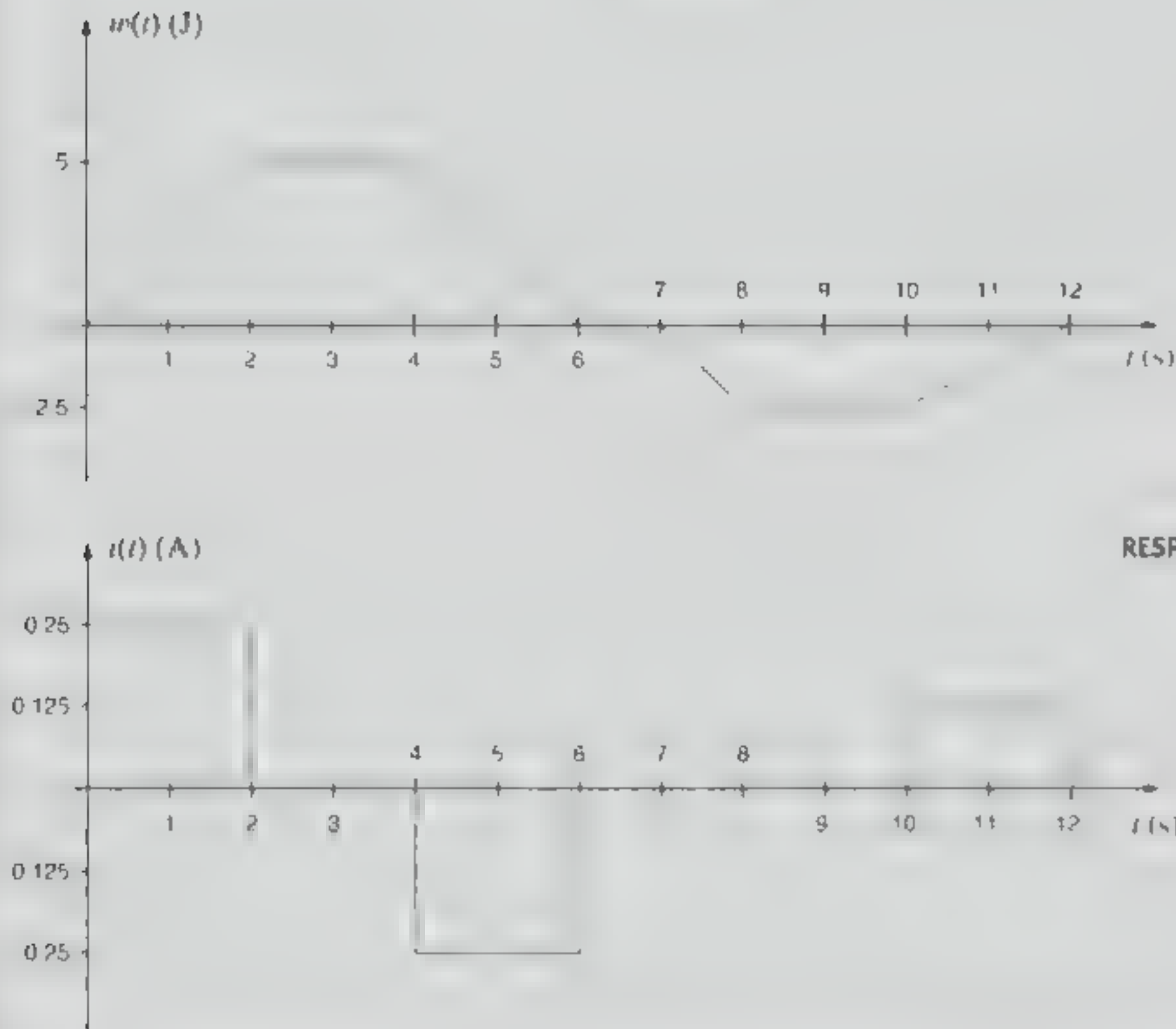
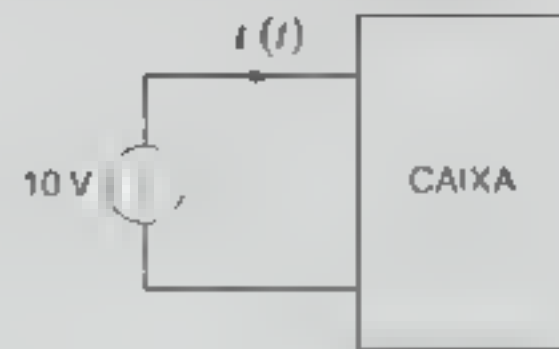
E1.8 A potência absorvida pela CAIXA da rede mostrada na Fig. E1.8 é expressa por $p(t) = 2,5e^{-4t}$ W. Calcule a energia e a carga fornecida à CAIXA no intervalo de tempo $0 < t < 250$ ms.



RESPOSTAS: 395,1 mJ e 8,8 mC.

Figura E1.8

E1.9 A energia absorvida pela CAIXA da rede mostrada na Fig. E1.9 é representada pelo gráfico a seguir. Calcule e represente graficamente a corrente que entra na CAIXA. Calcule também a carga que entra na CAIXA no intervalo de tempo entre 0 e 12 segundos.



RESPOSTA: $Q = 0$.

Figura E1.9

EXEMPLO 1.9

Uma porta USB (*Universal Serial Bus*) é um dispositivo comum utilizado tanto em computadores de mesa quanto em computadores portáteis (*notebooks*), bem como em muitos outros aparelhos portáteis como reprodutores de MP3, câmeras digitais e telefones celulares. A nova especificação USB 2.0 (www.usb.org) permite a transferência de dados entre um computador e um dispositivo periférico a uma taxa superior a 480 megabits por segundo. Uma importante característica da USB é a possibilidade de se trocar de periférico sem ter que desligar um computador. As portas USB também são capazes

de fornecer energia a um periférico externo. A Fig. 1.23 mostra um Motorola RAZR® e um iPod® Apple sendo carregados a partir das portas USB de um *notebook*. Um cabo USB é um cabo com quatro condutores, sendo dois para a condução dos sinais e dois para o suprimento de energia. A corrente que pode ser fornecida através de uma porta USB é definida nas especificações da USB em termos de unidades de carga, em que uma unidade de carga é estabelecida como 100 mA. Todas as portas USB de baixa potência apresentam uma unidade de carga como *default*, porém, esse valor pode ser alterado a partir de um *software* de controle para portas de alta potência capazes de fornecer cinco unidades de carga ou 500 mA.



Figura 1.23 Um Motorola RAZR® e um iPod® Apple sendo carregados a partir de portas USB. (Cortesia de Mark Nelms e Jo Ann Loden)

1. Uma bateria Li-ion (íons de lítio) de 680 mAh é de uso padrão em um Motorola RAZR®. Se essa bateria for completamente descarregada (isto é, 0 mAh), quanto tempo será necessário para recarregá-la até sua capacidade total de 680 mAh utilizando uma porta USB de baixa potência?

Qual será o valor da carga armazenada na bateria ao final do processo de carregamento?

2. Uma terceira geração de iPod® com bateria Li-ion de 630 mAh deve ser recarregada a partir de uma porta USB de alta potência que fornece uma corrente de 150 mA. No início da recarga, 7,8 C de carga são armazenados na bateria. O processo de recarga é interrompido quando a carga armazenada atinge o valor de 35,9 C. Quanto tempo será gasto na recarga da bateria?

SOLUÇÃO

1. Uma porta USB de baixa potência opera a 100 mA. Admitindo-se que a corrente de carregamento da porta USB permaneça a 100 mA durante o processo de carregamento, o tempo necessário para recarregar a bateria será de $680 \text{ mAh} / 100 \text{ mA} = 6,8 \text{ h}$. A carga armazenada na bateria após ser totalmente carregada será de $680 \text{ mAh} \cdot 60 \text{ s/h} = 40.800 \text{ mAs} = 40,8 \text{ As} = 40,8 \text{ C}$.
2. A carga fornecida à bateria durante o processo de recarga é de $35,9 - 7,8 = 28,1 \text{ C}$. Esse valor corresponde a $28,1 \text{ As} = 28.100 \text{ mAs} \cdot 1 \text{ h}/60 \text{ s} = 468,3 \text{ mAh}$. Admitindo uma corrente de carregamento constante de 150 mA a partir de uma porta USB de alta potência, o tempo necessário para recarregar a bateria será de $468,3 \text{ mAh} / 150 \text{ mA} = 3,12 \text{ h}$.

RESUMO

■ Prefixos padronizados empregados no texto

$p = 10^{-12}$	$k = 10^3$
$n = 10^{-9}$	$M = 10^6$
$\mu = 10^{-6}$	$G = 10^9$
$m = 10^{-3}$	$T = 10^{12}$

■ Relações entre corrente e carga

$$i(t) = \frac{dq(t)}{dt} \quad \text{ou} \quad q(t) = \int_{-\infty}^t i(x) dx$$

■ Relações entre potência, energia, corrente e tensão

$$p = \frac{dw}{dt} \quad \text{e} \quad \Delta w = \int p dt = \int v i dt$$

- **Convenção passiva de sinais** A convenção passiva de sinais estabelece que, se a tensão e a corrente associadas a um

componente são as mostradas na Fig. 1.11, o produto de v por i , com seus respectivos sinais, determina a intensidade e o sinal da potência. Se o sinal for positivo, a potência estará sendo absorvida pelo componente e, se o sinal for negativo, o componente estará fornecendo potência.

- **Fontes independentes e dependentes** Uma fonte de tensão (ou corrente) independente ideal é um componente com dois terminais que mantém uma tensão (ou corrente) entre seus terminais independentemente da corrente (ou tensão) que passa através (entre os terminais) do componente. As fontes dependentes ou controladas geram uma tensão ou uma corrente que é determinada por uma tensão ou uma corrente em um local específico do circuito.

- **Conservação da energia** Os circuitos elétricos aqui analisados satisfazem a condição de conservação de energia.

- **Teorema de Tellegen** A soma das potências absorvidas por todos os componentes de um circuito elétrico é igual a zero.

PROBLEMAS

- 1.1 Se a corrente em um condutor elétrico é de 2,4 A, qual é o valor da carga, em coulombs, que passa por qualquer ponto do condutor em um intervalo de 30 segundos?
- 1.2 Determine o intervalo de tempo necessário para um carregador de bateria de 12 A fornecer 4.800 C.

- 1.3 Um raio carregando 30.000 A tem uma duração de 50 microssegundos. Se o raio atinge um avião voando a 20.000 pés, qual é a carga imposta ao avião?
- 1.4 Se uma bateria de 12 V fornece 100 J em 5 s, determine (a) o valor da carga fornecida e (b) a corrente produzida.

- 1.5** A corrente em um condutor é de 1,5 A. Quantos coulombs de carga passam por qualquer ponto do condutor em um intervalo de tempo de 1,5 min?
- 1.6** Se uma carga de 60 C passa por um condutor elétrico em 30 segundos, determine a corrente no condutor.
- 1.7** Determine a carga em coulombs produzida por um carregador de baterias de 12 A em um período de uma hora.
- 1.8** Cinco coulombs de carga passam pelo componente mostrado na Fig. P1.8 do ponto A para o ponto B. Se a energia absorvida pelo componente é de 120 J, determine a tensão entre os terminais do componente.

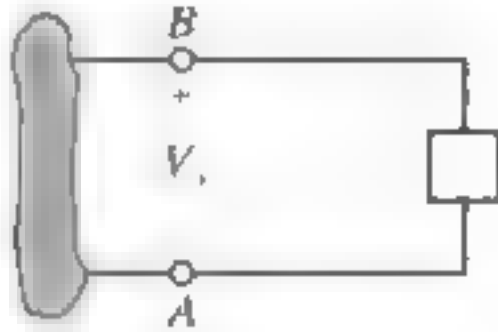


Figura P1.8

- 1.9** O comportamento da corrente que entra em um componente é mostrado na Fig. P1.9. Determine a carga que entra no componente no intervalo de tempo $0 < t < 20$ s.

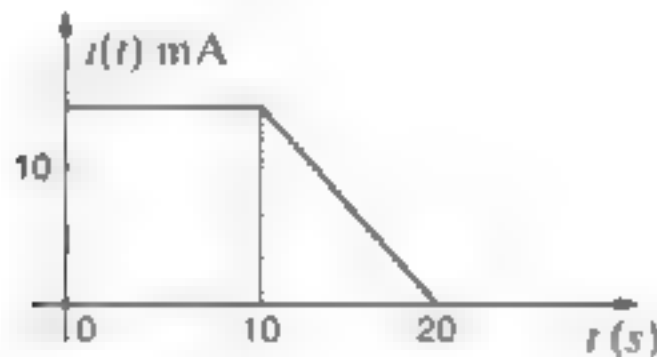


Figura P1.9

- 1.10** A carga que entra no terminal positivo de um componente é expressa por $q(t) = -30e^{-4t}$ mC. Se a tensão entre os terminais do componente é expressa por $120e^{-2t}$ V, determine a energia fornecida ao componente no intervalo de tempo $0 < t < 50$ ms.
- 1.11** A carga que entra no terminal positivo de um componente é expressa por $q(t) = 12e^{-2t}$ mC. A potência fornecida ao componente é $p(t) = 2,4e^{-3t}$ W. Calcule a corrente no componente, a tensão entre os terminais do componente e a energia fornecida ao componente no intervalo de tempo $0 < t < 100$ ms.
- 1.12** A tensão entre os terminais de um componente é expressa por $12e^{-2t}$ V. A corrente que entra no terminal positivo do componente é $2e^{-2t}$ A. Determine a energia absorvida pelo componente em 1,5 s a partir de $t = 0$.
- 1.13** A potência absorvida pela CAIXA da rede mostrada na Fig. P1.13 é $2e^{-2t}$ W. Calcule o valor da carga que entra na CAIXA no intervalo de tempo entre 0,1 e 0,4 segundo.

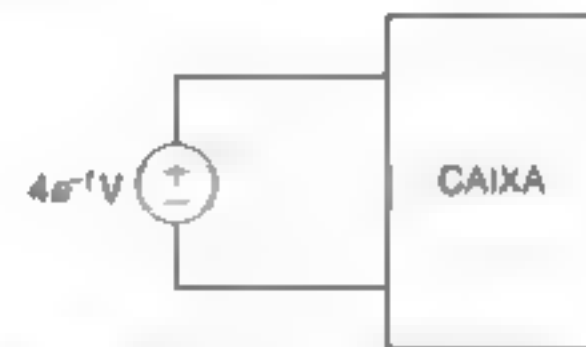


Figura P1.13

- 1.14** A potência absorvida pela CAIXA da rede mostrada na Fig. P1.14 é $0,1e^{-4t}$ W. Calcule o valor da energia absorvida pela CAIXA no intervalo de tempo entre 0,1 e 0,4 segundo.

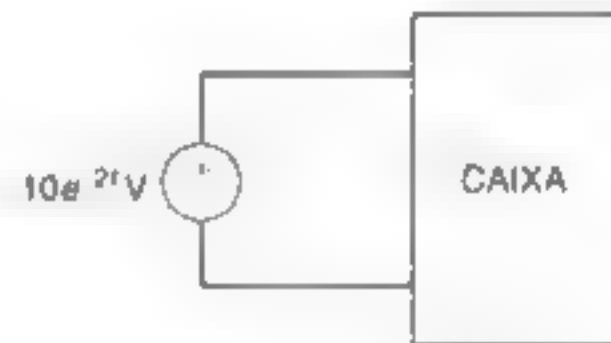


Figura P1.14

- 1.15** O comportamento da energia absorvida pela CAIXA da rede mostrada na Fig. P1.15 é o apresentado abaixo. Qual é o valor da carga que entra na CAIXA no intervalo de tempo entre 0 e 10 milissegundos?

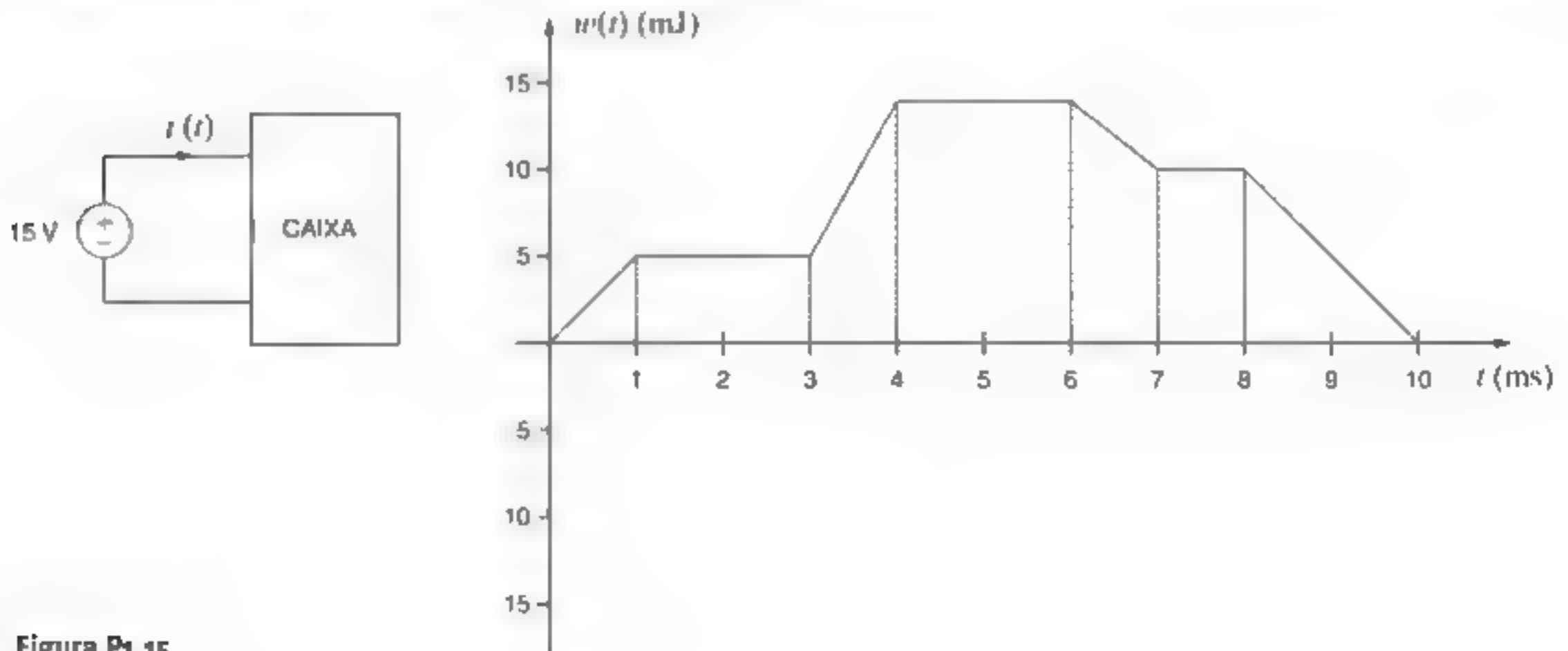


Figura P1.15

- 1.16** O comportamento da carga que entra na CAIXA da rede mostrada na Fig. P1.16 é ilustrado no gráfico da figura. Calcule e esquematize graficamente o comportamento da corrente que entra e da potência absorvida pela CAIXA no intervalo de tempo entre 0 e 10 milissegundos

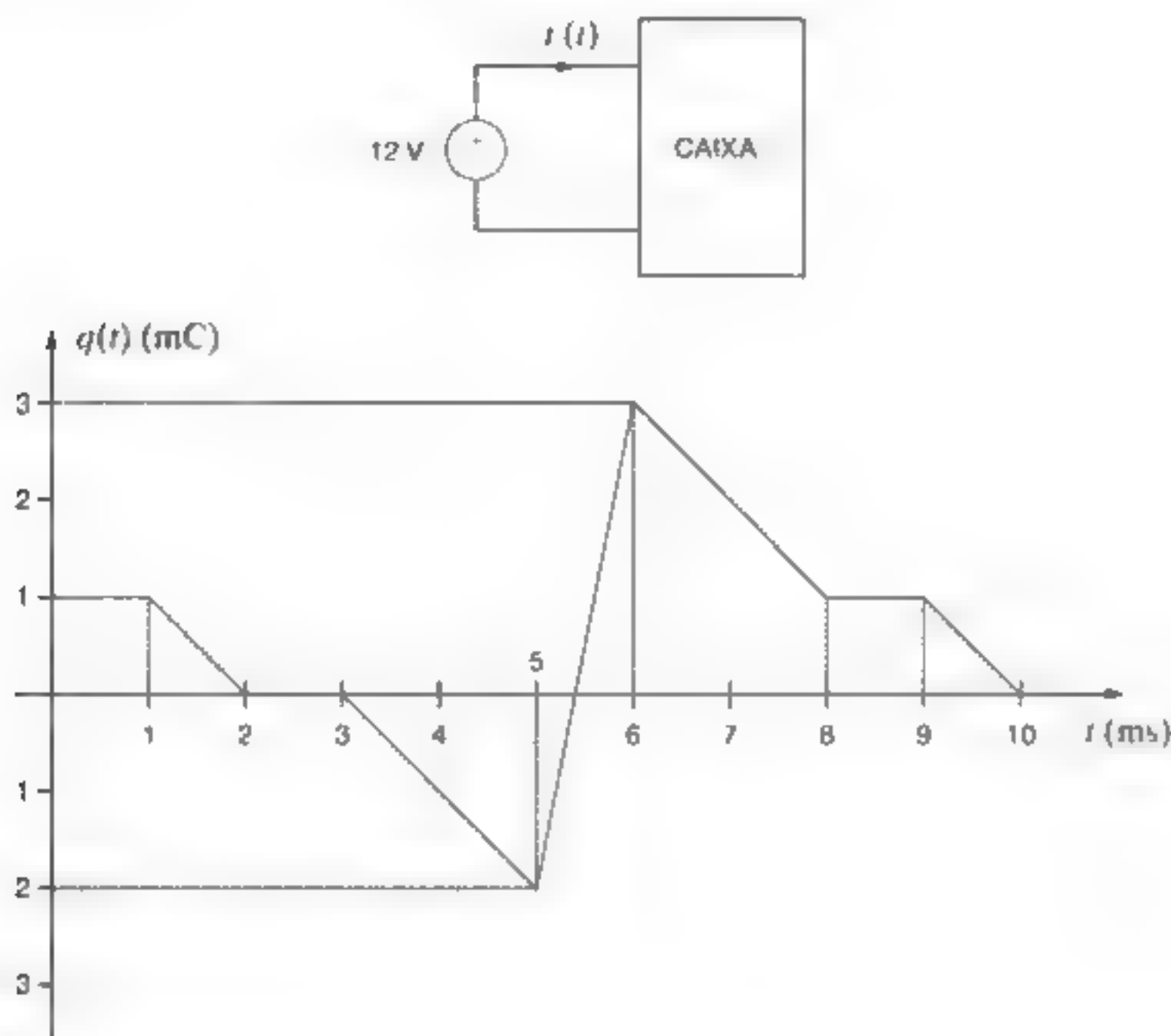


Figura P1.16

- 1.17** A energia absorvida pela CAIXA da rede mostrada na Fig. P1.17 é fornecida por meio do gráfico da figura. Calcule e esquematize graficamente o comportamento da corrente que entra na CAIXA. Calcule também a carga que entra na CAIXA no intervalo de tempo entre 0 e 12 segundos.

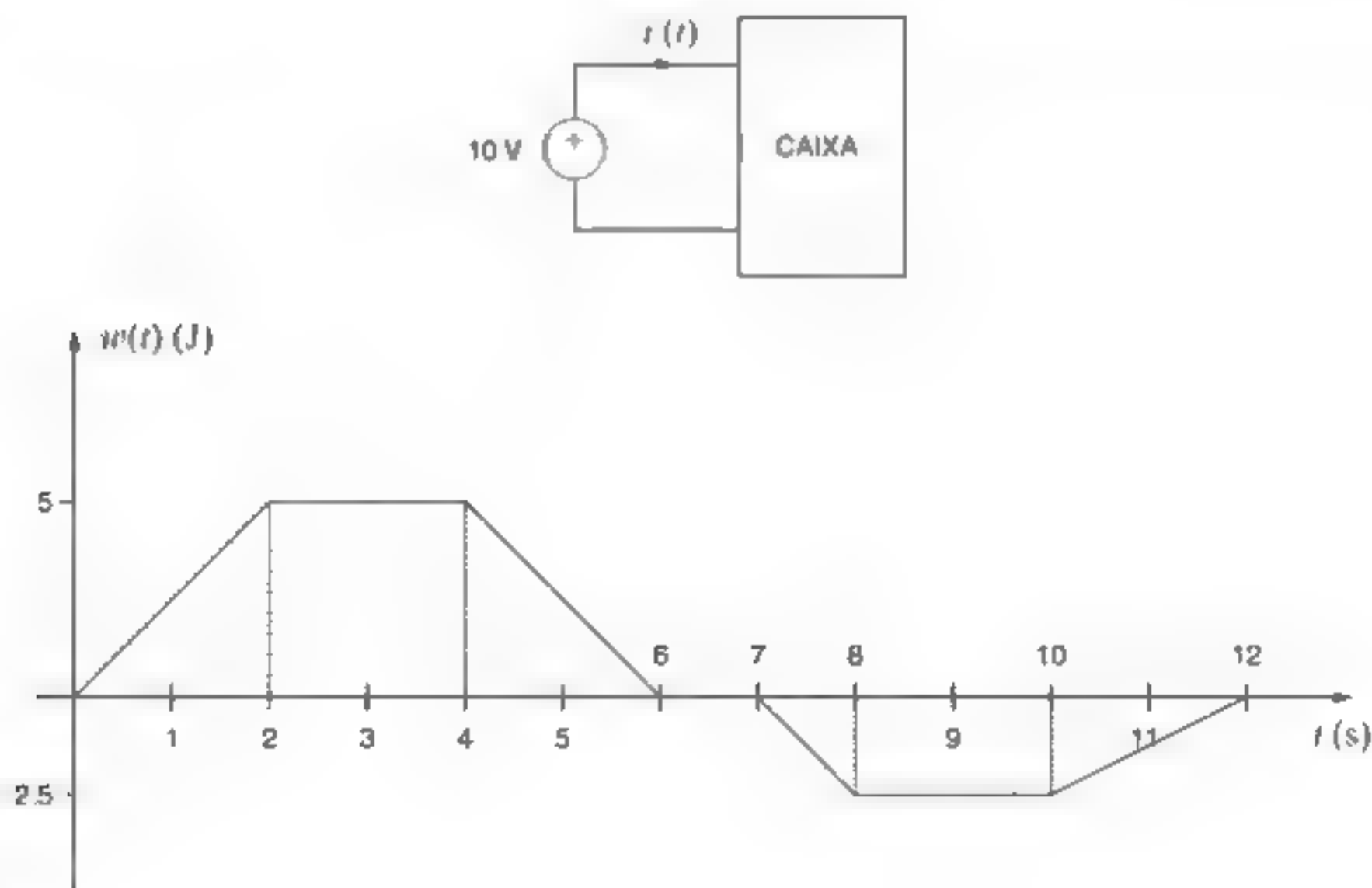


Figura P1.17

- 1.18 A carga que entra no terminal superior da CAIXA da rede mostrada na Fig. P1.18 é representada graficamente na figura. Qual é o valor da energia absorvida pela CAIXA entre 0 e 9 segundos?

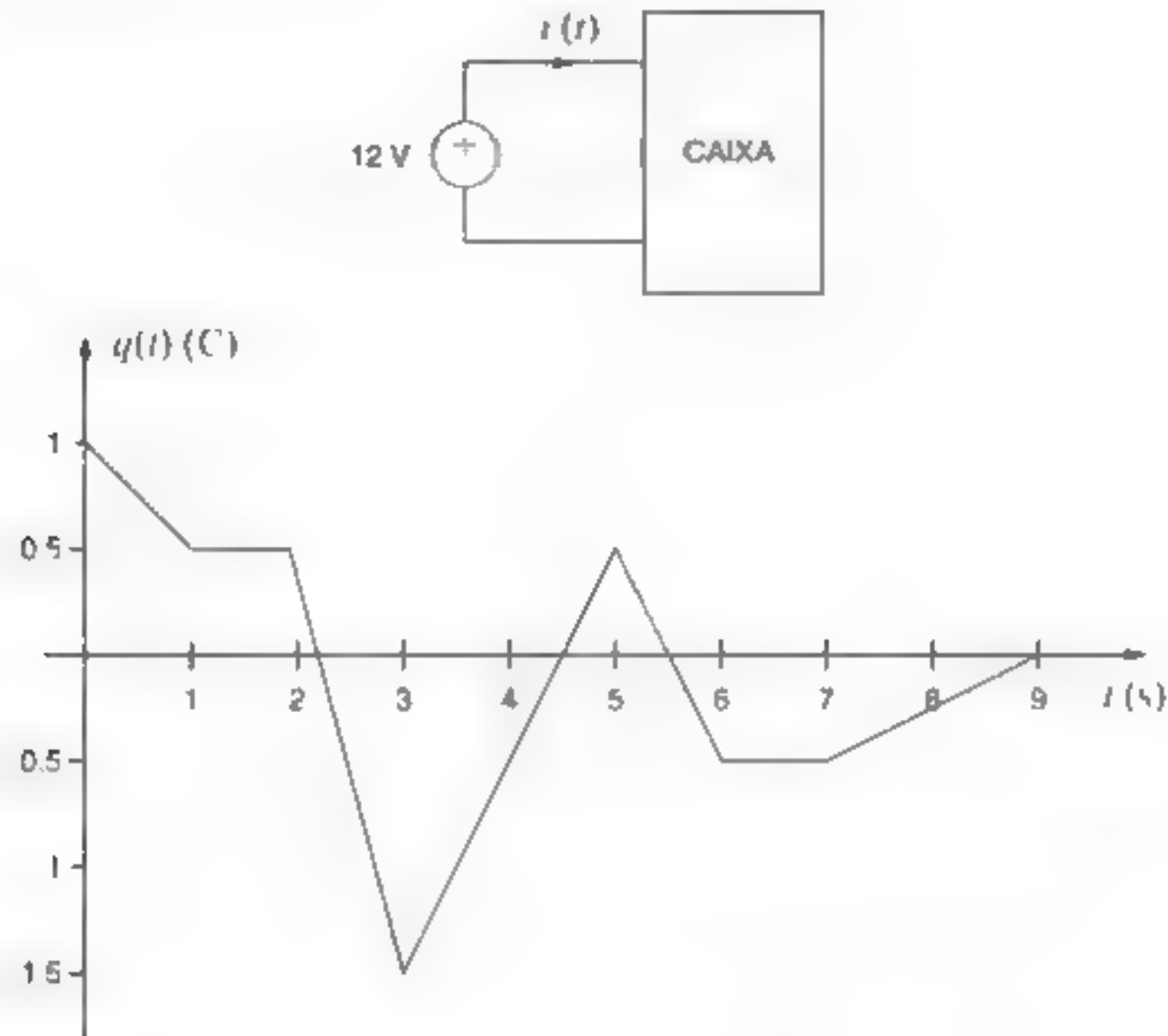


Figura P1.18

- 1.19 A energia absorvida pela CAIXA da rede mostrada na Fig. P1.19 é representada pelo gráfico a seguir. Calcule e represente graficamente o comportamento da corrente que entra na CAIXA entre 0 e 10 milissegundos.

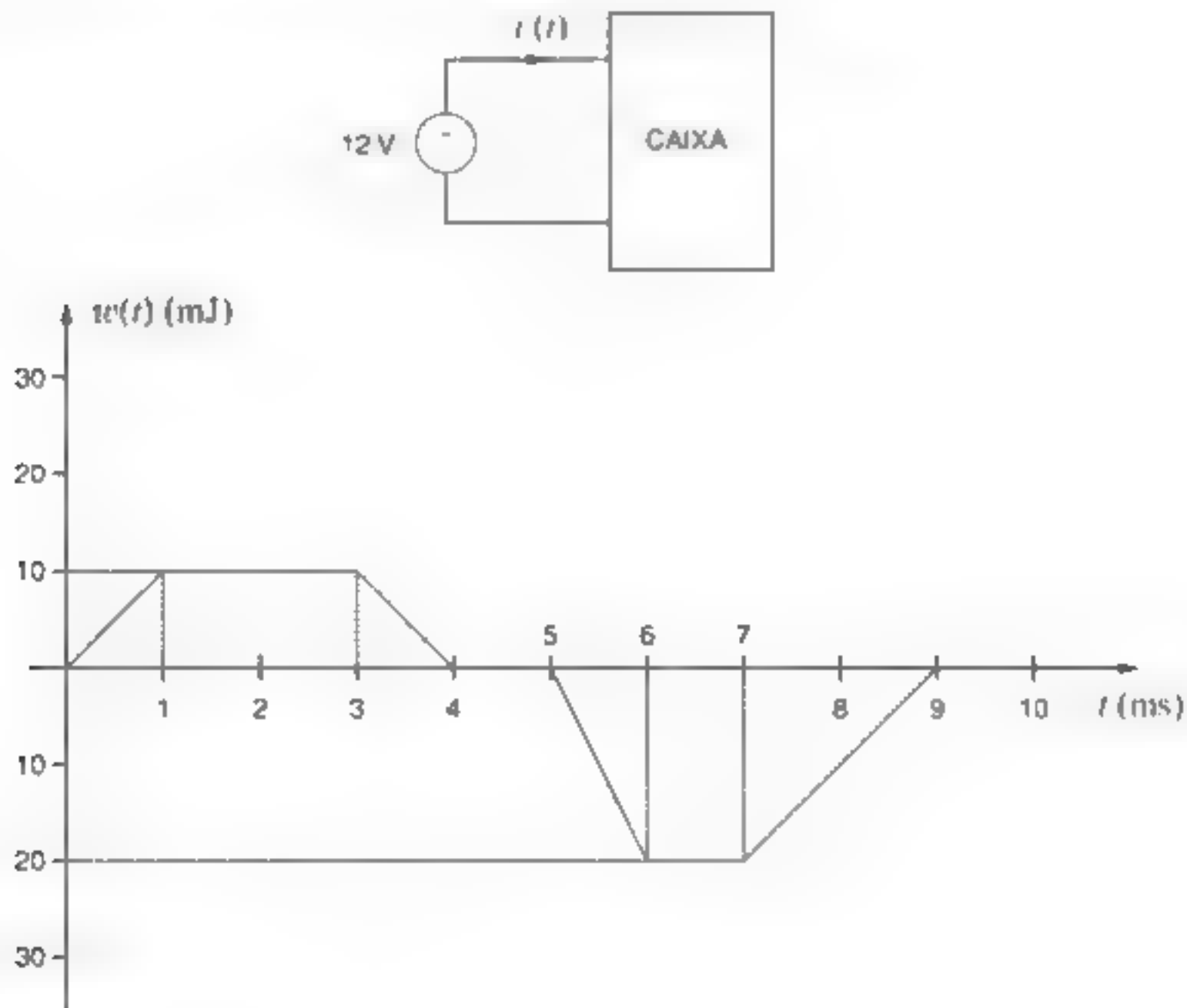


Figura P1.19

1.20 Determine a potência absorvida ou fornecida pelo componente mostrado na Fig. P1.20 se

- (a) $V_1 = 9 \text{ V}$ e $I = 2 \text{ A}$
- (b) $V_1 = 9 \text{ V}$ e $I = -3 \text{ A}$
- (c) $V_1 = -12 \text{ V}$ e $I = 2 \text{ A}$
- (d) $V_1 = -12 \text{ V}$ e $I = -3 \text{ A}$

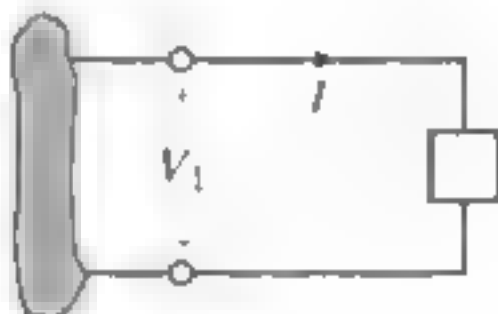


Figura P1.20

1.21 Calcule a potência absorvida pelo componente A da rede mostrada na Fig. P1.21.

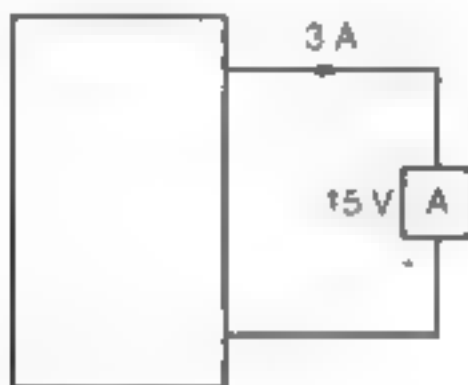


Figura P1.21

1.22 Calcule a potência fornecida pelo componente A da rede mostrada na Fig. P1.22.

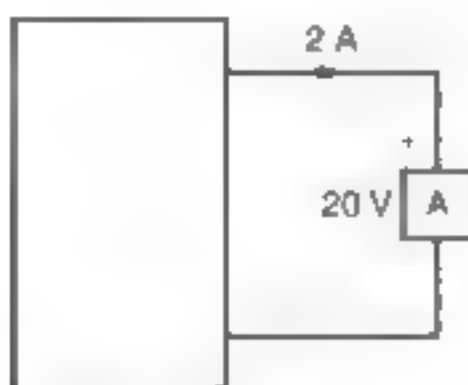


Figura P1.22

1.23 O componente A da rede mostrada na Fig. P1.23 absorve 30 W de potência. Calcule V_1 .

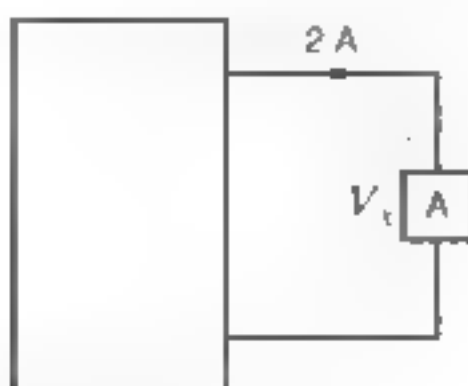


Figura P1.23

1.24 O componente B da rede mostrada na Fig. P1.24 fornece 60 W de potência. Calcule I_1 .

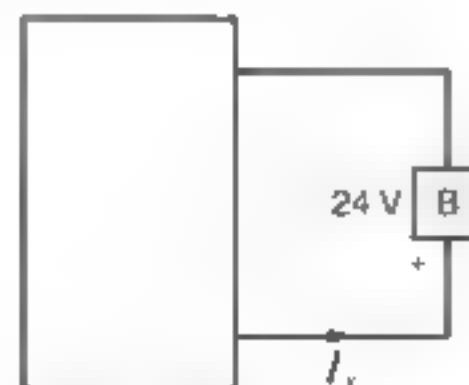


Figura P1.24

1.25 O componente B da rede mostrada na Fig. P1.25 fornece 72 W de potência. Calcule V_A .

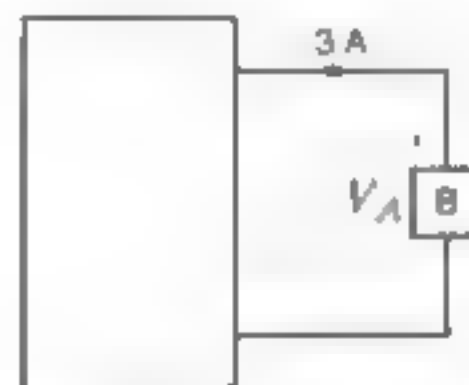


Figura P1.25

1.26 O componente B da rede mostrada na Fig. P1.26 fornece 72 W de potência. Calcule I_1 .

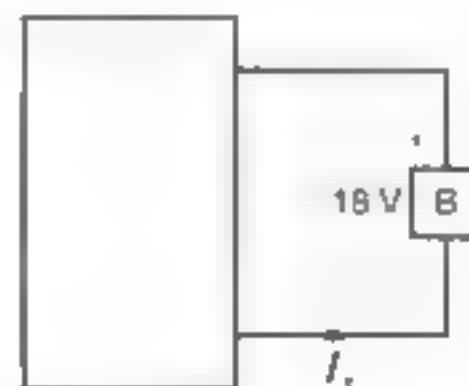


Figura P1.26

1.27 (a) No circuito mostrado na Fig. P1.27 (a), $P_1 = 36 \text{ W}$. Nessa condição, o componente 2 está absorvendo ou fornecendo potência? Qual é o valor dessa potência?

(b) No circuito mostrado na Fig. P1.27 (b), $P_1 = -48 \text{ W}$. Nessa condição, o componente 1 está absorvendo ou fornecendo potência? Qual é o valor dessa potência?

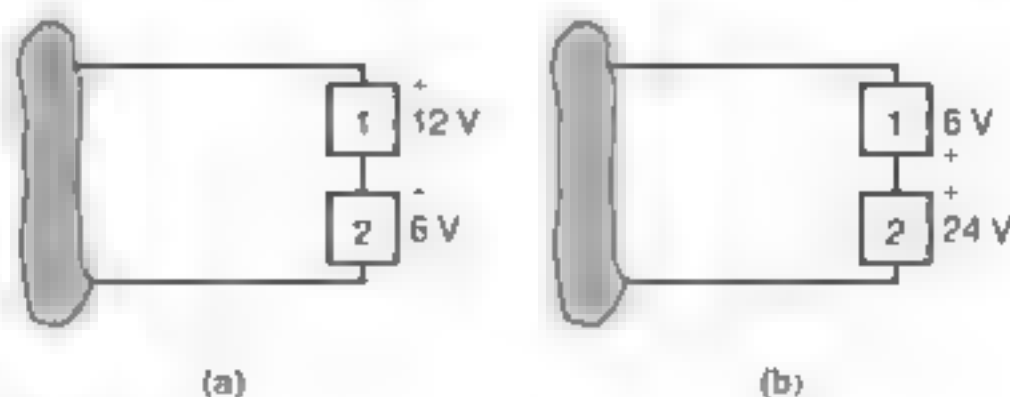


Figura P1.27

- 1.28** Dois componentes são conectados em série, conforme mostrado na Fig. P1.28. O componente 1 fornece 24 W de potência. Nessa condição, o componente 2 está absorvendo ou fornecendo potência? Qual é o valor desta potência?

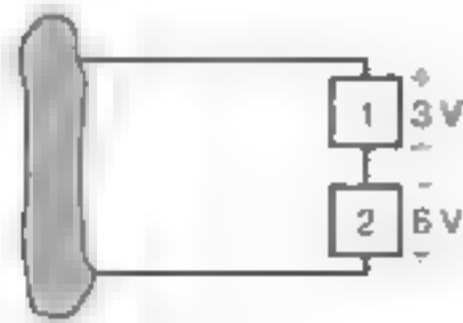


Figura P1.28

- 1.29** O componente 2 da rede mostrada na Fig. P1.29 absorveu 32 W. Determine a potência absorvida ou fornecida pelos componentes 1 e 3.

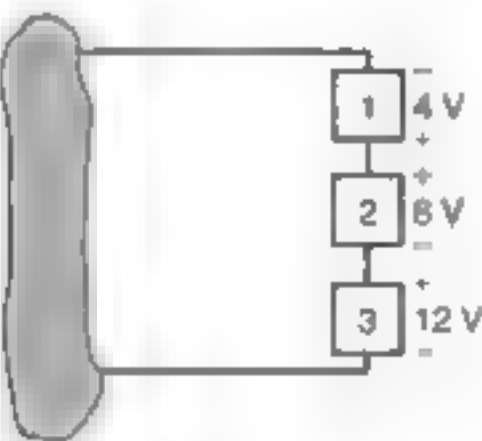


Figura P1.29

- 1.30** Escolha I_f de modo que a potência absorvida pelo componente 2 do circuito mostrado na Fig. P1.30 seja igual a 7 W.

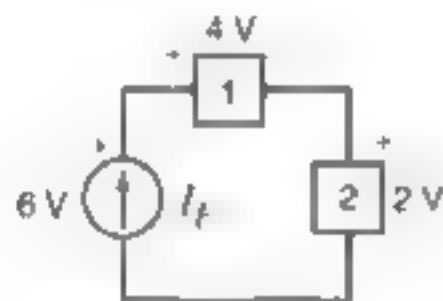
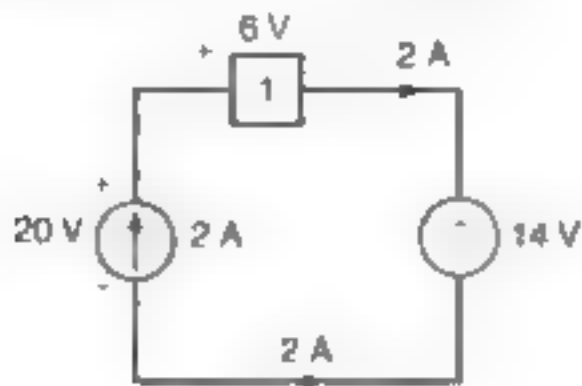
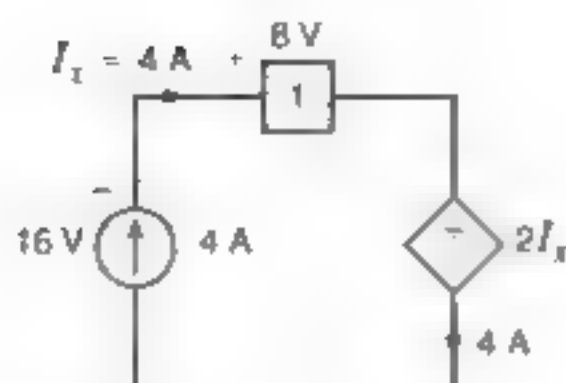


Figura P1.30

- 1.31** Determine a potência absorvida ou fornecida pelos componentes do circuito mostrado na Fig. P1.31.



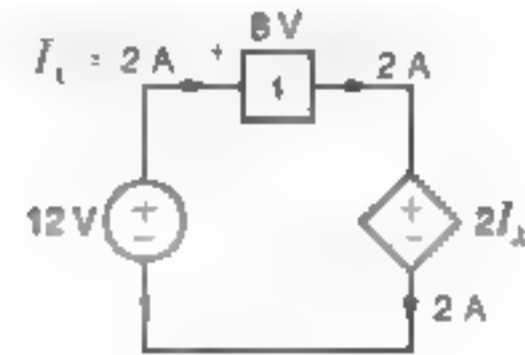
(a)



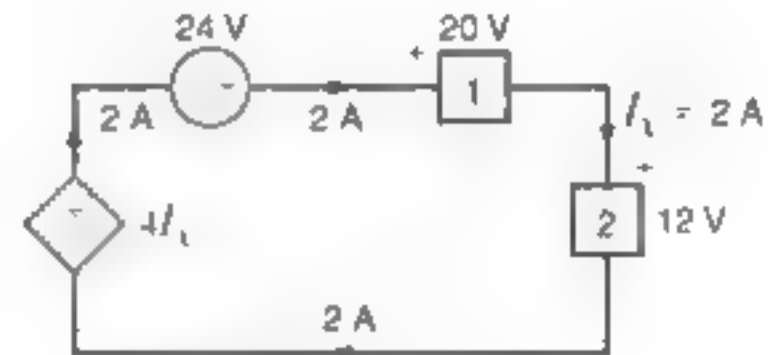
(b)

Figura P1.31

- 1.32** Determine a potência absorvida ou fornecida pelos componentes da rede mostrada na Fig. P1.32.



(a)



(b)

Figura P1.32

- 1.33** Calcule a potência absorvida ou fornecida pelos componentes da rede mostrada na Fig. P1.33.

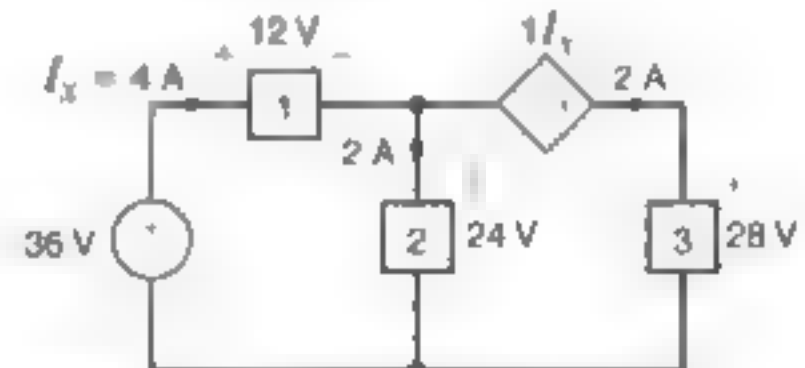


Figura P1.33

- 1.34** Determine a potência absorvida ou fornecida pelo componente 2 da rede mostrada na Fig. P1.34.

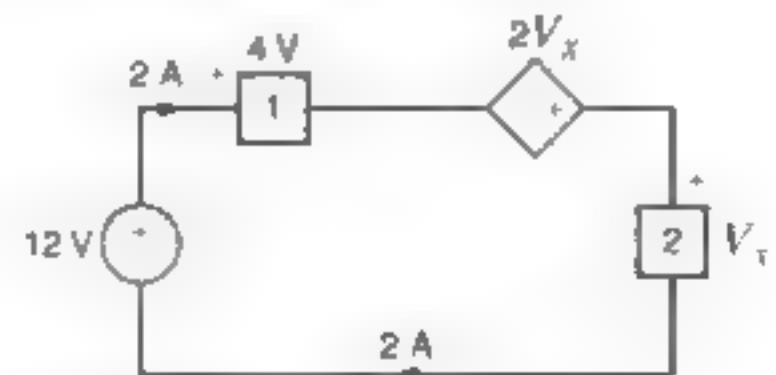


Figura P1.34

- 1.35** Determine o valor da corrente I_x da rede mostrada na Fig. P1.35.

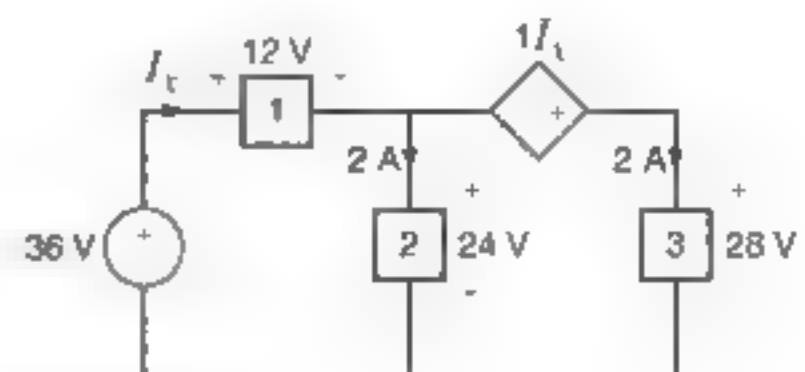


Figura P1.35

- 1.36** Determine o valor da potência absorvida pelo componente 1 do circuito mostrado na Fig. P1.36.

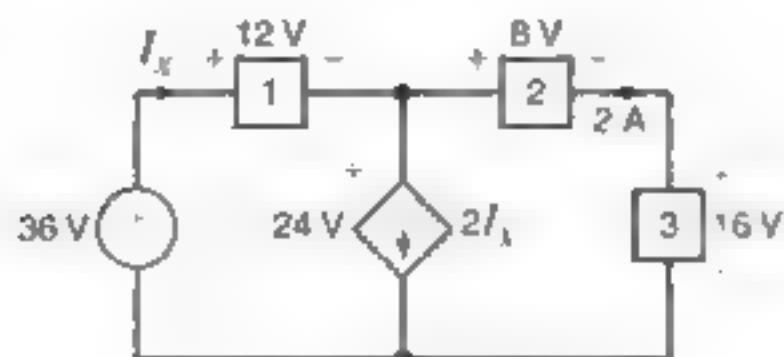


Figura P1.36

- 1.37** Determine o valor da potência absorvida ou fornecida pelo componente 1 do circuito mostrado na Fig. P1.37.

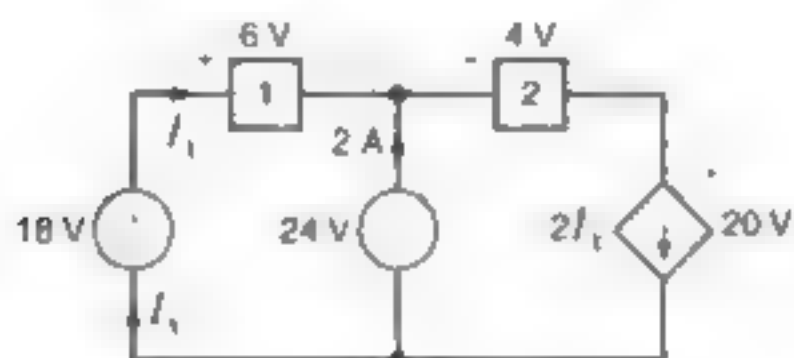


Figura P1.37

- 1.38** Determine o valor da potência absorvida ou fornecida pelo componente 3 do circuito mostrado na Fig. P1.38.

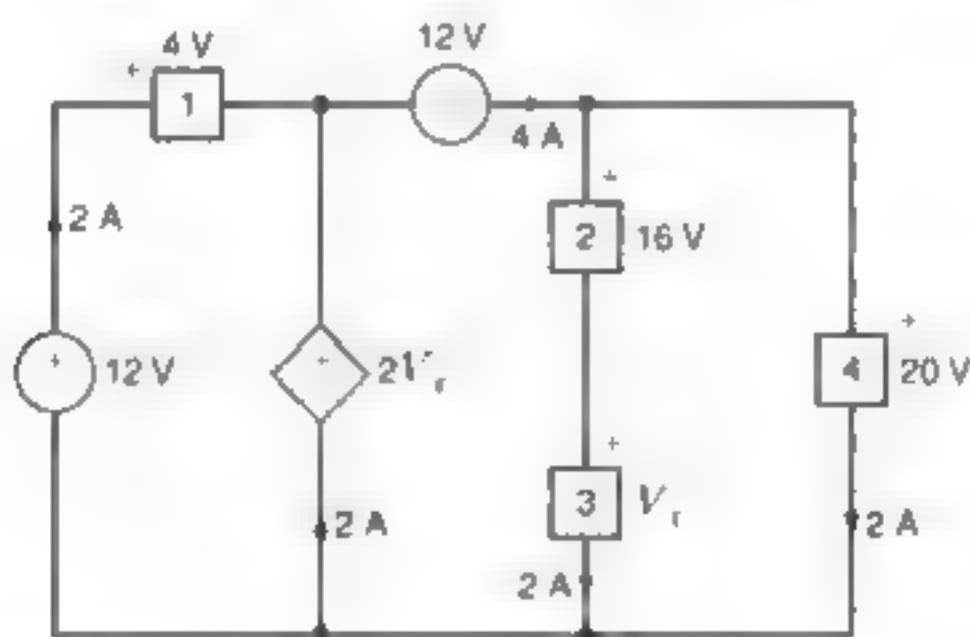


Figura P1.38

- 1.39** Determine o valor da potência absorvida ou fornecida pelo componente 1 do circuito mostrado na Fig. P1.39.

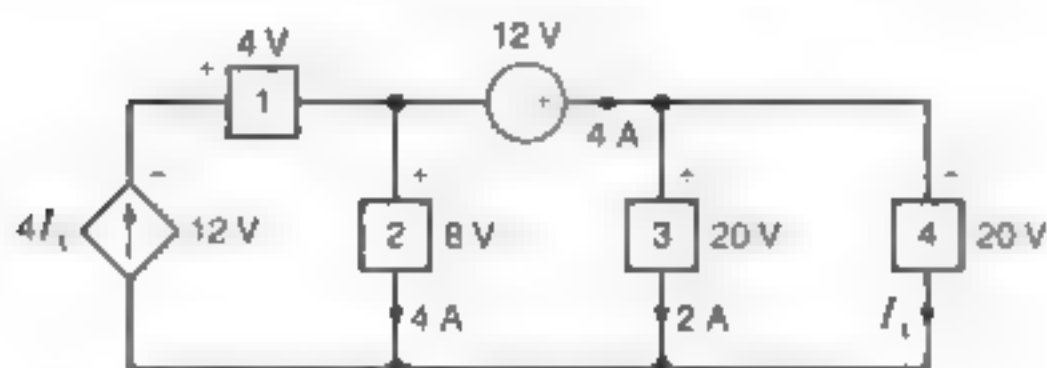


Figura P1.39

- 1.40** Determine o valor da tensão V_x do circuito mostrado na Fig. P1.40 utilizando o teorema de Tellegen.

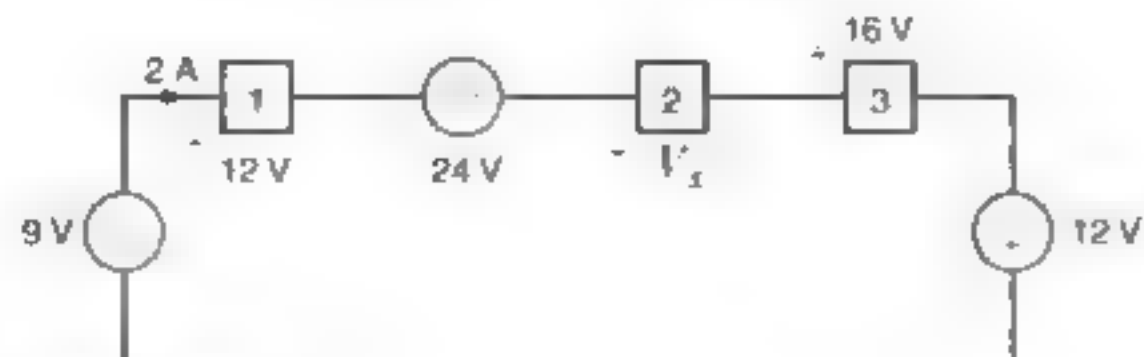


Figura P1.40

- 1.41** Determine o valor da corrente I_x do circuito mostrado na Fig. P1.41 utilizando o teorema de Tellegen.

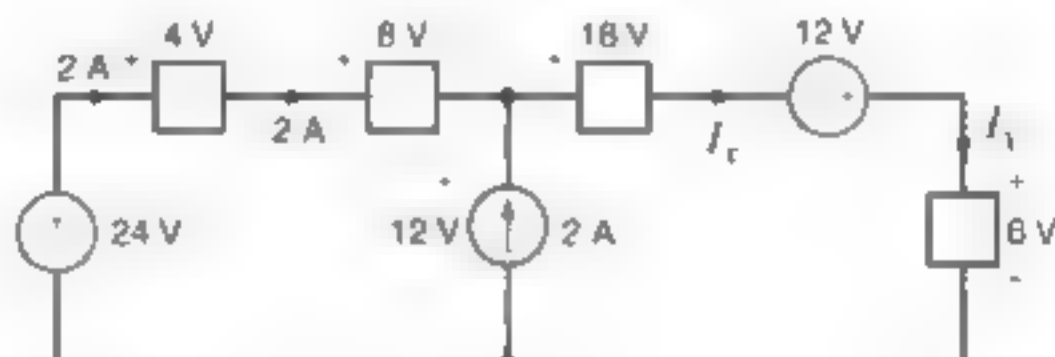


Figura P1.41

- 1.42** A fonte V_F do circuito mostrado na Figura P1.42 absorve ou fornece potência? Qual é o valor dessa potência?

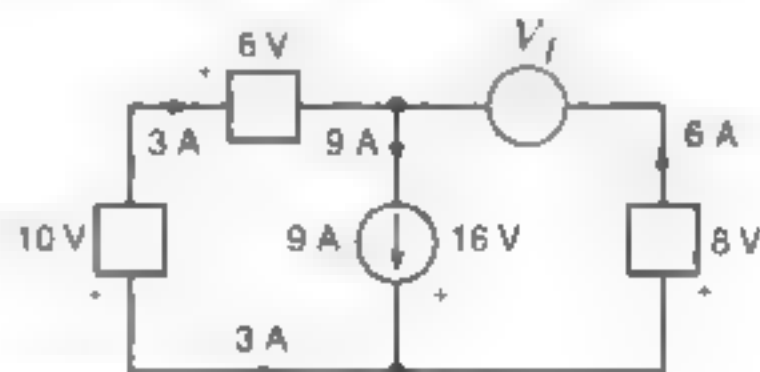


Figura P1.42

- 1.43** Determine o valor da corrente I_x do circuito mostrado na Fig. P1.43 utilizando o teorema de Tellegen.

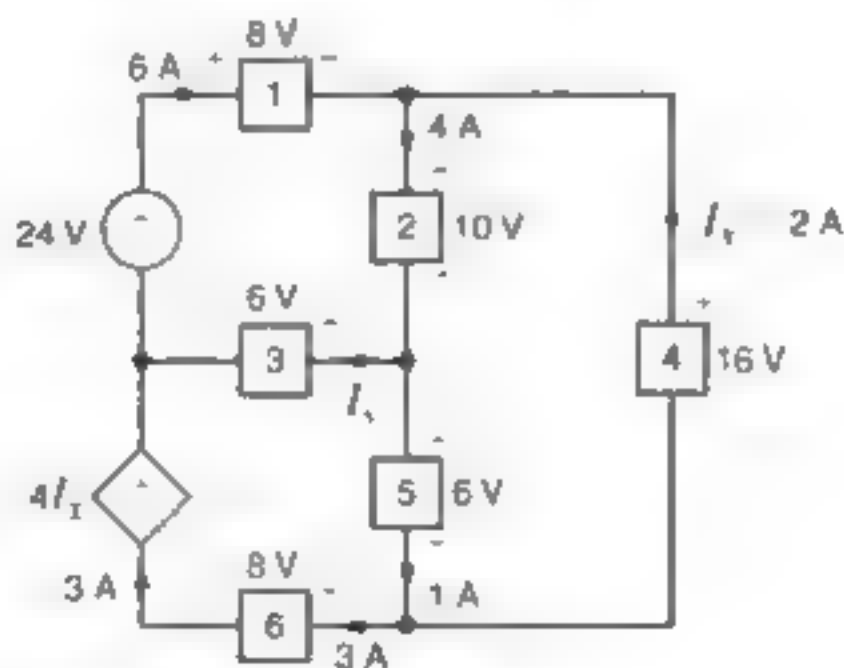


Figura P1.43

- 1.44 Calcule o valor da potência absorvida por componente do circuito mostrado na Fig. P1.44. Verifique também se o teorema de Tellegen é atendido por esse circuito.

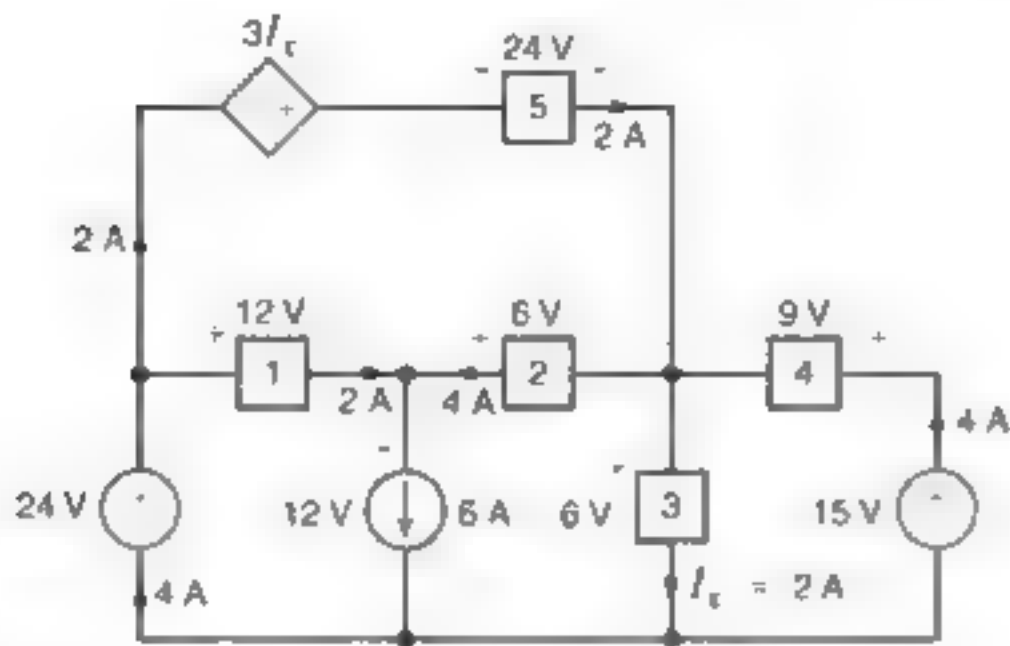


Figura P1.44

- 1.45 Calcule o valor da potência absorvida por componente do circuito mostrado na Fig. P1.45. Verifique também se o teorema de Tellegen é atendido por esse circuito.

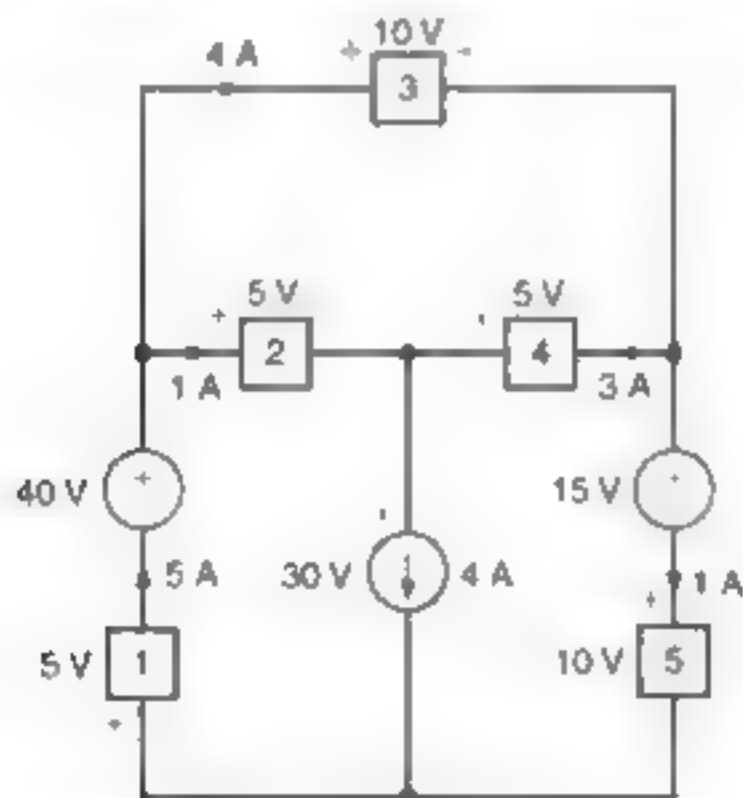


Figura P1.45

- 1.46 No circuito mostrado na Fig. P1.46, o componente 1 absorve 40 W de potência, o componente 2 fornece 50 W, o componente 3 fornece 25 W e o componente 4 absorve 15 W. Qual deve ser o valor da potência fornecida pelo componente 5?

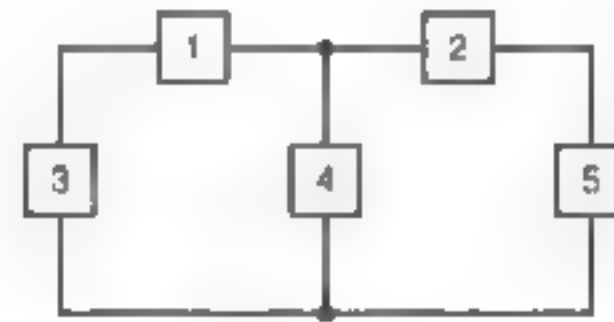


Figura P1.46

CIRCUITOS RESISTIVOS



Cortesia da Tesla Motors

AS METAS DE APRENDIZAGEM DESTE CAPÍTULO SÃO:

- Ser capaz de utilizar a lei de Ohm na solução de circuitos elétricos
- Ser capaz de aplicar a lei de Kirchhoff das correntes e a lei de Kirchhoff das tensões na solução de circuitos elétricos
- Saber como analisar circuitos com um único laço e com um único par de nós
- Saber como combinar resistores em série e em paralelo
- Ser capaz de utilizar a divisão de tensão e de corrente na solução de circuitos elétricos simples
- Entender quando e como aplicar as transformações estrela-delta na solução de circuitos elétricos
- Saber como analisar os circuitos elétricos que possuem fontes dependentes

Tesla Roadster As tecnologias verdes são produzidas em muitas cores. O Tesla Roadster de 2010, por exemplo, é produzido nas cores Vermelho Fusion, Branco Ártico, Verde Corrida e Azul Elétrico, para citar algumas. Um carro esportivo em harmonia com o meio ambiente com dois assentos, esse conversível possui a aceleração de um foguete e adere à pista como jamais fora sonhado; ele é o primeiro carro elétrico de alto desempenho. O Roadster contém mais de 6.800 baterias Li-ion recarregáveis e seguras que pesam cerca de 1.000 libras no total. Ele é duas vezes tão eficiente quanto os carros híbridos que combinam um motor a gasolina e um motor elétrico para gerar propulsão, porém, seu fantástico desempenho o leva a um custo superior a \$100.000.

A escolha entre um veículo totalmente elétrico e um híbrido requer a análise de uma ampla faixa de critérios: desempenho,

custo, eficiência, impacto sobre o meio ambiente, segurança e confiabilidade. A facilidade de dirigir pode ser muito importante para uns, e o custo e a eficiência para outros.

Como estudioso da análise de circuitos, você definirá um critério para escolher entre métodos de análise de diferentes topologias de circuito. Este capítulo descreve as leis básicas que se aplicam a todos os circuitos independentemente de sua complexidade. A lei de Ohm governa a relação mais comum entre tensão e corrente para os circuitos lineares. Os circuitos que possuem uma única fonte de potência com as resistências estando sujeitas às mesmas correntes e outros estando sujeitos à mesma tensão serão analisados por meio dos métodos série e paralelo. Você aprenderá mais técnicas nos capítulos que se seguem, quando você começará a dominar os mesmos princípios utilizados pelos projetistas do Tesla Roadster.

2.1 Lei de Ohm

A lei de Ohm é assim denominada em homenagem ao físico alemão Georg Simon Ohm, que estabeleceu a relação tensão-corrente para uma resistência. Assim, pelos resultados pioneiros de seu trabalho, a resistência elétrica recebeu como unidade o seu nome.

A lei de Ohm estabelece que a tensão entre os terminais de uma resistência é diretamente proporcional à corrente que flui através dela. A resistência, medida em ohms, é a constante de proporcionalidade que relaciona a tensão e a corrente.

[atenção]

A convenção passiva de sinais será empregada em conjunto com a lei de Ohm.

Um componente de circuito cuja característica elétrica é tipicamente resistiva é chamado de resistor e é representado pelo símbolo mostrado na Fig. 2.1a. Um resistor é um dispositivo físico que pode ser adquirido comercialmente com determinados valores padronizados em lojas especializadas em componentes eletrônicos. Esses resistores, que podem ser utilizados em uma grande variedade de aplicações elétricas, são normalmente compostos de carbono ou bobinados. Além disso, os resistores podem ser fabricados utilizando óxido bruto ou filmes metálicos finos para uso em circuitos híbridos, ou podem ainda ser difusos em circuitos integrados semicondutores. Alguns resistores discretos típicos são mostrados na Fig. 2.1b.

A relação matemática da lei de Ohm pode ser expressa pela equação

$$v(t) = R i(t), \text{ em que } R \geq 0 \quad 2.1$$

ou, de forma equivalente, pela curva característica tensão-corrente mostrada na Fig. 2.2a. Observe cuidadosamente a relação entre a polaridade da tensão e o sentido da corrente. Além disso, note também que foi admitido tacitamente que o resistor possui um valor constante e, portanto, que a relação característica tensão-corrente é linear.

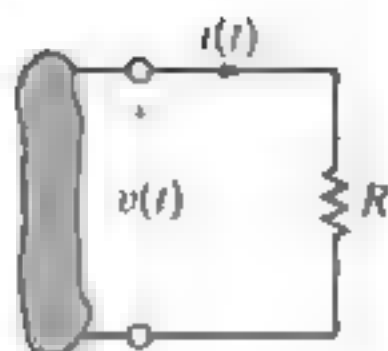
O símbolo Ω é utilizado para representar ohms e, portanto,

$$1 \Omega = 1 \text{ V/A}$$

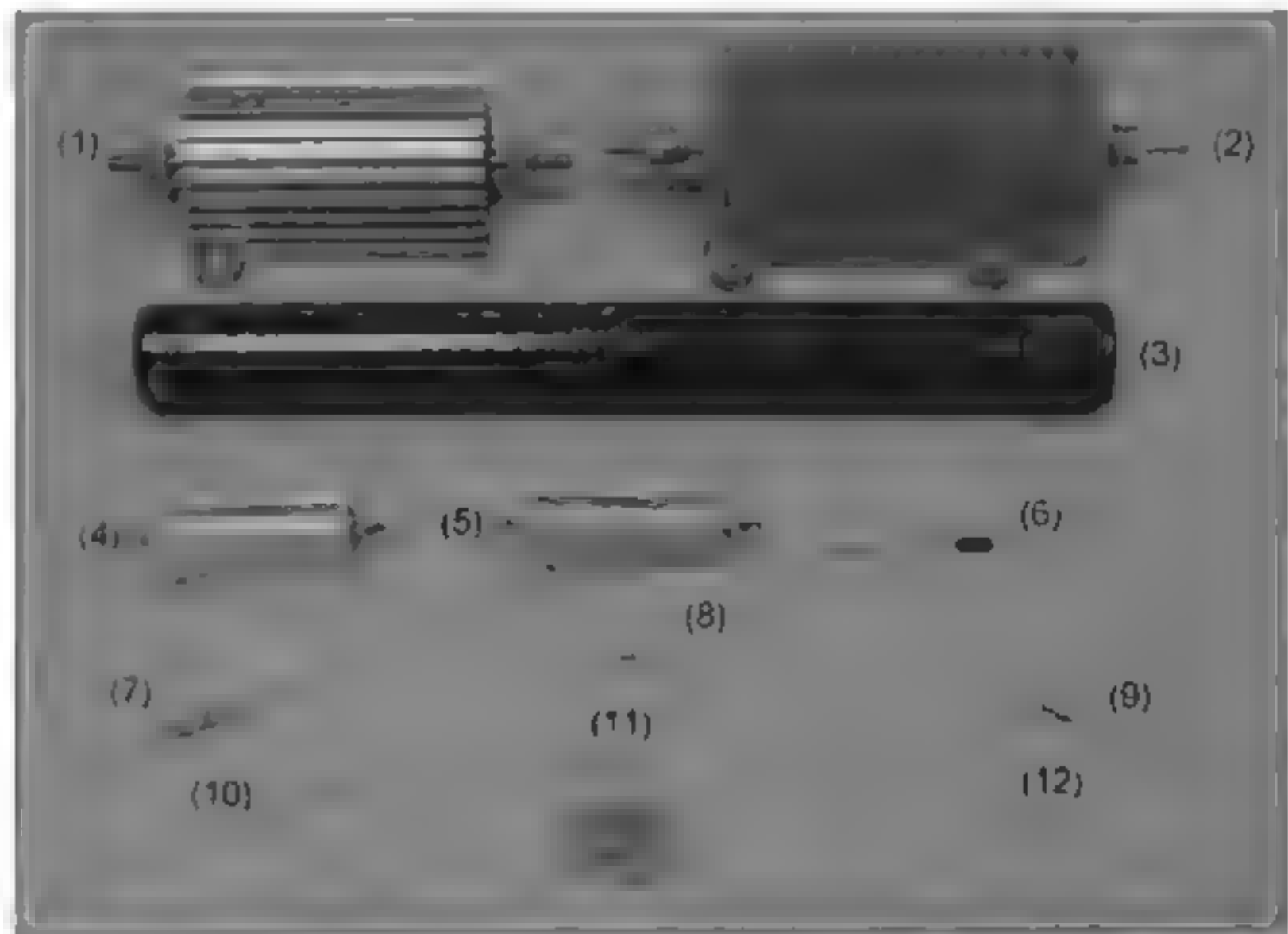
Embora na análise aqui apresentada sempre admitimos que os resistores sejam *lineares* e, conseqüentemente, descritos graficamente por uma linha reta que passa pela origem, é importante que os leitores percebam que existem alguns componentes muito úteis e de interesse prático que apresentam uma característica resistiva *não linear*, isto é, a relação tensão-corrente não pode ser representada por uma linha reta.

A lâmpada de uma lanterna, apresentada no Capítulo 1, é um exemplo de componente que apresenta característica não linear. A curva típica representativa do comportamento de uma lâmpada é mostrada na Fig. 2.2b.

Uma vez que um resistor é um componente passivo, a relação corrente-tensão apropriada é a ilustrada na Fig. 2.2a. A potência alimentada por meio dos terminais é absorvida pelo



(a)



(b)

Figura 2.1 (a) Símbolo de um resistor; (b) alguns dispositivos de utilização prática. (1), (2) e (3) são resistores de alta potência. (4) e (5) são resistores fixos de alta dissipação. (6) é um resistor de alta exatidão. (7) a (12) são resistores fixos com diferentes potências nominais. (Foto cortesia de Mark Nelms e Jo Ann Loden)

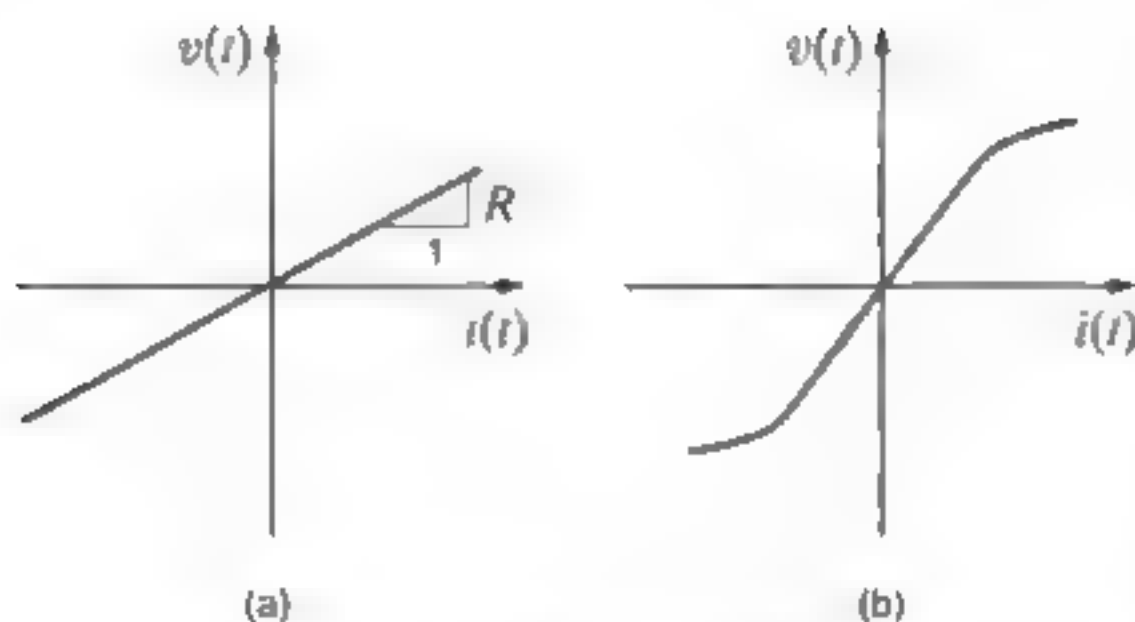


Figura 2.2 Representação gráfica da relação tensão-corrente de (a) um resistor linear e (b) uma lâmpada.

resistor. Note que a carga se move do potencial mais alto para o potencial mais baixo ao passar pelo resistor, e a energia absorvida é dissipada pelo resistor na forma de calor. Conforme indicado no Capítulo 1, a taxa de dissipação de energia é a potência instantânea e pode ser expressa por

$$p(t) = v(t)i(t) \quad 2.2$$

que, com o uso da Eq. (2.1), pode ser escrita como

$$p(t) = Ri^2(t) = \frac{v^2(t)}{R} \quad 2.3$$

Essa equação mostra que a potência é uma função não linear tanto da corrente quanto da tensão e que representa sempre uma grandeza positiva.

A condutância, representada pelo símbolo G , é outra grandeza com vasta aplicação na análise de circuitos. Por definição, a condutância é o inverso da resistência; isto é,

$$G = \frac{1}{R} \quad 2.4$$

A unidade de condutância é o siemens, e a relação entre as unidades é

$$1 \text{ S} = 1 \text{ A/V}$$

Utilizando a Eq. (2.4), duas expressões adicionais podem ser escritas, quais sejam,

$$i(t) = Gv(t) \quad 2.5$$

e

$$p(t) = \frac{i^2(t)}{G} = Gv^2(t) \quad 2.6$$

A Eq. (2.5) é outra forma pela qual a lei de Ohm pode ser expressa.

Dois valores específicos de resistência, e os correspondentes de condutância, são muito importantes: $R = 0$ e $R = \infty$.

Para analisar esses dois casos, considere o circuito mostrado na Fig. 2.3a. O símbolo de resistência variável é utilizado para descrever um resistor como o utilizado no controle de volume de um rádio ou de uma televisão. Quando a resistência diminui progressivamente, ficando cada vez menor, atinge-se finalmente uma condição em que a resistência fica nula, e o circuito é reduzido àquele mostrado na Fig. 2.3b; isto é, a resistência pode ser substituída por um condutor pleno (curto-circuito). Por outro lado, se a resistência é aumentada progressivamente, tornando-se cada vez maior, atinge-se finalmente uma condição na qual ela será extremamente alta (resistência infinita) e pode ser substituída por um circuito aberto, conforme mostrado na Fig. 2.3c. Note que, no caso de um curto-circuito, em que $R = 0$,

$$\begin{aligned} v(t) &= Ri(t) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Portanto, $v(t) = 0$, embora a corrente possa assumir, teoricamente, qualquer valor. Em um circuito aberto, caso em que $R = \infty$, tem-se

$$\begin{aligned} i(t) &= v(t)/R \\ &= 0 \end{aligned}$$

Assim, a corrente é nula independentemente do valor da tensão entre os terminais abertos.

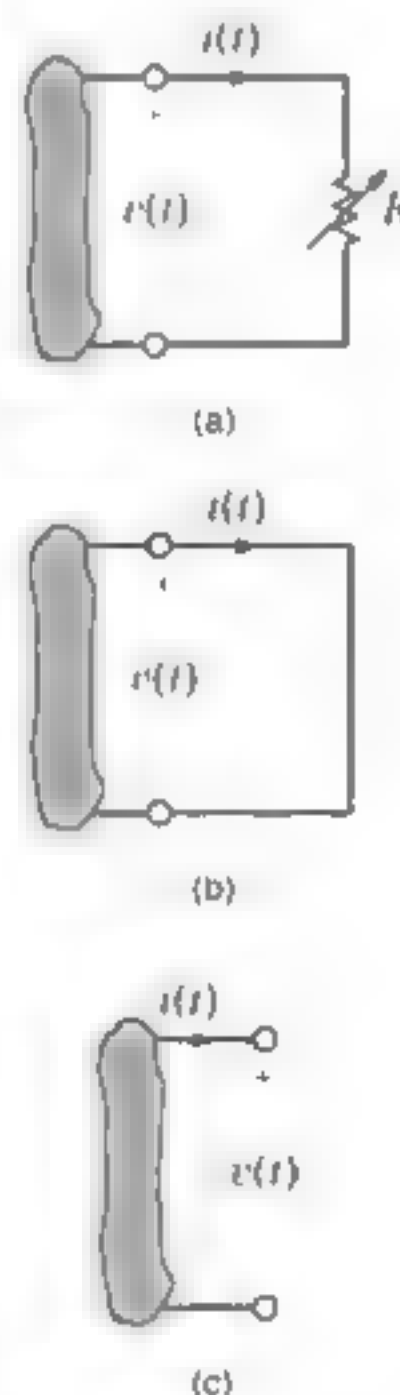


Figura 2.3 Descrições para a condição de curto-circuito e circuito aberto.

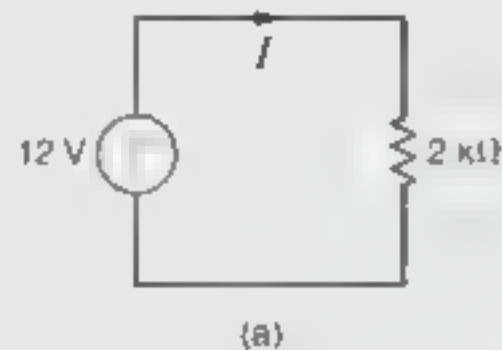
EXEMPLO 2.1

Determine a corrente e a potência absorvidas pelo resistor do circuito mostrado na Fig. 2.4a.

SOLUÇÃO

Utilizando a Eq. (2.1), obtém-se a corrente como

$$I = V/R = 12/2k = 6 \text{ mA}$$



Observe que como muitos dos resistores empregados nas análises aqui apresentadas são expressos em $k\Omega$, o fator multiplicador k será utilizado nas equações ao invés de 1 000. A potência absorvida pelo resistor pode ser calculada pela Eq. (2.2) ou (2.3) como

$$\begin{aligned} P &= VI = (12)(6 \times 10^{-3}) = 0,072 \text{ W} \\ &= I^2 R = (6 \times 10^{-3})^2 (2k) = 0,072 \text{ W} \\ &= V^2/R = (12)^2/2k = 0,072 \text{ W} \end{aligned}$$

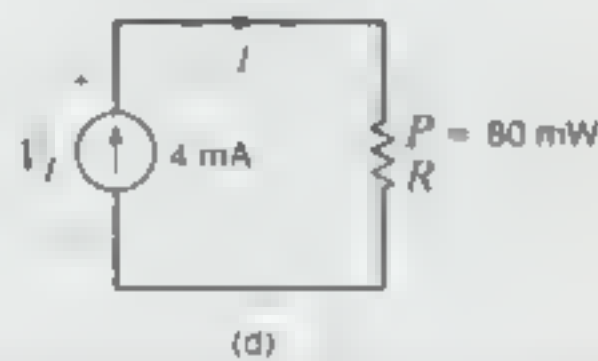
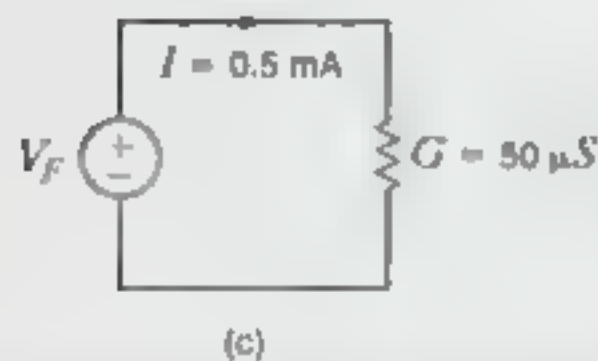
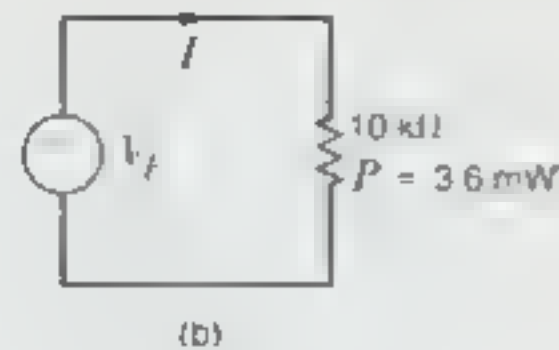


Figura 2.4 Circuitos para os Exemplos 2.1 e 2.4.

EXEMPLO 2.2

A potência absorvida pelo resistor de $10 \text{ k}\Omega$ na Fig. 2.4b é $3,6 \text{ mW}$. Determine a tensão e a corrente no circuito.

SOLUÇÃO

Utilizando a relação da potência, pode-se determinar qualquer uma das incógnitas:

$$\begin{aligned} V_F^2/R &= P \\ V_F^2 &= (3,6 \times 10^{-3})(10k) \\ V_F &= 6 \text{ V} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I^2 R &= P \\ I^2 &= (3,6 \times 10^{-3})/10k \\ I &= 0,6 \text{ mA} \end{aligned}$$

Além disso, uma vez determinada a tensão V_F , a corrente I pode ser obtida pela lei de Ohm e, da mesma forma, uma vez conhecida a corrente I , a lei de Ohm pode ser utilizada para se obter o valor de V_F . Observe que as equações para a potência envolvem os termos I^2 e V_F^2 . Portanto, $I = -0,6 \text{ mA}$ e $V_F = -6 \text{ V}$ também atendem às equações matemáticas e, nesse caso, o sentido de ambas as grandezas, a tensão e a corrente, são invertidos.

EXEMPLO 2.3

Dado o circuito mostrado na Fig. 2.4c, deseja-se obter o valor da fonte de tensão e a potência absorvida pela resistência.

SOLUÇÃO

A tensão vale

$$V_F = I/G = (0,5 \times 10^{-3})/(50 \times 10^{-6}) = 10 \text{ V}$$

Assim, a potência absorvida é

$$P = I^2/G = (0,5 \times 10^{-3})^2/(50 \times 10^{-6}) = 5 \text{ mW}$$

Ou, poder-se-ia simplesmente observar que

$$R = 1/G = 20 \text{ k}\Omega$$

e, portanto

$$V_F = IR = (0,5 \times 10^{-3})(20k) = 10 \text{ V}$$

e a potência poderia ser determinada utilizando $P = I^2 R = V_F^2/R = V_F I$.

EXEMPLO 2.4

Dada a rede mostrada na Fig. 2.4d, deseja-se determinar R e V_F .

SOLUÇÃO

Utilizando a relação da potência, obtém-se que

$$R = P/I^2 = (80 \times 10^{-3})/(4 \times 10^{-3})^2 = 5 \text{ k}\Omega$$

A tensão pode agora ser deduzida utilizando a lei de Ohm, isto é,

$$V_F = IR = (4 \times 10^{-3})(5\text{k}) = 20 \text{ V}$$

A tensão também poderia ser obtida a partir das relações envolvendo a potência nas Eqs. (2.2) e (2.3).

Antes de terminar essa discussão inicial sobre circuitos que contêm fontes e um único resistor, é importante observar um fenômeno que estará presente nos circuitos constituídos por várias fontes e vários resistores. A presença de uma fonte de tensão entre um par de terminais informa precisamente qual a tensão entre os dois terminais independentemente do que ocorre com o equilíbrio do circuito. O que não se conhece é a corrente na fonte de tensão. Deve-se aplicar os conceitos da análise de circuitos em toda a rede para se determinar essa corrente. Da mesma forma, a presença de uma fonte de corrente conectada entre dois terminais especifica o valor exato da corrente pela fonte

entre os terminais. O que não se sabe é o valor da tensão entre os terminais da fonte de corrente. Esse valor deve ser calculado por meio da aplicação dos conceitos da análise de circuitos a toda a rede. Além disso, é importante enfatizar que ao se aplicar a lei de Ohm, a expressão $V = IR$ define a relação entre a tensão *diretamente entre os terminais* de um resistor R e a corrente que está *presente nesse resistor*. A lei de Ohm não se aplica quando a tensão está presente em uma das partes da rede e a corrente refere-se à outra parte. Esse é um erro comum cometido por estudantes que tentam aplicar $V = IR$ a um resistor R no interior da rede utilizando uma tensão V em alguma outra posição da rede.

Avaliação do Aprendizado

E2.1 Para os circuitos mostrados na Fig. E2.1, obtenha (a) a corrente I e a potência absorvida pelo resistor mostrado na Fig. E2.1a, e (b) a tensão entre os terminais da fonte de corrente e a potência fornecida pela fonte mostrada na Fig. E2.1b.

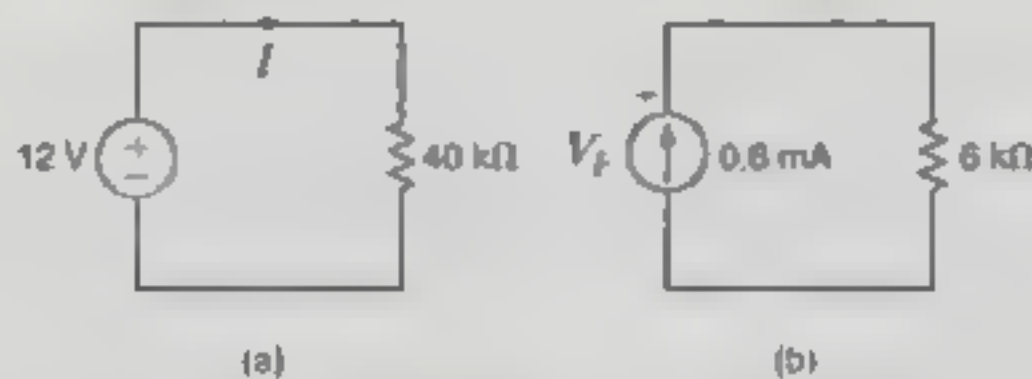


Figura E2.1

RESPOSTAS: (a) $I = 0,3 \text{ mA}$ e $P = 3,6 \text{ mW}$, (b) $V_F = 3,6 \text{ V}$ e $P = 2,16 \text{ mW}$.

E2.2 Para os circuitos mostrados na Fig. E2.2, (a) obtenha R e V_F no circuito mostrado na Fig. E2.2a, e (b) determine I e R no circuito mostrado na Fig. E2.2b.

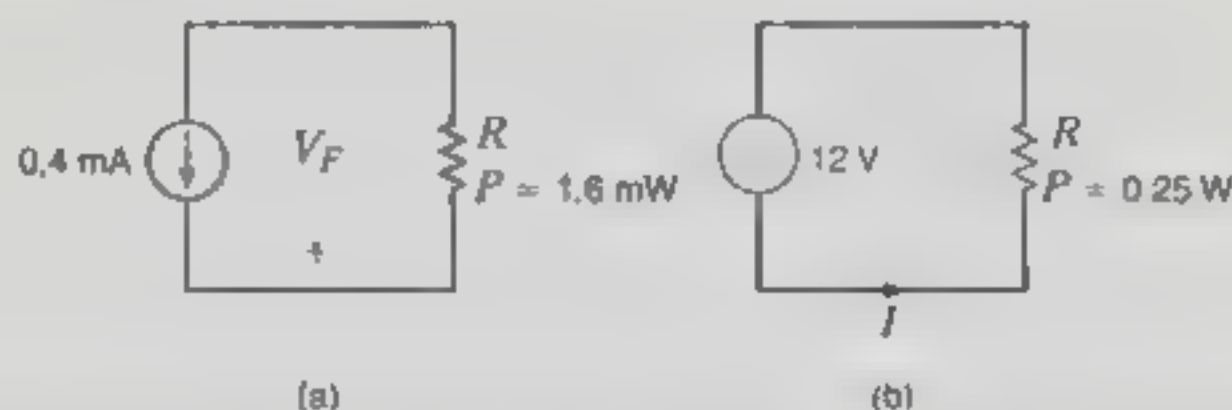


Figura E2.2

RESPOSTAS: (a) $R = 10 \text{ k}\Omega$ e $V_F = 4 \text{ V}$; (b) $I = 20,8 \text{ mA}$ e $R = 576 \Omega$.

E2.3 A potência absorvida por G_x no circuito mostrado na Fig. E2.3 é 50 mW. Determine G_x .

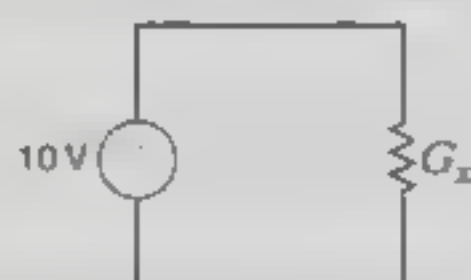


Figura E2.3

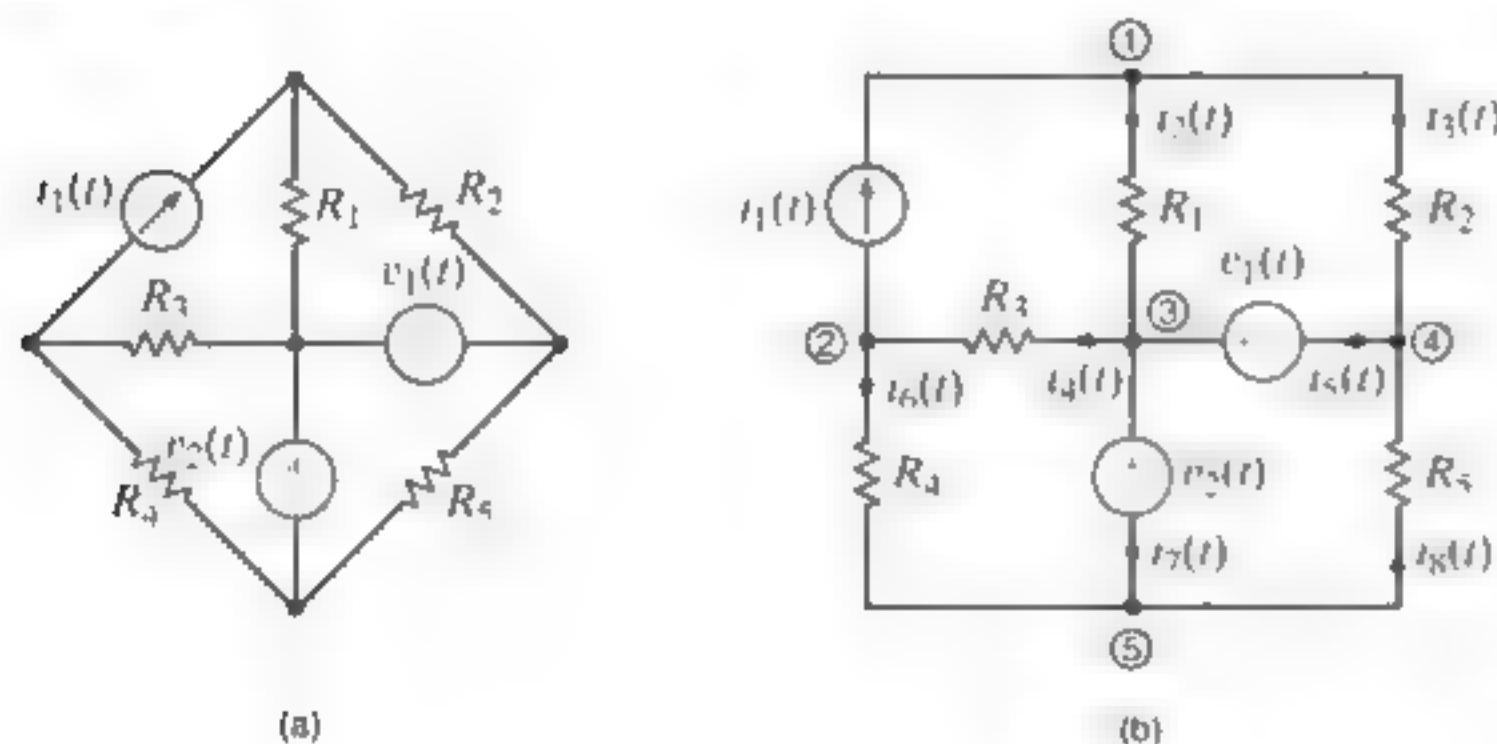
RESPOSTA: $G_x = 500 \mu\text{S}$.

2.2 Leis de Kirchhoff

Todos os circuitos considerados anteriormente possuíam um único resistor e foram analisados utilizando a lei de Ohm. A partir de agora se começa a ampliar a capacidade de análise de redes mais complexas que possam resultar da interconexão de dois ou mais desses componentes simples. Admite-se que a interconexão seja realizada por condutores elétricos (fios) que possuem resistência nula; isto é, condutores ideais. Uma vez que os fios possuem resistência nula, a energia no circuito fica, essencialmente, localizada em cada um de seus componentes e emprega-se o termo *circuito de parâmetros concentrados* para descrever a rede.

Com o objetivo de facilitar a discussão, serão definidos alguns termos a serem empregados ao longo da análise aqui apresentada. De acordo com o procedimento adotado ao longo desse texto, serão utilizados exemplos para ilustrar os conceitos e definir os termos apropriados. Por exemplo, o circuito mostrado na Fig. 2.5a será utilizado para se descrever os termos *nó*, *laço* e *ramo*. Um *nó* é simplesmente um ponto de conexão de dois ou mais componentes do circuito. O leitor deve ter o cuidado de observar que, embora um mesmo nó possa estar localizado em vários pontos de um mesmo condutor ideal, ele ainda será um único nó. Essa situação é ilustrada na Fig. 2.5b, em que o circuito foi redesenhado. O nó 5 consiste em todo o condutor de conexão inferior do circuito.

Ao se partir de algum ponto do circuito se movendo ao longo de condutores ideais em qualquer direção até se encontrar um componente do circuito, o caminho total percorrido sobre o condutor representa um único nó. Portanto, pode-se admitir que um nó é constituído pela extremidade de um componente do circuito junto com todos os condutores perfeitos que a ele são unidos. Examinando o circuito, observa-se que nele existem vários caminhos. Um *laço* é simplesmente qualquer *caminho fechado* do circuito no qual nenhum nó seja encontrado mais de uma vez. Por exemplo, partindo do nó 1, um laço poderia conter os elementos R_1 , v_1 , R_4 e i_1 ; outro laço poderia conter R_2 , v_1 , v_2 , R_4 e i_1 , e assim por diante. Entretanto, o caminho R_1 , v_1 , R_5 , v_2 , R_3 e i_1 não é um laço tendo em vista que se passou pelo nó 3 duas vezes. Finalmente, um *ramo* é uma região do circuito que contém apenas um único componente e os nós de cada uma de suas extremidades. O circuito mostrado na Fig. 2.5 contém oito ramos



[atenção]

A lei de Kirchhoff das correntes (LKC) é uma lei extremamente importante e de grande utilização.

Com as definições apresentadas no parágrafo anterior, pode-se agora considerar as leis de Kirchhoff, assim chamadas em homenagem ao cientista alemão Gustav Robert Kirchhoff. Essas duas leis são bastante simples, porém extremamente importantes. Não será objeto de atenção a prova dessas leis, pois estaria além do nível de compreensão que se espera neste texto. Entretanto, serão mostradas suas utilidades e atenção será dada para que o leitor fique proficiente em suas utilizações. A primeira lei é a *lei de Kirchhoff das correntes* (LKC), que estabelece que a soma algébrica das correntes que entram em qualquer nó é nula. Na forma matemática, essa lei pode ser expressa por

$$\sum_{j=1}^N i_j(t) = 0 \quad 2.7$$

em que $i_j(t)$ é a j -ésima corrente que entra no nó pelo ramo j , e N é o número de ramos conectados ao nó. Para entender o uso dessa lei, considere o nó 3 mostrado na Fig. 2.5. A aplicação da lei de Kirchhoff das correntes a esse nó fornece

$$i_2(t) - i_4(t) + i_5(t) - i_7(t) = 0$$

Admitiu-se que os sinais algébricos das correntes que entram no nó são positivos e, portanto, os sinais das correntes que saem do nó são negativos.

Multiplicando-se a equação anterior por -1 , obtém-se a expressão

$$-i_2(t) + i_4(t) - i_5(t) + i_7(t) = 0$$

que simplesmente estabelece que a soma algébrica das correntes que saem de um nó é nula. De modo alternativo, pode-se escrever a equação anterior como

$$i_2(t) + i_5(t) = i_4(t) + i_7(t)$$

que estabelece que a soma das correntes que entram em um nó é igual à soma das correntes que saem do nó. Ambas as expressões em itálico são formas alternativas da lei de Kirchhoff das correntes.

Figura 2.5 Circuito utilizado para ilustrar a lei de Kirchhoff das correntes (LKC).

Uma vez mais se enfatiza que a última afirmativa estabelece que a soma das *variáveis* que foram definidas como entrando no nó é igual à soma das *variáveis* que foram definidas como saindo do nó, e não necessariamente esses são os sentidos reais das correntes. Por exemplo, $i_j(t)$ pode ser definida como entrando no nó, porém se seu valor real for negativo, haverá carga positiva deixando o nó.

Note que a lei de Kirchhoff das correntes estabelece que a soma *algébrica* das correntes que entram ou saem de um nó deve ser nula. Começa-se agora a perceber por que, no Capítulo 1, se estabeleceu que as especificações da intensidade e do sentido de uma corrente são consideradas como de vital importância. Lembre-se de que corrente representa carga em movimento. Com base nos conhecimentos de física, as cargas não podem ser armazenadas em um nó. Em outras palavras,

quando se tem uma determinada quantidade de carga entrando em um nó, uma quantidade igual deve sair daquele mesmo nó. A lei de Kirchhoff das correntes é baseada nesse princípio de conservação da carga.

Finalmente, é possível generalizar a lei de Kirchhoff das correntes de forma a incluir uma superfície fechada. Pode-se entender superfície fechada como um conjunto de componentes interconectados completamente contidos em uma superfície. Uma vez que a corrente que entra em cada componente contido na superfície é igual àquela que sai do componente (isto é, o componente não armazena carga), a corrente que entra em uma interconexão de componentes é igual àquela que sai da interconexão. Portanto, a lei de Kirchhoff das correntes pode também ser estabelecida como: *A soma algébrica das correntes que entram em qualquer superfície fechada é nula.*

EXEMPLO 2.5

Seja a obtenção das equações provenientes da aplicação da LKC a cada nó da rede mostrada na Fig. 2.5 admitindo que as correntes que saem de um nó são positivas.

SOLUÇÃO

As equações da LKC para os nós 1 a 5 ficam

$$\begin{aligned} -i_1(t) + i_2(t) + i_3(t) &= 0 \\ i_1(t) - i_4(t) + i_6(t) &= 0 \\ i_1(t) + i_2(t) - i_5(t) + i_7(t) &= 0 \\ i_4(t) - i_5(t) - i_8(t) &= 0 \\ -i_6(t) - i_7(t) + i_9(t) &= 0 \end{aligned}$$

Observe cuidadosamente que, ao se adicionarem as primeiras quatro equações, será obtida a quinta equação. O que isso significa? Lembre-se de que este é o caso de um conjunto de equações que não é linearmente independente. Todavia, pode-se mostrar que as primeiras quatro equações são linearmente independentes. Mantenha esse conceito em mente porque ele será muito importante na ocasião em que se escreverem as equações necessárias para a determinação de todas as correntes e tensões em uma rede, o que ocorrerá no próximo capítulo.

EXEMPLO 2.6

A rede mostrada na Fig. 2.5 é representada pelo diagrama topológico mostrado na Fig. 2.6. Deseja-se determinar as correntes incógnitas da rede.

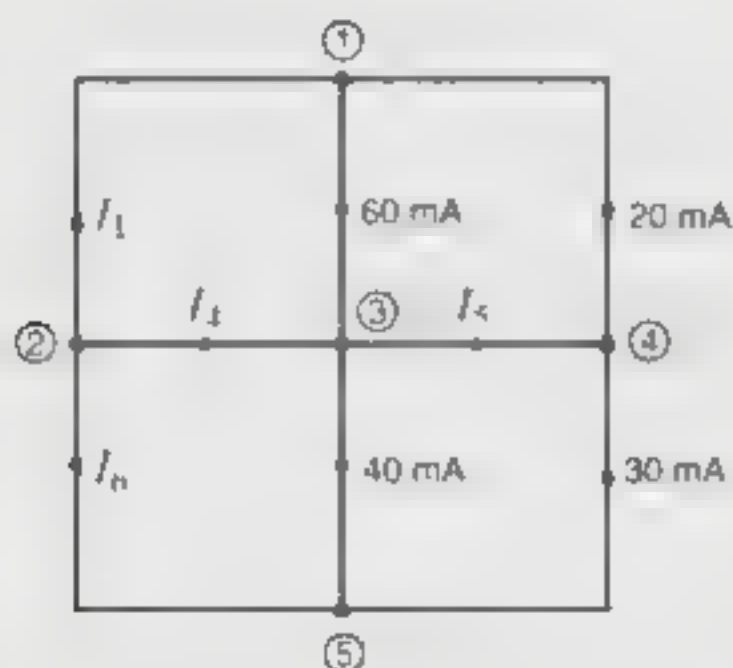


Figura 2.6 Diagrama topológico para o circuito mostrado na Fig. 2.5.

SOLUÇÃO

Admitindo que as correntes que saem dos nós sejam positivas, as equações provenientes da aplicação da LKC para os nós 1 a 4 podem ser expressas por

$$\begin{aligned} -I_1 + 0,06 - 0,02 &= 0 \\ I_1 - I_4 + I_6 &= 0 \\ -0,06 + I_4 - I_5 + 0,04 &= 0 \\ -0,02 + I_5 - 0,03 &= 0 \end{aligned}$$

A primeira equação fornece I_1 e a última fornece I_5 . Conhecendo-se I_5 pode-se obter imediatamente I_4 a partir da terceira equação. Assim, os valores de I_1 e I_4 fornecem o valor de I_6 pela segunda equação. Os resultados, portanto, são $I_1 = 80$ mA, $I_4 = 70$ mA, $I_5 = 50$ mA e $I_6 = -10$ mA.

Conforme indicado anteriormente, as fontes dependentes ou controladas são muito importantes, uma vez que são encontradas na análise de circuitos que contêm componentes ativos como, por exemplo, transistores. O exemplo a seguir apresenta um circuito que contém uma fonte de corrente controlada por corrente.

EXEMPLO 2.7

Seja a determinação das equações provenientes da aplicação da LKC para o circuito mostrado na Fig. 2.7.

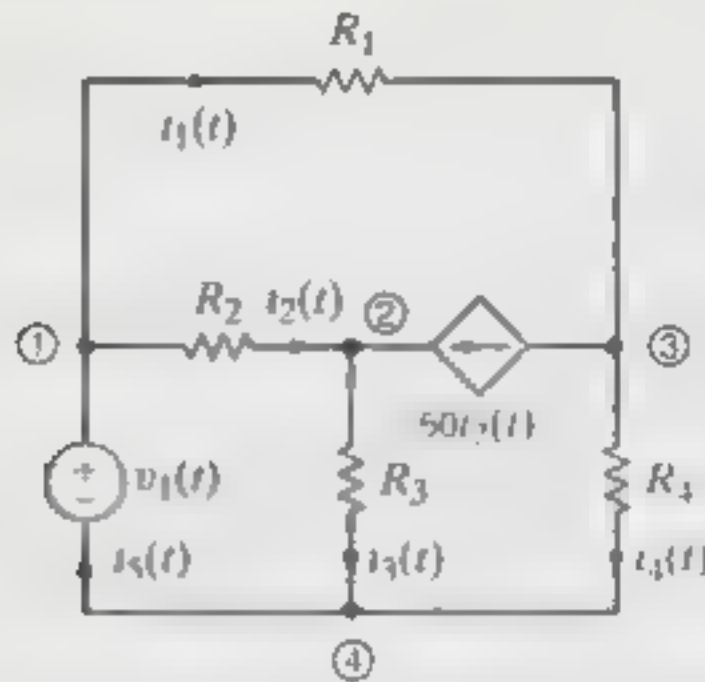


Figura 2.7 Circuito contendo uma fonte de corrente dependente.

A segunda lei de Kirchhoff, chamada *lei de Kirchhoff das tensões* (LKT), estabelece que *a soma algébrica das tensões ao longo de qualquer laço é nula*. Como no caso da lei de Kirchhoff das correntes, a prova dessa lei será dispensada, e o texto aqui apresentado estará concentrado no entendimento de como aplicá-la. Mais uma vez o leitor deve ser cauteloso e se lembrar de que os problemas até agora tratados referem-se apenas a circuitos com parâmetros concentrados. Esses circuitos são conservativos, o que significa dizer que o trabalho necessário para se mover uma carga unitária ao longo de qualquer laço é nulo.

No Capítulo 1, a tensão foi relacionada à diferença entre os níveis de energia em um circuito e foi realizada uma breve dis-

SOLUÇÃO

As equações resultantes da aplicação da LKC para os nós 1 a 4 podem ser expressas por

$$i_1(t) + i_2(t) - i_3(t) = 0$$

$$i_2(t) + i_3(t) - 50i_2(t) = 0$$

$$-i_1(t) + 50i_2(t) + i_4(t) = 0$$

$$i_3(t) - i_1(t) - i_4(t) = 0$$

Adicionando-se as primeiras três equações obtém-se o negativo da quarta equação. O que essa condição permite que se afirme a respeito desse conjunto de equações?

cussão sobre o processo de conversão de energia ocorrente em uma lanterna. Devido a esta relação entre tensão e energia, a lei de Kirchhoff das tensões é baseada na conservação de energia.

Lembre-se de que, no caso da lei de Kirchhoff das correntes, o sinal algébrico foi necessário para indicar se uma corrente estava entrando ou saindo de um nó. Na lei de Kirchhoff das tensões, o sinal algébrico é utilizado para indicar a polaridade da tensão. Em outras palavras, ao se percorrer um circuito, é necessário igualar a zero a soma dos aumentos e das diminuições ocorrentes nos níveis de energia. Portanto, é importante indicar se o nível de energia está aumentando ou diminuindo ao se "transportar" cada componente de um laço.

EXEMPLO 2.8

Seja a determinação das correntes I_4 e I_1 da rede representada pelo diagrama topológico mostrado na Fig. 2.6.

SOLUÇÃO

Esse diagrama é redesenhado na Fig. 2.8; o nó 1 está incluso na superfície 1 e os nós 3 e 4 estão inclusos na superfície 2. Uma rápida revisão do exemplo anterior indica que o valor de I_4 foi obtido a partir do valor de I_5 . Entretanto, I_5 agora está completamente incluso na superfície 2. Ao se aplicar a LKC à superfície 2, admitindo que as correntes que saem da superfície são positivas, obtém-se

$$I_4 - 0,06 - 0,02 - 0,03 + 0,04 = 0$$

ou

$$I_4 = 70 \text{ mA}$$

que foi obtida sem o conhecimento de I_5 . Da mesma forma para a superfície 1, a corrente que entra deve ser igual à que sai, logo, $I_1 = 80 \text{ mA}$. O leitor é encorajado a "cortar" a rede

mostrada na Fig. 2.6 em duas partes de forma aleatória e mostrar que a LKC é sempre satisfeita nos contornos das superfícies.

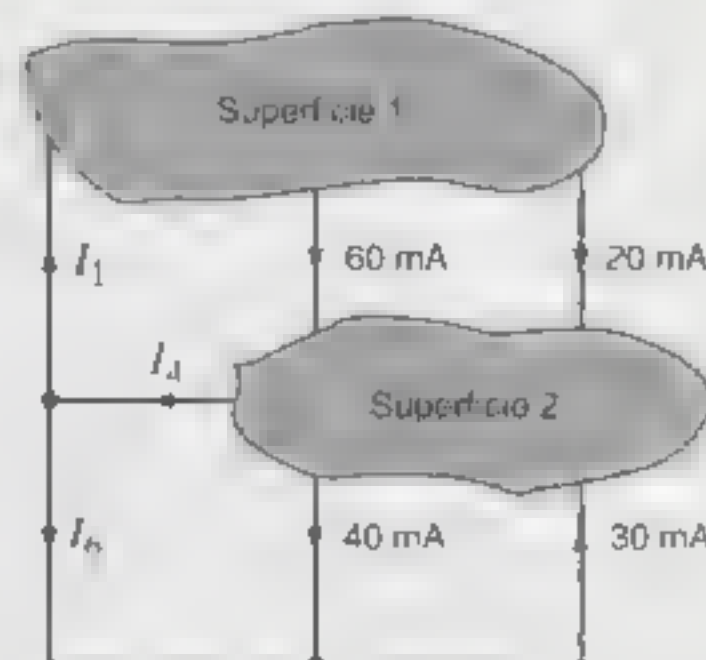


Figura 2.8 Diagrama utilizado para demonstrar a LKC para uma superfície.

Avaliação do Aprendizado

E2.4 Dada a rede mostrada na Fig. E2.3, determine (a) a corrente I_1 na Fig. E2.4a e (b) a corrente I_T indicada na Fig. E2.4b

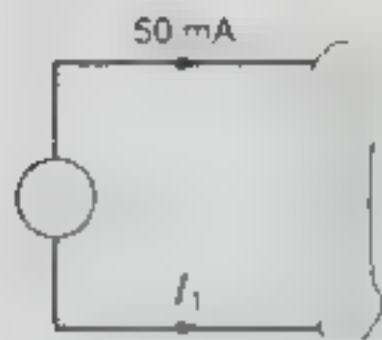
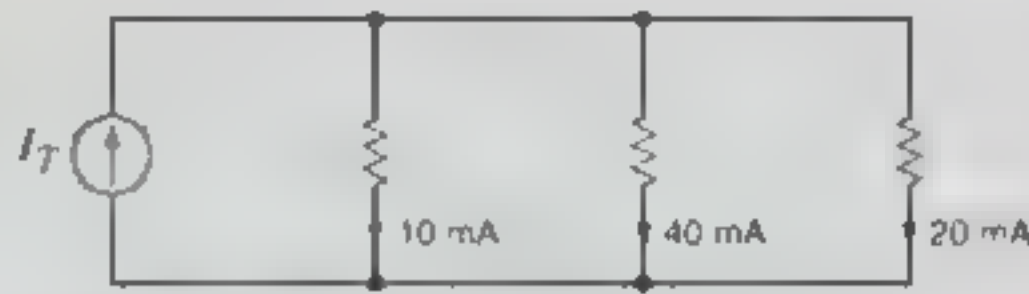


Figura E2.4 (a)



(b)

RESPOSTAS:

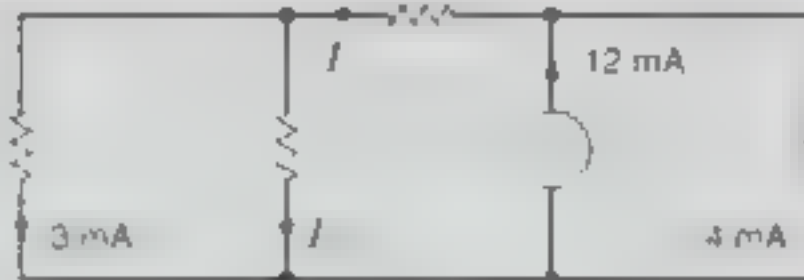
(a) $I = 50 \text{ mA}$;

(b) $I_T = 70 \text{ mA}$.

E2.5 Determine (a) a corrente I da rede mostrada na Fig. E2.5a e (b) as correntes I e I_1 indicadas no circuito da Fig. E2.5b.



Figura E2.5 (a)



(b)

RESPOSTAS: (a) $I_1 = 6 \text{ mA}$;

(b) $I = 8 \text{ mA}$ e $I_2 = 5 \text{ mA}$

E2.6 Determine a corrente i_x indicada nos circuitos mostrados na Fig. E2.6.

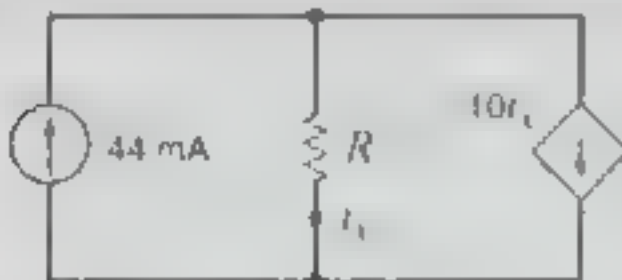
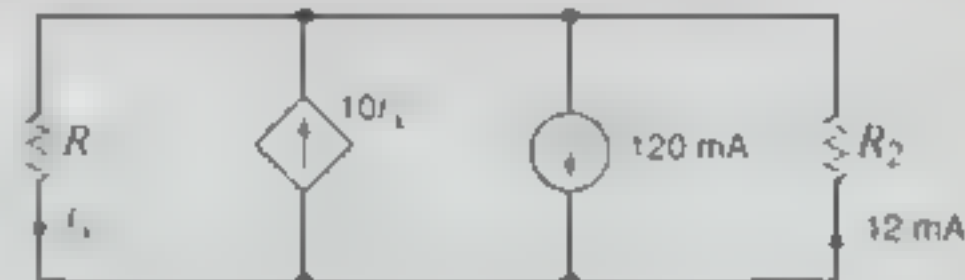


Figura E2.6 (a)



(b)

RESPOSTAS: (a) $i_x = 4 \text{ mA}$;

(b) $i_x = 12 \text{ mA}$

Ao se aplicar a LKT, deve-se percorrer qualquer laço do circuito e igualar a zero a soma dos aumentos e diminuições nos níveis de energia. Nesse instante, tem-se uma decisão a ser tomada. Deseja-se considerar uma diminuição no nível de energia como positiva ou negativa? Será convencionado que uma diminuição no nível de energia é positiva e um aumento no nível de energia é negativo. Ao se percorrer um laço, será encontrado primeiro um sinal positivo para uma diminuição no nível de energia e um sinal negativo para um aumento no nível de energia.

Finalmente, emprega-se a convenção V_{ab} para indicar a tensão do ponto a em relação ao ponto b , isto é, a variável para a

tensão entre o ponto a e o ponto b , com o ponto a sendo considerado positivo em relação ao ponto b . Como o potencial é medido entre dois pontos, torna-se conveniente utilizar uma seta entre os dois pontos, orientada para o nó positivo. Note que a notação com duplo subscrito, a notação na qual são utilizados os sinais $+$ e $-$, e a notação com uma seta simples serão similares se a orientação da seta apontar para o terminal positivo e para o primeiro subscrito na notação de duplo subscrito. Todas essas formas equivalentes de indicação de tensões são mostradas na Fig. 2.11.

EXEMPLO 2.9

Considere o circuito mostrado na Fig. 2.9. Se as tensões V_{R_1} e V_{R_2} forem conhecidas, será possível determinar V_{R_3} .

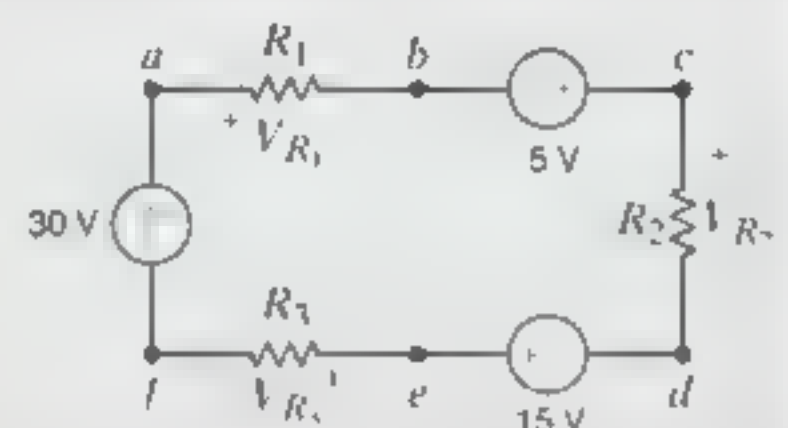


Figura 2.9 Circuito utilizado para ilustrar a LKT.

SOLUÇÃO

Partindo-se do ponto a do circuito e percorrendo-o no sentido horário, obtém-se a equação

$$+V_R = 5 + V_R = 15 + V_R = 30 = 0$$

que pode ser escrita como

$$+V_{R_1} + V_{R_2} + V_{R_3} = 5 + 15 + 30 = 50$$

Suponha agora que as tensões V_{R_1} e V_{R_2} sejam conhecidas e que valham 18 V e 12 V, respectivamente. Com esses valores pode-se obter $V_{R_3} = 20$ V.

EXEMPLO 2.10

Considere a rede mostrada na Fig. 2.10.

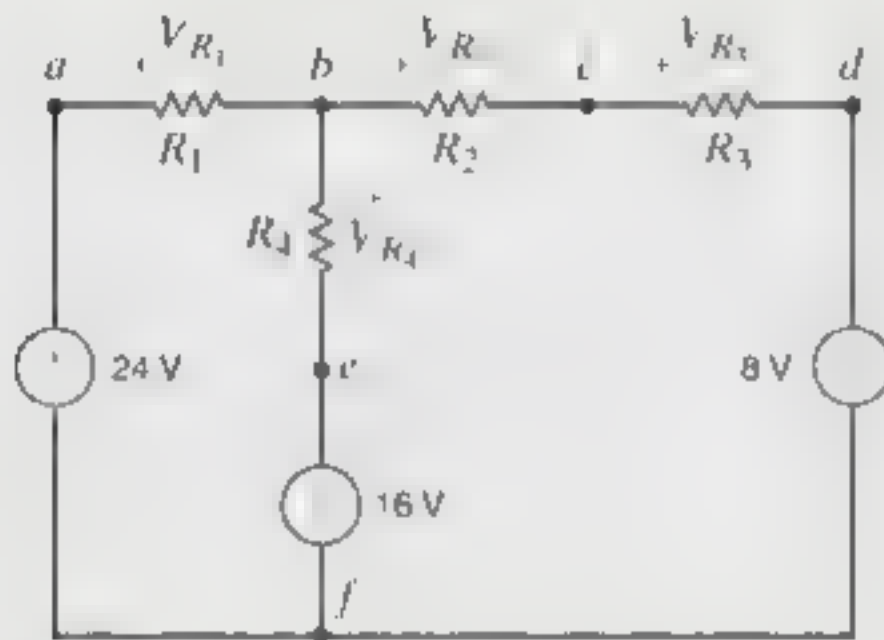


Figura 2.10 Circuito utilizado para explicar a LKT.

Pode-se demonstrar que apenas as equações de dois dos três laços possíveis são linearmente independentes.

SOLUÇÃO

Observe que essa rede possui três caminhos fechados possíveis: o laço da esquerda, o laço da direita e o laço externo. Aplicando a convenção para se escreverem as equações a partir da LKT e percorrendo o laço da esquerda partindo do ponto a , obtém-se

$$V_{R_1} + V_{R_2} - 16 - 24 = 0$$

A equação correspondente ao laço da direita partindo do ponto b pode ser expressa por

$$V_{R_2} + V_{R_3} + 8 + 16 - V_{R_4} = 0$$

A equação para o laço externo, partindo do ponto a , fica

$$V_{R_1} + V_{R_2} + V_{R_3} + 8 - 24 = 0$$

Note que, se as duas primeiras equações forem somadas, a terceira equação será reproduzida. Portanto, conforme indicado no Exemplo 2.5, as três equações não são linearmente independentes. Mais de uma vez, esse será um resultado a ser resgatado no próximo capítulo em que será verificada a necessidade apenas das duas primeiras equações para que as tensões incógnitas do circuito sejam determinadas.

A grande utilização da notação por uma seta deve-se ao fato de algumas vezes desejar-se indicar a tensão entre dois pontos

relativamente distantes em uma mesma rede. Nesse caso, as demais notações podem se tornar um pouco confusas.

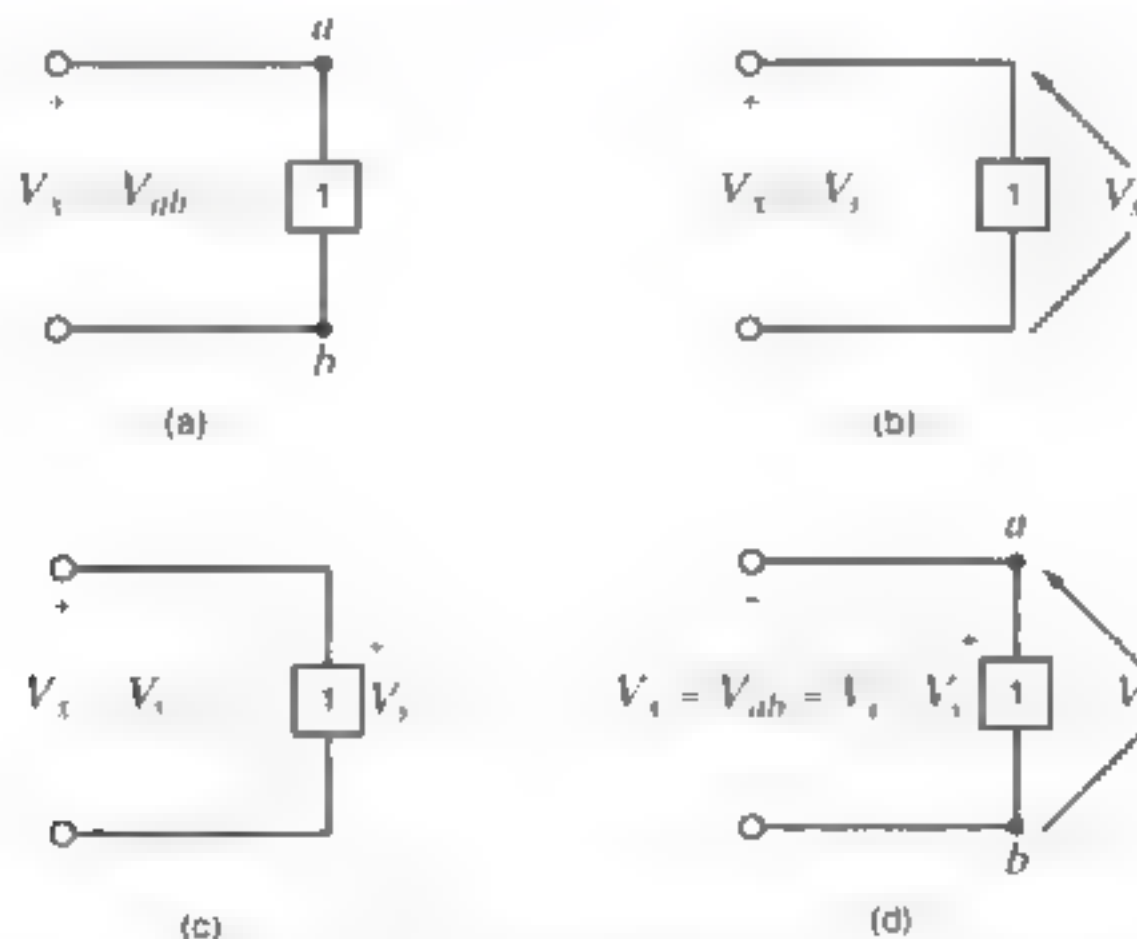


Figura 2.11 Formas equivalentes de indicação de uma tensão.

EXEMPLO 2.11

Considere o circuito mostrado na Fig. 2.12a. Pode-se aplicar a LKT para determinar o diferencial de tensão entre dois pontos. Especificamente, em termos da notação de duplo subscrito, seja a determinação de V_{ae} e V_{ea} .

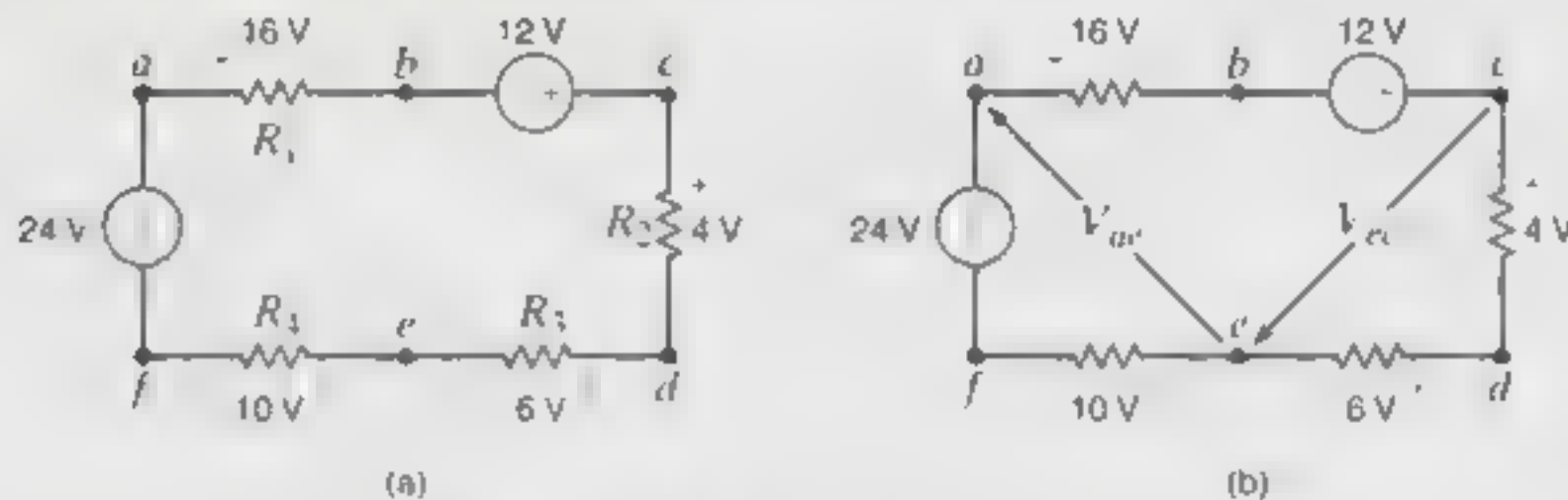


Figura 2.12 Circuito utilizado no Exemplo 2.11.

SOLUÇÃO

O circuito é redesenhado na Fig. 2.12b. Como os pontos a e e , bem como os pontos e e c , não fecham fisicamente um laço, a notação por meio de setas será muito útil. O procedimento a ser utilizado na determinação da tensão incógnita será a aplicação da LKT considerando a tensão incógnita em um caminho fechado. Portanto, para se determinar V_{ae} , pode-se utilizar o caminho $aefa$ ou $abcdea$. As equações para os dois caminhos nos quais V_{ae} é a única incógnita são

$$V_{ae} + 10 - 24 = 0$$

c

$$16 - 12 + 4 + 6 - V_{ae} = 0$$

Note que ambas as equações fornecem $V_{ae} = 14$ V. Mesmo antes de calcular V_{ae} , essa tensão pode ser obtida utilizando o caminho $cdec$ ou $cefabc$. Entretanto, uma vez que V_{ae} já foi determinada, pode-se também utilizar o caminho $ceabc$. A LKT para cada um desses caminhos resulta nas equações

$$\begin{aligned} 4 + 6 + V_{ae} &= 0 \\ -V_{ae} + 10 - 24 + 16 - 12 &= 0 \end{aligned}$$

c

$$V_{ae} - V_{ae} + 16 - 12 = 0$$

Cada uma dessas equações fornece $V_{ae} = -10$ V.

[atenção]

A lei de Kirchhoff das tensões (LKT) é uma lei extremamente importante e de grande utilização.

Em geral, a representação matemática da lei de Kirchhoff das tensões é expressa por

$$\sum_{j=1}^N v_j(t) = 0 \quad 2.8$$

em que $v_j(t)$ é a tensão entre os terminais do j -ésimo ramo (com o sentido de referência apropriado) de um laço que contém N tensões. Essa expressão é análoga à Eq. (2.7), representativa da lei de Kirchhoff das correntes.

EXEMPLO 2.12

Dado o circuito mostrado na Fig. 2.13 que possui uma fonte dependente, pode-se escrever as equações decorrentes da LKT para os dois caminhos fechados $abda$ e $bcdab$.

SOLUÇÃO

As duas equações resultantes da aplicação da LKT são

$$V_R + V_R - V_F = 0$$

$$20V_R + V_{R_1} - V_R = 0$$

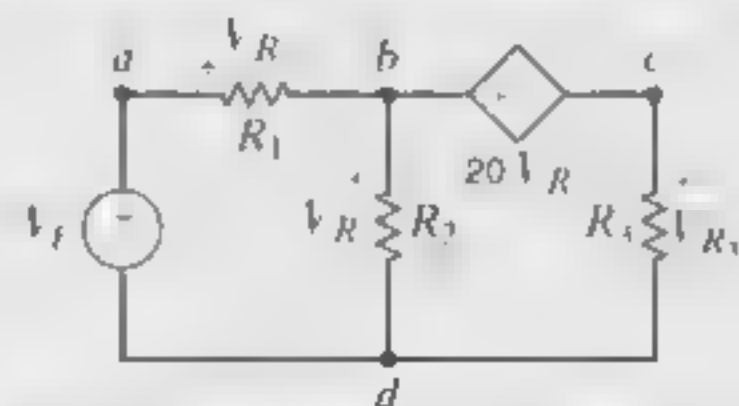


Figura 2.13 Circuito contendo uma fonte dependente.

Avaliação do Aprendizado

E2.7 Determine as correntes I_x e I_1 do circuito mostrado na Fig. E2.7

RESPOSTAS: $I_x = 2 \text{ mA}$ e $I_1 = 4 \text{ mA}$.

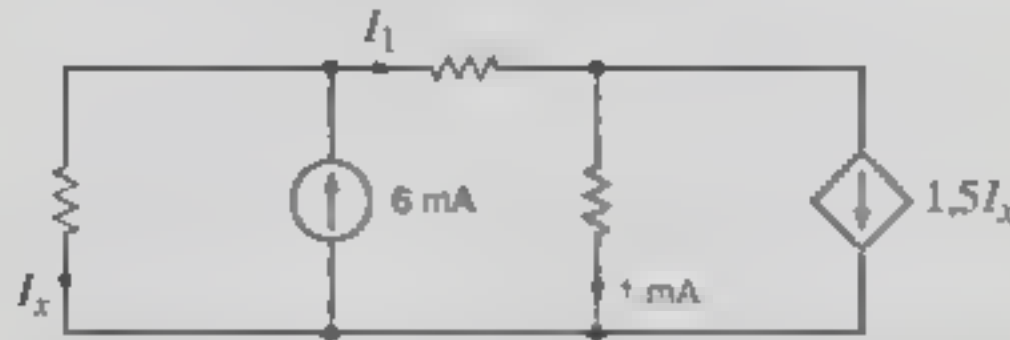


Figura E2.7

E2.8 Determine as tensões V_{ad} e V_{cb} da rede mostrada na Fig. E2.8.

RESPOSTAS: $V_{ad} = 26 \text{ V}$ e $V_{cb} = 10 \text{ V}$.

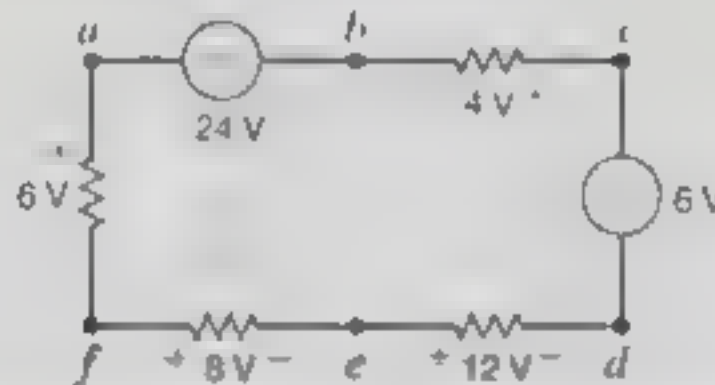


Figura E2.8

E2.9 Determine a tensão V_{bd} do circuito mostrado na Fig. E2.9.

RESPOSTA: $V_{bd} = 11 \text{ V}$.

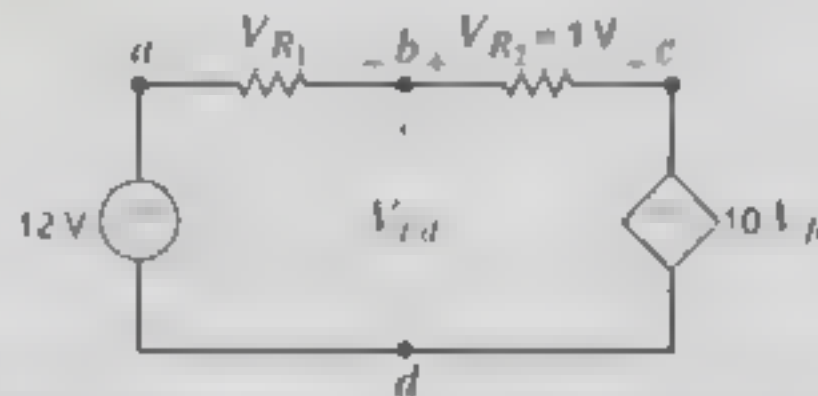


Figura E2.9

[atenção]

As sutilezas associadas à lei de Ohm, conforme aqui descritas, são importantes e devem ser incorporadas de forma a garantir que as variáveis possuam o sinal apropriado.

Antes de proceder à análise de circuitos simples, é extremamente importante enfatizar um ponto sutil, porém, crítico. A lei de Ohm, definida pela equação $V = IR$, refere-se à relação existente entre a tensão e a corrente conforme definido na Fig. 2.14a. Se o sentido da corrente ou da tensão, e não de ambos,

for invertido, a relação entre a corrente e a tensão passa a ser $V = -IR$. De forma similar, dado o circuito mostrado na Fig. 2.14b, se a polaridade da tensão entre os terminais A e B for especificada conforme indicado, então o sentido da corrente I será do ponto B para o ponto A, passando por R . Da mesma forma, na Fig. 2.14c, se o sentido da corrente for especificado conforme mostrado, então a polaridade da tensão deve ser tal que o ponto D esteja a um potencial maior que o ponto C e, portanto, a seta representando a tensão V deve ser orientada do ponto C para o ponto D.

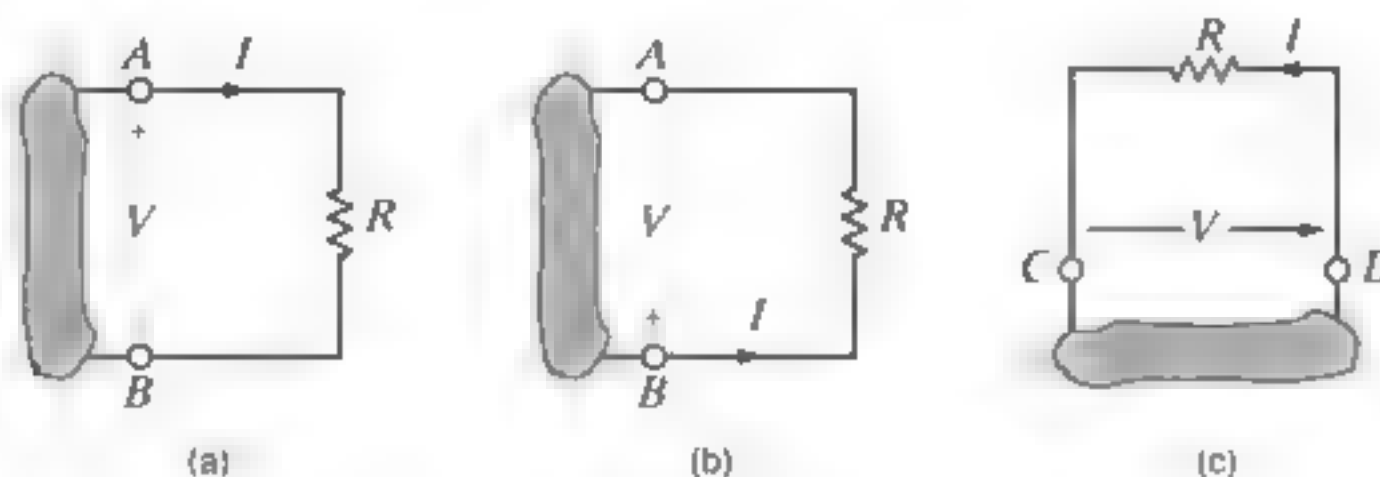


Figura 2.14 Circuitos utilizados para explicar a lei de Ohm.

2.3 Circuitos com um Único Laço

DIVISÃO DE TENSÃO A partir de agora, pode-se começar a aplicar as leis apresentadas anteriormente à análise de circuitos simples. De início, analisa-se o circuito que pode ser considerado como o mais simples – um único caminho fechado, ou laço, de componentes.

A aplicação da LKC a cada nó de um circuito de um único laço revela que a mesma corrente flui por todos os componentes. Assim, diz-se que esses componentes estão conectados em série, pois estão sujeitos a uma mesma corrente. A lei de Kirchhoff das tensões e a lei de Ohm serão aplicadas para a determinação de várias grandezas do circuito.

A sistemática aqui adotada se inicia com a aplicação do procedimento a um circuito simples para, em seguida, generalizar-se a análise para circuitos mais complexos. O circuito mostrado na Fig. 2.15 será utilizado como base para as discussões. Esse circuito consiste em uma fonte de tensão independente em série com dois resistores. Admite-se que a corrente flui no sentido horário. Caso essa hipótese esteja correta, a solução das equações fornecerá um valor positivo para a corrente. Se, na realidade, a corrente flui no sentido oposto, o valor da variável corrente será, simplesmente, negativo, indicando que a corrente está fluindo no sentido oposto ao assumido inicialmente. Algumas considerações também foram feitas a respeito das polaridades atribuídas às tensões v_{R_1} e v_{R_2} . Essas atribuições foram consideradas utilizando-se a convenção empregada na discussão sobre a lei de Ohm e na escolha do sentido de $i(t)$; isto é, a convenção mostrada na Fig. 2.14a.

A aplicação da lei de Kirchhoff para as tensões a esse circuito fornece

$$-v(t) + v_{R_1} + v_{R_2} = 0$$

ou

$$i(t) = i_{R_1} = i_{R_2}$$

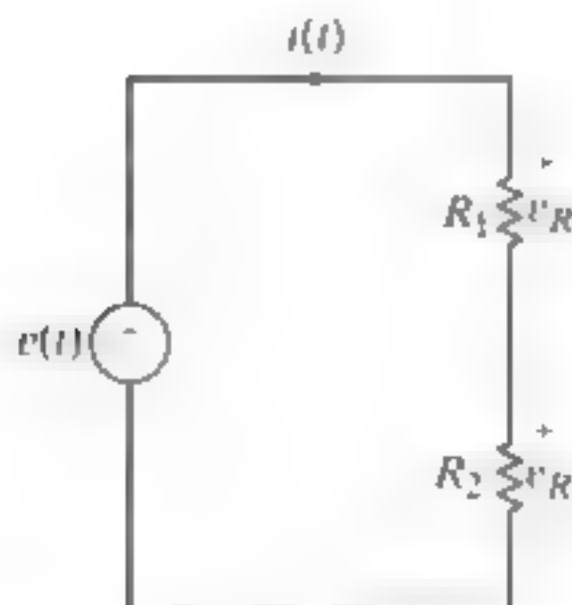


Figura 2.15 Circuito com um único laço.

EXEMPLO 2.13

Considere o circuito mostrado na Fig. 2.16. Esse circuito é idêntico ao da Fig. 2.15, exceto pelo fato de o resistor R_1 ser um resistor variável, como o utilizado no controle do volume

Entretanto, pela lei de Ohm, sabe-se que

$$v_{R_1} = R_1 i(t) \\ v_{R_2} = R_2 i(t)$$

Portanto,

$$v(t) = R_1 i(t) + R_2 i(t)$$

Resolvendo-se esta equação para $i(t)$, tem-se

$$i(t) = \frac{v(t)}{R_1 + R_2} \quad 2.9$$

Conhecendo-se a corrente, pode-se aplicar a lei de Ohm para determinar a tensão entre os terminais de cada resistor, isto é,

$$v_{R_1} = R_1 i(t) \\ = R_1 \left[\frac{v(t)}{R_1 + R_2} \right] \\ = \frac{R_1}{R_1 + R_2} v(t) \quad 2.10$$

[atenção]

Forma pela qual a tensão se divide entre dois resistores em série.

Analogamente,

$$v_{R_2} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} v(t) \quad 2.11$$

Embora simples, as Eqs. (2.10) e (2.11) são muito importantes, pois descrevem a operação conhecida como *divisor de tensão*. Em outras palavras, a fonte de tensão $v(t)$ é dividida entre os resistores R_1 e R_2 na proporção direta de suas resistências.

Assim, havendo interesse na tensão entre os terminais do resistor R_1 , pode-se evitar o cálculo da corrente $i(t)$ e simplesmente multiplicar a tensão de entrada $v(t)$ pela relação

$$\frac{R_1}{R_1 + R_2}$$

Conforme ilustrado na Eq. (2.10), utilizou-se a corrente nos cálculos, porém não explicitamente.

Note que a equação satisfaz a lei de Kirchhoff das tensões, uma vez que

$$-v(t) + \frac{R_1}{R_1 + R_2} v(t) + \frac{R_2}{R_1 + R_2} v(t) = 0$$

de um rádio ou de uma televisão. Suponha que $V_F = 9 \text{ V}$, $R_1 = 90 \text{ k}\Omega$ e $R_2 = 30 \text{ k}\Omega$.

Pode-se analisar a variação da tensão referente a R_2 e a potência absorvida nesse resistor quando R_1 varia de $90 \text{ k}\Omega$ a $15 \text{ k}\Omega$.

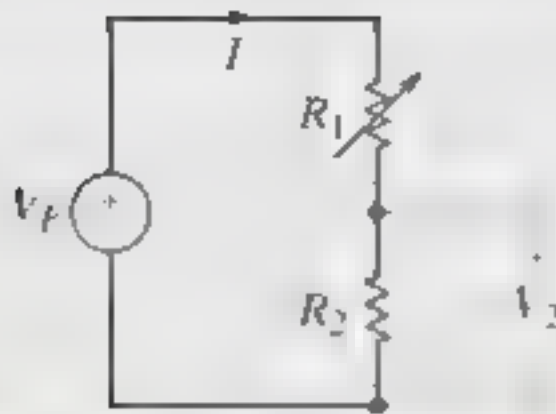


Figura 2.16 Circuito divisor de tensão.

SOLUÇÃO

Uma vez que este é um circuito divisor de tensão, a tensão V_2 pode ser obtida diretamente como

$$\begin{aligned} V_2 &= \left[\frac{R_2}{R_1 + R_2} \right] V_1 \\ &= \left[\frac{30\text{k}}{90\text{k} + 30\text{k}} \right] (9) \\ &= 2,25 \text{ V} \end{aligned}$$

Suponha agora que o resistor variável sofra uma variação de $90 \text{ k}\Omega$ para $15 \text{ k}\Omega$. Nesse caso,

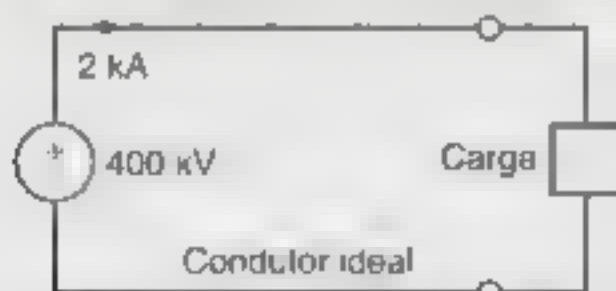
$$\begin{aligned} V_2 &= \left[\frac{30\text{k}}{30\text{k} + 15\text{k}} \right] 9 \\ &= 6 \text{ V} \end{aligned}$$

Demonstra-se, agora, a utilidade prática desse simples circuito divisor de tensão.

EXEMPLO 2.14

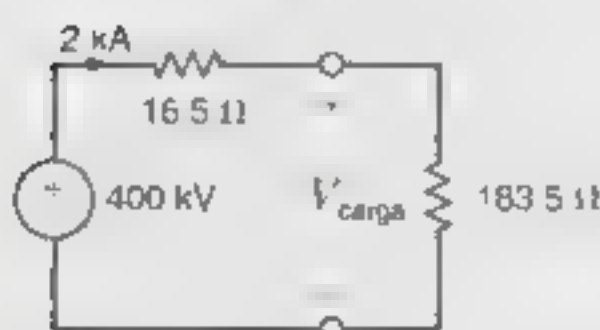
Considere o circuito mostrado na Fig. 2.17a, que é uma aproximação razoável para uma linha de transmissão de alta tensão CC. Admite-se que a parte inferior da linha de transmissão seja um condutor ideal. Essa hipótese será justificada no próximo capítulo. A carga pode ser representada por um resistor com um valor de $183,5 \Omega$. Portanto, o circuito equivalente dessa rede será o mostrado na Fig. 2.17b.

Resistência da linha = $0,04125 \Omega/\text{milha}$



Linha de transmissão de 400 milhas

(a)



(b)

Figura 2.17 Linha de transmissão de alta tensão CC.

O cálculo direto do divisor de tensão é equivalente a determinar-se inicialmente a corrente I e, em seguida, utilizando a lei de Ohm, obter-se V_2 . Note que a tensão maior está associada a uma maior resistência. Esse conceito de divisor de tensão e o circuito simples utilizado para ilustrar sua aplicação são muito úteis, pois, como será mostrado posteriormente, os circuitos mais complexos podem ser reduzidos a esta forma.

Finalmente, determina-se a potência instantânea absorvida pelo resistor R_2 sob as duas condições: $R_1 = 90 \text{ k}\Omega$ e $R_1 = 15 \text{ k}\Omega$. Para o caso de $R_1 = 90 \text{ k}\Omega$, a potência absorvida por R_2 vale

$$\begin{aligned} P_2 &= I^2 R_2 = \left(\frac{9}{120\text{k}} \right)^2 (30\text{k}) \\ &= 0,169 \text{ mW} \end{aligned}$$

No segundo caso,

$$\begin{aligned} P &= \left(\frac{9}{45\text{k}} \right)^2 (30\text{k}) \\ &= 1,2 \text{ mW} \end{aligned}$$

A corrente no primeiro caso vale $75 \mu\text{A}$ e, no segundo caso, $200 \mu\text{A}$. Uma vez que a potência absorvida é uma função do quadrado da corrente, a potência absorvida nos dois casos será bem diferente.

Pode-se determinar tanto a potência fornecida à carga quanto a potência perdida na linha.

SOLUÇÃO

Utilizando-se o conceito de divisão de tensão, a tensão na carga pode ser calculada como

$$\begin{aligned} V_{\text{carga}} &= \left[\frac{183,5}{183,5 + 16,5} \right] 400\text{k} \\ &= 367 \text{ kV} \end{aligned}$$

A potência de entrada é 800 MW , logo, a potência transmitida para a carga será

$$\begin{aligned} P_{\text{carga}} &= I^2 R_{\text{carga}} \\ &= 734 \text{ MW} \end{aligned}$$

Portanto, a potência perdida na linha de transmissão será

$$\begin{aligned} P_{\text{linha}} &= P_{\text{entrada}} - P_{\text{carga}} = I^2 R_{\text{linha}} \\ &= 66 \text{ MW} \end{aligned}$$

Considerando $P = VI$, suponha agora que uma concessionária forneça potência a 200 kV e 4 kA . Que efeito essa nova condição produziria na rede de transmissão? Sem a necessidade de se realizarem cálculos relativamente simples, sabe-se que, sendo a potência proporcional ao quadrado da corrente, haverá um grande aumento na potência perdida na linha e, portanto, a eficiência da linha de transmissão diminuirá significativamente. Esta é a razão pela qual, em geral, a potência é transmitida a alta tensão e baixa corrente.

CIRCUITOS COM MÚLTIPLAS FONTES E MÚLTIPLOS RESISTORES Deseja-se, agora, estender a análise de forma a incluir várias fontes de tensão e vários resistores. Por exemplo, considere o circuito mostrado na Fig. 2.18a. Nesse caso, admite-se que a corrente flui no sentido horário e que a variável $i(t)$ seja definida de forma correspondente. Este pode não ser o caso, dependendo do valor das várias fontes de tensão. A lei de Kirchhoff das tensões aplicada a este circuito fornece

$$+v_{R_1} + v_2(t) - v_3(t) + v_{R_2} + v_4(t) + v_5(t) - v_1(t) = 0$$

ou, utilizando a lei de Ohm,

$$(R_1 + R_2)i(t) = v_1(t) - v_2(t) + v_3(t) - v_4(t) - v_5(t)$$

que pode ser escrita como

$$(R_1 + R_2)i(t) = v(t)$$

em que

$$v(t) = v_1(t) + v_3(t) - v_2(t) + v_4(t) + v_5(t)]$$

de forma que, considerando as definições anteriores, a Fig. 2.18a é equivalente à Fig. 2.18b. Em outras palavras, a soma de várias fontes de tensão em série pode ser substituída por uma única fonte cujo valor é igual à soma algébrica das fontes individuais. Essa análise pode, certamente, ser generalizada para um circuito com N fontes em série,

Considere agora o circuito com N resistores em série conforme mostrado na Fig. 2.19a. A aplicação da lei de Kirchhoff das tensões a esse circuito fornece

$$\begin{aligned} v(t) &= v_{R_1} + v_{R_2} + \cdots + v_{R_N} \\ &= R_1 i(t) + R_2 i(t) + \cdots + R_N i(t) \end{aligned}$$

e, portanto,

$$v(t) = R_S i(t) \quad 2.12$$

em que

$$R_S = R_1 + R_2 + \cdots + R_N \quad 2.13$$

logo,

$$i(t) = \frac{v(t)}{R_S} \quad 2.14$$

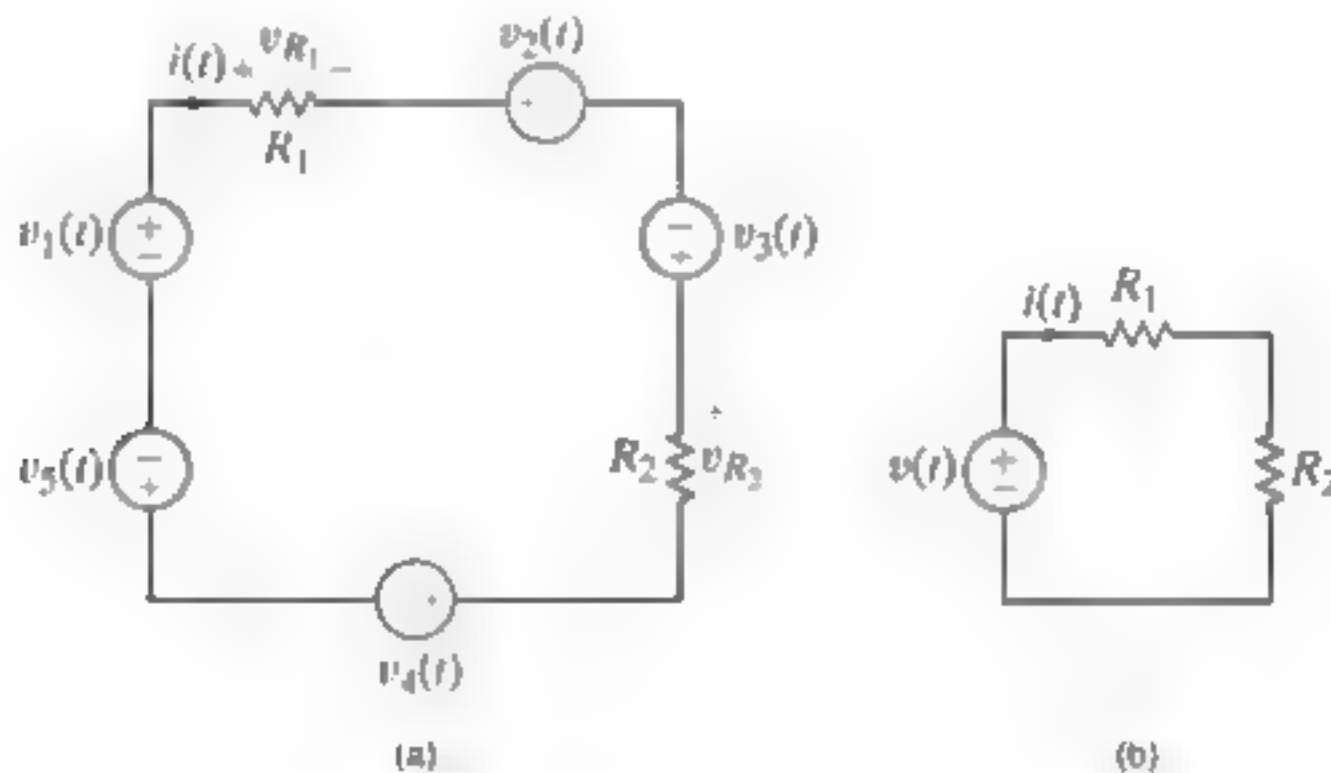


Figura 2.18 Circuitos equivalentes com múltiplas fontes.

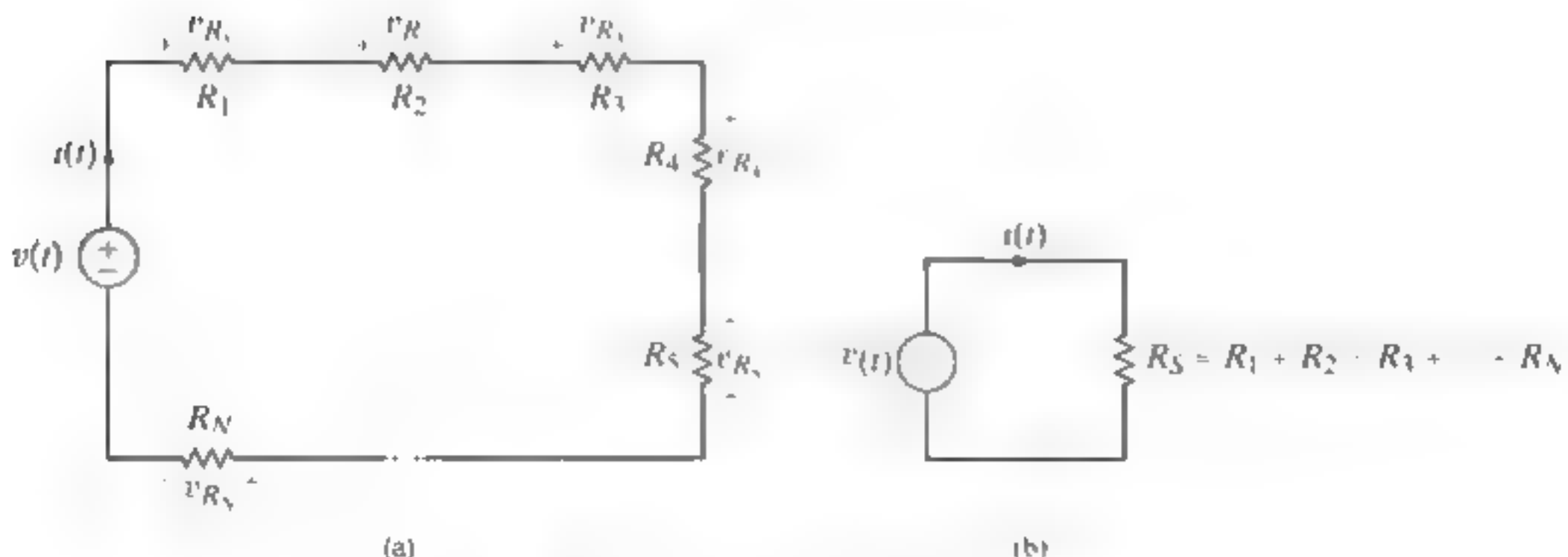


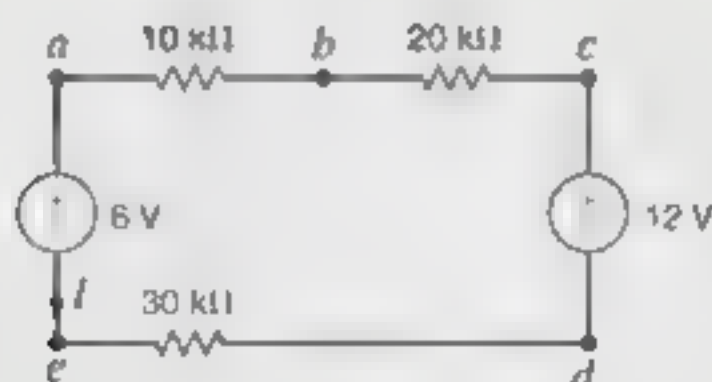
Figura 2.19 Circuitos equivalentes.

Note também que, para qualquer resistor R , presente no circuito, a tensão entre seus terminais pode ser determinada pela expressão

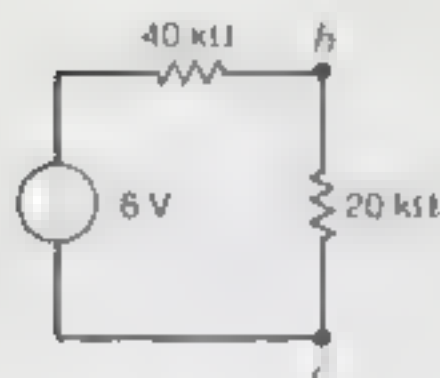
$$v_R = \frac{R}{R_S} v(t) \quad 2.15$$

EXEMPLO 2.15

Dado o circuito mostrado na Fig. 2.20a, deseja-se determinar I , V_{bd} e a potência absorvida pelo resistor de $30 \text{ k}\Omega$. Finalmente, utilizando o conceito de divisão de tensão, pode-se obter V_{bc} .



(a)



(b)

Figura 2.20 Circuito utilizado no Exemplo 2.15.

que é a propriedade da divisão de tensão para o caso de múltiplos resistores em série.

A Eq. (2.13) estabelece que a resistência equivalente de N resistores em série é simplesmente a soma das resistências individuais. Assim, utilizando a Eq. (2.13), pode-se desenhar o circuito mostrado na Fig. 2.19b como sendo um circuito equivalente ao mostrado na Fig. 2.19a.

SOLUÇÃO

A LKT aplicada ao circuito fornece a equação

$$10\text{k}I + 20\text{k}I + 12 + 30\text{k}I - 6 = 0$$

$$60\text{k}I = -6$$

$$I = -0,1 \text{ mA}$$

Portanto, a intensidade da corrente será $0,1 \text{ mA}$, porém com o sentido oposto ao admitido inicialmente.

A tensão V_{bd} pode ser calculada utilizando tanto o caminho fechado $abdea$ quanto o caminho $bcd b$. As equações para ambos os caminhos são

$$10\text{k}I + V_{bd} + 30\text{k}I - 6 = 0$$

e

$$20\text{k}I + 12 - V_{bd} = 0$$

A utilização de $I = -0,1 \text{ mA}$ em ambas as equações fornece $V_{bd} = 10 \text{ V}$. Finalmente, a potência absorvida pelo resistor de $30 \text{ k}\Omega$ é

$$P = I^2 R = 0,3 \text{ mW}$$

Agora, para determinar a tensão V_{bc} , pode-se simplesmente adicionar as fontes (combinação em série), adicionar os resistores remanescentes (combinação em série) e reduzir o circuito àquele mostrado na Fig. 2.20b. Assim,

$$V_{bc} = \frac{20\text{k}}{20\text{k} + 40\text{k}} (-6) = -2 \text{ V}$$

EXEMPLO 2.16

Um dispositivo de transmissão CC é modelado, aproximadamente, pelo circuito mostrado na Fig. 2.21. Sendo a tensão da carga conhecida e valendo $V_{\text{carga}} = 458,3 \text{ kV}$, deseja-se determinar a tensão de alimentação do circuito e a perda de potência na linha.

SOLUÇÃO

Conhecendo a tensão e a resistência da carga, pode-se obter a corrente na linha utilizando a lei de Ohm.

$$I_C = 458,3\text{k}/220 = 2,083 \text{ kA}$$

A queda de tensão ao longo da linha é

$$V_{\text{linha}} = (I_C)(R_{\text{linha}}) = 41,66 \text{ kV}$$



Figura 2.21 Circuito utilizado no Exemplo 2.16.

Agora, utilizando a LKT, tem-se

$$\begin{aligned} V_P &= V_{linha} + V_{carga} \\ &= 510 \text{ kV} \end{aligned}$$

Observe que, como a rede é simplesmente uma divisora de tensão, a tensão V_P poderia ser obtida imediatamente a partir do conhecimento de R_{linha} , R_{carga} e V_{carga} . Isto é,

$$V_{linha} = \left[\frac{R_{carga}}{R_{linha} + R_{carga}} \right] V_P$$

em que V_P é a única incógnita desta equação. A potência absorvida pela linha vale

$$\begin{aligned} P_{linha} &= I^2 R_{linha} \\ &= 86,79 \text{ MW} \end{aligned}$$

Estratégia para Solução de Problemas

Circuitos com um Único Laço

- Etapa 1.** Defina a corrente $i(t)$. Sabe-se, da LKC, que existe apenas uma corrente nos circuitos com um único laço. Essa corrente é admitida como fluindo no sentido horário ou no sentido anti-horário ao longo do laço.
- Etapa 2.** Utilizando a lei de Ohm, defina a tensão entre os terminais de cada resistor em função da corrente definida.
- Etapa 3.** Aplique a LKT ao circuito de um único laço.
- Etapa 4.** Resolva a única equação decorrente da LKT para a corrente $i(t)$. Se $i(t)$ for positiva, a corrente estará fluindo no sentido admitido; caso contrário, a corrente, na realidade, estará fluindo no sentido oposto.

Avaliação do Aprendizado

E2.10 Determine a corrente I e a tensão V_{bd} do circuito mostrado na Fig. E2.10.

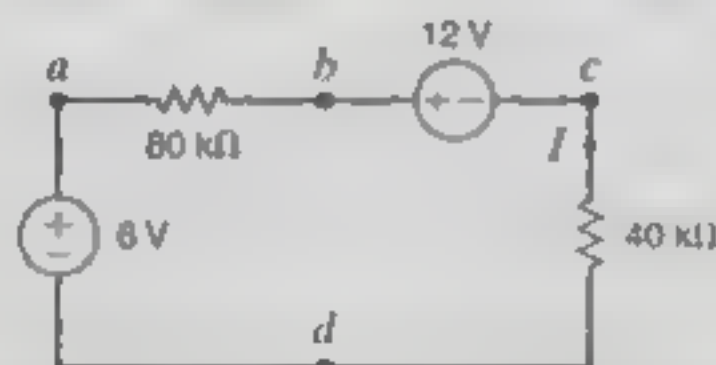


Figura E2.10

RESPOSTAS: $I = -0,05 \text{ mA}$ e $V_{bd} = 10 \text{ V}$.

E2.11 No circuito mostrado na Fig. E2.11, considerando que a tensão V_{ad} valha 3 V, determine V_F .

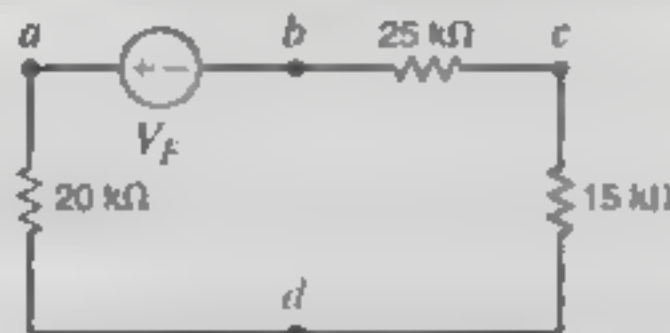


Figura E2.11

RESPOSTA: $V_F = 9 \text{ V}$.

2.4 Circuitos com um Único Par de Nós

DIVISÃO DE CORRENTE Um dos circuitos de grande importância é o circuito com um único par de nós. Ao se aplicar a LKT a cada laço em um circuito com um único par de nós, descobre-se que todos os componentes possuem a mesma tensão entre seus terminais e, portanto, estão conectados em paralelo.

Entretanto, a lei de Kirchhoff das correntes e a lei de Ohm serão empregadas na determinação de várias grandezas desconhecidas do circuito.

Seguindo o mesmo procedimento utilizado no circuito de um único laço, inicia-se com o caso mais simples e, em seguida, generaliza-se a sistemática da análise. Considere o circuito mostrado na Fig. 2.22. Nesse caso, tem-se uma fonte de corrente independente em paralelo com dois resistores

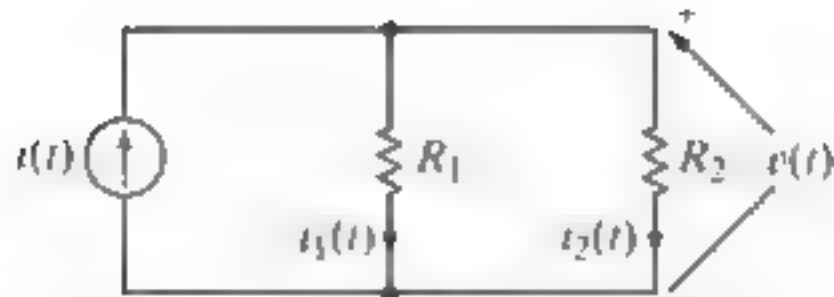


Figura 2.22 Circuito simples com componentes em paralelo.

Uma vez que todos os componentes do circuito estão em paralelo, a tensão atuante entre os terminais de cada um é a tensão $v(t)$. Além disso, uma análise do circuito indica que a corrente $i(t)$ entra no nó superior do circuito e as correntes $i_1(t)$ e $i_2(t)$ saem do nó. Como a LKC estabelece, basicamente, que a corrente que entra no nó é igual à corrente que sai desse mesmo nó, a questão a ser respondida é como $i_1(t)$ e $i_2(t)$ dividem a corrente de entrada $i(t)$.

Aplicando-se a lei de Kirchhoff das correntes ao nó superior, obtém-se

$$i(t) = i_1(t) + i_2(t)$$

e, empregando-se a lei de Ohm, tem-se

$$\begin{aligned} i(t) &= \frac{v(t)}{R_1} + \frac{v(t)}{R_2} \\ &= \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) v(t) \\ &= \frac{v(t)}{R_p} \end{aligned}$$

em que

$$\frac{1}{R_p} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \quad 2.16$$

[atenção]

Equação para resistências em paralelo.

$$R_p = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \quad 2.17$$

Portanto, a resistência equivalente a dois resistores conectados em paralelo é igual ao produto de suas resistências dividido pela sua soma. Note também que essa resistência equivalente R_p é sempre menor que R_1 ou R_2 . Logo, a conexão de resistores em paralelo reduz a resistência global. No caso particular em que R_1 é igual a R_2 , a resistência equivalente será igual à metade do valor dos resistores individuais.

A forma pela qual a corrente $i(t)$ da fonte se divide entre os dois ramos do circuito é chamada *divisão de corrente* e pode ser obtida a partir das expressões anteriores. Por exemplo,

$$\begin{aligned} v(t) &= R_p i(t) \\ &= \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} i(t) \end{aligned} \quad 2.18$$

[atenção]

Forma pela qual a corrente se divide entre dois resistores em paralelo.

e

$$\begin{aligned} i_1(t) &= \frac{v(t)}{R_1} \\ &= \frac{R_2}{R_1 + R_2} i(t) \end{aligned} \quad 2.19$$

e

$$\begin{aligned} i_2(t) &= \frac{v(t)}{R_2} \\ &= \frac{R_1}{R_1 + R_2} i(t) \end{aligned} \quad 2.20$$

As Eqs. (2.19) e (2.20) descrevem matematicamente a regra da divisão de correntes.

EXEMPLO 2.17

Dado o circuito mostrado na Fig. 2.23a, deseja-se determinar as correntes I_1 e I_2 , e a tensão V_x .

SOLUÇÃO

Inicialmente, é importante reconhecer que a fonte de corrente alimenta dois caminhos paralelos. Para enfatizar esse ponto, o circuito é redesenhado conforme mostrado na Fig. 2.23b. Aplicando-se a divisão de corrente, obtém-se

$$\begin{aligned} I_1 &= \left[\frac{40\text{k} + 80\text{k}}{60\text{k} + (40\text{k} + 80\text{k})} \right] (0,9 \times 10^{-3}) \\ &= 0,6 \text{ mA} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} I_2 &= \left[\frac{60\text{k}}{60\text{k} + (40\text{k} + 80\text{k})} \right] (0,9 \times 10^{-3}) \\ &= 0,3 \text{ mA} \end{aligned}$$

Note que a maior corrente flui através do menor resistor e vice-versa. Observe, também, que se as resistências dos dois caminhos forem iguais, a corrente será dividida igualmente entre eles. A LKC está sendo atendida, uma vez que $I_1 + I_2 = 0,9 \text{ mA}$.

A tensão V_x pode ser obtida utilizando a lei de Ohm, isto é,

$$\begin{aligned} V_x &= 80\text{k} I_2 \\ &= 24 \text{ V} \end{aligned}$$

Esse problema também pode ser abordado da forma descrita a seguir. A resistência total percebida pela fonte de corrente é de $40\text{ k}\Omega$, isto é, $60\text{ k}\Omega$ em paralelo com a combinação em série de $40\text{ k}\Omega$ e $80\text{ k}\Omega$, conforme mostrado na Fig. 2.23c. A tensão entre os terminais da fonte de corrente será, portanto,

$$V_1 = (0,9 \times 10^{-3})40\text{k} \\ = 36\text{ V}$$

Com V_1 conhecido, pode-se aplicar a divisão de tensão para obter V_x , ou seja,

$$V_x = \left(\frac{80\text{k}}{80\text{k} + 40\text{k}} \right) V_1 \\ = \left(\frac{80\text{k}}{120\text{k}} \right) 36 \\ = 24\text{ V}$$

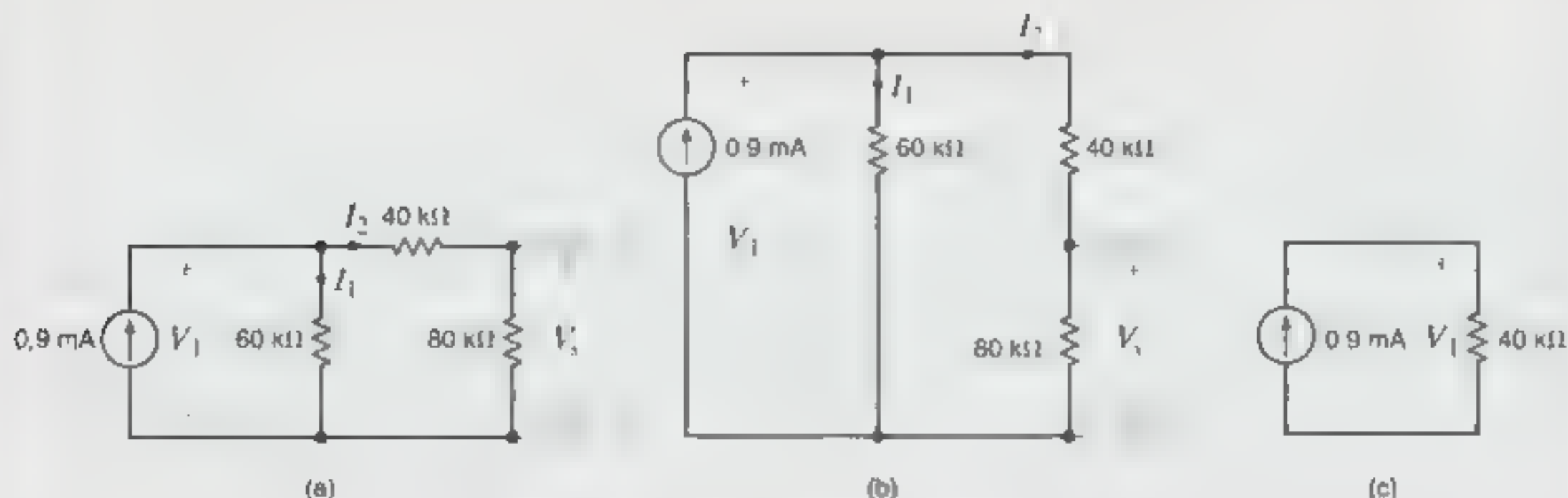
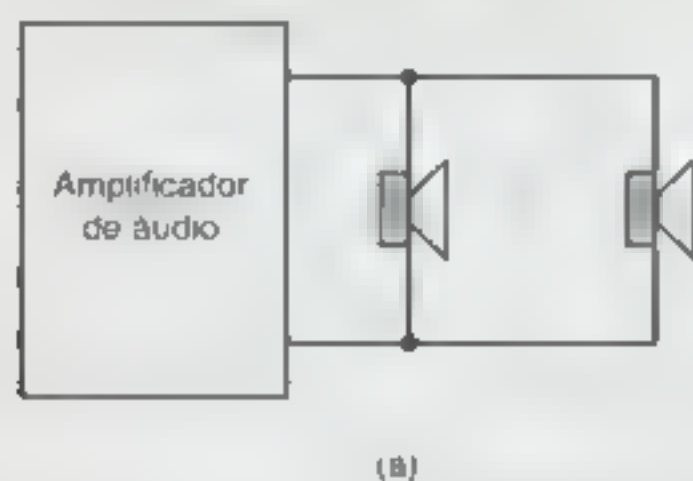


Figura 2.23 Circuito utilizado no Exemplo 2.17.

EXEMPLO 2.18

Um aparelho de som estéreo típico, utilizado em veículos, consiste em um amplificador de áudio de 2 W e dois alto-falantes. Esse aparelho é mostrado esquematicamente na Fig. 2.24a. O circuito de saída do amplificador de áudio é, basicamente, uma fonte de corrente de 430 mA e cada alto-falante possui uma resistência de $4\text{ }\Omega$. Com essas informações pode-se determinar a potência absorvida pelos alto-falantes.

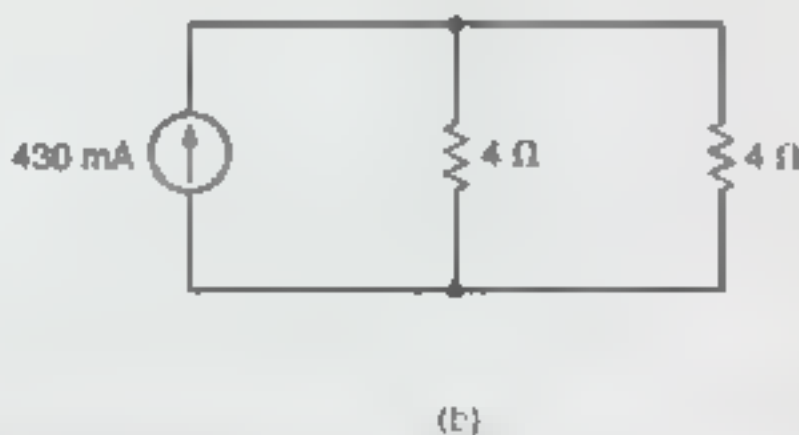


(a)

SOLUÇÃO

O sistema de áudio pode ser modelado conforme mostrado na Fig. 2.24b. Uma vez que ambos os alto-falantes possuem $4\text{ }\Omega$, a corrente será dividida igualmente entre eles, e a potência absorvida por cada alto-falante será

$$P = I^2 R \\ = (215 \times 10^{-3})^2 (4) \\ = 184,9\text{ mW}$$

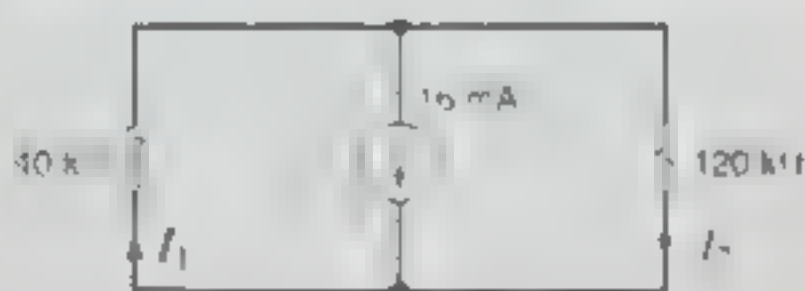


(b)

Figura 2.24 Circuito utilizado no Exemplo 2.18.

Avaliação do Aprendizado

E2.12 Determine as correntes I_1 e I_2 , e a potência absorvida pelo resistor de $40\text{ k}\Omega$ do circuito mostrado na Fig. E2.12.



RESPOSTAS: $I_1 = 12\text{ mA}$,
 $I_2 = -4\text{ mA}$ e $P_{40\text{ k}\Omega} = 5,76\text{ W}$

Figura E2.12

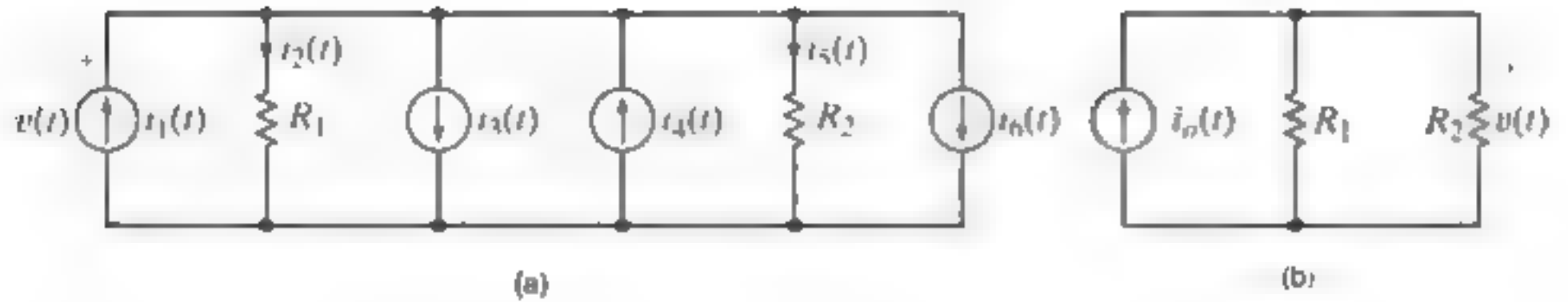


Figura 2.25
Circuitos
equivalentes.

CIRCUITOS COM MÚLTIPLAS FONTES E MÚLTIPLOS RESISTORES Pode-se, agora, estender a análise para incluir os circuitos com múltiplas fontes de corrente e múltiplos resistores em paralelo. Por exemplo, considere o circuito mostrado na Fig. 2.25a. Admitiu-se que o nó superior é $v(t)$ volts positivos relativamente ao nó inferior. A aplicação da lei de Kirchhoff das correntes ao nó superior fornece

$$i_1(t) - i_2(t) - i_3(t) + i_4(t) - i_5(t) - i_6(t) = 0$$

ou

$$i_1(t) - i_3(t) + i_4(t) - i_6(t) = i_2(t) + i_5(t)$$

Todos os termos do lado esquerdo da equação representam fontes, que podem ser combinadas algebricamente resultando em uma única fonte; isto é,

$$i_o(t) = i_1(t) - i_3(t) + i_4(t) - i_6(t)$$

que, efetivamente, reduz o circuito mostrado na Fig. 2.25a àquele mostrado na Fig. 2.25b. Certamente, seria possível generalizar essa análise para um circuito com N fontes de corrente. Utilizando a lei de Ohm, as correntes do lado direito da equação podem ser expressas em função da tensão e das resistências individuais, de forma que a equação da LKC reduz-se a

$$i_o(t) = \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots + \frac{1}{R_N} \right) v(t)$$

Considere, agora, o circuito com N resistores em paralelo, conforme mostrado na Fig. 2.26a. A aplicação da lei de Kirchhoff das correntes ao nó superior fornece

$$i_o(t) = i_1(t) + i_2(t) + \dots + i_N(t)$$

$$\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots + \frac{1}{R_N} \right) v(t) \quad 2.21$$

ou

$$i_o(t) = \frac{v(t)}{R} \quad 2.22$$

em que

$$\frac{1}{R_p} = \sum_{i=1}^N \frac{1}{R_i} \quad 2.23$$

de forma que, do ponto de vista da fonte, a Fig. 2.26a pode ser reduzida a um circuito equivalente, conforme mostrado na Fig. 2.26b.

A divisão de corrente para qualquer ramo pode ser calculada utilizando a lei de Ohm e as equações precedentes. Por exemplo, para o j -ésimo ramo do circuito da Fig. 2.26a, tem-se

$$i_j(t) = \frac{v(t)}{R_j}$$

Utilizando a Eq. (2.22), obtém-se

$$i_j(t) = \frac{R_p}{R_j} i_o(t) \quad 2.24$$

a qual define a regra da divisão de corrente para o caso geral.

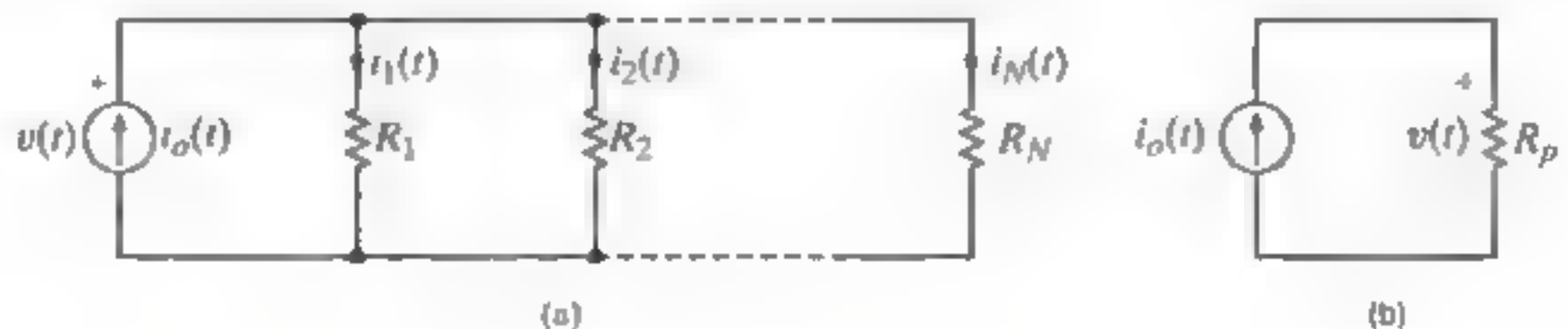


Figura 2.26
Circuitos equivalentes.

EXEMPLO 2.19

Dado o circuito mostrado na Fig. 2.27a, deseja-se obter a corrente no resistor de 12 k Ω .

SOLUÇÃO

Para simplificar o circuito mostrado na Fig. 2.27a, as fontes de corrente são somadas algebricamente e os resistores são combinados em paralelo da seguinte forma.

$$\frac{1}{R_p} = \frac{1}{18\text{k}} + \frac{1}{9\text{k}} + \frac{1}{12\text{k}}$$

$$R_p = 4\text{ k}\Omega$$

Utilizando esses valores pode-se reduzir o circuito da Fig. 2.27a àquele mostrado na Fig. 2.27b. Assim, a aplicação da divisão de corrente fornece

$$i_c = \left[\frac{4\text{k}}{4\text{k} + 12\text{k}} \right] (1 \times 10^{-3})$$

$$= 0,25\text{ mA}$$

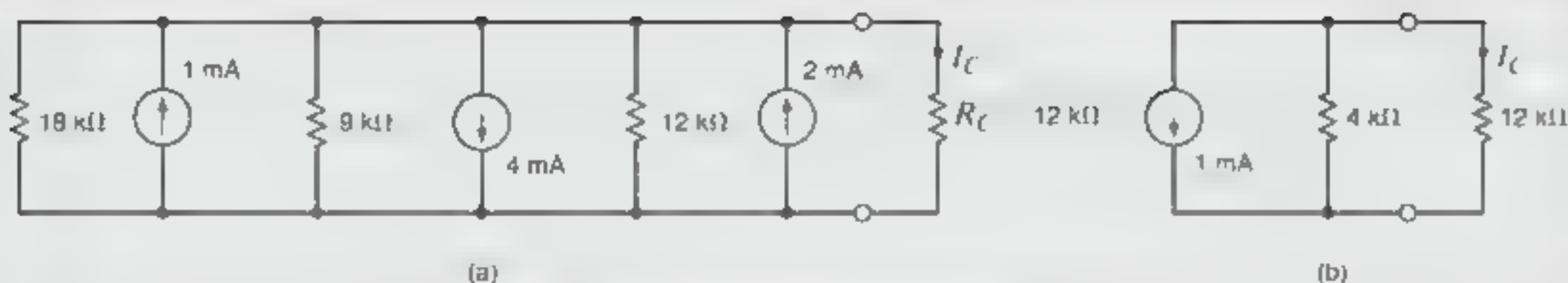


Figura 2.27 Circuitos utilizados no Exemplo 2.19.

Estratégia para a Solução de Problemas

Circuitos com um Único Par de Nós

- Etapa 1.** Defina a tensão $v(t)$ entre os dois nós do circuito. Sabe-se, da LKT, que existe apenas uma tensão para o caso de um circuito com um único par de nós. A polaridade é estabelecida admitindo que um dos nós possua um potencial maior que o outro nó, esse último considerado como nó de referência.
- Etapa 2.** Utilizando a lei de Ohm, defina a corrente que flui por cada resistor em função da tensão definida.

- Etapa 3.** Aplique a LKC a um dos dois nós do circuito.
- Etapa 4.** Resolva a única equação decorrente da LKC para a tensão $v(t)$. Se $v(t)$ for positiva, então o nó de referência estará realmente com um potencial inferior ao do outro nó; caso contrário, o nó de referência estará, na realidade, com um potencial superior ao do outro nó.

Avaliação do Aprendizado

E2.13 Determine a potência absorvida pelo resistor de $6\text{ k}\Omega$ do circuito mostrado na Fig. E2.13.

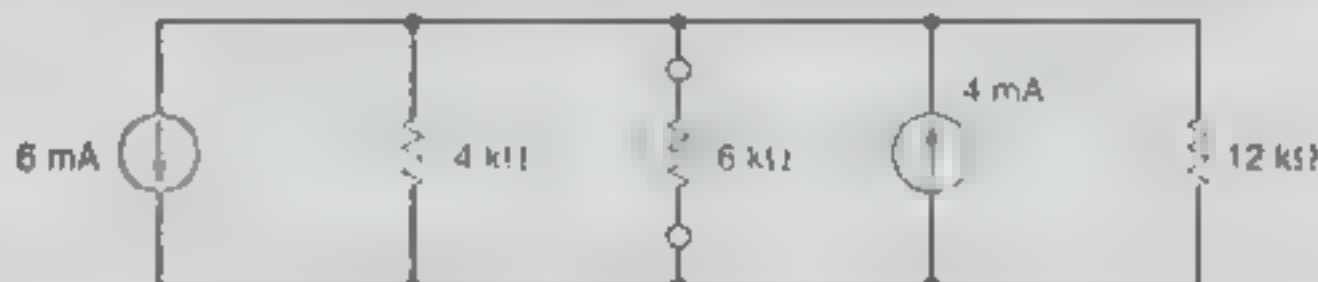


Figura E2.13

RESPOSTA: $P = 2,67\text{ mW}$.

2.5 Combinações de Resistores em Série e em Paralelo

Nos desenvolvimentos anteriores foi mostrado que a resistência equivalente a N resistores em série pode ser expressa por

$$R_s = R_1 + R_2 + \dots + R_N \quad 2.25$$

e que a resistência equivalente de N resistores em paralelo pode ser obtida pela expressão

$$\frac{1}{R_p} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots + \frac{1}{R_N} \quad 2.26$$

São analisadas a seguir algumas combinações desses dois casos.

EXEMPLO 2.20

Deseja-se determinar a resistência entre os terminais A e B da rede mostrada na Fig. 2.28a.

SOLUÇÃO

Iniciando-se pelos resistores do lado direito da rede e combinando-os conforme mostrado na sequência de circuitos da

Fig. 2.28, determina-se que a resistência equivalente entre os terminais é de $5\text{ k}\Omega$.

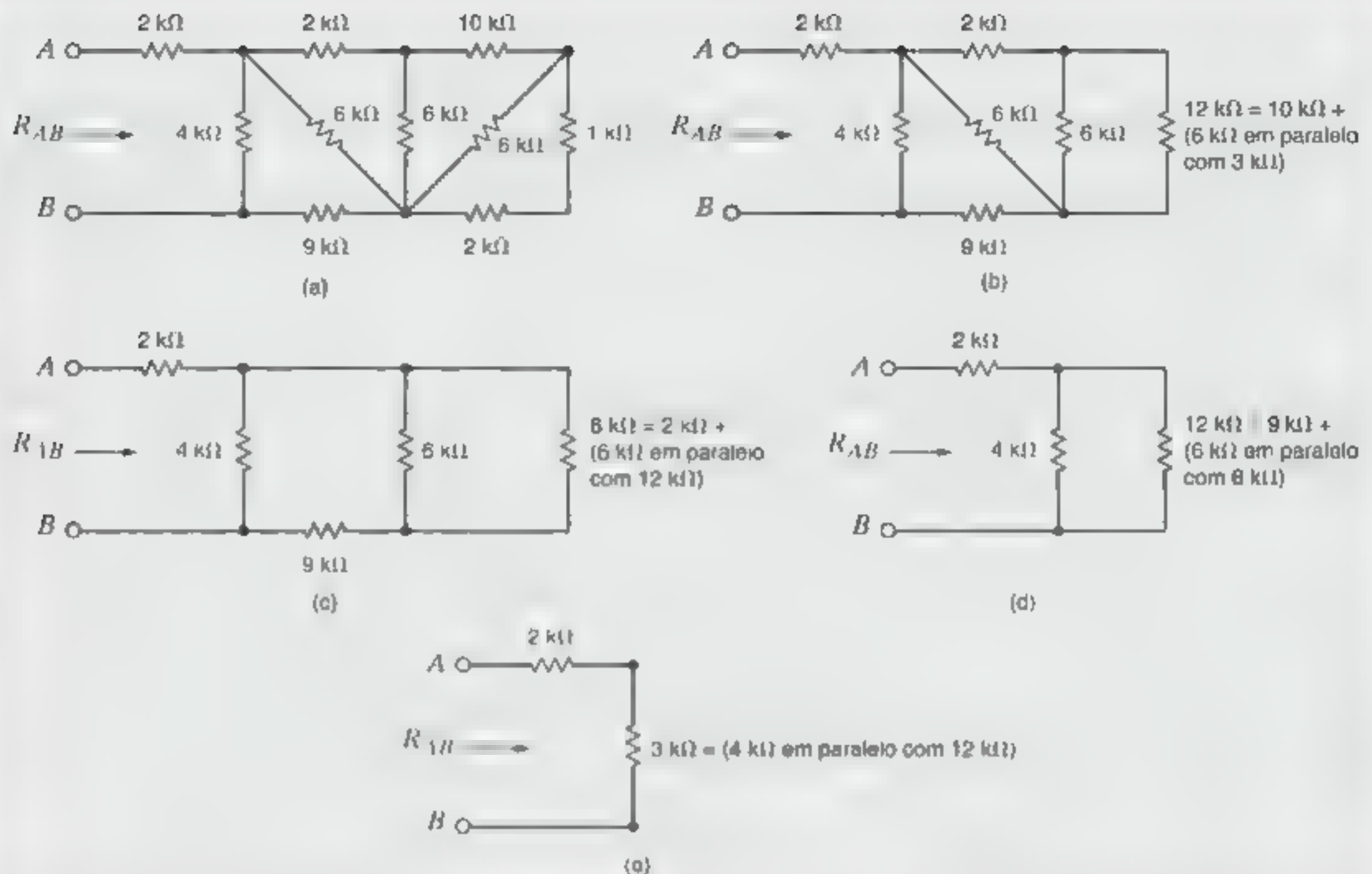
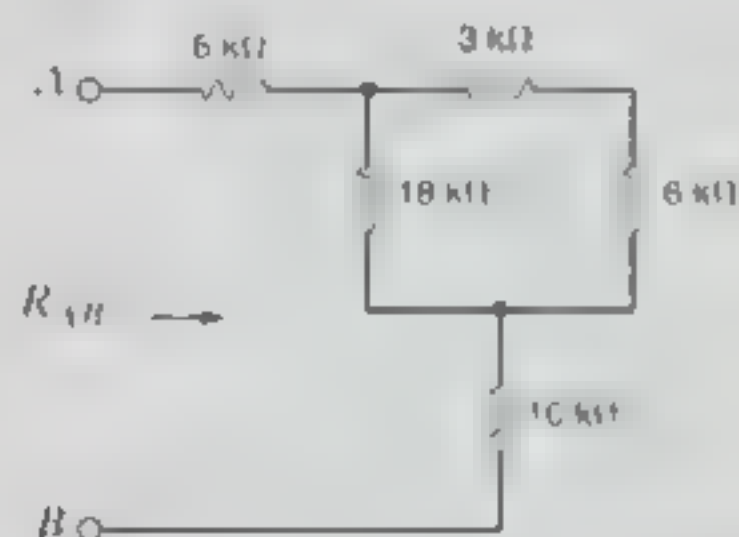


Figura 3.28 Simplificação de uma rede resistiva.

Avaliação do Aprendizado

E2.14 Determine a resistência equivalente entre os terminais *A* e *B* do circuito mostrado na Fig. E2.14.



RESPOSTA: $R_{AB} = 22 \text{ k}\Omega$.

Figura E2.14

Estratégia para Solução de Problemas

Simplificação das Combinações de Resistores

Ao tentar determinar a resistência equivalente em um par de terminais de um circuito composto da combinação de vários resistores, é recomendado que a análise seja iniciada pelo lado oposto aos terminais considerados. Dois ou mais resistores são combinados para formar um único resistor, simplificando, assim, o circuito pela redução do número de componentes.

Esse procedimento continua progressivamente em direção aos terminais. Essa simplificação envolve as seguintes situações.

Etapas 1. Resistores em série. Os resistores R_1 e R_2 estarão em série se forem conectados em sequência com um nó comum e com a mesma corrente fluindo através deles. Nesse caso, eles podem ser combi-

nados, resultando em um único resistor R_s , em que $R_s = R_1 + R_2$.

Etapla 2. Resistores em paralelo. Os resistores R_1 e R_2 estarão em paralelo se forem conectados aos mesmos dois nós e estiverem sujeitos à mesma tensão entre seus terminais. Nesse caso, eles podem ser

combinados, resultando em um único resistor R_p , em que $R_p = R_1 R_2 / (R_1 + R_2)$.

Essas duas combinações são utilizadas repetidamente, quando necessário, de forma a reduzir o circuito a um único resistor entre o par de terminais.

Avaliação do Aprendizado

E2.15 Determine a resistência equivalente entre os terminais A e B do circuito mostrado na Fig. E2.15.

RESPOSTA: $R_{AB} = 3 \text{ k}\Omega$.

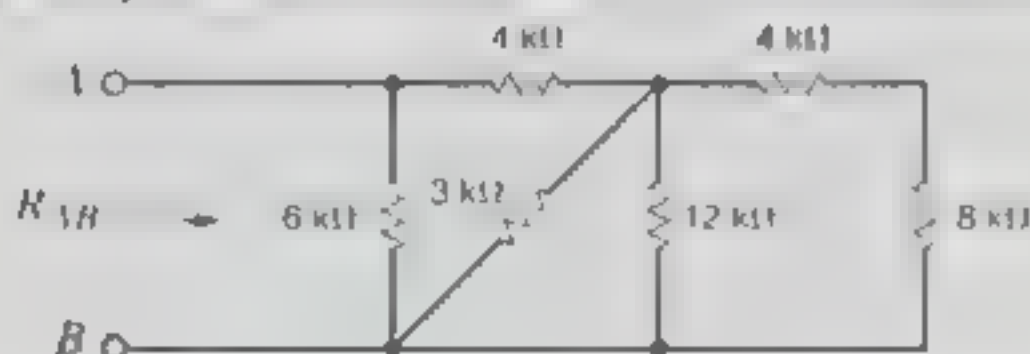


Figura E2.15

E2.16 Determine a resistência R_{AB} do circuito mostrado na Fig. E2.16.

RESPOSTA: $R_{AB} = 12 \text{ k}\Omega$.

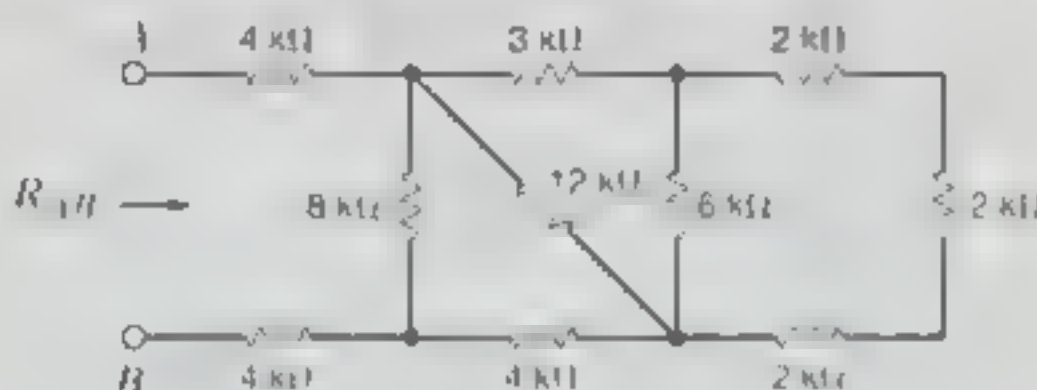


Figura E2.16

EXEMPLO 2.21

A fonte de potência de corrente CC limitada padronizada mostrada na Fig. 2.29a fornece a uma carga uma tensão na faixa de 0 a 18 V com corrente de 3 A. A queda de tensão, V_R , entre os terminais de um resistor, R , é utilizada como dispositivo sensor de corrente, retorna para a fonte de potência e é utilizada para limitar a corrente I . Isto é, se a carga for ajustada de

modo que a corrente tenda a exceder 3 A, a fonte de potência atuará para limitar a corrente àquele valor. Tipicamente, a tensão de realimentação, V_R , não deve exceder 600 mV.

Considerando uma caixa de resistores padronizados de $0,1 \Omega$ e 5 W, seja a determinação da configuração desses resistores que propicia uma tensão $V_R = 600 \text{ mV}$ quando a corrente é de 3 A.

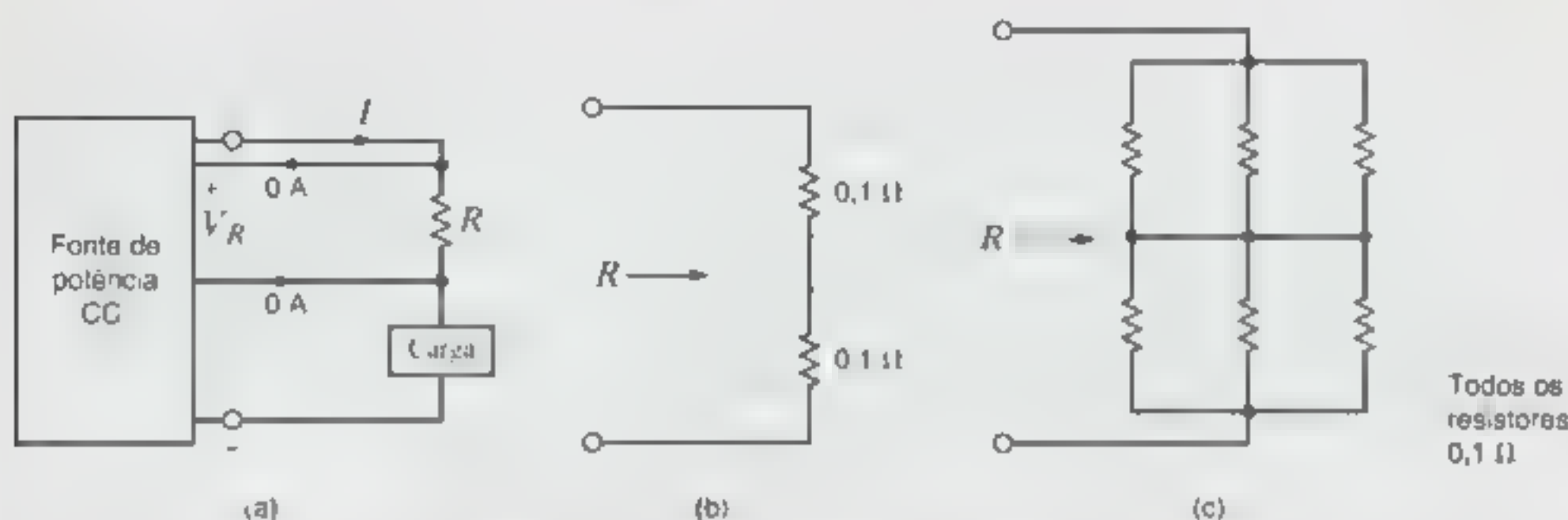


Figura 2.29 Circuitos utilizados no Exemplo 2.21.

SOLUÇÃO

Utilizando a lei de Ohm, o valor de R deve ser

$$R = \frac{V_R}{I} = \frac{0,6}{3} = 0,2 \, \Omega$$

Portanto, dois resistores de $0,1 \, \Omega$ conectados em série, conforme mostrado na Fig. 2.29b, propiciarão a tensão de realimentação apropriada. Todavia, suponha que a corrente da fonte de potência deva ser limitada a $9 \, \text{A}$. Nesse caso, a resistência necessária para produzir a tensão $V_R = 600 \, \text{mV}$ seria

$$R = \frac{0,6}{9} = 0,0667 \, \Omega$$

Deve-se, agora, determinar como interconectar os resistores de $0,1 \, \Omega$ para obter $R = 0,0667 \, \Omega$. Como a resistência desejada é menor que as resistências de cada componente disponível (isto é, $0,1 \, \Omega$), esses resistores devem ser conectados em alguma forma de configuração em paralelo. Como todos os

resistores são de mesmo valor, perceba que três desses conectados em paralelo propiciam uma resistência de um terço de seus valores, isto é, $0,0333 \, \Omega$. Assim, duas dessas combinações conectadas em série, conforme mostrado na Fig. 2.29c, produzirão a resistência equivalente necessária.

Finalmente, deve-se assegurar que as configurações apresentadas nas Figs. 2.29b e c não excedam a potência nominal dos resistores. No primeiro caso, a corrente $I = 3 \, \text{A}$ estará presente em cada um dos dois resistores em série. Portanto, a potência absorvida em cada resistor é

$$P = I^2 R = (3)^2 (0,1) = 0,9 \, \text{W}$$

Este valor é bem inferior aos $5 \, \text{W}$ de potência nominal dos resistores.

No segundo caso, a corrente $I = 9 \, \text{A}$. A configuração de resistores para R nesse caso é uma combinação em série de dois conjuntos de três resistores em paralelo de mesmo valor. Utilizando a divisão de corrente, sabe-se que a corrente I será dividida igualmente entre os três caminhos paralelos e, portanto, a corrente em cada resistor será de $3 \, \text{A}$. Portanto, mais uma vez, a potência absorvida por cada resistor é bem inferior à sua potência nominal.

ESPECIFICAÇÃO DOS RESISTORES Alguns parâmetros importantes utilizados na especificação dos resistores são o valor do resistor, a tolerância e a potência nominal. As especificações

de tolerância dos resistores são tipicamente 5% e 10% . Uma relação de valores padronizados de resistores com a especificação de suas tolerâncias é mostrada na Tabela 2.1.

TABELA 2.1 Valores de resistores padronizados para tolerâncias de 5% e 10% (os valores disponíveis com tolerância de 10% são mostrados em negrito>)

1,0	10	200	1,0k	10k	100k	1,0M	10M
1,1	11	110	1,1k	11k	110k	1,1M	11M
1,2	12	120	1,2k	12k	120k	1,2M	12M
1,3	13	130	1,3k	13k	130k	1,3M	13M
1,5	15	150	1,5k	15k	150k	1,5M	15M
1,6	16	160	1,6k	16k	160k	1,6M	16M
1,8	18	180	1,8k	18k	180k	1,8M	18M
2,0	20	200	2,0k	20k	200k	2,0M	20M
2,2	22	220	2,2k	22k	220k	2,2M	22M
2,4	24	240	2,4k	24k	240k	2,4M	
2,7	27	270	2,7k	27k	270k	2,7M	
3,0	30	300	3,0k	30k	300k	3,0M	
3,3	33	330	3,3k	33k	330k	3,3M	
3,6	36	360	3,6k	36k	360k	3,6M	
3,9	39	390	3,9k	39k	390k	3,9M	
4,3	43	430	4,3k	43k	430k	4,3M	
4,7	47	470	4,7k	47k	470k	4,7M	
5,1	51	510	5,1k	51k	510k	5,1M	
5,6	56	560	5,6k	56k	560k	5,6M	
6,2	62	620	6,2k	62k	620k	6,2M	
6,8	68	680	6,8k	68k	680k	6,8M	
7,5	75	750	7,5k	75k	750k	7,5M	
8,2	82	820	8,2k	82k	820k	8,2M	
9,1	91	910	9,1k	91k	910k	9,1M	

A potência nominal de um resistor define a potência máxima que pode ser dissipada pelo resistor. Alguns valores típicos da potência dos resistores são 1/4 W, 1/2 W, 1 W, 2 W, e assim por diante, até valores muito altos para aplicações em circuitos de

alta potência. Assim, ao seleccionar um resistor para uma aplicação específica, um importante critério de seleção é a potência dissipada esperada.

EXEMPLO 2.22

Deseja-se obter a faixa de corrente e de dissipação de potência no resistor R do circuito mostrado na Fig. 2.30. Considere que a resistência desse resistor vale 2,7 k Ω com uma tolerância de 10%.

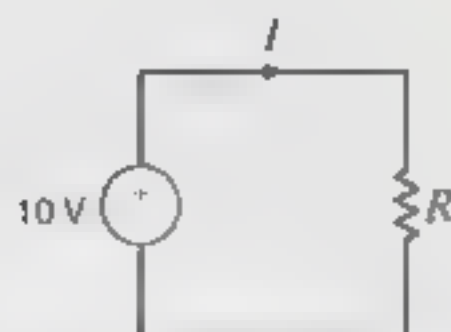


Figura 2.30 Circuito utilizado no Exemplo 2.22.

SOLUÇÃO

Utilizando as equações $I = V/R = 10/R$ e $P = V^2/R = 100/R$, os valores mínimo e máximo desse resistor, da corrente e da potência podem ser calculados como se segue:

$$\text{Valor mínimo da resistência} = R(1 - 0,1) = 0,9 R = 2,43 \text{ k}\Omega$$

$$\text{Valor máximo da resistência} = R(1 + 0,1) = 1,1 R = 2,97 \text{ k}\Omega$$

$$\text{Valor mínimo da corrente} = 10/2970 = 3,37 \text{ mA}$$

$$\text{Valor máximo da corrente} = 10/2430 = 4,12 \text{ mA}$$

$$\text{Valor mínimo da potência} = 100/2970 = 33,7 \text{ mW}$$

$$\text{Valor máximo da potência} = 100/2430 = 41,2 \text{ mW}$$

Assim, as faixas de valores para a corrente e para a potência são 3,37 mA a 4,12 mA e 33,7 mW a 41,2 mW, respectivamente.

EXEMPLO 2.23

Dado o circuito mostrado na Fig. 2.31: (a) obtenha o valor necessário para o resistor R ; (b) utilize a Tabela 2.1 para seleccionar um resistor padronizado com tolerância de 10% para R ; (c) utilizando o resistor seleccionado no item (b), determine a tensão entre os terminais do resistor de 3,9 k Ω ; (d) calcule o erro percentual na tensão V_1 , se o resistor padronizado seleccionado no item (b) for utilizado e (e) determine a potência nominal desse componente padronizado.

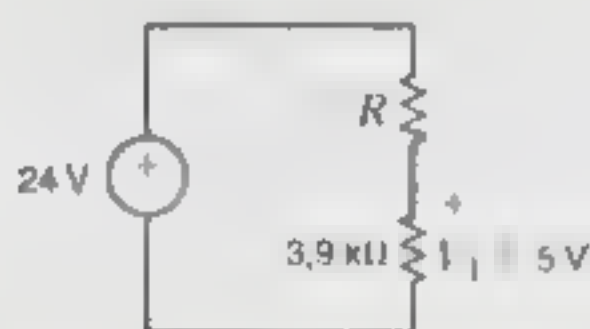


Figura 2.31 Circuito utilizado no Exemplo 2.23.

SOLUÇÃO

a. Utilizando a LKT, a tensão entre os terminais de R será de 19 V. Assim, empregando a lei de Ohm, a corrente no laço será

$$I = 5/3,9\text{k} = 1,282 \text{ mA}$$

O valor necessário de R será, portanto,

$$R = 19/0,001282 = 14,82 \text{ k}\Omega$$

b. Conforme mostrado na Tabela 2.1, o resistor padrão com tolerância de 10% mais próximo do valor calculado é o resistor de 15 k Ω .

c. Utilizando o resistor padrão de 15 k Ω , a corrente que efetivamente flui no circuito vale

$$I = 24/18,9\text{k} = 1,2698 \text{ mA}$$

e a tensão entre os terminais do resistor de 3,9 k Ω será

$$V = IR = (0,0012698)(3,9\text{k}) = 4,952 \text{ V}$$

d. O erro percentual decorrente do uso do resistor padrão é

$$\text{Erro percentual} = (4,952 - 5)/5 \times 100 = -0,96\%$$

e. Assim, a potência absorvida pelo resistor R será

$$P = IR = (0,0012698)^2(15\text{k}) = 24,2 \text{ mW}$$

Portanto, até mesmo um resistor de um quarto de watt seria adequado para essa aplicação.

2.6 Circuitos com Combinações de Resistores em Série e em Paralelo

Até o tópico anterior aprenderam-se diversas técnicas fundamentais para a análise de circuitos. Deseja-se agora aplicá-las

e mostrar como elas podem ser utilizadas corriqueiramente na análise dos circuitos. As aplicações serão ilustradas por meio de vários exemplos que serão tratados com algum detalhe.

EXEMPLO 2.24

Deseja-se obter todas as correntes e tensões indicadas no circuito em cascata mostrado na Fig. 2.32a.

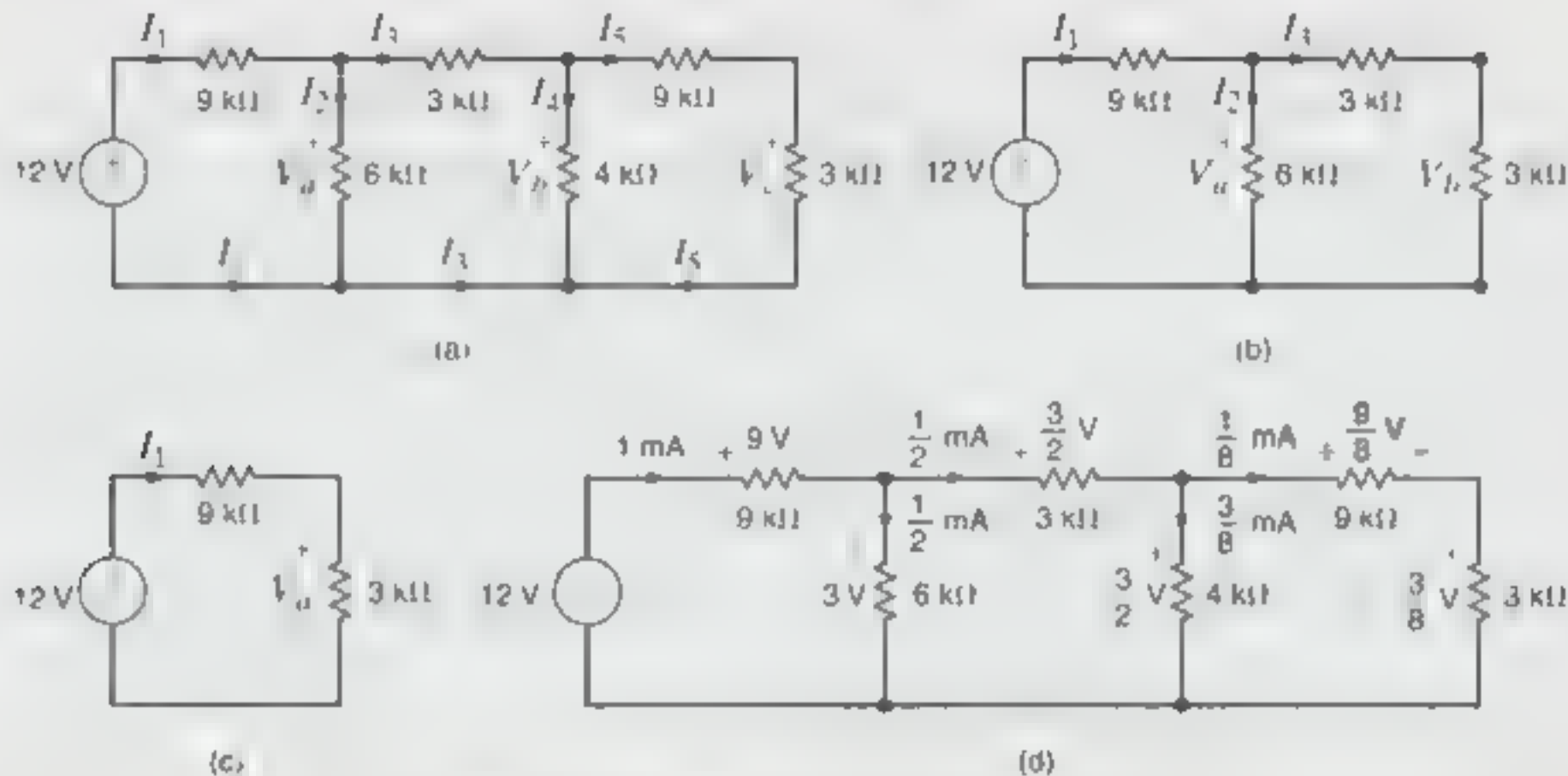


Figura 2.32 Análise de um circuito em cascata.

SOLUÇÃO

A análise do circuito começa por seu lado direito pela combinação dos resistores. Esse procedimento permite que se determine a resistência total vista pela fonte de 12 V. Pode-se, assim, calcular a corrente I_1 . Em seguida, empregando-se a LKT, a LKC, a lei de Ohm e/ou a divisão de tensão e de corrente, será possível calcular todas as correntes e tensões envolvidas no circuito.

No lado direito do circuito, os resistores de $9\text{ k}\Omega$ e $3\text{ k}\Omega$ estão em série, logo, sua combinação resulta em um único resistor equivalente de $12\text{ k}\Omega$. Esse resistor está em paralelo com o resistor de $4\text{ k}\Omega$ e sua combinação fornece o resistor equivalente de $3\text{ k}\Omega$, mostrado no lado direito do circuito da Fig. 2.32b. Na Fig. 2.32b, os dois resistores de $3\text{ k}\Omega$ estão em série e sua combinação está em paralelo com o resistor de $6\text{ k}\Omega$. A combinação de todas essas três resistências resulta no circuito mostrado na Fig. 2.32c.

A aplicação da lei de Kirchhoff das tensões ao circuito mostrado na Fig. 2.32c fornece

$$\begin{aligned} I_1(9\text{ k} + 3\text{ k}) &= 12 \\ I_1 &= 1\text{ mA} \end{aligned}$$

A tensão V_a pode ser calculada pela lei de Ohm como

$$\begin{aligned} V_a &= I_1(3\text{ k}) \\ &= 3\text{ V} \end{aligned}$$

ou, utilizando-se a lei de Kirchhoff das tensões,

$$\begin{aligned} V_a &= 12 - 9\text{ k}I_1 \\ &= 12 - 9 \\ &= 3\text{ V} \end{aligned}$$

Conhecendo-se I_1 e V_a , pode-se agora determinar todas as correntes e tensões indicadas na Fig. 2.32b. Como $V_a = 3\text{ V}$, a corrente I_2 pode ser obtida pela lei de Ohm como

$$\begin{aligned} I_2 &= \frac{3}{6\text{ k}} \\ &= \frac{1}{2}\text{ mA} \end{aligned}$$

Assim, utilizando-se a lei de Kirchhoff das correntes, tem-se

$$\begin{aligned} I_1 &= I_2 + I_3 \\ 1 \times 10^{-3} &= \frac{1}{2} \times 10^{-3} + I_3 \\ I_3 &= \frac{1}{2}\text{ mA} \end{aligned}$$

Note que I_3 também poderia ser calculada pela lei de Ohm, isto é,

$$\begin{aligned} V_b &= (3\text{ k} + 3\text{ k})I_3 \\ I_3 &= \frac{3}{6\text{ k}} \\ &= \frac{1}{2}\text{ mA} \end{aligned}$$

A aplicação da lei de Kirchhoff das tensões ao laço da direita do circuito mostrado na Fig. 2.32b fornece

$$\begin{aligned} V_a - V_b &= 3\text{ k}I_3 \\ 3 - V_b &= \frac{3}{2} \\ V_b &= \frac{3}{2}\text{ V} \end{aligned}$$

ou, como V_b é igual à queda da tensão entre os terminais do resistor de $3\text{ k}\Omega$, a lei de Ohm poderia ser utilizada fornecendo

$$\begin{aligned} V_b &= 3kI_1 \\ &= \frac{3}{1}\text{ V} \end{aligned}$$

Pode-se agora calcular as últimas correntes e tensões incógnitas indicadas na Fig. 2.32a. Conhecendo-se V_b , calcula-se I_4 pela lei de Ohm, isto é,

$$\begin{aligned} V_b &= 4kI_4 \\ I_4 &= \frac{3}{4k} \\ &= \frac{3}{8}\text{ mA} \end{aligned}$$

Assim, pela lei de Kirchhoff das correntes, tem-se

$$\begin{aligned} I_1 &= I_3 + I_4 \\ \frac{1}{2} \times 10^{-3} &= \frac{3}{8} \times 10^{-3} + I_3 \\ I_3 &= \frac{1}{8}\text{ mA} \end{aligned}$$

A corrente I_3 poderia também ser calculada utilizando-se a regra da divisão de corrente, ou seja,

$$I_3 = \frac{4k}{4k + (9k + 3k)} I_1 = \frac{1}{8}\text{ mA}$$

Finalmente, V_c pode ser determinada como

$$V_c = I_3(3k) = \frac{3}{8}\text{ V}$$

A tensão V_c pode também ser obtida utilizando-se a divisão de tensão (isto é, a tensão V_b será dividida entre os resistores de $9\text{ k}\Omega$ e de $3\text{ k}\Omega$). Portanto,

$$V_c = \left[\frac{3k}{3k + 9k} \right] V_b = \frac{3}{8}\text{ V}$$

Note que a lei de Kirchhoff das correntes é atendida em todos os nós e a lei de Kirchhoff das tensões é atendida por todos os laços, conforme pode ser verificado pela Fig. 2.32d.

No exemplo a seguir faz-se, basicamente, uma análise inversa da que foi realizada no exemplo anterior. Nesse exemplo

será fornecida a corrente em algum ramo do circuito e deseja-se determinar o valor da fonte de alimentação.

EXEMPLO 2.25

Dado o circuito mostrado na Fig. 2.33 no qual a corrente $I_4 = 1/2\text{ mA}$, pede-se a determinação da tensão V_s da fonte.

SOLUÇÃO

Se $I_4 = 1/2\text{ mA}$, então, pela lei de Ohm, $V_b = 3\text{ V}$. A tensão V_b pode agora ser utilizada para se calcular $I_3 = 1\text{ mA}$. A lei de Kirchhoff das correntes aplicada ao nó y fornece

$$\begin{aligned} I_2 &= I_3 + I_4 \\ &= 1.5\text{ mA} \end{aligned}$$

Assim, pela lei de Ohm, tem-se

$$\begin{aligned} V_a &= (1.5 \times 10^{-3})(2k) \\ &= 3\text{ V} \end{aligned}$$

Como agora a soma $V_a + V_b$ é conhecida, a corrente I_5 pode ser determinada:

$$\begin{aligned} I_5 &= \frac{V_a + V_b}{3k + 1k} \\ &= 1.5\text{ mA} \end{aligned}$$

A aplicação da lei de Kirchhoff das correntes ao nó x fornece

$$\begin{aligned} I_1 &= I_2 + I_5 \\ &= 3\text{ mA} \end{aligned}$$

Agora, a lei de Kirchhoff das tensões aplicada a qualquer caminho fechado que contenha V_s fornecerá o valor da tensão da fonte. Por exemplo, se o caminho for referente ao laço mais externo, a LKT fornecerá

$$-V_s + 6kI_1 + 3kI_5 + 1kI_5 + 4kI_2 = 0$$

Como $I_1 = 3\text{ mA}$ e $I_5 = 1.5\text{ mA}$,

$$V_s = 36\text{ V}$$

Se o caminho selecionado fosse aquele que contém a fonte e os pontos x , y e z , a seguinte equação seria obtida

$$V_s + 6kI_1 + V_a + V_b + 4kI_2 = 0$$

Mais uma vez, essa equação fornece

$$V_s = 36\text{ V}$$

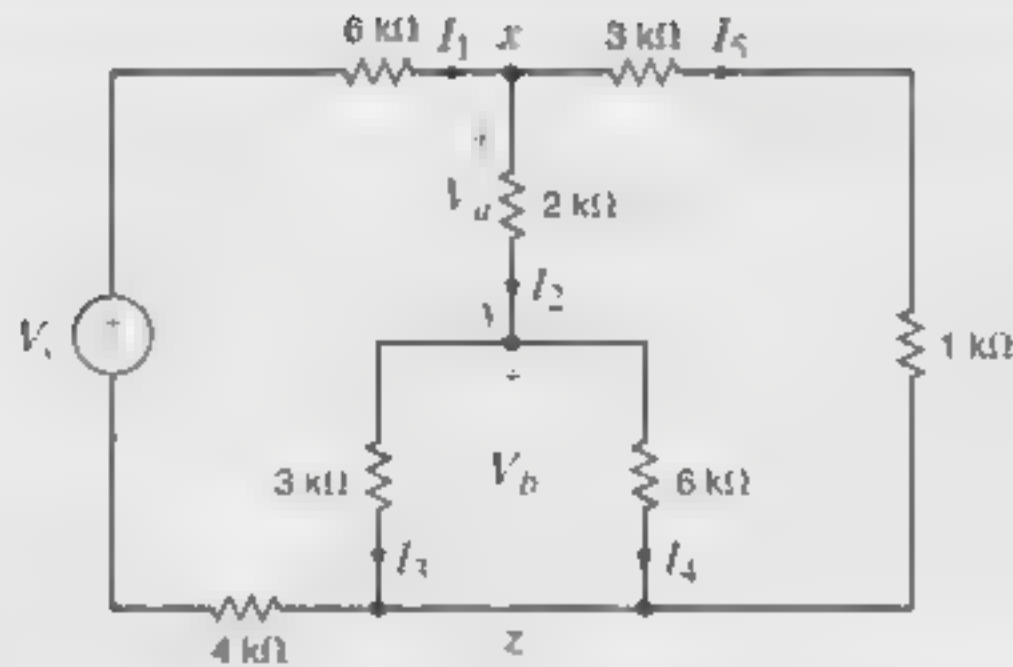


Figura 2.33 Exemplo de análise de um circuito.

Estratégia para Solução de Problemas

Análise de Circuitos que Contêm uma Única Fonte e a Combinação de Resistores em Série e em Paralelo

- Etapa 1.** Reduza sistematicamente a rede resistiva de modo que a resistência vista pela fonte seja representada por um único resistor
- Etapa 2.** Determine a corrente da fonte de tensão ou a tensão da fonte de corrente, conforme o caso.
- Etapa 3.** Expanda a rede, recompondo os passos relativos às simplificações, e aplique a lei de Ohm, a LKT, a LKC, a divisão de tensão e a divisão de corrente para determinar todas as correntes e tensões associadas à rede.

Avaliação do Aprendizado

E2.17 Determine a tensão V_x do circuito mostrado na Fig. E2.17.

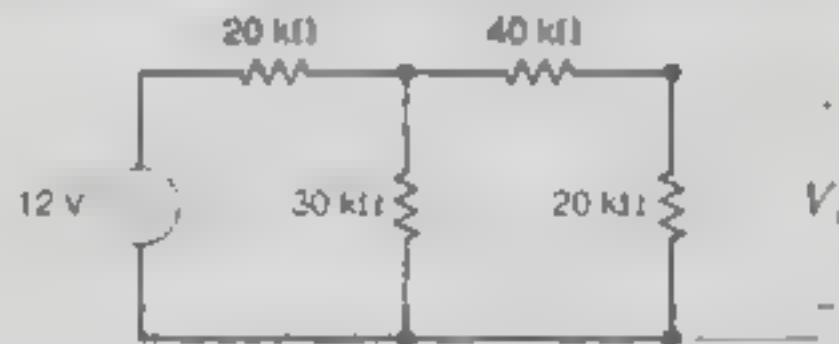


Figura E2.17

RESPOSTA: $V_x = 2 \text{ V}$.

E2.18 Determine a tensão V_F da fonte do circuito mostrado na Fig. E2.18.

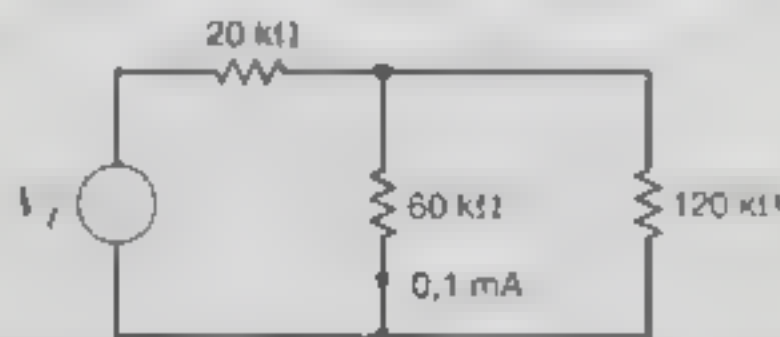


Figura E2.18

RESPOSTA: $V_F = 9 \text{ V}$.

E2.19 Determine a corrente I_F da fonte do circuito mostrado na Fig. E2.19.

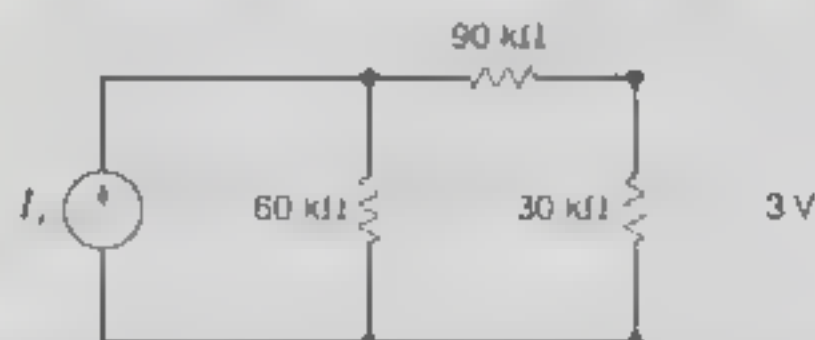
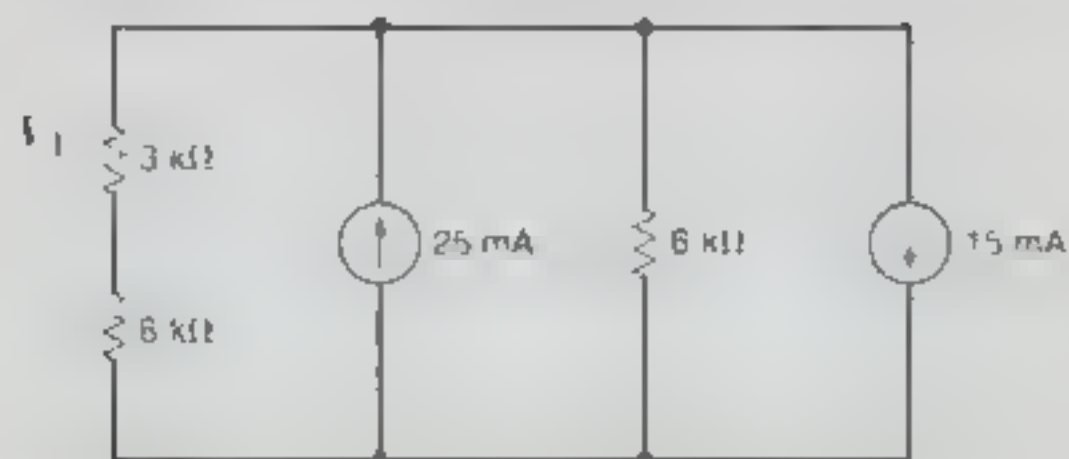


Figura E2.19

RESPOSTA: $I_F = 0,3 \text{ mA}$.

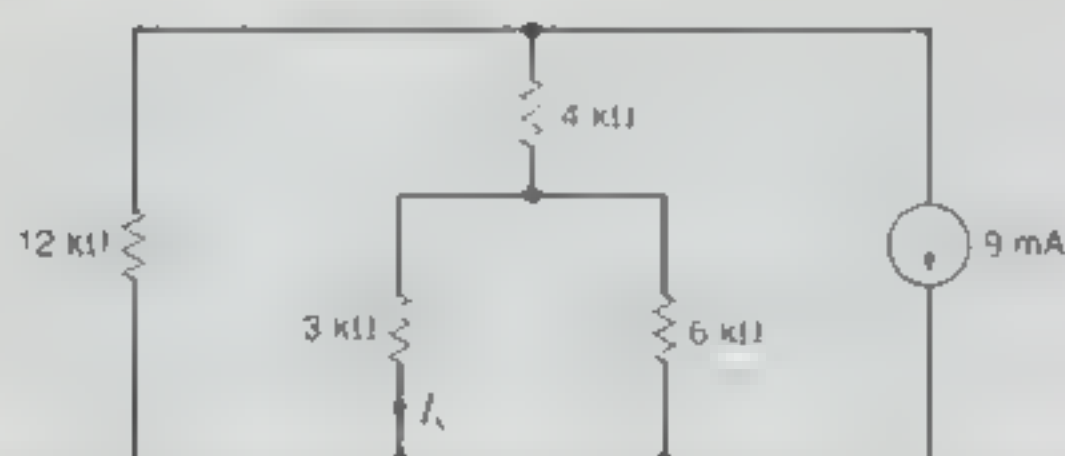
E2.20 Determine a tensão V_1 do circuito mostrado na Fig. E2.20.



RESPOSTA: $V_1 = 12 \text{ V}$

Figura E2.20

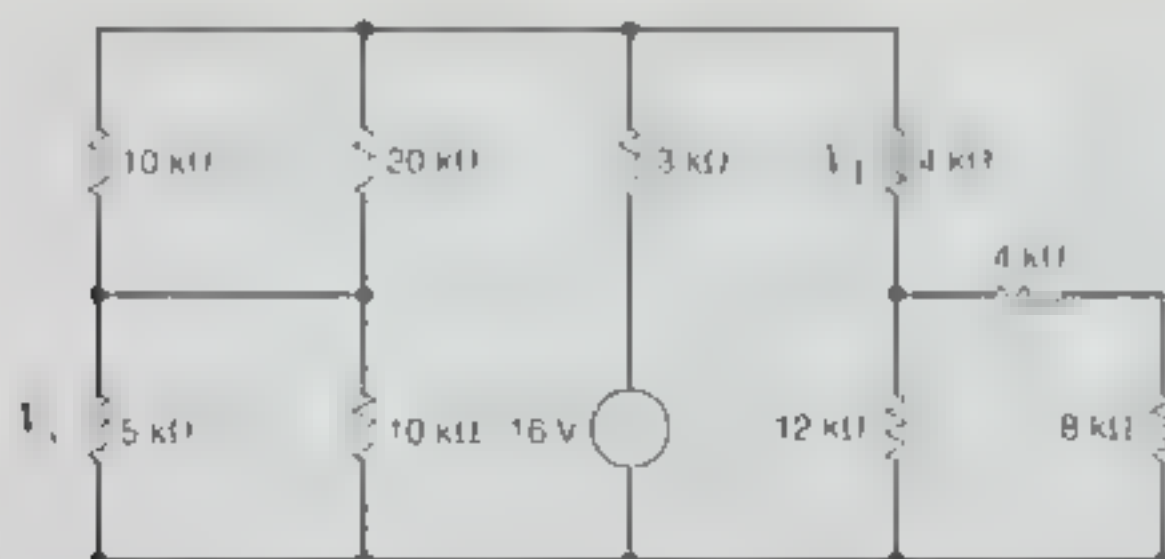
E2.21 Determine a corrente I_1 do circuito mostrado na Fig. E2.21.



RESPOSTA: $I_1 = -4 \text{ mA}$.

Figura E2.21

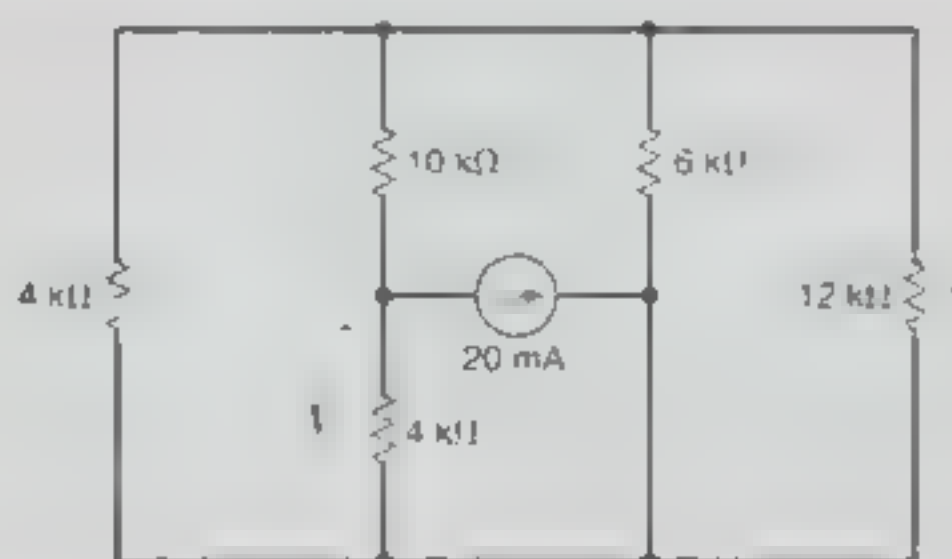
E2.22 Determine as tensões V_1 , V_2 e V_3 do circuito mostrado na Fig. E2.22.



RESPOSTA: $V_1 = 3,33 \text{ V}$,
 $V_2 = -4 \text{ V}$ e $V_3 = 4 \text{ V}$.

Figura E2.22

E2.23 Determine as tensões V_1 e V_2 do circuito mostrado na Fig. E2.23.



RESPOSTA: $V_1 = -60 \text{ V}$
e $V_2 = 10 \text{ V}$.

Figura E2.23

2.7 Transformações Y (Estrela) \rightleftharpoons Δ (Delta)

Para motivar o estudo desse tópico, considere o circuito mostrado na Fig. 2.34. Note que esse circuito possui, basicamente, o mesmo número de componentes dos exemplos anteriores. Entretanto, ao se tentar reduzir o circuito a um circuito equivalente contendo a fonte V_1 e um resistor equivalente R , verifica-se que, nesse caso, os resistores não se encontram nem em série nem em paralelo entre si. Portanto, não é possível abordar o problema diretamente utilizando os procedimentos aprendidos até agora. Pode-se, entretanto, substituir uma parte do circuito por um circuito equivalente, e esta conversão permitirá, com facilidade, reduzir a combinação de resistores a uma única resistência equivalente. Essa conversão é chamada de transformação estrela para delta ou delta para estrela.

Considere o circuito mostrado na Fig. 2.35. Note que os resistores mostrados na Fig. 2.35a formam um Δ (delta) e os resistores na Fig. 2.35b formam um Y (letra Y). Caso essas configurações sejam conectadas a apenas três terminais a , b e c , será

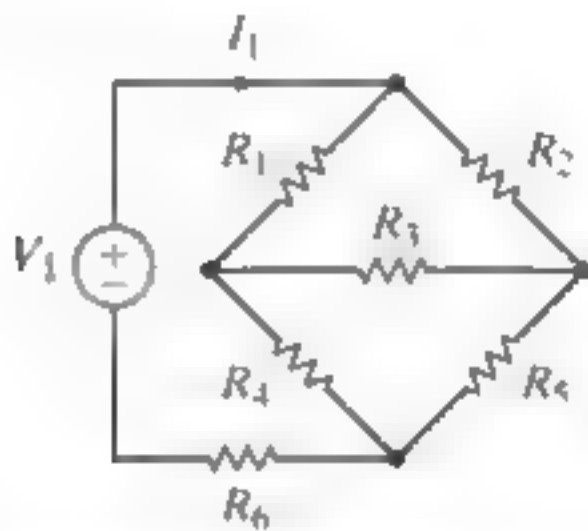


Figura 2.34 Circuito utilizado para ilustrar a necessidade da transformação $Y = \Delta$.

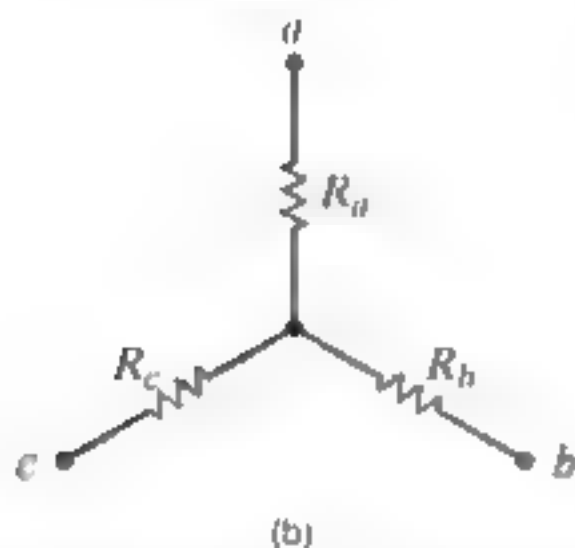
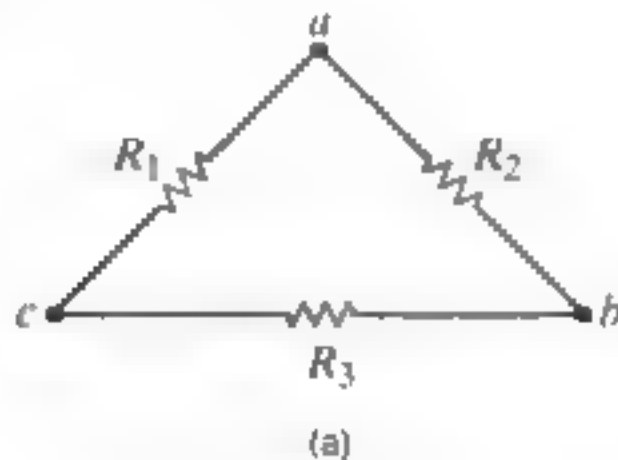


Figura 2.35 Circuitos resistivos – configurações Δ e Y.

muito vantajoso se uma equivalência puder ser estabelecida entre elas. Na realidade, é possível relacionar as resistências de um circuito àsquelas do outro de forma que suas características, do ponto de vista dos terminais, sejam idênticas. Essa relação entre as duas configurações dos circuitos é chamada de transformação Y- Δ .

A transformação que relaciona as resistências R_1 , R_2 e R_3 às resistências R_a , R_b e R_c é determinada como se segue. Para os dois circuitos serem equivalentes, é necessário que, em cada par correspondente de terminais, a resistência seja idêntica (isto é, a resistência entre os terminais a e b com o circuito aberto em c deve ser a mesma para os dois circuitos).

Portanto, ao se igualarem as resistências para cada par correspondente de terminais, obtêm-se as seguintes equações:

$$\begin{aligned} R_{ab} = R_a + R_b &= \frac{R_2(R_1 + R_3)}{R_2 + R_1 + R_3} \\ R_{bc} = R_b + R_c &= \frac{R_3(R_1 + R_2)}{R_1 + R_2 + R_3} \\ R_{ca} = R_c + R_a &= \frac{R_1(R_2 + R_3)}{R_1 + R_2 + R_3} \end{aligned} \quad 2.27$$

Resolvendo-se esse conjunto de equações para R_a , R_b e R_c , obtêm-se

$$\begin{aligned} R_a &= \frac{R_2 R_3}{R_1 + R_2 + R_3} \\ R_b &= \frac{R_1 R_3}{R_1 + R_2 + R_3} \\ R_c &= \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2 + R_3} \end{aligned} \quad 2.28$$

De modo similar, ao se resolver a Eq. (2.27) para R_1 , R_2 e R_3 , têm-se

$$\begin{aligned} R_1 &= \frac{R_a R_b + R_b R_c + R_c R_a}{R_c} \\ R_2 &= \frac{R_a R_b + R_b R_c + R_c R_a}{R_b} \\ R_3 &= \frac{R_a R_b + R_b R_c + R_c R_a}{R_a} \end{aligned} \quad 2.29$$

As Eqs. (2.28) e (2.29) são relações gerais e se aplicam a qualquer conjunto de resistências conectadas em Y ou Δ . Para a condição de equilíbrio, em que $R_a = R_b = R_c$ e $R_1 = R_2 = R_3$, as equações anteriores são reduzidas a

$$R_Y = \frac{1}{3} R_\Delta \quad 2.30$$

e

$$R_\Delta = 3R_Y \quad 2.31$$

É importante observar que não é necessária a memorização das fórmulas apresentadas nas Eqs. (2.28) e (2.29). Através de uma inspeção cuidadosa dessas equações e da Fig. 2.35 pode-se perceber um padrão definido para a relação entre as duas configurações. Por exemplo, a resistência conectada ao ponto a da configuração Y (isto é, R_a) é igual ao produto dos dois resistores conectados ao ponto a da configuração Δ , dividido pela soma de

todas as resistências na configuração delta. As resistências R_b e R_c são determinadas de forma similar. Analogamente, existe um padrão geométrico associado às equações para o cálculo dos resistores da configuração delta em função daqueles da configuração estrela.

Examina-se, agora, o uso da transformação $\Delta \rightleftharpoons Y$ na solução do problema de um circuito.

EXEMPLO 2.26

Dado o circuito mostrado na Fig. 2.36a, seja a determinação da corrente associada à fonte I_f .

SOLUÇÃO

Note que nenhum dos resistores do circuito estão em série nem em paralelo. Entretanto, uma análise cuidadosa do circuito indica que os resistores de $12\text{ k}\Omega$, $6\text{ k}\Omega$ e $18\text{ k}\Omega$, bem como os resistores de $4\text{ k}\Omega$, $6\text{ k}\Omega$ e $9\text{ k}\Omega$ formam uma configuração delta que pode ser convertida à configuração estrela. Além disso, os resistores de $12\text{ k}\Omega$, $6\text{ k}\Omega$ e $4\text{ k}\Omega$, bem como os resis-

tores de $18\text{ k}\Omega$, $6\text{ k}\Omega$ e $9\text{ k}\Omega$ formam uma configuração estrela que pode ser convertida à configuração delta. Qualquer uma dessas conversões conduzirá à solução desejada. Será analisada a transformação delta para estrela sobre os resistores de $12\text{ k}\Omega$, $6\text{ k}\Omega$ e $18\text{ k}\Omega$, que conduz ao circuito mostrado na Fig. 2.36b. Os resistores de $2\text{ k}\Omega$ e $4\text{ k}\Omega$, assim como os resistores de $3\text{ k}\Omega$ e $9\text{ k}\Omega$ estão em série e sua combinação em paralelo fornece um resistor de $4\text{ k}\Omega$. Assim, a corrente na fonte vale

$$\begin{aligned} I_f &= 12 / (6\text{ k} + 4\text{ k}) \\ &= 1,2\text{ mA} \end{aligned}$$

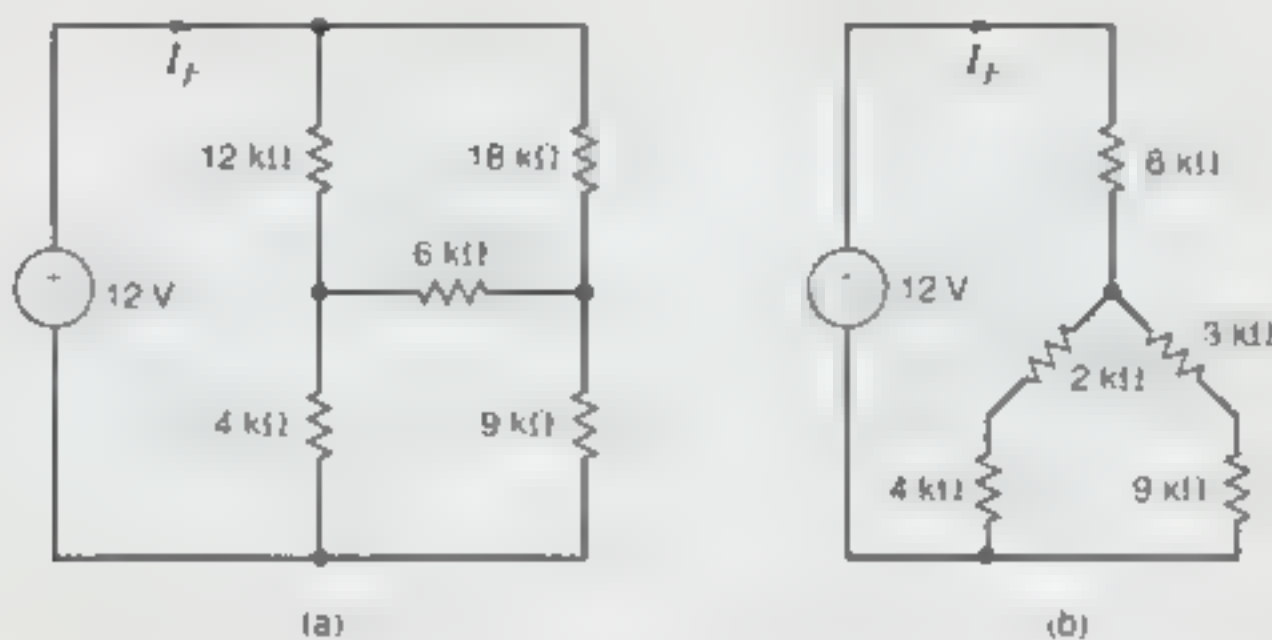
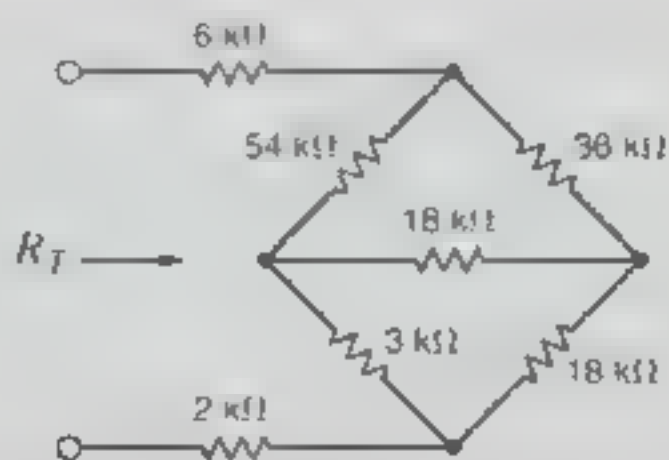


Figura 2.36 Circuitos utilizados no Exemplo 2.26.

Avaliação do Aprendizado

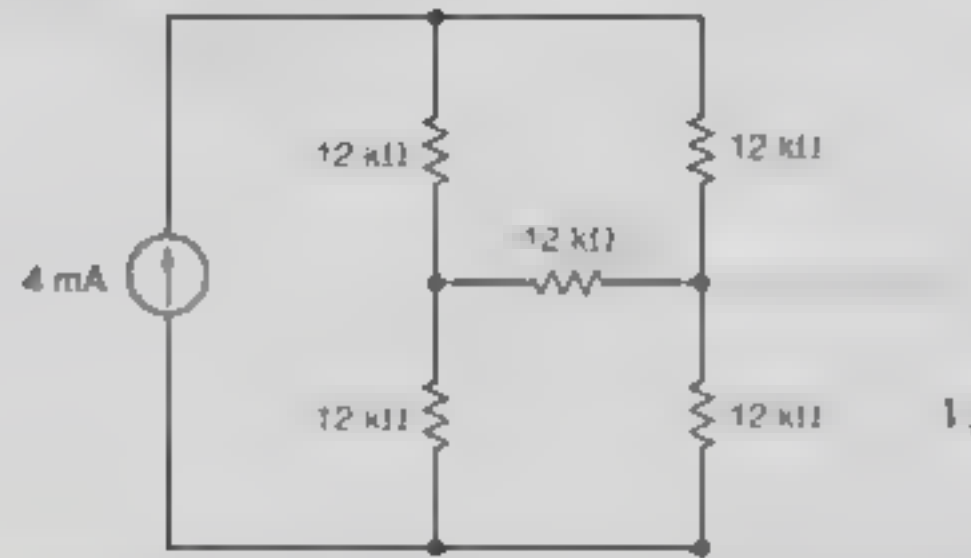
E2.24 Determine a resistência total, R_T , do circuito mostrado na Fig. E2.24.



RESPOSTA: $R_T = 34\text{ k}\Omega$.

Figura E2.24

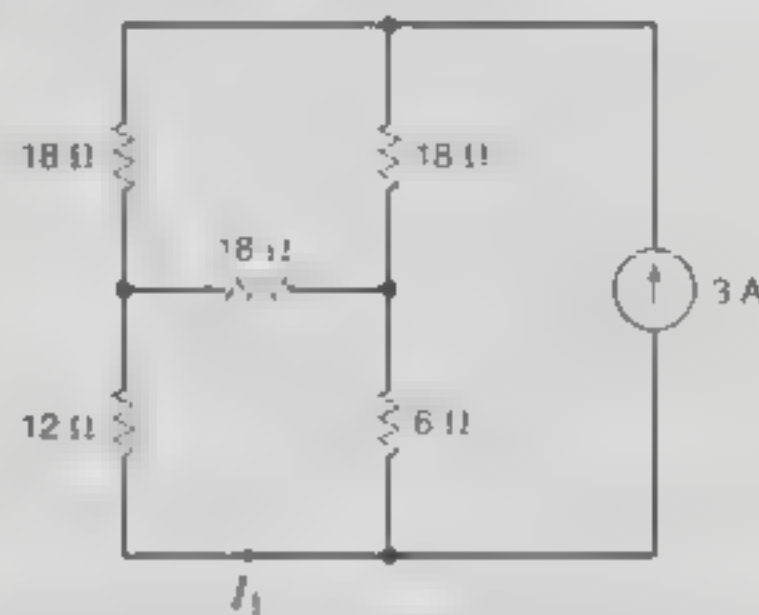
E2.25 Determine a tensão V_x da rede mostrada na Fig. E2.25.



RESPOSTA: $V_x = 24 \text{ V}$.

Figura E2.25

E2.26 Determine a corrente I_1 da rede mostrada na Fig. E2.26.



RESPOSTA: $I_1 = -1,2 \text{ A}$.

Figura E2.26

2.8 Circuito com Fontes Dependentes

No Capítulo 1 foram mostrados os diferentes tipos de fontes dependentes. Essas fontes controladas são extremamente importantes, uma vez que são utilizadas nos modelos de dispositivos físicos como transistores de junção bipolar *nnp* e *pnp* (BJTs – *bipolar junction transistors*) e transistores com efeito de campo (FETs – *field-effect transistors*) que tanto podem ser transistores com efeito de campo de semicondutores óxido-metálico (MOSFETs – *metal-oxide-semiconductor field-effect transistors*) quanto transistores com efeito de campo de porta

isolada (IGFETs – *insulated-gate field-effect transistors*). Essas estruturas básicas são, por sua vez, utilizadas para se construírem dispositivos analógicos e digitais. Um dispositivo analógico típico é um amplificador operacional (op-amp). Esse dispositivo é apresentado no Capítulo 4. Os dispositivos digitais típicos possuem memórias de acesso aleatório (RAMs – *random access memories*), memórias somente de leitura (ROMs – *read-only memories*) e microprocessadores. Mostra-se, agora, o procedimento de solução a ser utilizado em circuitos de um único laço e de um único nó que possuam essas fontes dependentes. Embora os exemplos a seguir sejam bastante simples, eles servirão para ilustrar os conceitos básicos.

Estratégias para Solução de Problemas

Circuitos com Fontes Dependentes

- Etapa 1.** Ao escrever as equações decorrentes da LKT e/ou da LKC relacionadas a um circuito, trate a fonte dependente como se fosse uma fonte independente.
- Etapa 2.** Escreva a equação que estabelece a relação da fonte dependente com o parâmetro de controle.
- Etapa 3.** Resolva as equações para as incógnitas. Certifique-se de que o número de equações linearmente

independentes seja igual ao número de incógnitas.

Os quatro exemplos a seguir ilustram um dos quatro tipos de fontes dependentes: fonte de tensão controlada por corrente, fonte de corrente controlada por corrente, fonte de tensão controlada por tensão e fonte de corrente controlada por tensão.

EXEMPLO 2.27

Seja a determinação da tensão V_x do circuito mostrado na Fig. 2.37.

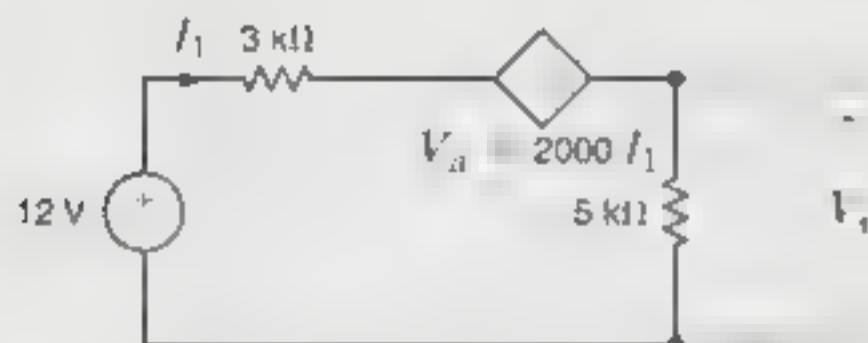


Figura 2.37 Circuito utilizado no Exemplo 2.27.

SOLUÇÃO

Aplicando a LKT, obtém-se

$$-12 + 3kI_1 - V_x + 5kI_1 = 0$$

em que

$$V_x = 2000I_1$$

e a unidade do fator multiplicador, 2.000, é ohms. A solução dessas equações fornece

$$I_1 = 2 \text{ mA}$$

Assim,

$$V_x = (5k)I_1 \\ = 10 \text{ V}$$

EXEMPLO 2.28

Dado o circuito mostrado na Fig. 2.38, que possui uma fonte de corrente controlada por corrente, seja a determinação da tensão V_x .

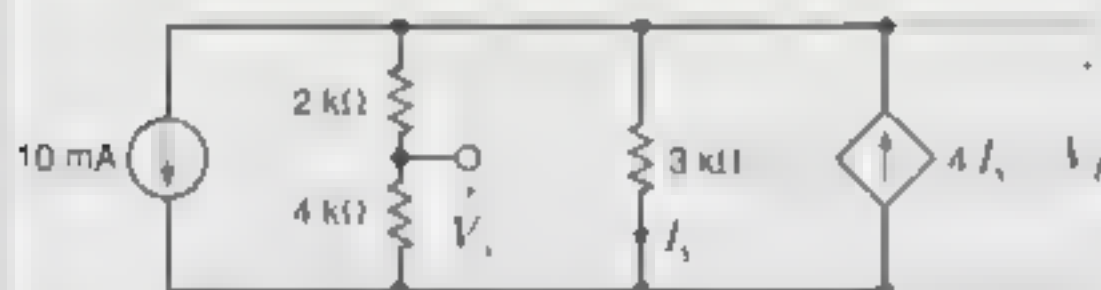


Figura 2.38 Circuito utilizado no Exemplo 2.28.

SOLUÇÃO

Aplicando a LKC ao nó da parte superior do circuito, obtém-se

$$10 \times 10^{-3} + \frac{V_x}{2k + 4k} + \frac{V_x}{3k} - 4I_x = 0$$

em que

$$I_x = \frac{V_x}{3k}$$

A substituição dessa expressão para a fonte controlada na equação proveniente da aplicação da LKC fornece

$$10^{-3} + \frac{V_x}{6k} + \frac{V_x}{3k} - \frac{4V_x}{3k} = 0$$

Resolvendo essa equação para V_x , obtém-se

$$V_x = 12 \text{ V}$$

A tensão V_x pode, agora, ser obtida utilizando-se um simples divisor de tensão, isto é,

$$V_x = \left[\frac{4k}{2k + 4k} \right] V_F \\ = 8 \text{ V}$$

EXEMPLO 2.29

O circuito mostrado na Fig. 2.39 possui uma fonte de tensão controlada por tensão. Deseja-se determinar a tensão V_x indicada nesse circuito.

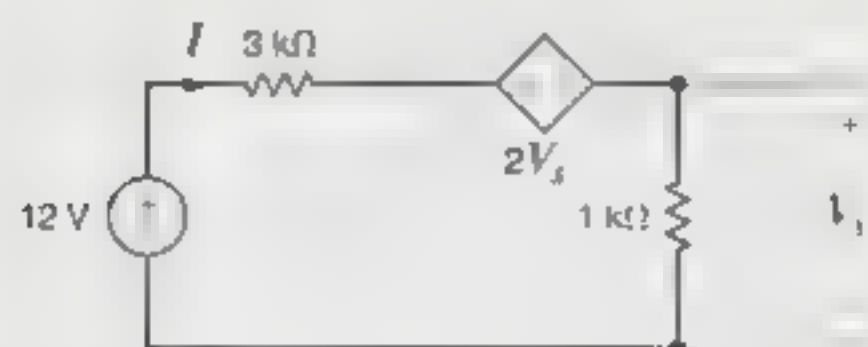


Figura 2.39 Circuito utilizado no Exemplo 2.29.

SOLUÇÃO

A aplicação da LKT a esse circuito fornece

$$-12 + 3kI + 2V_x + 1kI = 0$$

em que

$$V_x = 1kI$$

Assim, a LKT pode ser escrita como

$$-12 + 3kI + 2kI + 1kI = 0$$

ou

$$I = 2 \text{ mA}$$

Portanto,

$$V_x = 1kI \\ = 2 \text{ V}$$

EXEMPLO 2.30

A Fig. 2.40a mostra o circuito equivalente a um amplificador em configuração de fonte comum utilizando transistor com efeito de campo (FET) ou equivalente a um amplificador

em configuração de emissor comum utilizando transistor com junção bipolar (BJT). Deseja-se determinar uma expressão para o ganho do amplificador, isto é, a relação entre a tensão de saída e a tensão de entrada.

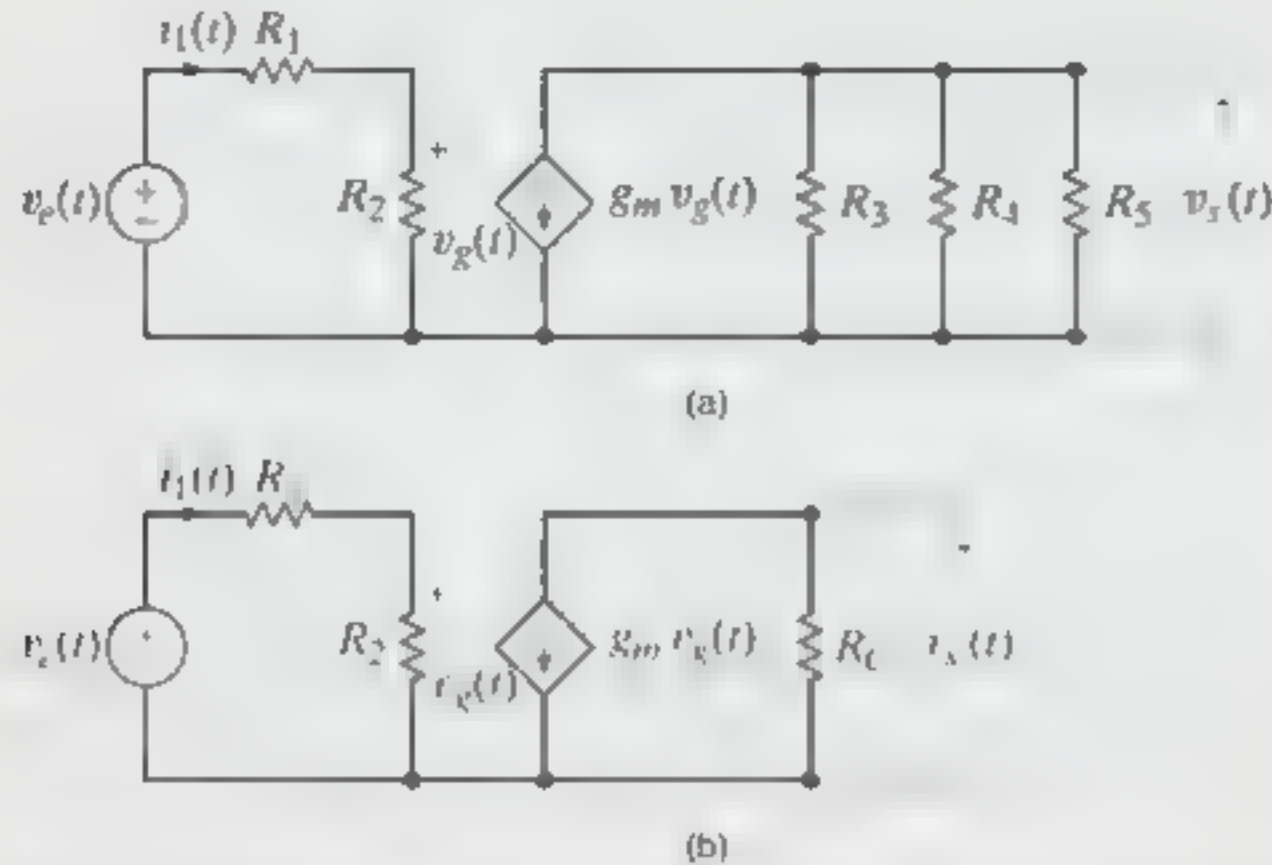


Figura 2.40 Exemplo de circuito contendo uma fonte de corrente controlada por tensão.

SOLUÇÃO

Observe que embora esse circuito possua uma fonte de corrente controlada por tensão, parecendo ser relativamente complexo, na realidade pode-se analisá-lo com os procedimentos estudados até agora. O laço da esquerda, ou a entrada para o amplificador, é, basicamente, desacoplado da região de saída do amplificador no lado direito do circuito. A tensão entre os terminais do resistor R_2 é $v_g(t)$, isto é, a tensão que controla a fonte de corrente dependente.

Para simplificar a análise, pode-se substituir os resistores R_3 , R_4 e R_5 por R_c , de forma que

$$\frac{1}{R_c} = \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_5}$$

Assim, o circuito fica reduzido àquele mostrado na Fig. 2.40b. A aplicação da lei de Kirchhoff das tensões para a região da entrada do amplificador fornece

$$v_g(t) = i_1(t)(R_1 + R_2)$$

e

$$v_g(t) = i_1(t)R_2$$

A solução dessas equações para $v_g(t)$ fornece

$$v_g(t) = \frac{R_1}{R_1 + R_2} v_e(t)$$

Considerando o circuito de saída, observe que a tensão $v_s(t)$ pode ser expressa por

$$v_s(t) = -g_m v_g(t) R_c$$

A combinação dessa equação com sua precedente fornece

$$v_s(t) = -\frac{g_m R_c R_1}{R_1 + R_2} v_e(t)$$

Portanto, o ganho do amplificador, que é a relação entre a tensão de saída e a tensão de entrada, pode ser expresso por

$$\frac{v_s(t)}{v_e(t)} = -\frac{g_m R_c R_1}{R_1 + R_2}$$

Valores razoáveis para os parâmetros do circuito da Fig. 2.40a são $R_1 = 100 \, \Omega$, $R_2 = 1 \, \text{k}\Omega$, $g_m = 0,04 \, \text{S}$, $R_3 = 50 \, \text{k}\Omega$ e $R_4 = R_5 = 10 \, \text{k}\Omega$. Assim, o ganho do amplificador nessas condições será

$$\begin{aligned} \frac{v_s(t)}{v_e(t)} &= \frac{(0,04)(4545)(100)(10^3)}{(1,1)(10^3)} \\ &= -165,29 \end{aligned}$$

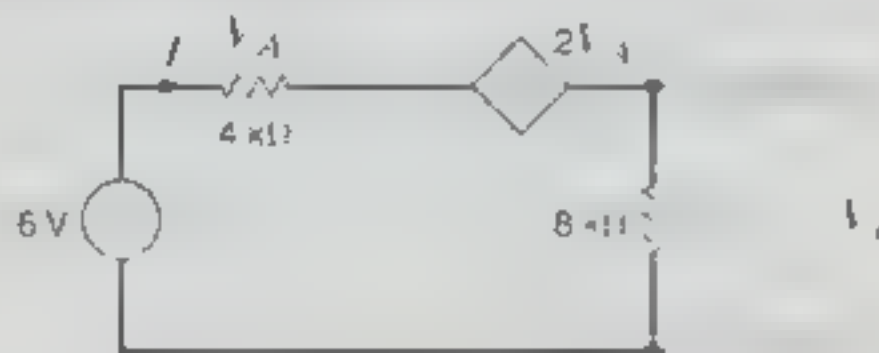
Logo, a intensidade do ganho será de 165,29.

Talvez seja útil neste instante destacar que, na análise dos circuitos com fontes dependentes, deve-se, inicialmente, tratar a fonte dependente como se ela fosse uma fonte independente e, em seguida, escrever uma equação utilizando a lei de Kirchhoff das correntes ou das tensões. Uma vez definida a equação, escreve-se a equação de controle que estabelece a relação da

fonte dependente com a variável incógnita. Por exemplo, a primeira equação no Exemplo 2.28 trata a fonte dependente como uma fonte independente. A segunda equação daquele exemplo estabelece a relação da fonte dependente com a tensão, que é a incógnita na primeira equação.

Avaliação do Aprendizado

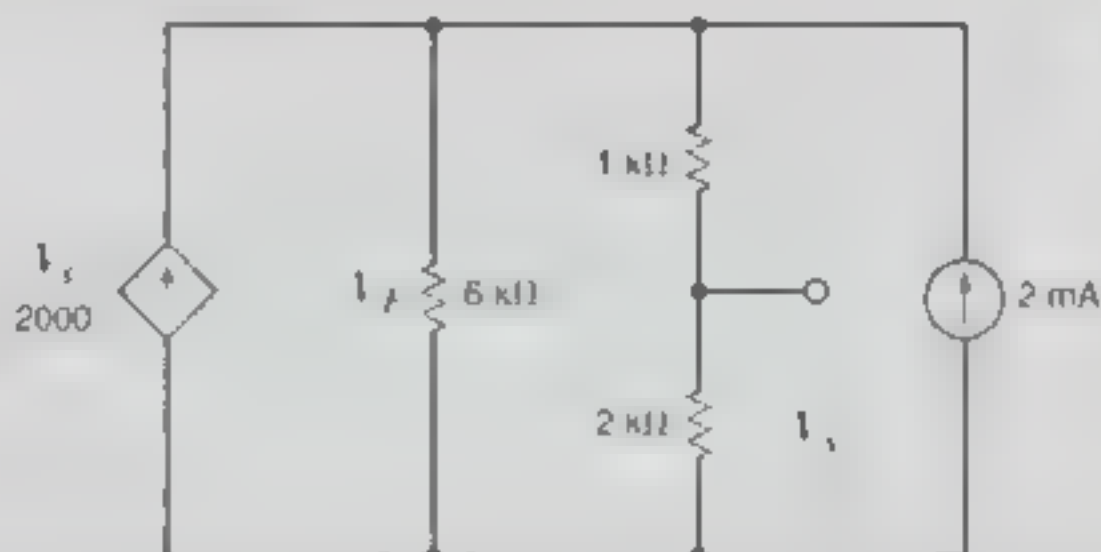
E2.27 Determine a tensão V_x do circuito mostrado na Fig. E2.27.



RESPOSTA: $V_x = 12 \text{ V}$.

Figura E2.27

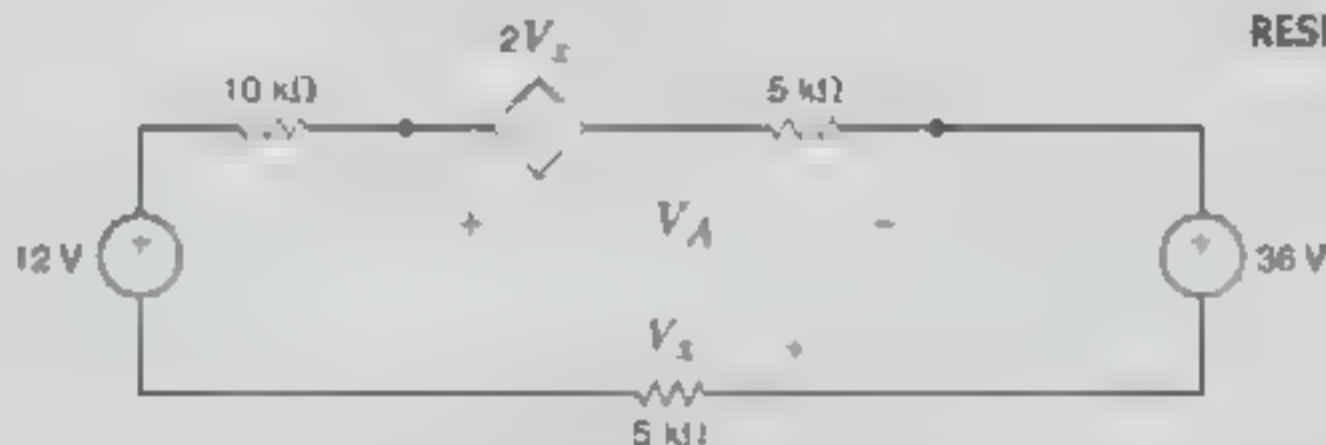
E2.28 Determine a tensão V_x da rede mostrada na Fig. E2.28.



RESPOSTA: $V_x = 8 \text{ V}$.

Figura E2.28

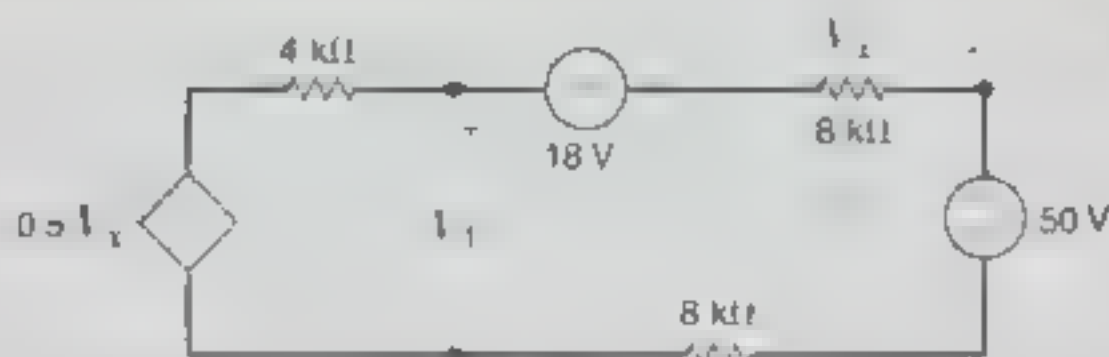
E2.29 Determine a tensão V_A da rede mostrada na Fig. E2.29.



RESPOSTA: $V_A = -12 \text{ V}$.

Figura E2.29

E2.30 Determine a tensão V_1 da rede mostrada na Fig. E2.30.



RESPOSTA: $V_1 = -32/3 \text{ V}$.

Figura E2.30

E2.31 Determine a corrente I_x da rede mostrada na Fig. E2.31.

RESPOSTA: $I_x = -1,5 \text{ mA}$.

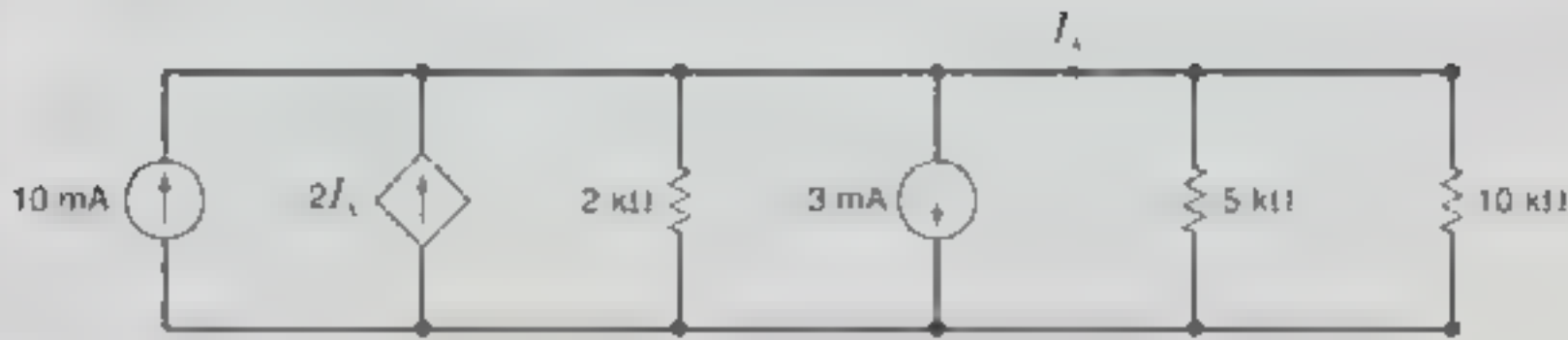


Figura E2.31

E2.32 Determine a tensão V_x da rede mostrada na Fig. E2.32.

RESPOSTA: $V_x = 16 \text{ V}$.

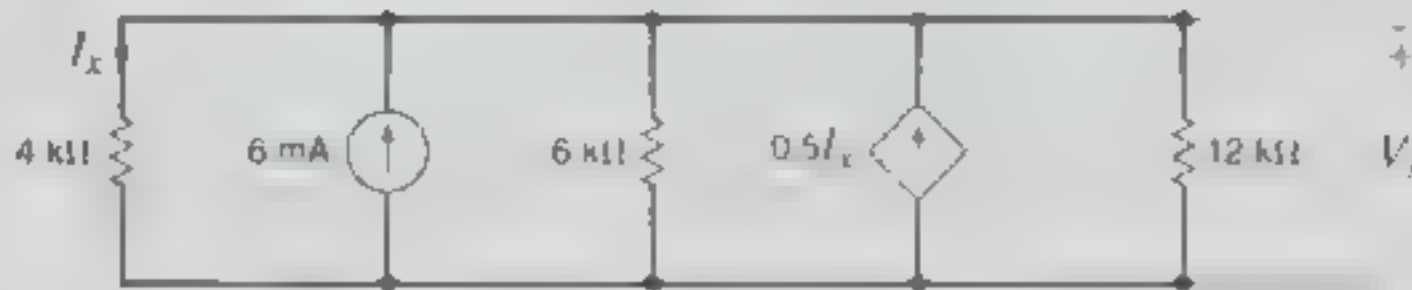


Figura E2.32

E2.33 Se a potência fornecida pela fonte de corrente de 3 A do circuito mostrado na Fig. E2.33 é de 12 W, determine a tensão V_x e a potência fornecida pela fonte de 10 V.

RESPOSTA: $V_x = 42 \text{ V}$, e a potência é igual a -30 W .

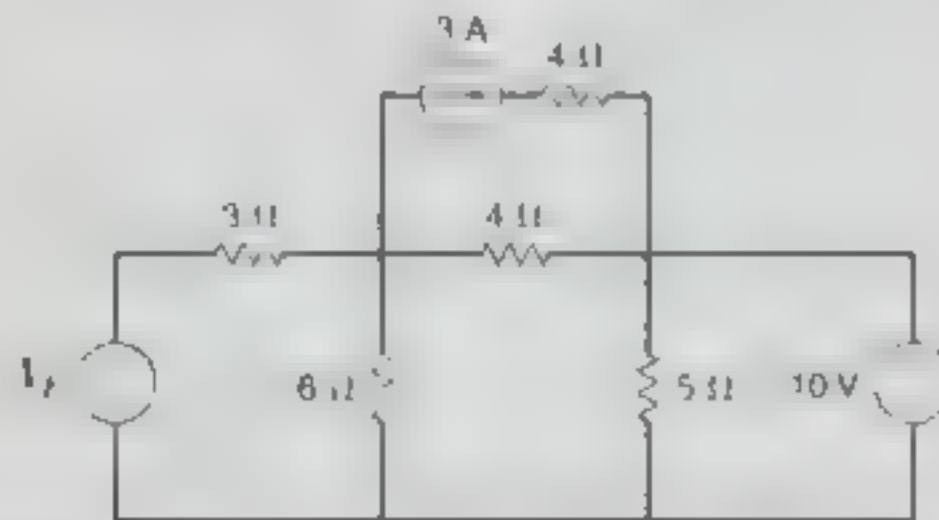


Figura E2.33

2.9 Tecnologia dos Resistores Utilizados na Fabricação de Componentes Eletrônicos

Além dos resistores mostrados na Fig. 2.1, são empregados atualmente na indústria de componentes eletrônicos três outros tipos: os resistores de filme espesso, de filme fino e de silício difuso.

RESISTORES DE FILME ESPESSO Os componentes resistores de filme espesso são obtidos a partir de modernas tecnologias de montagem sobre superfície (SMT – *surface mount technology*) utilizadas nos painéis de circuitos impressos. Eles são fabricados em uma grande variedade de formas, dimensões e valores. Uma tabela de dimensões padronizadas de resistores de filme espesso utilizados em chips é mostrada na Tabela 2.2, e alguns exemplos de montagens em superfície de resistores de filme espesso de cerâmica podem ser observados na Fig. 2.41.

Os resistores de filme espesso são considerados de “baixa tecnologia” quando comparados aos componentes de filme fino e de silício difuso, porque são fabricados com a utilização de

um processo de impressão de tela similar ao utilizado na estampagem de camisas. As telas utilizadas na fabricação dos filmes espessos usam uma malha muito mais fina e são, tipicamente, feitas de aço inoxidável de modo a apresentar uma vida mais longa. A pasta utilizada na tela de impressão dos resistores consiste em uma mistura de óxidos de rutênio (RuO_2) e vidro.

Sendo impressa na tela, a pasta é aquecida a uma temperatura em torno de 850°C , provocando a evaporação das ligas orgânicas e permitindo que o vidro se funda e ligue o metal e o vidro de

TABELA 2.2 Dimensões padronizadas dos resistores de chip de filme espesso

CÓDIGO DIMENSIONAL	DIMENSÃO (MM)	POTÊNCIA NOMINAL (WATTS)
0201	20 × 10	1/20
0402	40 × 20	1/16
0603	60 × 30	1/10
0805	80 × 50	1/8
1206	120 × 60	1/4
2010	200 × 100	1/2
2512	250 × 120	1

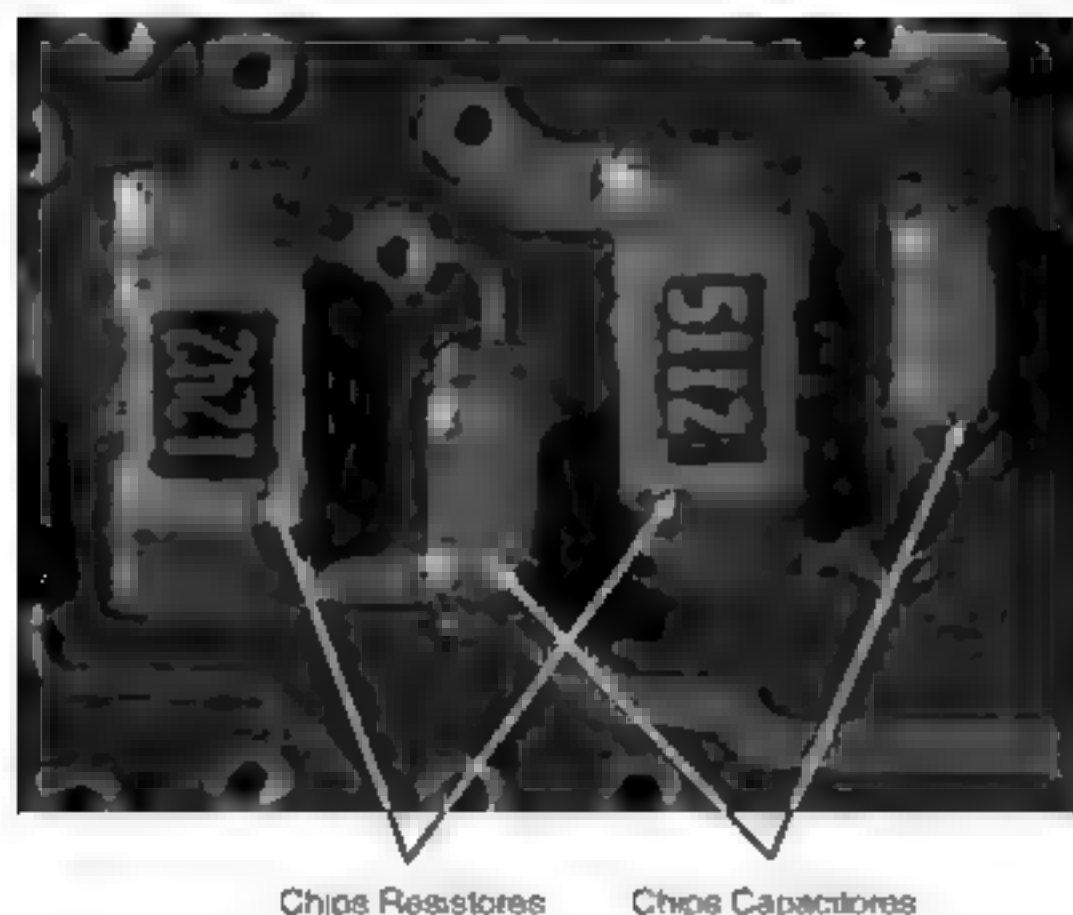


Figura 2.41 Painel de circuito impresso mostrando a superfície de montagem dos resistores cerâmicos de filme espesso. (Cortesia de Mike Palmer)

preenchimento ao substrato. Os substratos são constituídos, tipicamente, de 95% de cerâmica de alumina. Após o aquecimento, os condutores são impressos na tela e aquecidos para formar os contatos utilizados para soldar os resistores. Uma segunda camada de vidro é impressa e aquecida para selar e proteger o resistor. A seção transversal de um resistor de filme espesso típica é mostrada na Fig. 2.42. Observe que os condutores são envolvidos no entorno do substrato para permitir que sejam soldados a partir de sua região inferior ou superior e permitir que o soldador levante sua lateral para formar um contato mecânico e elétrico mais efetivo.

Os resistores de filme espesso apresentam tolerâncias entre $\pm 10\%$ a $\pm 20\%$. Essas tolerâncias relativamente altas são devidas ao fato de o processo de impressão na tela não propiciar uma boa definição de geometria ou espessura consistente. Para se obter melhor tolerância (por exemplo, de $\pm 0,5\%$ a $\pm 1,0\%$), pode-se utilizar o YAG laser para remover uma parte do elemento resistor e alterar seu valor. A resistência é constantemente medida durante o processo de corte para se assegurar que seu valor esteja dentro dos padrões de tolerância especificados.

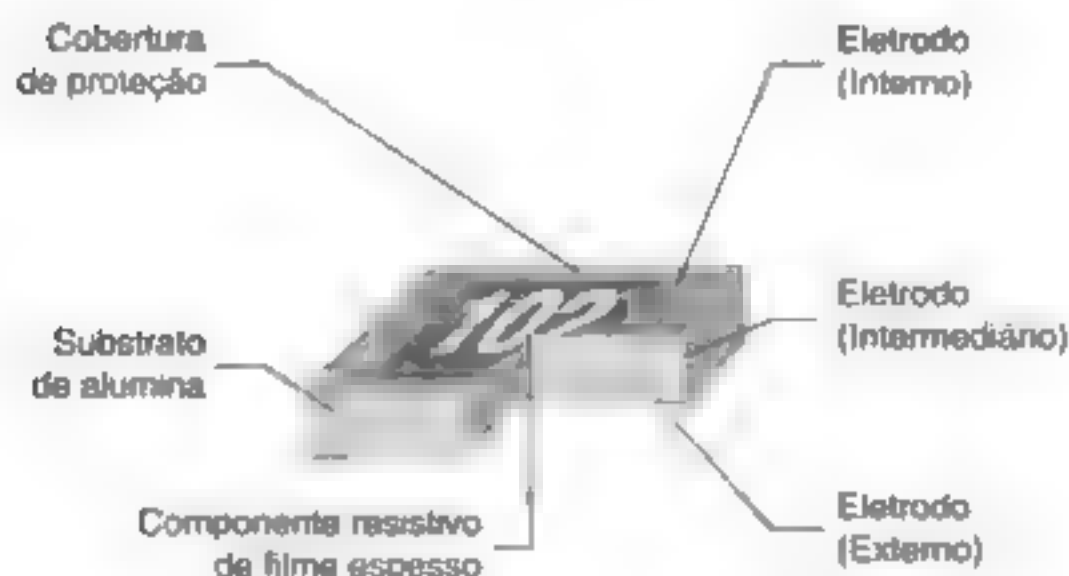


Figura 2.42 Seção transversal de um resistor de filme espesso utilizado em um chip.

RESISTORES DE FILME FINO Os resistores de filme fino são fabricados por deposição de uma fina camada (centenas de angstroms, em que um angstrom é igual a dez bilionésimos de metro) de Nitreto de Tântalo (TaN) ou Nicromo (NiCr) sobre uma substrato de cerâmica alumina altamente polida. Utilizando um processo de fotolitografia, o filme metálico é modelado e gravado para formar a estrutura do resistor. Os metais de filme fino possuem uma resistividade limitada (o inverso da condutividade – a medida da capacidade de um material conduzir uma corrente elétrica). Essa baixa resistividade limita a faixa de utilização prática dos resistores de filme fino devido às grandes áreas requeridas. Tanto o TaN quanto o NiCr possuem características similares, porém, o TaN é química e termicamente mais resistente e será melhor suportado em ambientes mais severos. Os filmes finos obtidos pela deposição de metais são contínuos e virtualmente livres de defeitos, o que os torna muito estáveis, propiciando componentes de baixo ruído com não linearidades desprezíveis quando comparados com os materiais mais porosos utilizados nos filmes espessos.

Os resistores de filmes finos estão disponíveis nos kits padronizados SMT, porém, são também disponíveis na forma de chips com terminais, que podem ser moldados diretamente nos circuitos integrados. A geometria da seção transversal de um chip de filme fino sobre cerâmica ou silício é mostrada na Fig. 2.43. Devido à sofisticação adicional envolvida na fabricação, os resistores de filme fino são mais caros que os resistores de filme espesso. Entretanto, eles possuem algumas características importantes que fazem com que sejam dispositivos preferenciais para diversas aplicações com micro-ondas. Como os resistores de filme espesso, esses componentes também podem passar por um tratamento a laser para se obter um valor desejado de resistência com uma tolerância especificada. Como o filme metálico é extremamente fino, a potência necessária para a operação a laser é muito baixa, o que assegura a possibilidade mínima de ocorrência de microtrincas e, portanto, um maior nível de estabilidade.

RESISTORES DE SILÍCIO DIFUSO Os resistores de silício difuso são, praticamente, parte de todos os circuitos integrados (CI). São dispositivos passivos implementados para propiciar ou melhorar as características de dispositivos ativos, como os transistores ou diodos. Tanto os dispositivos passivos quanto os ativos são fabricados simultaneamente utilizando a mesma tecnologia (por exemplo, CMOS – *complementary metal-oxide semiconductor*). Os resistores são fabricados pela difusão de impurezas, como boro ou fósforo, em um substrato de silício à alta temperatura. Esse processo é muito oneroso e é a razão pela qual os resistores de silício difuso são mais caros que os resistores de filme fino ou filme espesso. A Fig. 2.44 mostra uma foto de um resistor de silício integrado. Observe que o resistor está completamente integrado em um grande circuito, porque a fabricação de resistores de silício difuso discretos não é economicamente viável. A Tabela 2.3 compara algumas características dos resistores de filme fino, filme espesso e silício difuso.

Os resistores de silício possuem uma faixa de resistência da ordem de 5 a 6 k ohms/quad. O termo "ohms por quad" representa uma área quadrada adimensional de material resistivo, tendo um determinado valor em ohms igual à resistividade de

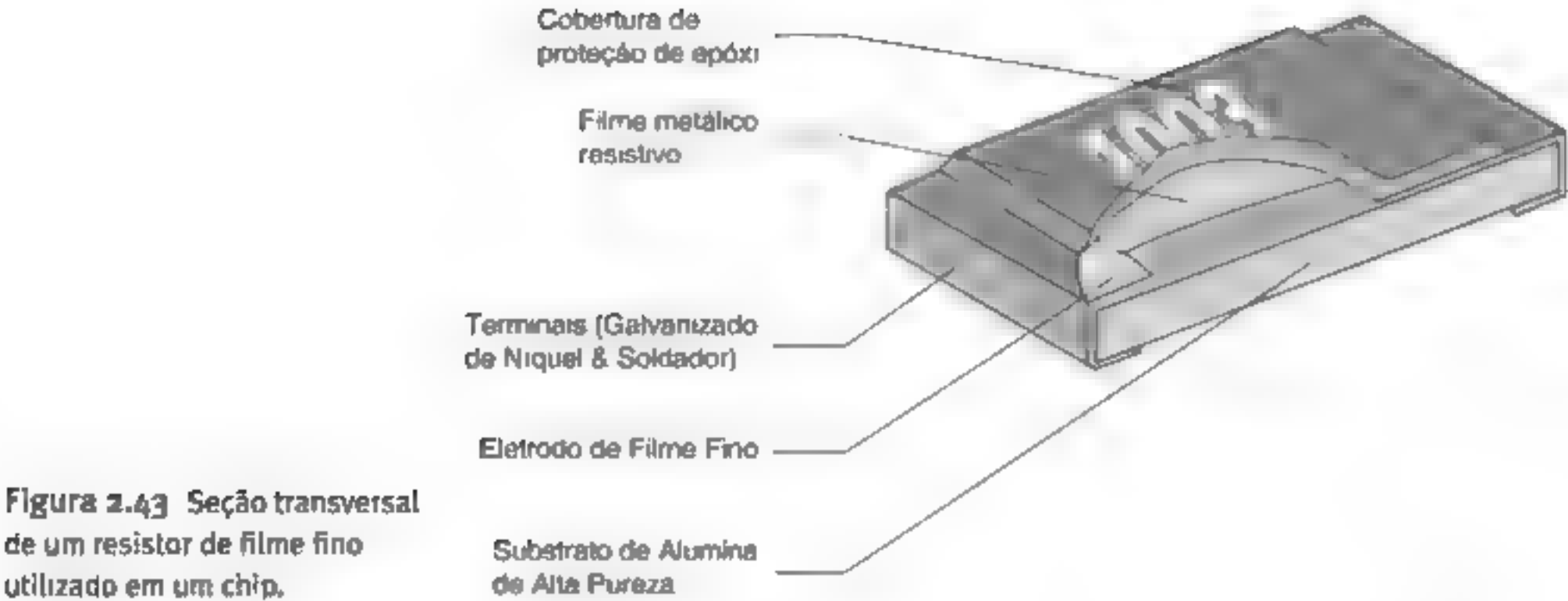


Figura 2.43 Seção transversal de um resistor de filme fino utilizado em um chip.

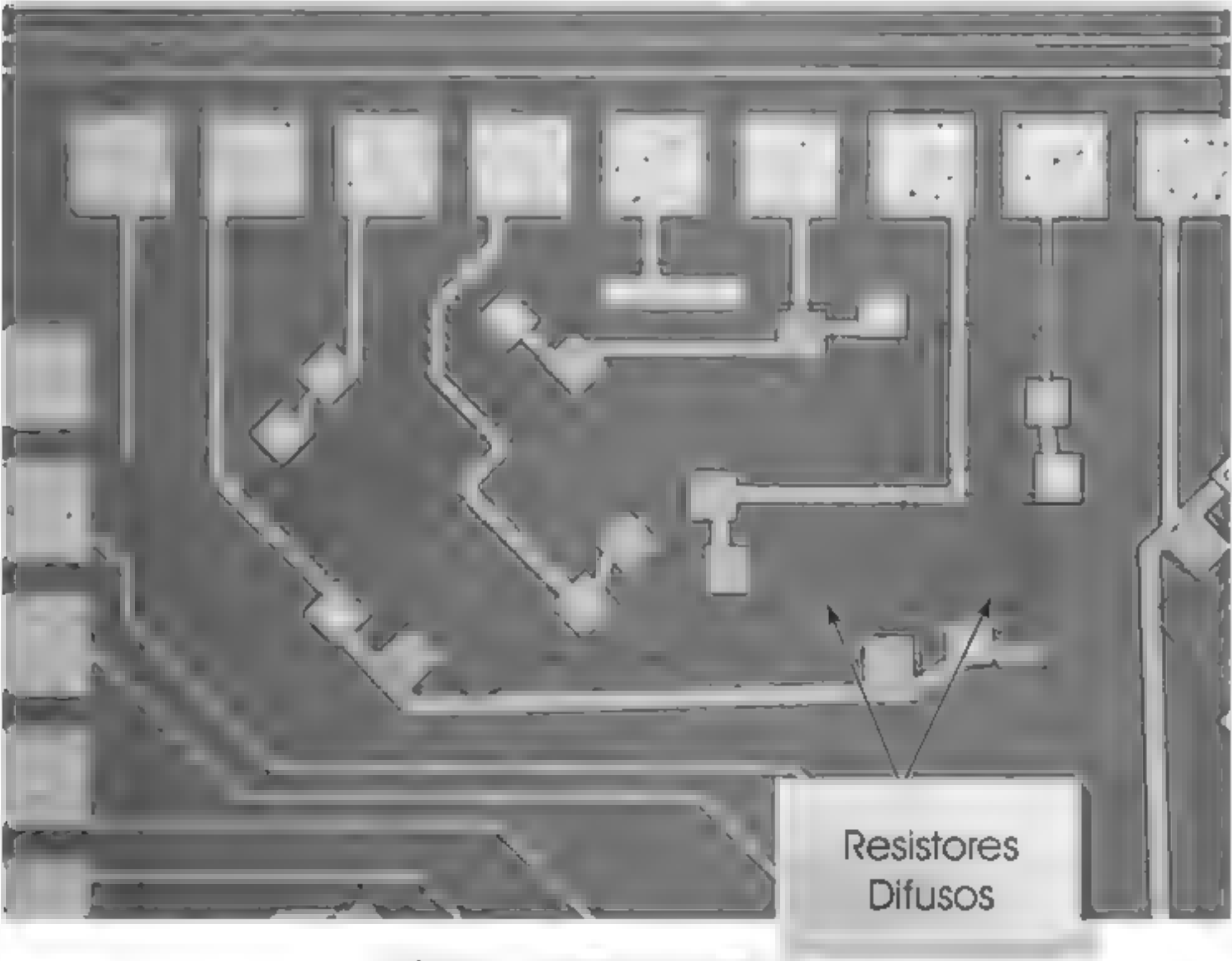


Figura 2.44 Resistores de silício difuso.

TABELA 2.3 Características dos diversos tipos de resistores

	FILME GROSSO	FILME FINO	SILÍCIO DIFUSO
Resistência da lâmina	5 - 500k ohms/quad	25 - 300 ohms/quad	5 - 6k ohms/quad
Tolerância da lâmina (quando aquecida)	+/- 20%	+/- 10%	+/- 2%
Tolerância da lâmina (fina)	+/- 1%	+/- 1%	Não disponível
Custo relativo	Baixo	Alto	Mais alto

uma lâmina do material. Por exemplo, um material cuja resistividade da lâmina é de 10 ohms será referente a um resistor de 10 ohms se o material tiver uma área de 1 mil por 1 mil ou 1 polegada por 1 polegada. Dividindo-se o comprimento do resistor por sua largura, tem-se o número de quadrados, e multiplicando o número de quadrados pela resistência da lâmina tem-se o valor da resistência. Os valores da resistência total são limitados devido ao alto custo da área de silício, e existem outras técnicas de projeto de circuitos para se implementarem resistores de alto valor pelo uso criterioso de transistores. Esses dispositivos sofrem grandes mudanças de valor com a temperatura e alguma variação de resistência com a tensão aplicada. Como resultado dessas características pobres, os resistores de filme fino mon-

tados sobre superfície de silício são utilizados substituindo os resistores difusos nas aplicações críticas

2.10 Exemplos de Aplicação

Ao longo deste livro, apresentamos uma grande variedade de exemplos que demonstram a utilidade do material discutido em dispositivos de cunho prático. Para enriquecer a apresentação dos aspectos práticos da análise e do projeto de circuitos, existem seções dedicadas, como esta, em muitos capítulos, com o propósito específico de apresentar exemplos adicionais com aplicações orientadas.

EXEMPLO DE APLICAÇÃO 2.31

Os observadores (elementos de aquecimento) de um fogão elétrico geralmente são feitos de pequenas tiras de nicromo resistivo. A operação desses elementos é bastante simples. Uma corrente passa pelo elemento resistivo causando dissipação de potência na forma de calor. Uma chave seletora de quatro posições, mostrada na Fig. 2.45, controla a potência (calor) de saída. Nesse caso, os observadores consistem em duas tiras de nicromo representadas pelos resistores R_1 e R_2 , em que $R_1 < R_2$.

1. Poderiam as posições A, B, C e D ser nomeadas como representativas das seleções alto, médio, baixo e desligado?
2. Desejando-se que as posições alto e médio correspondam a potências de dissipação de 2000 W e 1200 W, respectivamente, quais seriam os valores de R_1 e R_2 ?
3. Qual é o valor da dissipação de potência na posição baixo?

SOLUÇÃO

A posição A é a posição desligada, uma vez que nenhuma corrente flui para os elementos de aquecimento. Na posição B, a corrente flui apenas pelo R_2 , enquanto na posição C a corrente flui apenas pelo R_1 . Como $R_1 < R_2$, será dissipada mais potência quando a chave estiver selecionada na posição C. Assim, a posição C é a seleção média, B é a seleção baixa e, por eliminação, D é a posição de alta.

Quando a chave está na posição média, apenas R_1 dissipa potência, e pode-se escrever R_1 como

$$R_1 = \frac{V_F^2}{P_1} = \frac{230^2}{1200}$$

ou

$$R_1 = 44,08 \, \Omega$$

Na posição alto, uma potência total de 2000 W é desenvolvida em R_1 e R_2 . Como R_1 dissipa 1200 W, R_2 deve dissipar a potência remanescente, qual seja, 800 W. Portanto, R_2 vale

$$R_2 = \frac{V_F^2}{P_2} = \frac{230^2}{800}$$

ou

$$R_2 = 66,13 \, \Omega$$

Finalmente, na posição baixo, apenas o resistor R_2 estará conectado à fonte de tensão; assim, a potência dissipada para essa seleção é de 800 W.

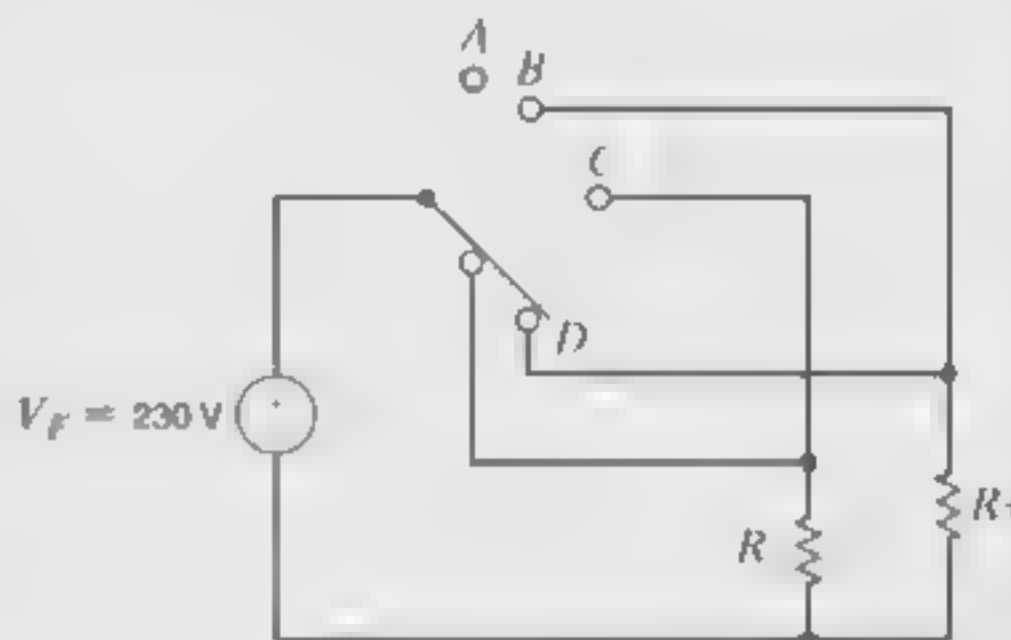


Figura 2.45 Circuito seletor do aquecedor resistivo simples.

EXEMPLO DE APLICAÇÃO 2.32

Você sempre liga seu carro com os faróis acesos? Enquanto o motor de partida aciona o motor, você provavelmente já observou que a intensidade das luzes do farol diminui, voltando ao normal quando o motor se move por si próprio. Você poderia criar um modelo para prever esse fenômeno?

SOLUÇÃO

Sim, certamente você pode. Considere o circuito conceitual mostrado na Fig. 2.46a e o modelo de circuito na Fig. 2.46b, no qual são representados a bateria, os faróis e o motor de arranque. Perceba o resistor R_{ind} . Estão incluídos no modelo os diversos mecanismos de perda de potência que podem ocorrer

entre a bateria e as cargas, quais sejam, os faróis e o motor de partida. Deve-se ressaltar que o processo químico ocorrente no interior da bateria não possui eficiência de 100%. Existe também uma conexão elétrica tanto nos terminais da bateria quanto nos terminais das cargas.

Deve-se ainda considerar que os cabos possuem alguma resistência, embora seja usualmente tão pequena que pode ser desprezada. A soma dessas perdas é modelada pelo resistor R_{bat} e espera-se que seu valor seja pequeno. Um valor razoável seria 25 mΩ.

Analisa-se agora o motor de arranque. Ao ser energizado, o motor de arranque típico de um automóvel absorve uma corrente cujo valor está na faixa de 90 a 120 A. Para efeito de cálculo, será utilizado o valor de 100 A. Finalmente, os faróis necessitam de uma corrente muito menor – talvez um valor de 1 A seja suficiente. Assim, dispõe-se agora de valores a serem utilizados no modelo do circuito.

Assuma, inicialmente, que o motor de arranque esteja desligado. Aplicando a LKC ao nó designado por V_C , verifica-se que a tensão aplicada aos faróis pode ser escrita como

$$V_C = V_{bat} - I_{Farol} R_{bat}$$

A substituição dos valores admitidos para o modelo nessa equação fornece $V_C = 11,75$ V – muito próximo de 12 V. Energiza-se agora o motor e aplica-se novamente a LKC.

$$V_C = V_{bat} - (I_{Farol} + I_{motor}) R_{bat}$$

Nesta situação a tensão entre os terminais dos faróis é de apenas 9,25 V. Não é de admirar que a intensidade das luzes dos faróis diminua! Como poderia a corrosão ou a perda das conexões nos terminais da bateria alterar esta situação? Neste caso, seria esperado que a qualidade da conexão da bateria à carga seja comprometida, aumentando o valor do resistor R_{bat} , diminuindo ainda mais a intensidade das luzes dos faróis.

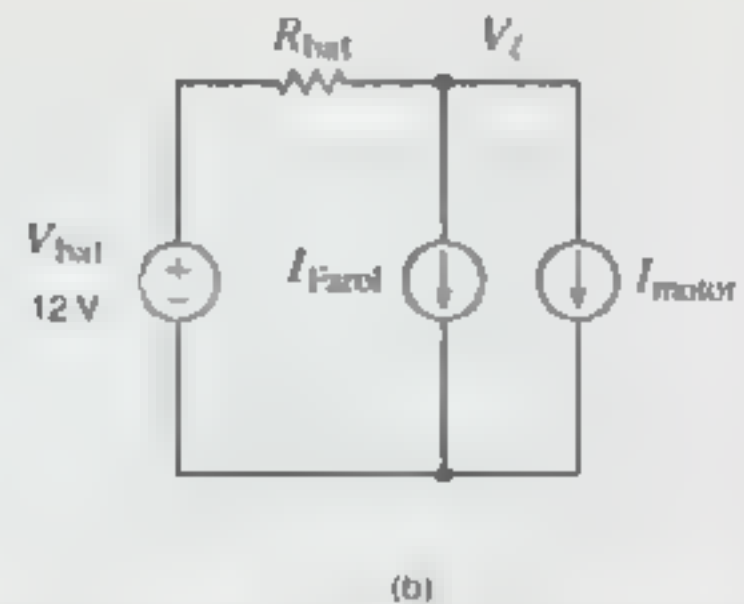
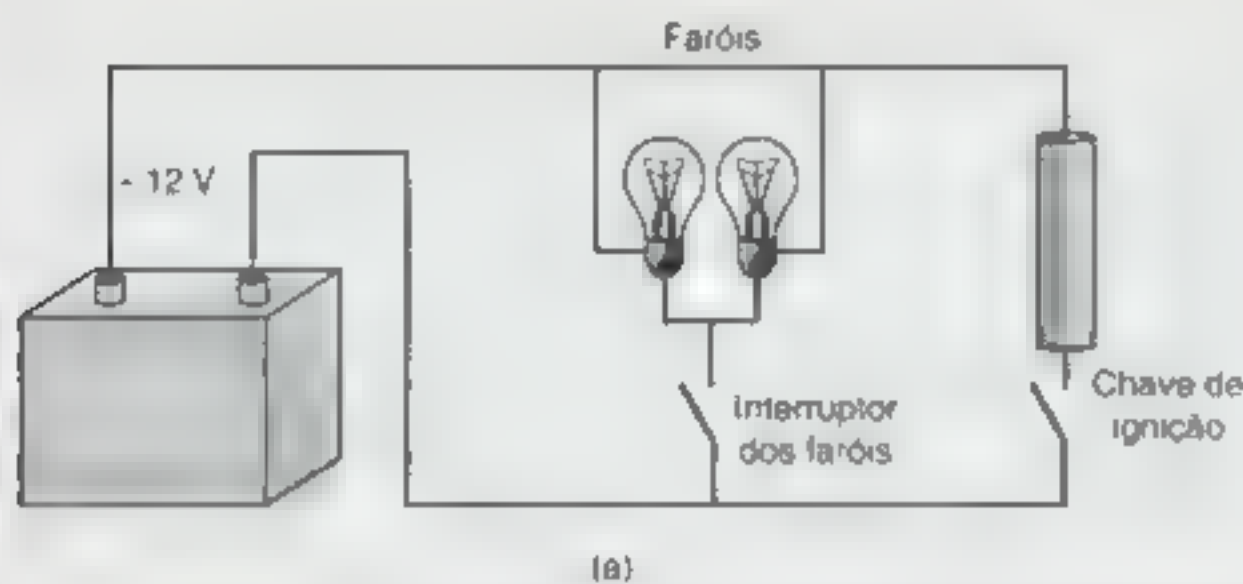


Figura 2.46 (a) Um modelo físico conceitual e (b) o circuito para análise do efeito da corrente que passa pelo motor de arranque na intensidade das luzes dos faróis.

EXEMPLO DE APLICAÇÃO 2.33

O circuito da ponte de Wheatstone é um dispositivo preciso para a medição de uma resistência. Esse circuito, mostrado na Fig. 2.47, é utilizado para medir o valor do resistor incógnito R_x . Em sua ligação central o circuito possui um galvanômetro, um equipamento muito sensível que pode ser utilizado para medir correntes na faixa de microampères. Quando o resistor desconhecido é conectado à ponte, o resistor R_3 do dispositivo é ajustado até que a corrente no galvanômetro seja nula, condição em que a ponte fica equilibrada. Nessa condição, tem-se

$$\frac{R_1}{R} = \frac{R}{R_3}$$

logo,

$$R_x = \left(\frac{R_2}{R_1} \right) R_3$$

Os engenheiros também utilizam este circuito (ponte de Wheatstone) para medir a deformação específica em um material sólido. Por exemplo, um sistema utilizado para se determinar o peso de um caminhão é mostrado na Fig. 2.48a. A plataforma é suportada por peças cilíndricas nas quais são co-

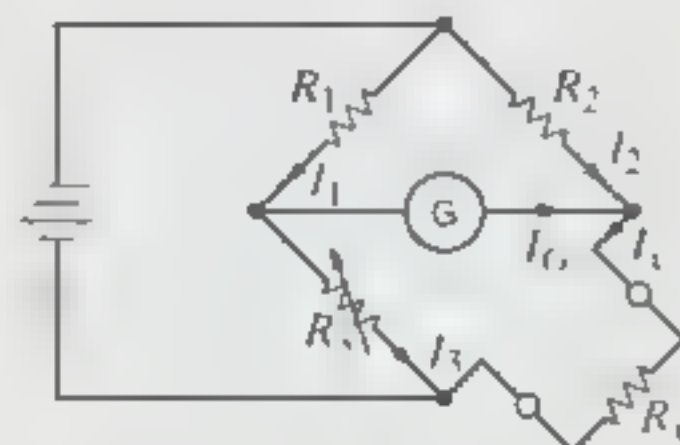


Figura 2.47 Circuito da ponte de Wheatstone.

lados extensômetros elétricos (*strain gauges*). Os extensômetros elétricos (resistências), que medem as deformações dos cilindros quando sujeitos a um carregamento, são conectados à ponte de Wheatstone, conforme mostrado na Fig. 2.48b. Os extensômetros possuem uma resistência de $120\ \Omega$ enquanto não são solicitados e variam o valor dessa resistência quando carregados. O resistor variável na ponte é um componente rigorosamente calibrado e de grande precisão.

O peso é determinado da seguinte forma. A variação da resistência ΔR_1 necessária para equilibrar a ponte representa a variação Δ da deformação, que quando multiplicada pelo módulo de elasticidade fornece a variação Δ da tensão (tensão mecânica). A variação Δ da tensão multiplicada pela área da seção transversal do cilindro produz a variação Δ da carga, que é utilizada na determinação do peso.

Assim, podemos determinar o valor de R_1 com a plataforma descarregada, quando a ponte está balanceada, e seu valor quando a resistência do extensômetro é alterada para $120,24\ \Omega$ por efeito do carregamento.

SOLUÇÃO

Utilizando a condição de equilíbrio da ponte, o valor de R_1 para a plataforma sem carga é

$$\begin{aligned} R_1 &= \left(\frac{R_2}{R_3} \right) R_4 \\ &= \left(\frac{100}{110} \right) (120) \\ &= 109,0909\ \Omega \end{aligned}$$

Sob o efeito do carregamento, o valor de R_3 será

$$\begin{aligned} R_3 &= \left(\frac{100}{110} \right) (120,24) \\ &= 109,3091\ \Omega \end{aligned}$$

Portanto, a variação ΔR_1 pode ser determinada como

$$\begin{aligned} \Delta R_1 &= 109,3091 - 109,0909 \\ &= 0,2182\ \Omega \end{aligned}$$

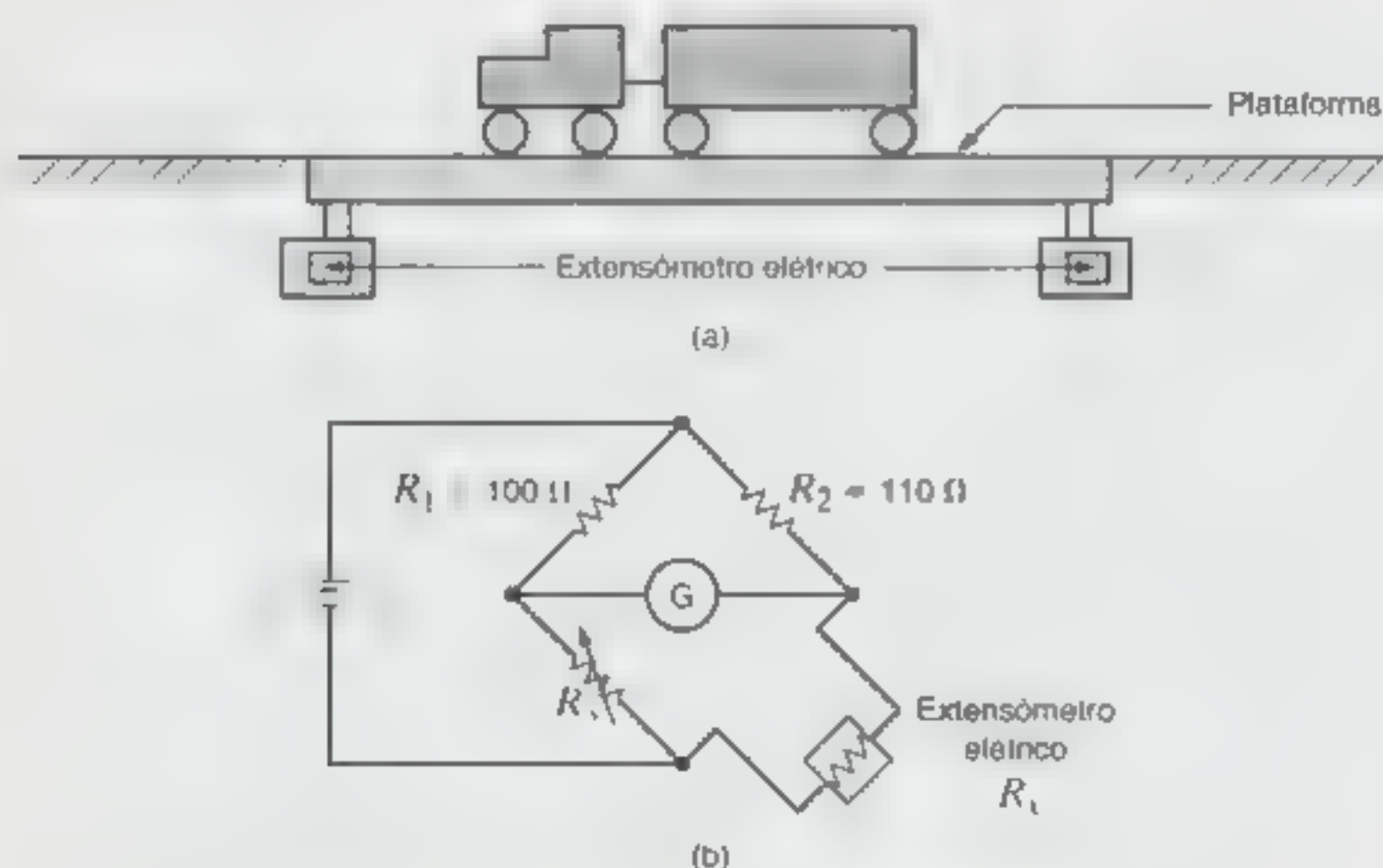


Figura 2.48 Diagramas utilizados no Exemplo 2.33.

2.11 Exemplos de Projeto

A maior parte deste texto é dedicada à análise de circuitos; isto é, dado um circuito com a definição de todos os seus componentes, a análise envolve a determinação de variáveis como a tensão entre os terminais de algum componente ou a corrente que passa por um componente. Além disso, a solução de um problema que envolve uma análise é geralmente única. Por outro lado, um projeto envolve a determinação da configuração de um circuito que deve atender a certas especificações. Em geral, a solução para um determinado projeto não é única, uma vez que podem existir

várias formas de se atender as especificações e o desempenho de um circuito. É também possível que não exista solução que atenda aos critérios de projeto de um circuito.

Além do atendimento a certas especificações técnicas, os projetos geralmente devem satisfazer também outros critérios, como os econômicos, os ambientais e as restrições quanto à segurança. Por exemplo, se o projeto de um circuito que atende às especificações técnicas for muito dispendioso ou inseguro, ele não será viável mesmo que apresente mérito técnico.

Até agora, os componentes que podem ser empregados no projeto de um circuito limitam-se a resistores lineares e aos componentes ativos que foram apresentados. Entretanto, ao

longo do texto, serão introduzidos alguns outros componentes (por exemplo, os amplificadores operacionais, os capacitores e os indutores), os quais aumentarão significativamente a capacidade de projeto de um circuito.

A discussão sobre o projeto de circuitos se inicia pela consideração de dois exemplos simples com os quais se mostra a seleção de componentes específicos que atendam a certas especificações dos circuitos.

EXEMPLO DE PROJETO 2.34

Tendo como hobby o projeto de dispositivos eletrônicos, uma pessoa construiu seu próprio amplificador estéreo e deseja adicionar um painel luminoso à sua criação de modo a proporcionar um visual profissional. O projeto desse painel requer o uso de sete lâmpadas – duas operam a 12 V/15 mA e cinco a 9 V/5 mA. Por sorte, seu projeto do som estéreo já possui uma fonte de 12 V CC de qualidade; entretanto, não existe uma fonte de 9 V. Em vez de construir uma nova fonte de potência, utiliza-se o circuito mais barato mostrado na Fig. 2.49a para projetar um conversor de 12 V para 9 V com a restrição de que a variação na tensão V_2 não seja superior a $\pm 5\%$.

Em particular, deve-se determinar os valores necessários aos resistores R_1 e R_2 .

SOLUÇÃO

Inicialmente, as lâmpadas L_1 e L_2 não produzem qualquer efeito sobre a tensão V_2 . Sabe-se também que quando as lâmpadas L_3 a L_7 estiverem ligadas, cada uma representará uma resistência equivalente igual a

$$R_{eq} = \frac{V_s}{I} = \frac{9}{0,005} = 1,8 \text{ k}\Omega$$

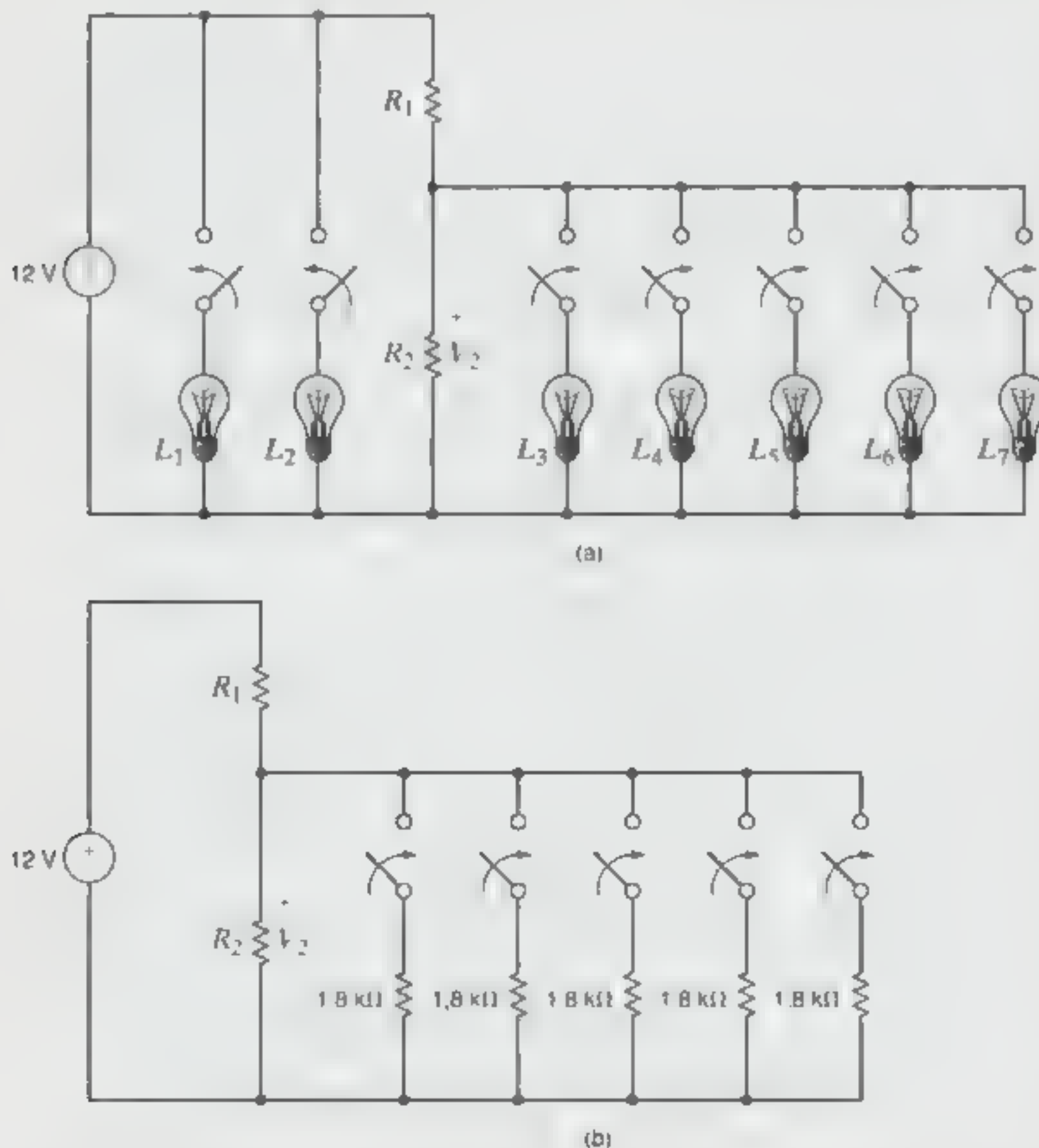


Figura 2.49 Circuito conversor de 12 V para 9 V que alimentará um painel luminoso.

Enquanto V_2 permanecer regularmente constante a resistência da lâmpada também será constante. Assim, o modelo do circuito para efeito de projeto é o mostrado na Fig. 2.49b. A tensão V_2 estará em seu máximo valor de $9 + 5\% = 9,45$ V, quando as lâmpadas L_3 e L_7 estiverem todas apagadas. Nesse caso, R_1 e R_2 estarão em série, e V_2 pode ser expressa pela simples divisão de tensão como

$$V_2 = 9,45 = 12 \left[\frac{R_2}{R_1 + R_2} \right]$$

A manipulação dessa equação fornece

$$\frac{R_1}{R_2} = 0,27$$

Uma segunda expressão envolvendo R_1 e R_2 pode ser desenvolvida considerando o caso quando as lâmpadas L_3 e L_7 estiverem todas acesas, situação em que a tensão V_2 atinge seu valor mínimo de $9\% - 5\% = 8,55$ V. Nessa situação, a resistência efetiva das lâmpadas é a de cinco resistores de $1,8$ k Ω

em paralelo, ou seja, 360 Ω . A expressão correspondente para a tensão V_2 é

$$V_2 = 8,55 = 12 \left[\frac{R_2 // 360}{R_1 + (R_2 // 360)} \right]$$

que pode ser reescrita na forma

$$\frac{360R_1}{R_2} + 360 + R_1 = \frac{12}{8,55} = 1,4$$

A substituição do valor determinado para R_1/R_2 na equação precedente fornece

$$R_1 = 360(1,4 - 1) = 0,27$$

ou

$$R_1 = 18,1 \Omega$$

e, portanto, para R_2 ,

$$R_2 = 178,3 \Omega$$

EXEMPLO DE PROJETO 2.35

Projeta-se agora um circuito que produz uma saída de 5 V a partir de uma entrada de 12 V. Arbitrariamente, a potência consumida pelo circuito será fixada em 240 mW. Finalmente, serão escolhidos os melhores valores possíveis dentre os resistores padronizados mostrados na Tabela 2.1 e será calculado o erro percentual na tensão de saída para os resistores selecionados.

SOLUÇÃO

O simples divisor de tensão mostrado na Fig. 2.50 é o dispositivo ideal para essa aplicação. Sabe-se que a tensão V_2 pode ser obtida por

$$V_2 = V_1 \left[\frac{R_2}{R_1 + R_2} \right]$$

esta relação pode ser escrita como

$$R_1 = R_2 \left[\frac{V_1}{V_2} - 1 \right]$$

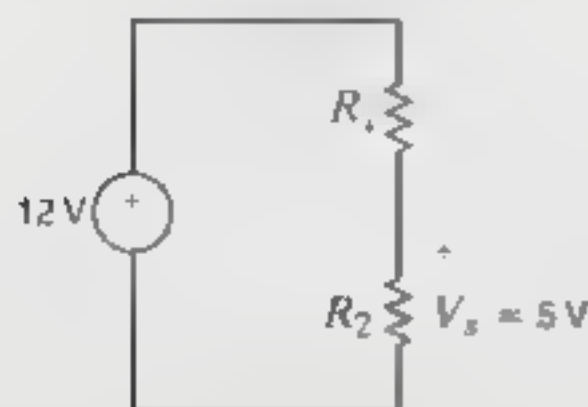


Figura 2.50 Um divisor de tensão simples.

Como toda a potência do circuito é fornecida pela fonte de 12 V, a potência total é expressa por

$$P = \frac{V_1^2}{R_1 + R_2} \leq 0,24$$

Utilizando a segunda equação para eliminar R_1 , obtém-se que R_2 possui um valor limite inferior de

$$R_2 \geq \frac{V_1 V_2}{P} = \frac{(5)(12)}{0,24} = 250 \Omega$$

Substituindo esses resultados na segunda equação tem-se o valor limite inferior de R_1 , isto é,

$$R_1 = R_2 \left[\frac{V_1}{V_2} - 1 \right] \geq 350 \Omega$$

Com esses resultados, verifica-se que uma região significativa da Tabela 2.1 não se aplica a esse projeto. Entretanto, a determinação do melhor par de valores dos resistores é, basicamente, uma operação de tentativa e erro que pode ser agilizada utilizando-se um procedimento elaborado no programa Excel, conforme mostrado na Tabela 2.4. Os valores padronizados dos resistores da Tabela 2.1 foram relacionados na Coluna A da tabela e atribuídos a R_2 . Utilizando a última das equações anteriores, os valores teóricos para R_1 foram calculados utilizando $R_1 = 1,4 \cdot R_2$. Foi selecionado na Tabela 2.1 um valor padronizado de resistência para R_1 com base no cálculo teórico apresentado na Coluna B. A tensão V_2 foi calculada utilizando a simples equação do divisor de tensão, e a potência absorvida por R_1 e R_2 foi calculada na Coluna E.

Observe que diversas combinações de R_1 e R_2 atendem à restrição da potência para este circuito. A potência absorvida

diminui quando R_1 e R_2 aumentam. Os resistores selecionados são $R_1 = 1800 \, \Omega$ e $R_2 = 1300 \, \Omega$, uma vez que essa combinação fornece uma tensão de saída de 5,032 V, valor bem próximo do valor desejado de 5 V. O erro na tensão de saída pode ser determinado a partir da expressão

$$\text{Erro percentual} = \left[\frac{5,032 - 5}{5} \right] 100\% = 0,64\%$$

Deve-se notar, entretanto, que esses valores de resistência são nominais, isto é, valores típicos. Para se obter o erro na pior situação, deve-se considerar que cada resistor pode apresentar uma variação de $\pm 5\%$ em relação ao valor nominal. Nessa aplicação, como V_s já é maior que o valor de 5 V desejado, o pior cenário ocorrerá quando V_s aumentar ainda mais, isto é, quando R_1 for 5% inferior ($1710 \, \Omega$) e R_2 for 5% maior ($1365 \, \Omega$). Com esses valores, a tensão de saída resultante será de 5,32 V, o que conduz a um erro percentual de 6,4%. Certamente, a maioria dos valores dos resistores está mais próxima do valor nominal do que os valores máximo e mínimo garantidos. Entretanto, caso se tenha a intenção de construir este circuito com um erro de saída máximo garantido de 5%, por

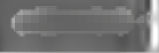


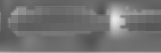

exemplo, seria necessário utilizar resistores com tolerâncias mais apertadas.

Quão inferiores deveriam ser as tolerâncias? A primeira equação pode ser alterada de modo a fornecer a tensão de saída para a pior situação, adicionando-se uma tolerância, Δ , ao resistor R_2 e subtraindo-se a tolerância do resistor R_1 . Considerando a tensão de saída na pior situação com $V_{\text{máx}} = 5,25 \, \text{V}$, isto é, um erro de 5%, tem-se

$$\begin{aligned} V_{\text{máx}} = 5,25 &= V_s \left[\frac{R_2(1 + \Delta)}{R_1(1 - \Delta) + R_2(1 + \Delta)} \right] = \\ &= 12 \left[\frac{1300(1 + \Delta)}{1800(1 - \Delta) + 1300(1 + \Delta)} \right] \end{aligned}$$

O valor resultante de Δ é 0,037, ou seja, 3,7%. Os resistores padronizados são disponíveis com tolerâncias de 10, 5, 2 e 1%. Existem resistores com tolerâncias mais apertadas, porém são muito caros. Assim, com base nos valores nominais de $1300 \, \Omega$ e $1800 \, \Omega$, seriam utilizados resistores com tolerância de 2% para se assegurar um erro na tensão de saída inferior a 5%.

TABELA 2.4 Planilha eletrônica de cálculos de um simples divisor de tensão

					
1	R_2	R_1 teórico	R_1	V_s	P_{abs}
2	300	420	430	4,932	0,197
3	330	462	470	4,950	0,180
4	360	504	510	4,966	0,166
5	390	546	560	4,926	0,152
6	430	602	620	4,914	0,137
7	470	658	680	4,904	0,125
8	510	714	750	4,857	0,114
9	560	784	750	5,130	0,110
10	620	868	910	4,863	0,094
11	680	952	910	5,132	0,091
12	750	1050	1000	5,143	0,082
13	820	1148	1100	5,125	0,075
14	910	1274	1300	4,941	0,065
15	1000	1400	1300	5,217	0,063
16	1100	1540	1500	5,077	0,055
17	1200	1680	1600	5,143	0,051
18	1300	1820	1800	5,032	0,046
19	1500	2100	2000	5,143	0,041
20	1600	2240	2200	5,053	0,038
21	1800	2520	2400	5,143	0,034
22	2000	2800	2700	5,106	0,031
23	2200	3080	3000	5,077	0,028
24	2400	3360	3300	5,053	0,025

EXEMPLO DE PROJETO 2.36

Na instrumentação utilizada em uma fábrica, parâmetros do processo, como pressão e vazão, são medidos, convertidos em um sinal elétrico e enviados a alguma distância para um controlador eletrônico. O controlador então decide a ação a ser executada. Uma das principais preocupações nesses sistemas é a distância física entre o sensor e o controlador. Um formato padronizado utilizado nas indústrias para codificar os valores medidos é denominado padrão 4–20 mA, em que a faixa de valores do parâmetro é linearmente distribuída entre 4 e 20 mA. Por exemplo, um sensor de pressão de 100 psi poderia produzir uma saída de 4 mA para uma pressão de 0 psi, 20 mA para uma pressão de 100 psi e 12 mA para uma pressão de 50 psi. Todavia, a maioria dos instrumentos é baseada em tensões entre 0 e 5 V, e não em correntes.

Portanto, pode-se projetar um conversor de corrente para tensão que produz uma saída de 5 V quando o sinal da corrente é de 20 mA.

SOLUÇÃO

O circuito mostrado na Fig. 2.51a representa um modelo com boa exatidão para a situação enunciada. Os fios condutores da unidade sensora até o controlador possuem uma resistência, R_{cond} . Se a saída do sensor for uma tensão proporcional à pressão, a queda de tensão na linha causará um erro de medida, mesmo que a saída do sensor seja uma fonte de tensão ideal. Porém, uma vez que os dados estão contidos no valor da corrente, R_{cond} não afeta a exatidão no controlador, contanto que o sensor opere como uma fonte de corrente ideal.

Conforme ocorreu para o conversor de corrente para tensão, esse conversor é extremamente simples – um resistor. Para uma tensão de 5 V a 20 mA, emprega-se a lei de Ohm para obter

$$R = \frac{5}{0.02} = 250 \, \Omega$$

O conversor resultante é agregado ao sistema mostrado na Fig. 2.51b, em que foi admitido, tacitamente, que o controlador não carrega a parte remanescente do circuito.

Observe que o modelo indica que a distância entre o sensor e o controlador poderia ser infinita. Intuitivamente, esta situação poderia parecer irreal, e é. As perdas que poderiam ocorrer ao longo da distância podem ser consideradas utilizando um modelo mais preciso de sensor, conforme mostrado na Fig. 2.52. O efeito desse novo modelo de sensor pode ser percebido a partir das equações que descrevem essa nova rede. As equações do modelo ficam

$$I_t = \frac{V_t}{R_F} = \frac{V_t}{R_{\text{cond}} + 250}$$

$$I_{\text{ma}} = \frac{V_t}{R_{\text{cond}} + 250}$$

Combinando essas equações, tem-se

$$\frac{I_{\text{ma}}}{I_t} = \frac{1}{1 - \frac{R_{\text{cond}} - 250}{R_F}}$$

Assim, verifica-se que é a dimensão de R_F em relação a $(R_{\text{cond}} + 250 \, \Omega)$ que determina a precisão do sinal no controlador. Portanto, deseja-se um resistor R_F com valor tão alto quanto possível. Tanto a tensão de saída máxima do sensor quanto a resistência de saída, R_F , são especificadas pelo fabricante do sensor.

Este conversor de corrente para tensão é discutido novamente no Capítulo 4.

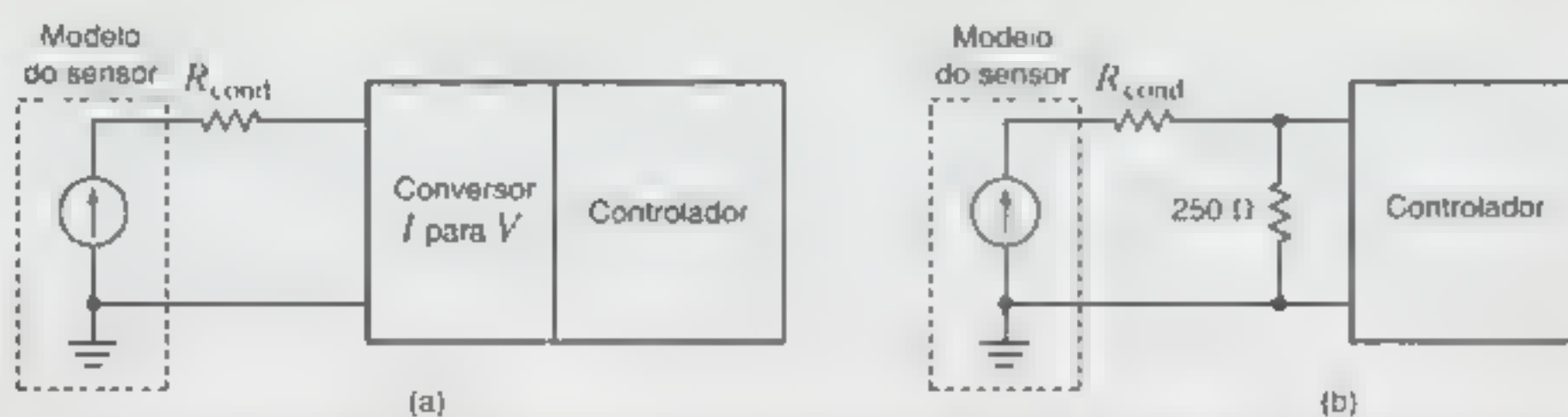


Figura 2.51 Laço de controle da corrente entre 4–20 mA. (a) Diagrama de blocos e (b) diagrama de blocos com o conversor de corrente para tensão.

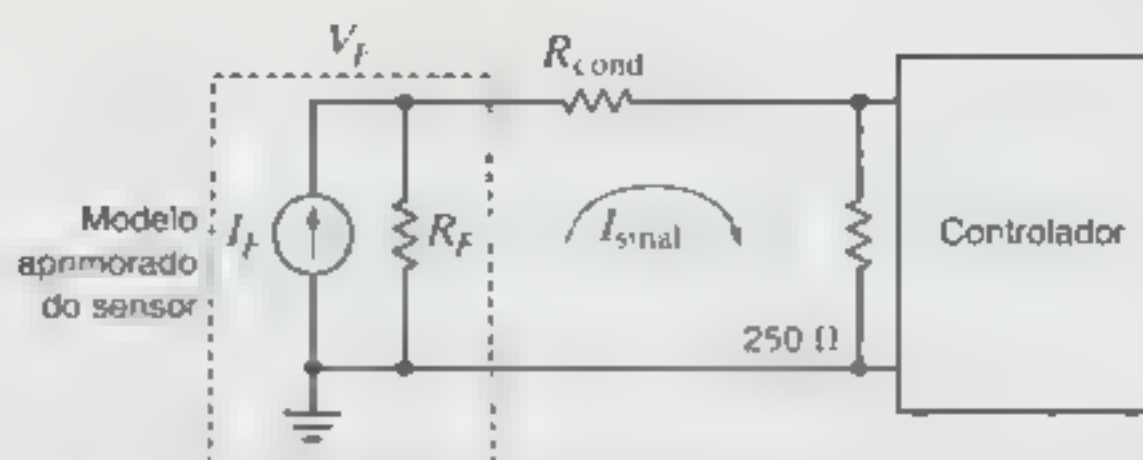


Figura 2.52 Modelo mais preciso para o laço de controle da corrente entre 4–20 mA.

EXEMPLO DE PROJETO 2.37

A rede mostrada na Fig. 2.53 é um circuito equivalente para um amplificador transistor utilizado em um pré-amplificador estéreo. O circuito de entrada, consistindo em uma fonte de 2 mV em série com um resistor de 500 Ω , modela a saída de um CD-player. A fonte dependente, o resistor R_e e o resistor R_f modelam o transistor, o qual amplifica o sinal e, em seguida, o envia para o amplificador de potência. O resistor-carga de 10 k Ω modela a entrada para o amplificador de carga que efetivamente aciona os alto-falantes. Deve-se projetar um amplificador transistor que propicie um ganho global de -200, conforme mostrado na Fig. 2.53. Na prática, os parâmetros do equipamento não são alterados para se encontrar o ganho desejado; ao invés disso, seleciona-se um transistor a partir dos manuais de fabricantes de modo a satisfazer as especificações requeridas. Os parâmetros do modelo para três diferentes transistores são listados a seguir:

Valores do fabricante para os parâmetros do transistor

Número do Componente	R_e (k Ω)	R_f (k Ω)	g_m (mA/V)
1	1,0	50	50
2	2,0	75	30
3	8,0	80	20

Projete o amplificador escolhendo o transistor que propicie o ganho mais exato. Qual é o erro percentual relacionado à sua escolha?

SOLUÇÃO

A tensão de saída pode ser escrita como

$$V_o = g_m V_i (R_e \parallel R_f \parallel R_C)$$

Utilizando a divisão de tensão na entrada para determinar V_i , tem-se

$$V_i = V_f \left(\frac{R_e}{R_e + R_f} \right)$$

Combinando essas duas expressões, pode-se determinar o ganho:

$$A_v = \frac{V_o}{V_f} = g_m \left(\frac{R_e}{R_e + R_f} \right) (R_e \parallel R_f \parallel R_C)$$

Utilizando os valores dos parâmetros dos três transistores, conclui-se que a melhor alternativa é o transistor número 2, o qual possui um erro no ganho de

$$\text{Erro percentual} = \left(\frac{211,8 - 200}{200} \right) \times 100\% = 5,9\%$$

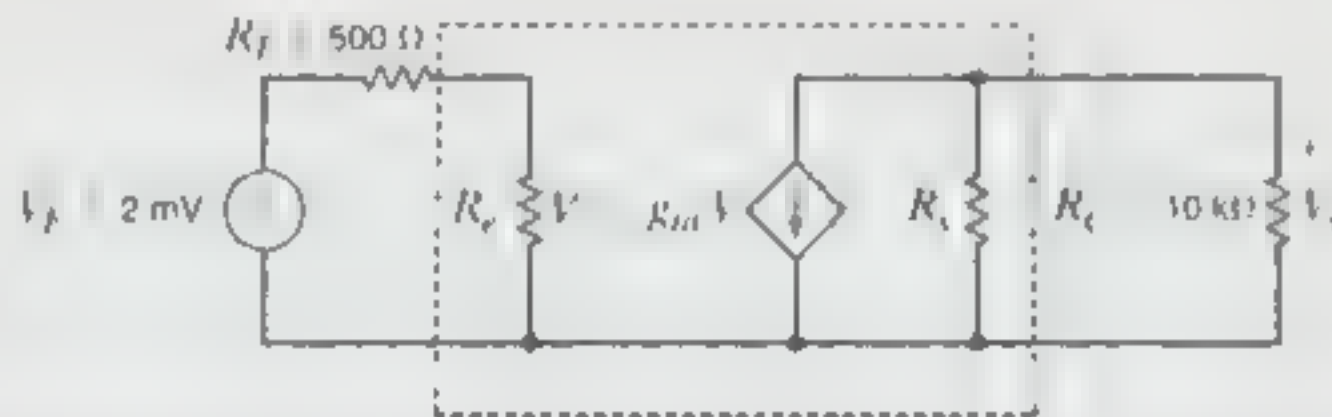


Figura 2.53 Modelo de circuito do amplificador transistor.

RESUMO

- **Lei de Ohm** $V = IR$
- **Convenção passiva de sinais utilizada com a lei de Ohm**
A corrente entra no terminal de um resistor com a tensão de referência positiva.
- **Lei de Kirchhoff das correntes (LKC)** A soma algébrica das correntes que saem (entram) em um nó é nula.
- **Lei de Kirchhoff das tensões (LKT)** A soma algébrica das tensões ao longo de qualquer caminho fechado é nula.
- **Resolvendo um circuito com um único laço** Determine a corrente do laço aplicando a LKT e a lei de Ohm.
- **Resolvendo um circuito com um único par de nós** Determine a tensão entre o par de nós aplicando a LKC e a lei de Ohm.
- **Regra da divisão de tensão** A tensão é dividida entre dois resistores em série na proporção direta de suas resistências.
- **Regra da divisão de corrente** A corrente é dividida entre dois resistores em paralelo na proporção inversa de suas resistências.
- **Resistência equivalente de um circuito resistivo**
Combine os resistores em série adicionando suas resistências. Combine os resistores em paralelo adicionando suas condutâncias. As transformações estrela para delta e delta para estrela são também uma forma de reduzir a complexidade de um circuito.
- **Curto-circuito** Resistência nula, tensão nula; a corrente na condição de um curto-circuito é determinada pelo restante do circuito.
- **Circuito aberto** Condutância nula, corrente nula; a tensão entre os terminais de um circuito aberto é determinada pelo restante do circuito.

PROBLEMAS

- 2.1** Determine a corrente e a potência dissipada no resistor do circuito mostrado na Fig. P2.1.



Figura P2.1

- 2.2** Determine a corrente e a potência dissipada no resistor do circuito mostrado na Fig. P2.2.

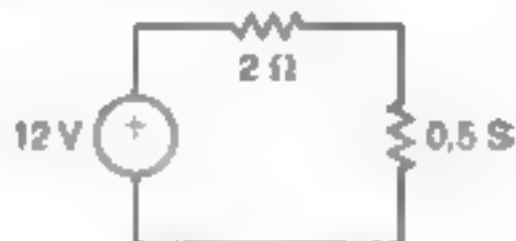


Figura P2.2

- 2.3** Determine a tensão entre os terminais do resistor do circuito mostrado na Fig. P2.3 e a potência dissipada.

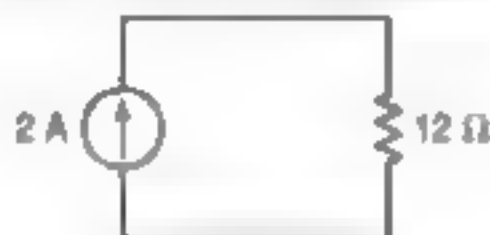


Figura P2.3

- 2.4** Dado o circuito mostrado na Fig. P2.4, determine a tensão entre os terminais de cada resistor e a potência dissipada em cada um deles.

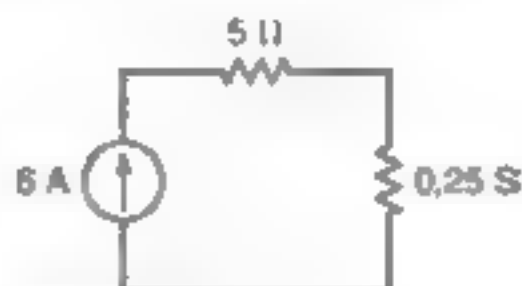


Figura P2.4

- 2.5** Na rede mostrada na Fig. P2.5, a potência absorvida por R_x é de 20 mW. Determine R_x .

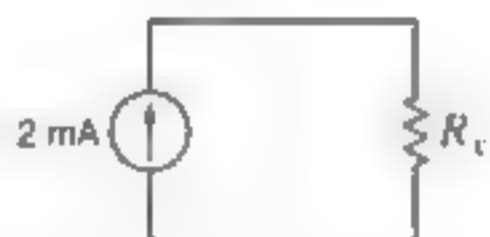


Figura P2.5

- 2.6** Na rede mostrada na Fig. P2.6, a potência absorvida por G_x é de 20 mW. Determine G_x .

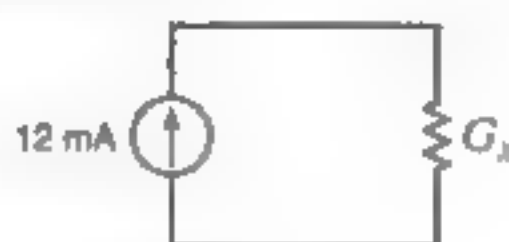


Figura P2.6

- 2.7** O modelo de uma lanterna padronizada com duas pilhas é mostrado na Fig. P2.7. Determine a potência dissipada pela lâmpada.

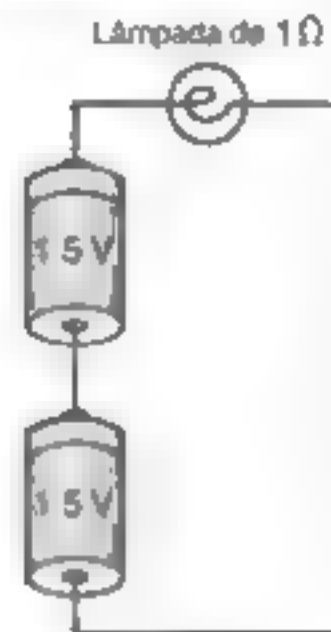


Figura P2.7

- 2.8** Um automóvel utiliza em seus faróis duas lâmpadas halógenas conectadas conforme mostrado na Fig. P2.8. Determine a potência fornecida pela bateria considerando que cada lâmpada consome uma corrente de 3 A.

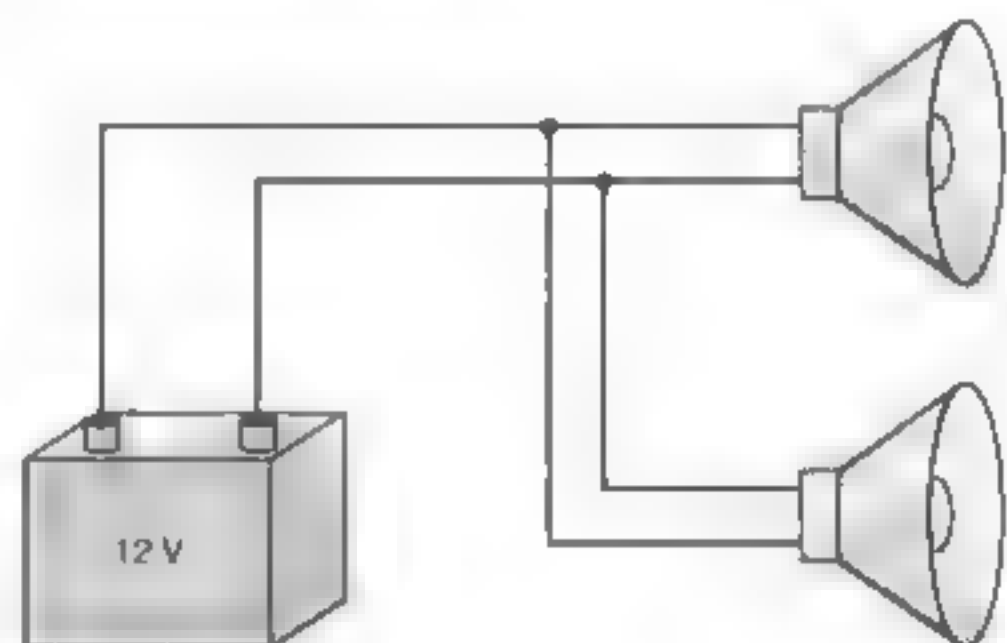
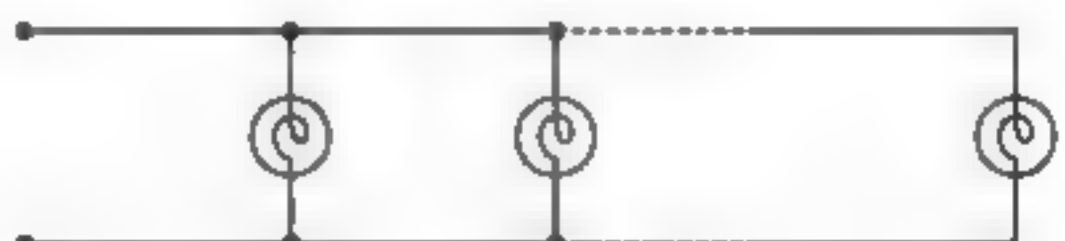


Figura P2.8

- 2.9** Há muitos anos, os circuitos das luzes utilizadas nas árvores de Natal eram fabricados na forma mostrada na Fig. P2.9a. Atualmente, os circuitos são fabricados conforme mostrado na Fig. P2.9b. Houve uma boa razão para essa mudança?



(a)



(b)

Figura P2.9

- 2.10 Determine a corrente I_1 indicada na rede mostrada na Fig. P2.10.

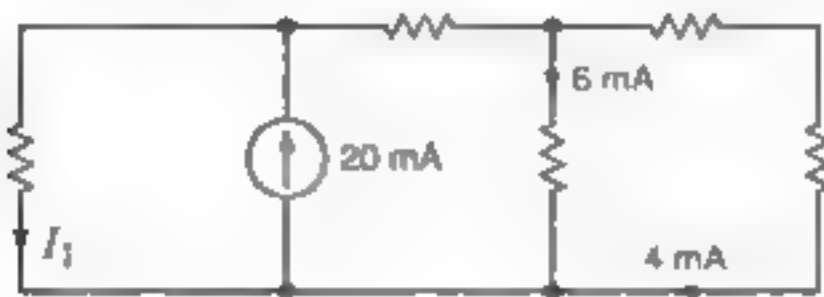


Figura P2.10

- 2.11 Determine a corrente I_1 indicada na rede mostrada na Fig. P2.11.

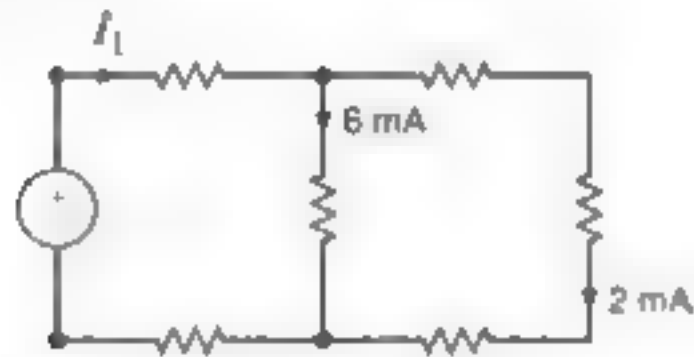


Figura P2.11

- 2.12 Determine as correntes I_1 e I_2 do circuito mostrado na Fig. P2.12.

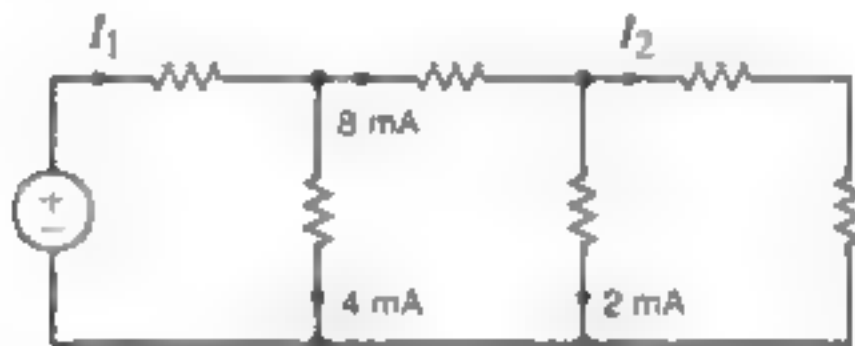


Figura P2.12

- 2.13 Determine a corrente I_1 indicada no circuito mostrado na Fig. P2.13.

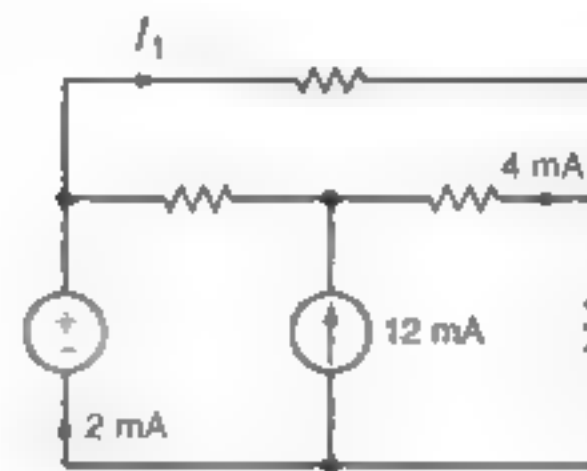


Figura P2.13

- 2.14 Determine a corrente I_x indicada na rede mostrada na Fig. P2.14.

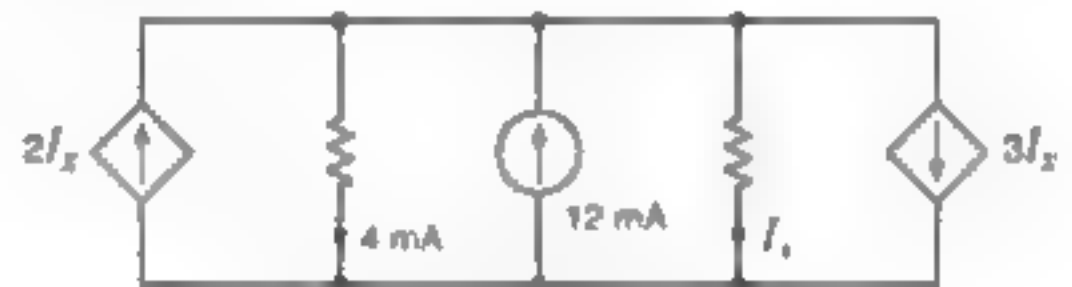


Figura P2.14

- 2.15 Determine a corrente I_C indicada no circuito mostrado na Fig. P2.15.

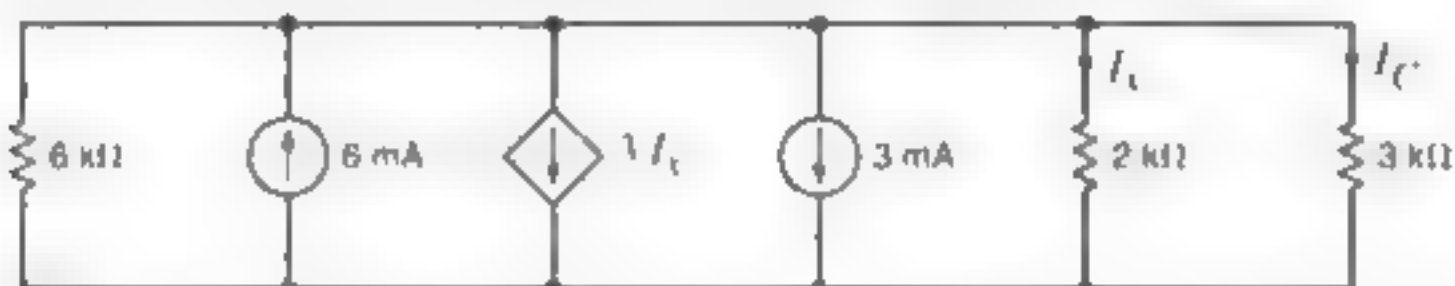


Figura P2.15

- 2.16 Determine as correntes I_x e I_1 do circuito mostrado na Fig. P2.16.

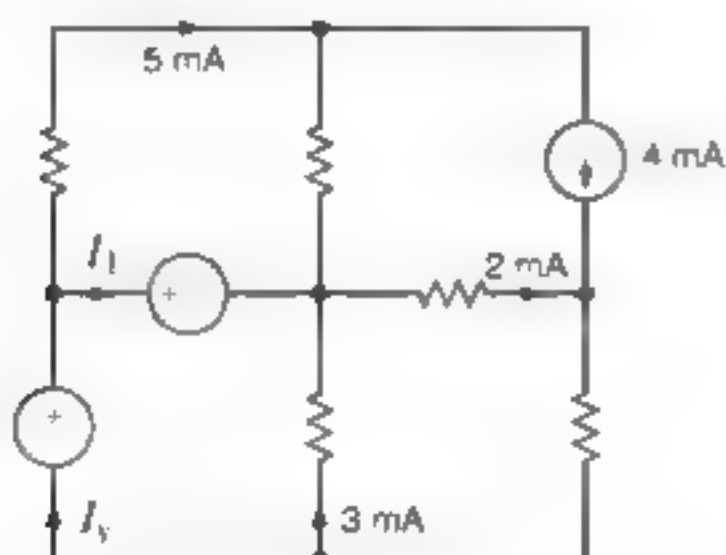


Figura P2.16

- 2.17 Determine a corrente I_1 indicada na rede mostrada na Fig. P2.17.

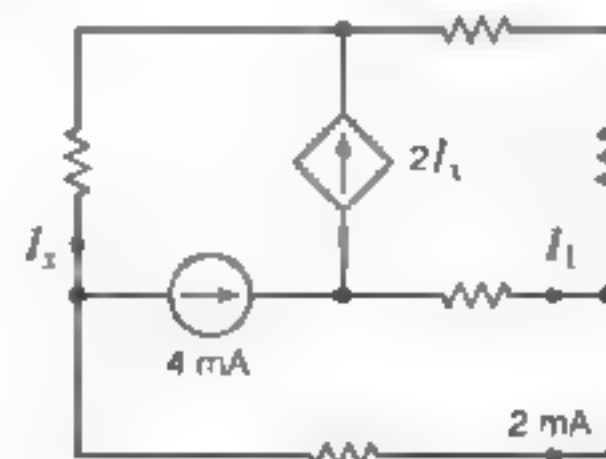


Figura P2.17

- 2.18 Determine as correntes I_x , I_y e I_z da rede mostrada na Fig. P2.18.

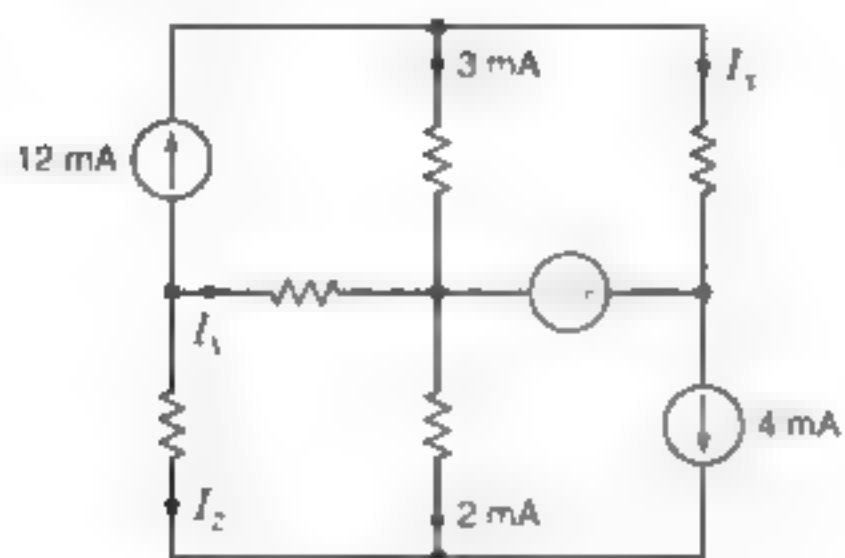


Figura P2.18

- 2.19 Determine a corrente I_1 indicada no circuito mostrado na Fig. P2.19.

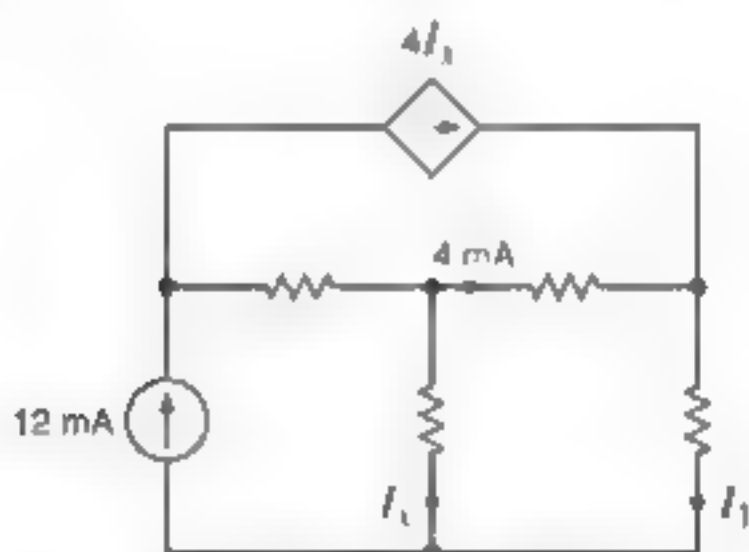


Figura P2.19

- 2.20 Determine a corrente I_1 indicada na rede mostrada na Fig. P2.20.

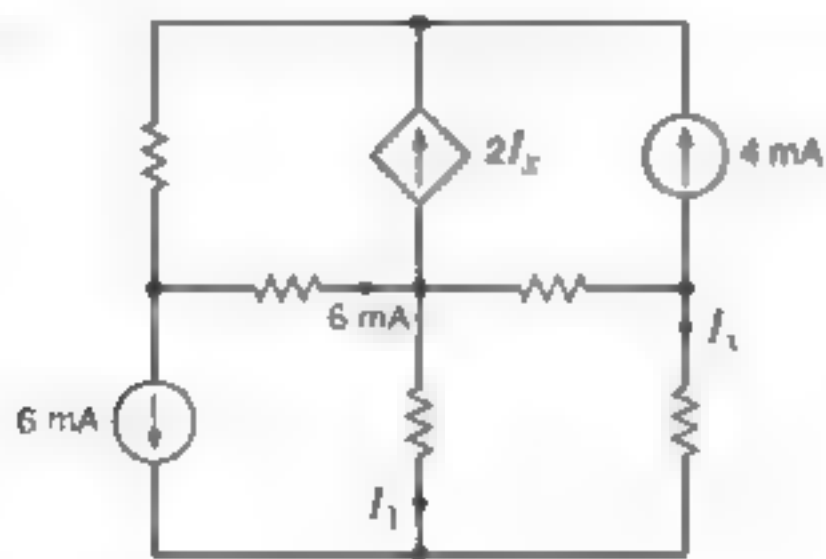


Figura P2.20

- 2.21 Determine as correntes I_1 , I_2 e I_3 da rede mostrada na Fig. P2.21.

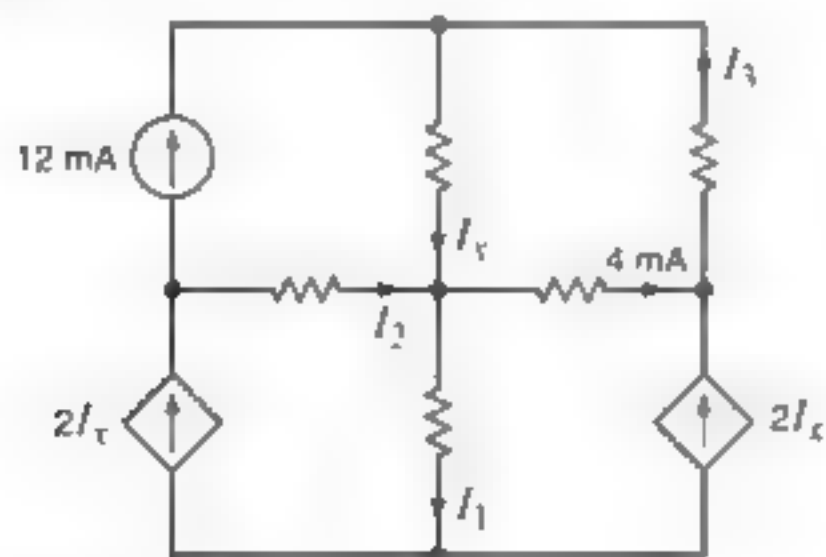


Figura P2.21

- 2.22 Na rede mostrada na Fig. P2.22, determine as correntes I_1 , I_2 e I_3 e mostre que a LKC é atendida no contorno.

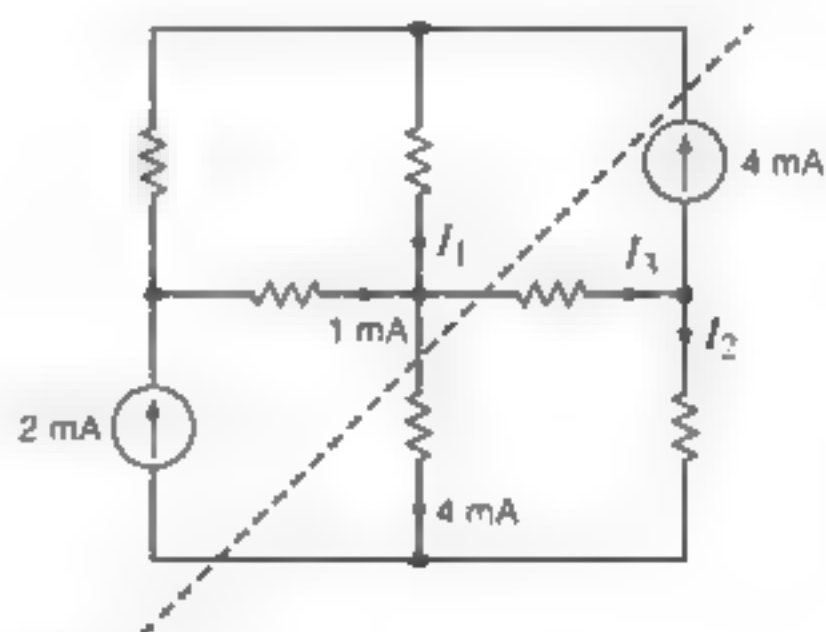


Figura P2.22

- 2.23 Determine a tensão V_{bd} do circuito mostrado na Fig. P2.23.

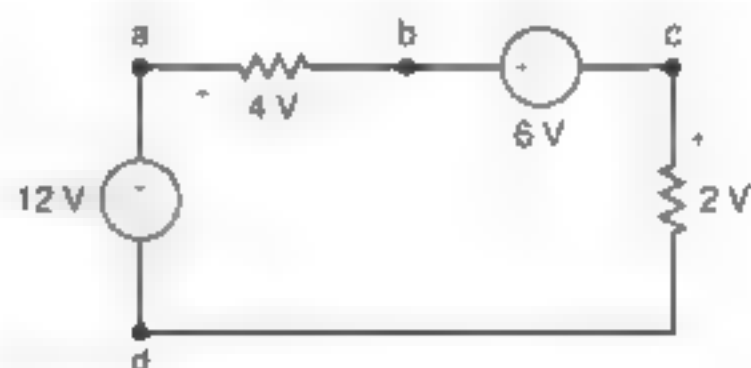


Figura P2.23

- 2.24 Determine a tensão V_{ad} do circuito mostrado na Fig. P2.24.

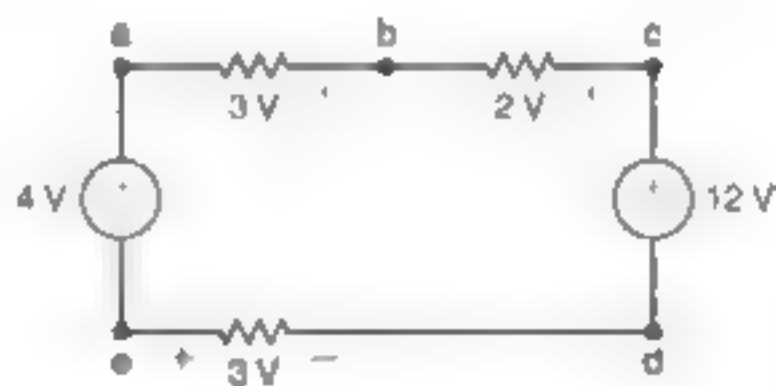


Figura P2.24

- 2.25 Determine as tensões V_{be} e V_{ac} do circuito mostrado na Fig. P2.25.

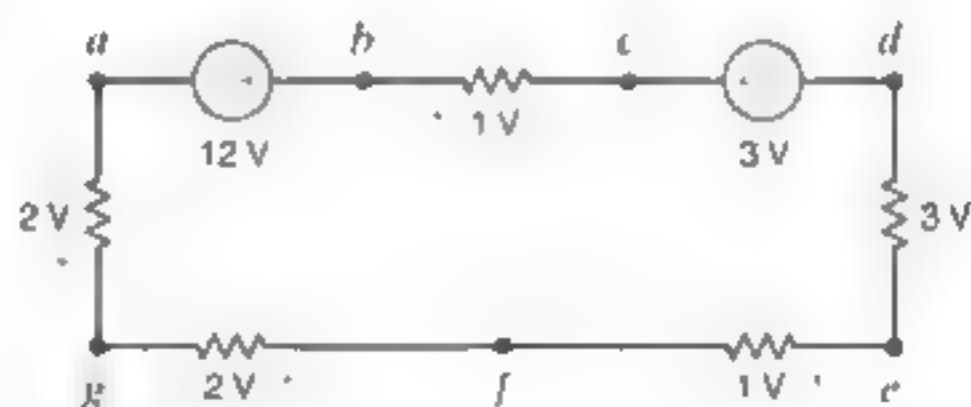


Figura P2.25

2.26 Determine as tensões V_{ac} e V_{cd} do circuito mostrado na Fig. P2.26.

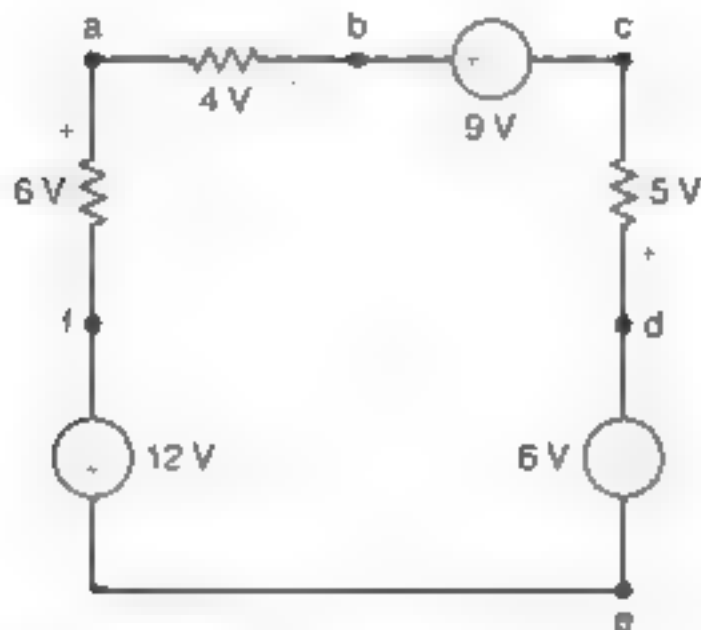


Figura P2.26

2.27 Dado o diagrama de circuito mostrado na Fig. P2.27, determine as seguintes tensões: V_{da} , V_{ba} , V_{bc} , V_{dc} , V_{fd} , V_{ac} , V_{ab} , V_{gh} , V_{fb} e V_{dc} .

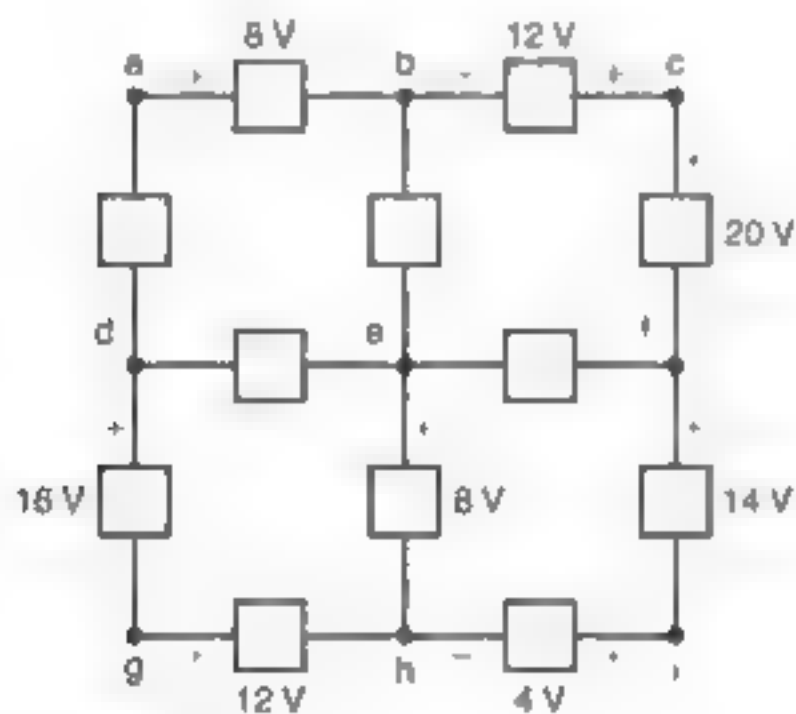


Figura P2.27

2.28 Determine as tensões V_x e V_y do circuito mostrado na Fig. P2.28.

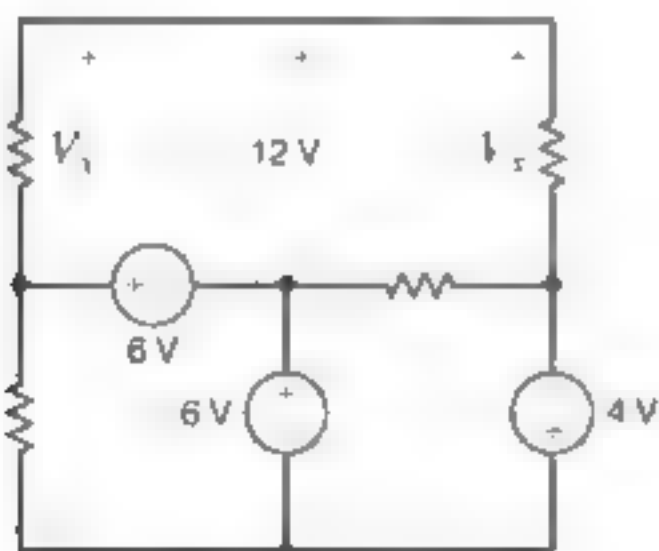


Figura P2.28

2.29 Determine as tensões V_x e V_y do circuito mostrado na Fig. P2.29.

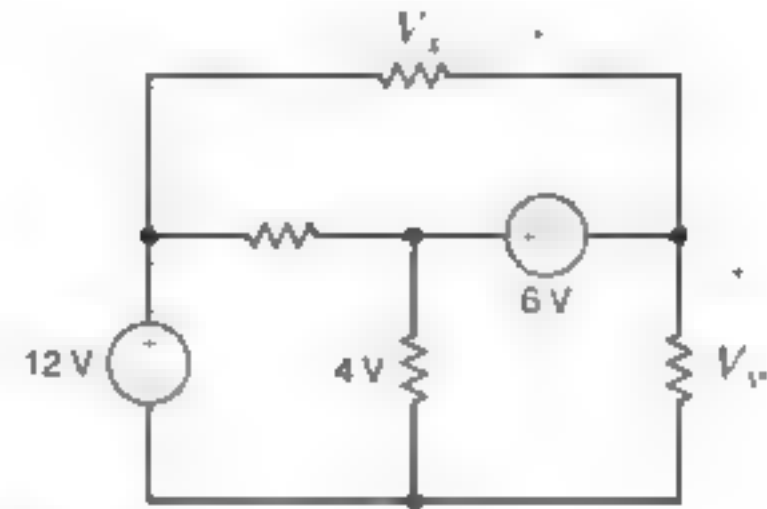


Figura P2.29

2.30 Determine as tensões V_1 , V_2 e V_3 da rede mostrada na Fig. P2.30.

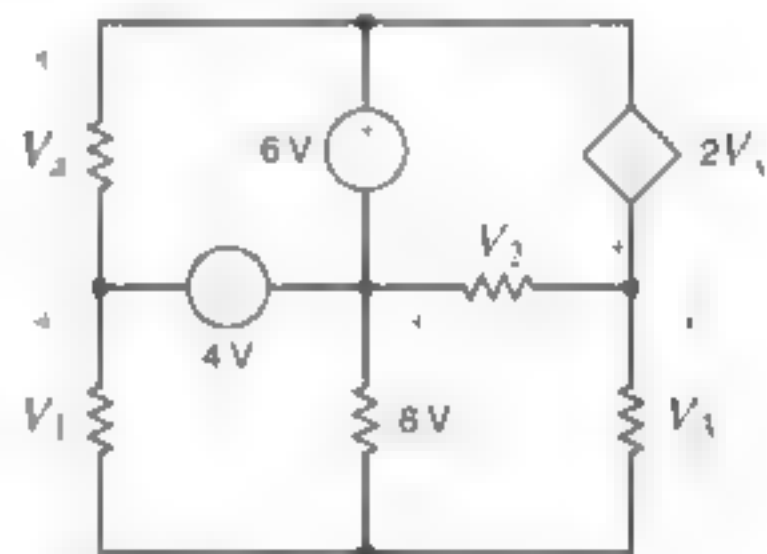


Figura P2.30

2.31 Determine a tensão V_1 do circuito mostrado na Fig. P2.31.

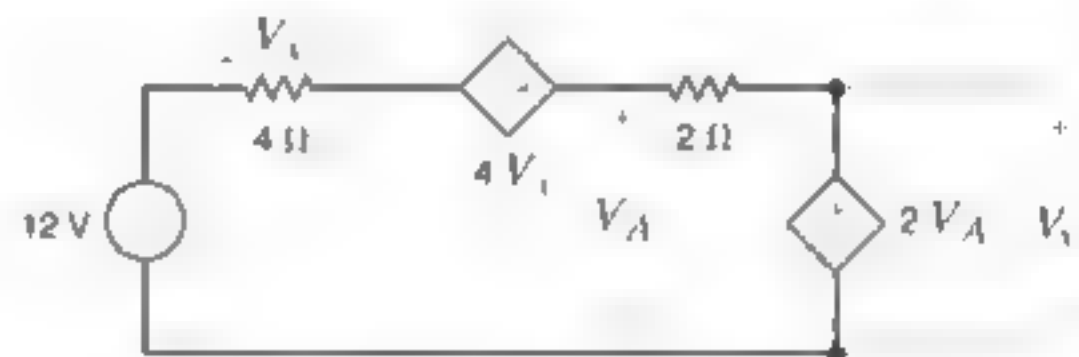


Figura P2.31

2.32 Determine a tensão V_1 do circuito mostrado na Fig. P2.32.

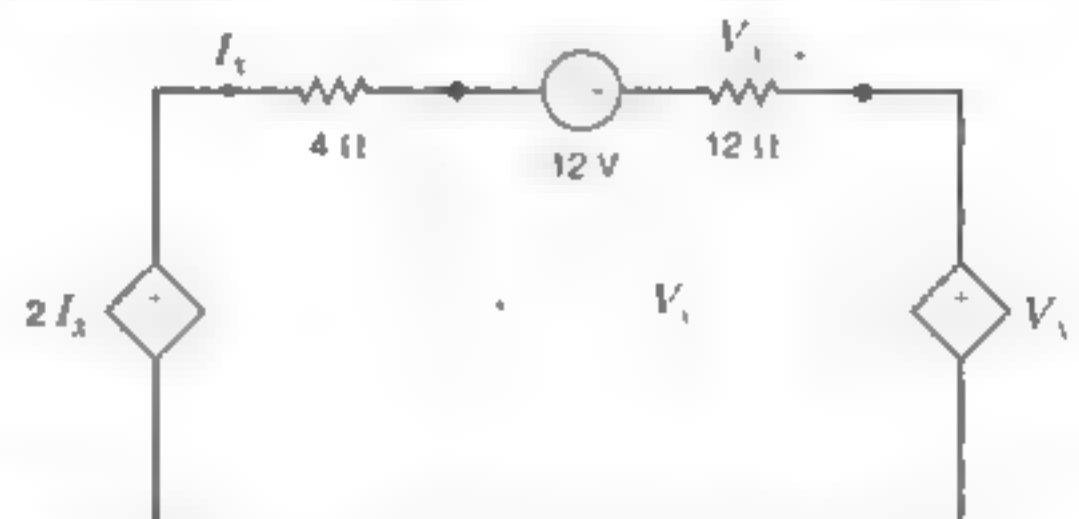


Figura P2.32

- 2.33** A fonte de 10 V do circuito mostrado na Fig. P2.33 absorve uma potência de 2,5 mW. Calcule a tensão V_{ba} e a potência absorvida pela fonte de tensão dependente do circuito.

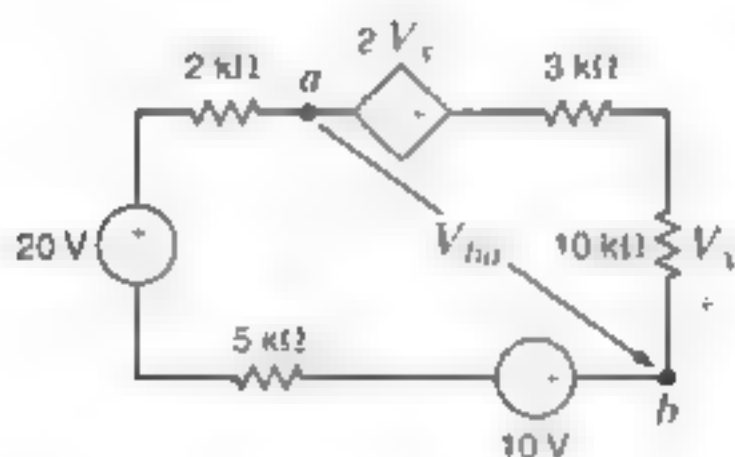


Figura P2.33

- 2.34** Determine as tensões V_1 , V_2 e V_3 do circuito mostrado na Fig. P2.34.

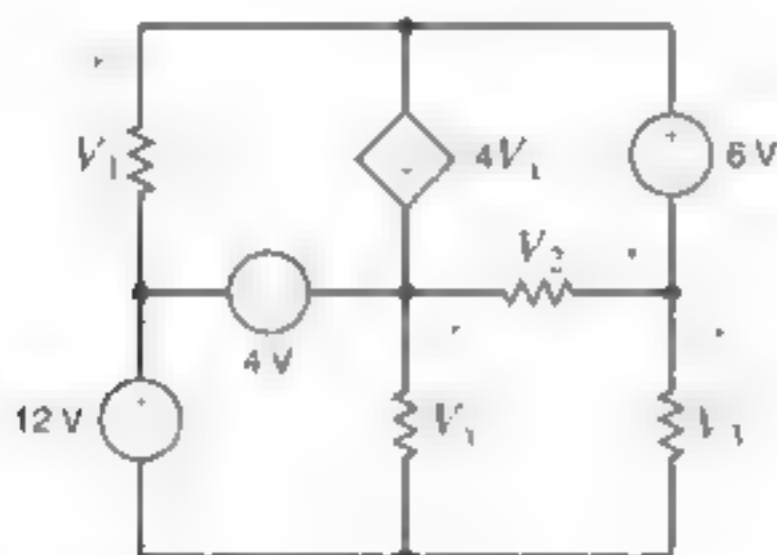


Figura P2.34

- 2.35** A fonte de 10 V do circuito mostrado na Fig. P2.35 fornece uma potência de 50 W. Determine R_1 .

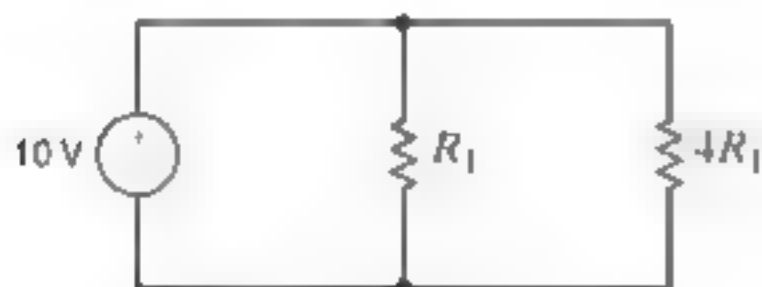


Figura P2.35

- 2.36** Determine as tensões V_1 e V_2 do circuito mostrado na Fig. P2.36.

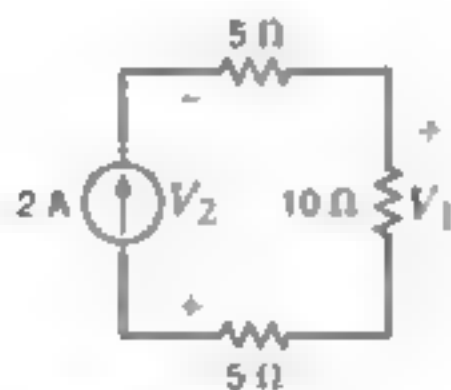


Figura P2.36

- 2.37** Determine a tensão V_{bd} do circuito mostrado na Fig. P2.37.

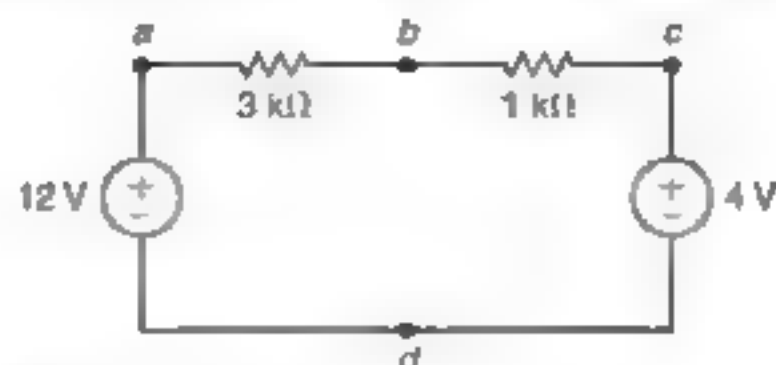


Figura P2.37

- 2.38** Determine a tensão V_x do circuito mostrado na Fig. P2.38.

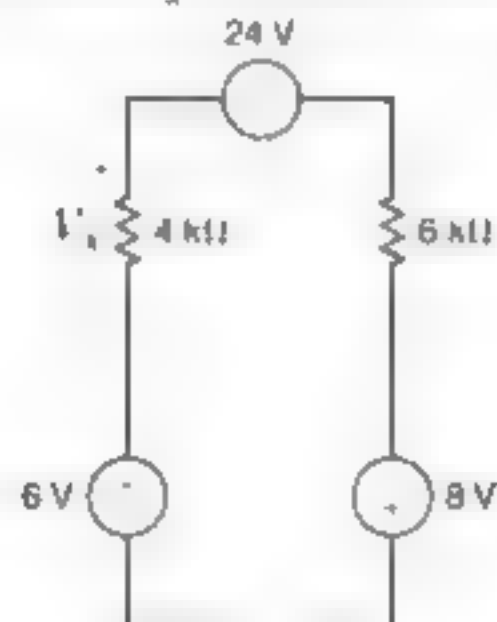


Figura P2.38

- 2.39** Determine a tensão V_{ab} da rede mostrada na Fig. P2.39.

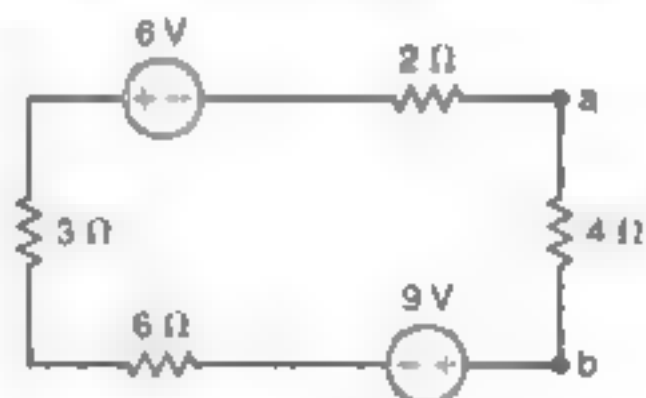


Figura P2.39

- 2.40** Determine a tensão V_x e a potência fornecida pela fonte de 15 V ao circuito mostrado na Fig. P2.40.

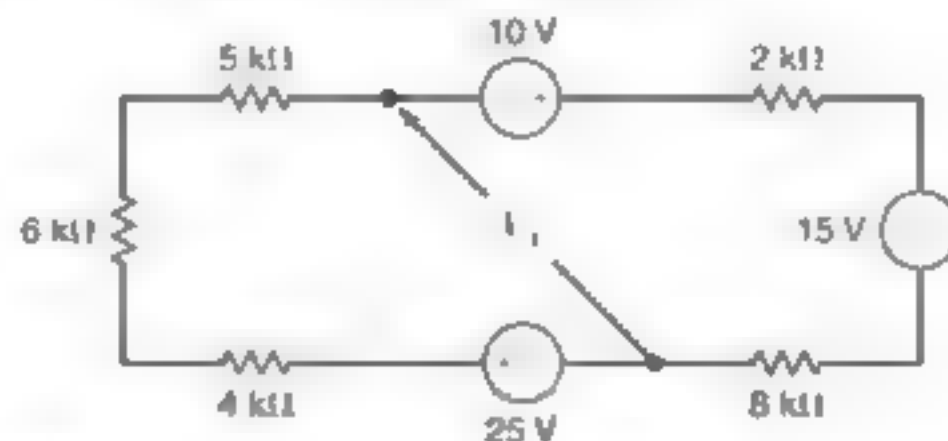


Figura P2.40

- 2.41** Determine a tensão V_x do circuito mostrado na Fig. P2.41.

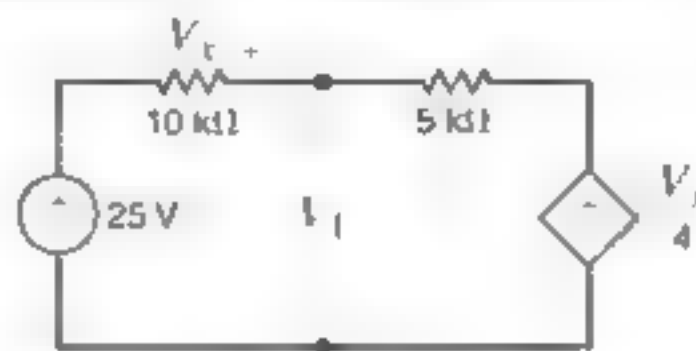


Figura P2.41

- 2.42** Determine a potência fornecida por cada fonte do circuito mostrado na Fig. P2.42, incluindo a fonte dependente.

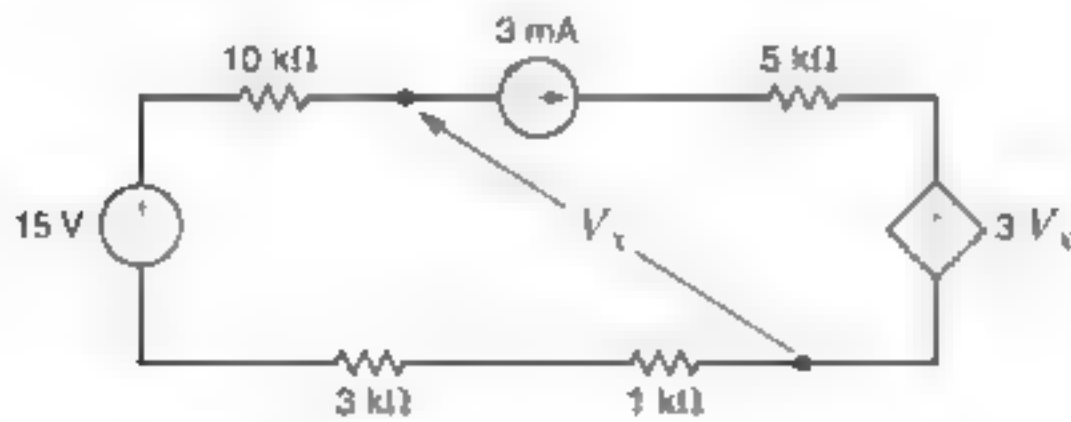


Figura P2.42

- 2.43** Determine a potência absorvida pela fonte de tensão dependente do circuito mostrado na Fig. P2.43.

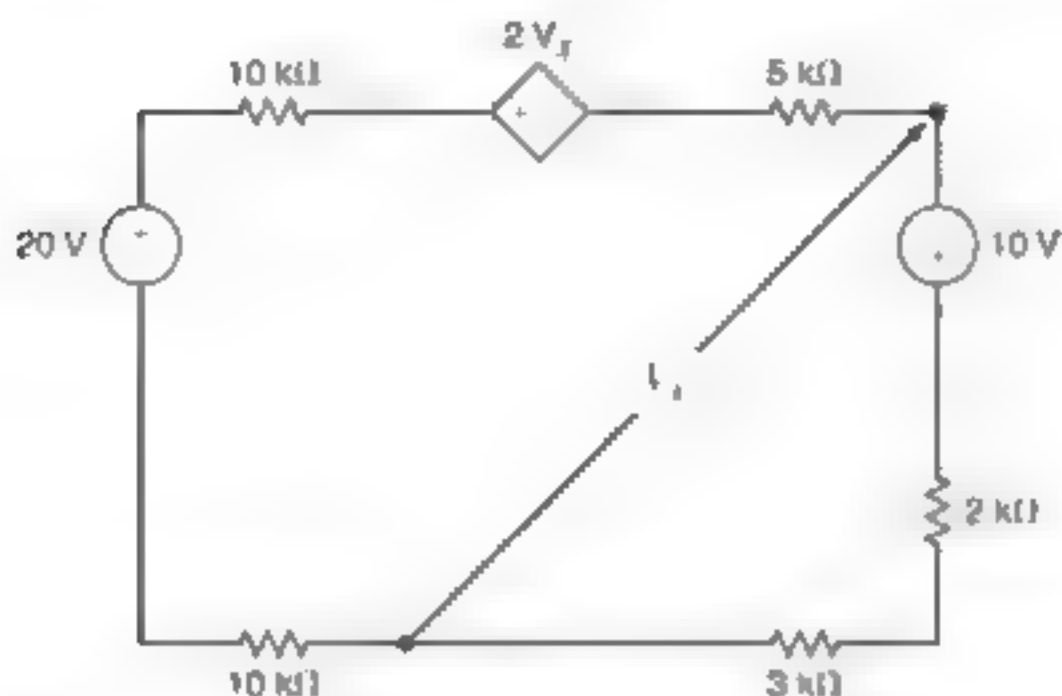


Figura P2.43

- 2.44** Determine a potência absorvida pela fonte dependente do circuito mostrado na Fig. P2.44.

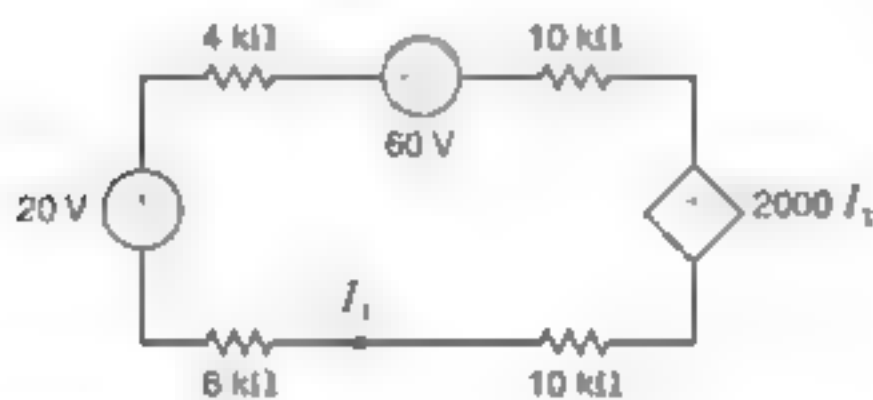


Figura P2.44

- 2.45** A fonte de 100 V do circuito mostrado na Fig. P2.45 fornece 200 W de potência. Determine V_2 .

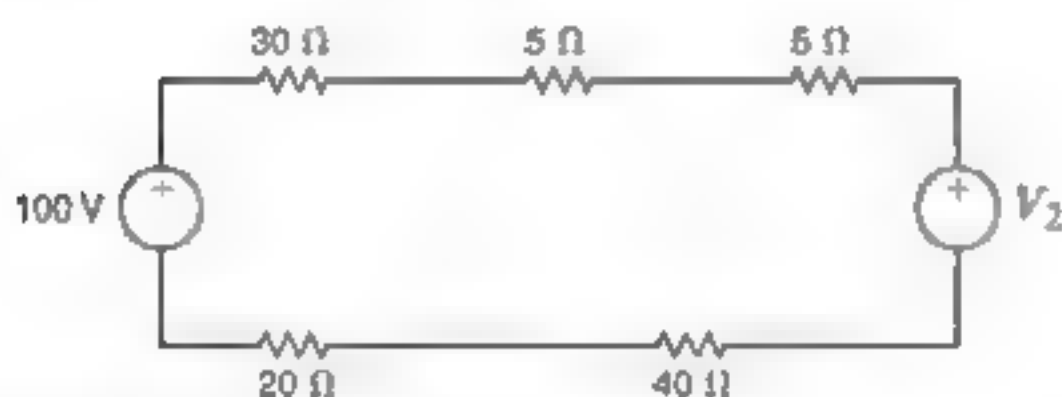


Figura P2.45

- 2.46** Determine o valor de V_1 no circuito mostrado na Fig. P2.46, de modo que $V_1 = 0$.

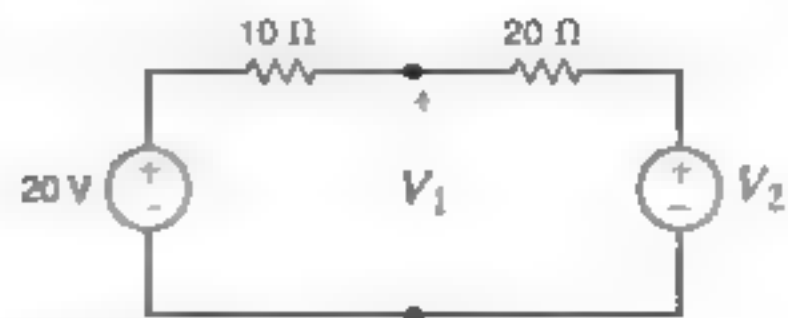


Figura P2.46

- 2.47** Determine a corrente I_x da rede mostrada na Fig. P2.47.

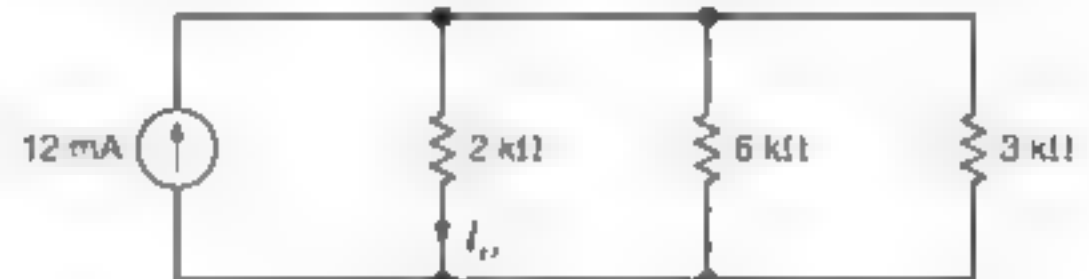


Figura P2.47

- 2.48** Determine a corrente I_x da rede mostrada na Fig. P2.48.

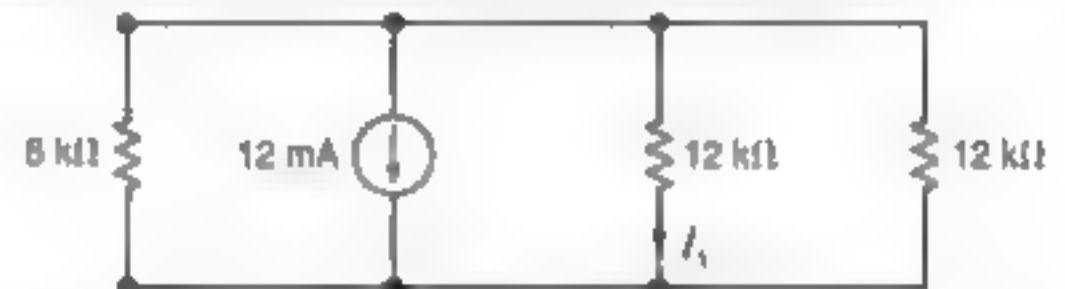


Figura P2.48

- 2.49** Determine a potência fornecida por cada fonte do circuito mostrado na Fig. P2.49.

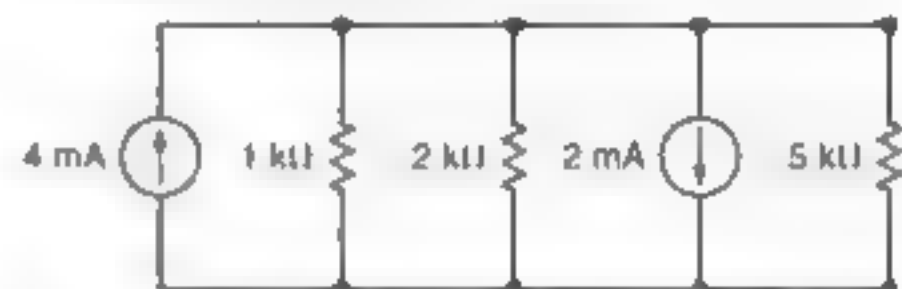


Figura P2.49

- 2.50** Determine a corrente I_A do circuito mostrado na Fig. P2.50.

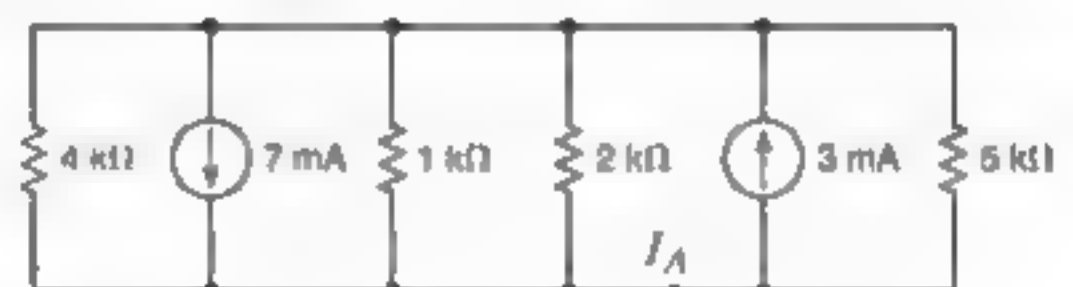


Figura P2.50

- 2.51** Determine a corrente I_x do circuito mostrado na Fig. P2.51

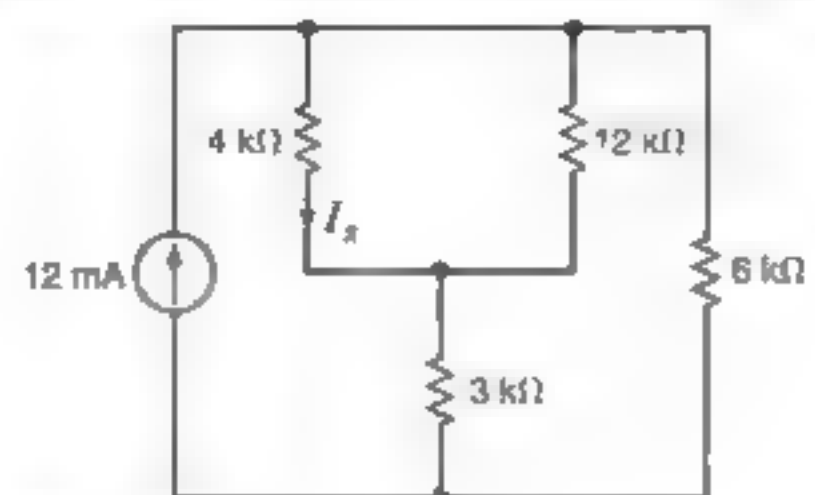


Figura P2.51

2.52 Determine a corrente I_s da rede mostrada na Fig. P2.52.

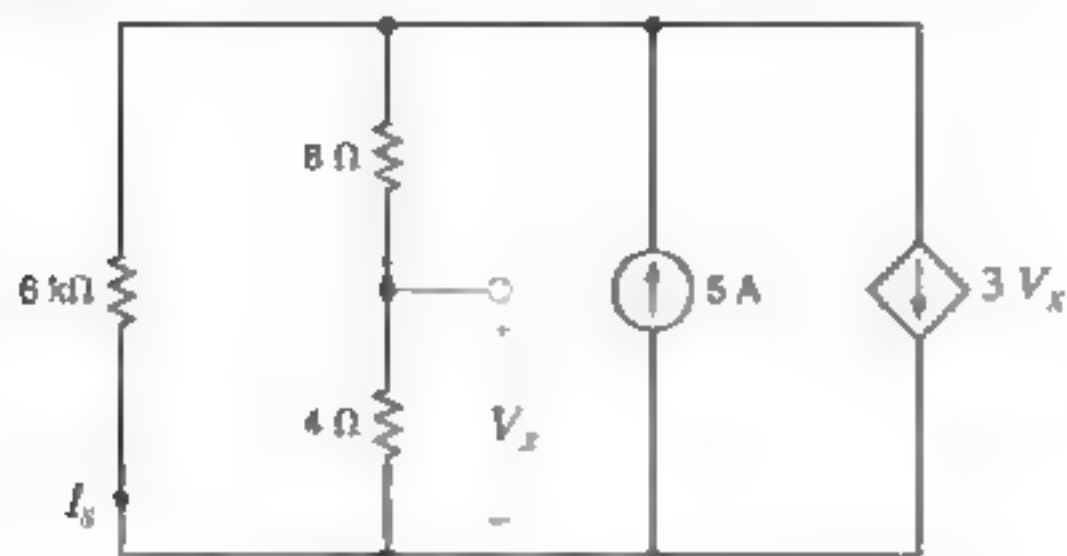


Figura P2.52

2.53 Determine a corrente I_c do circuito mostrado na Fig. P2.53.

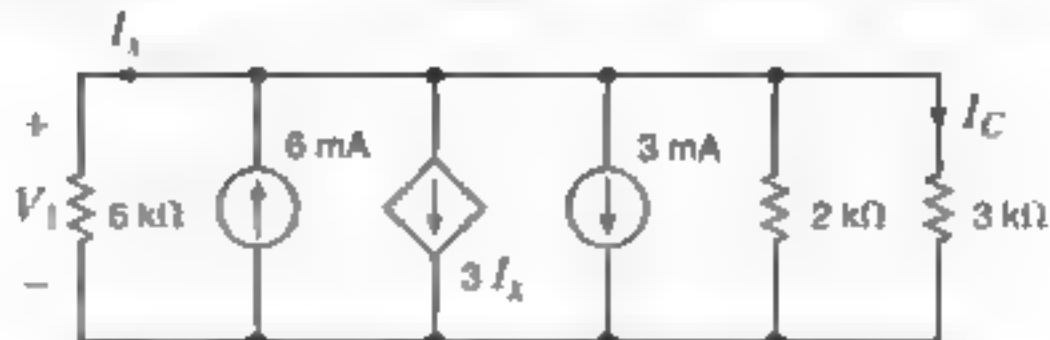


Figura P2.53

2.54 Determine a potência absorvida pela fonte dependente da rede mostrada na Fig. P2.54.

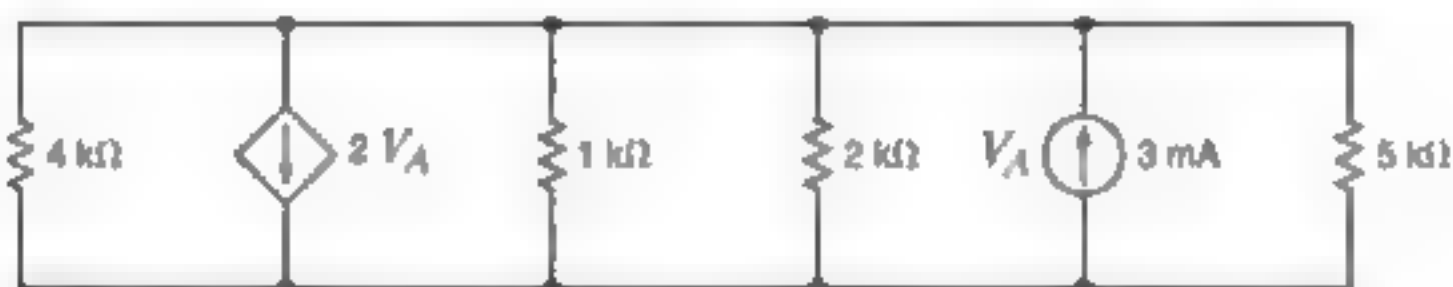


Figura P2.54

2.55 Determine a resistência R_{AB} do circuito mostrado na Fig. P2.55.

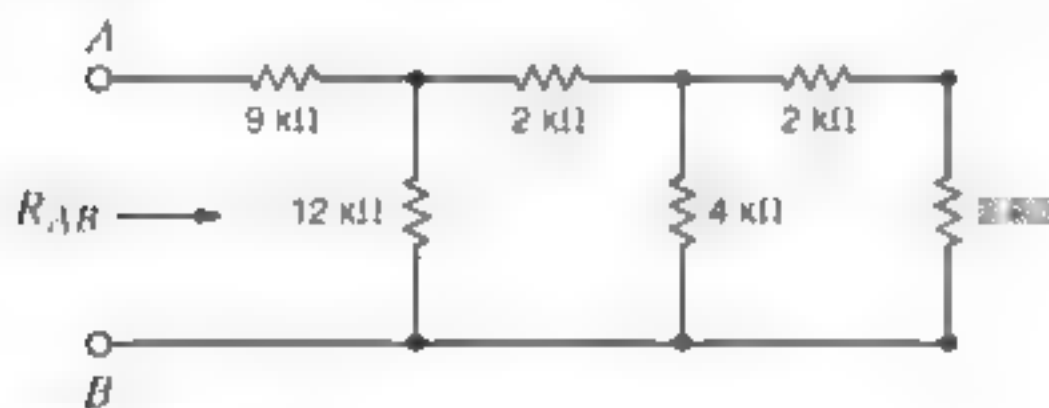


Figura P2.55

2.56 Determine a resistência R_{AB} da rede mostrada na Fig. P2.56.

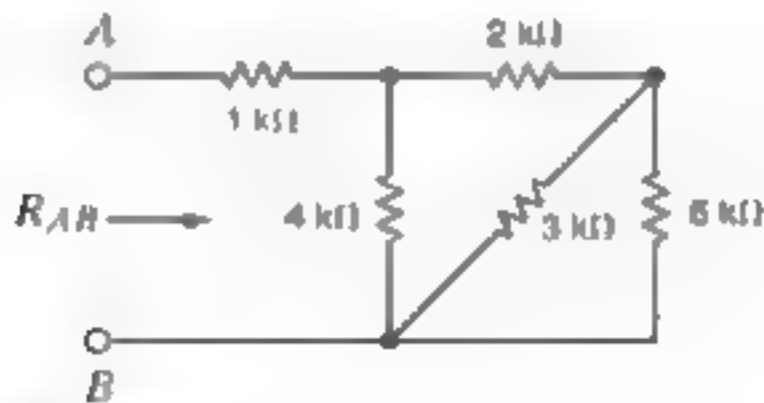


Figura P2.56

2.57 Determine a resistência R_{AB} do circuito mostrado na Fig. P2.57.

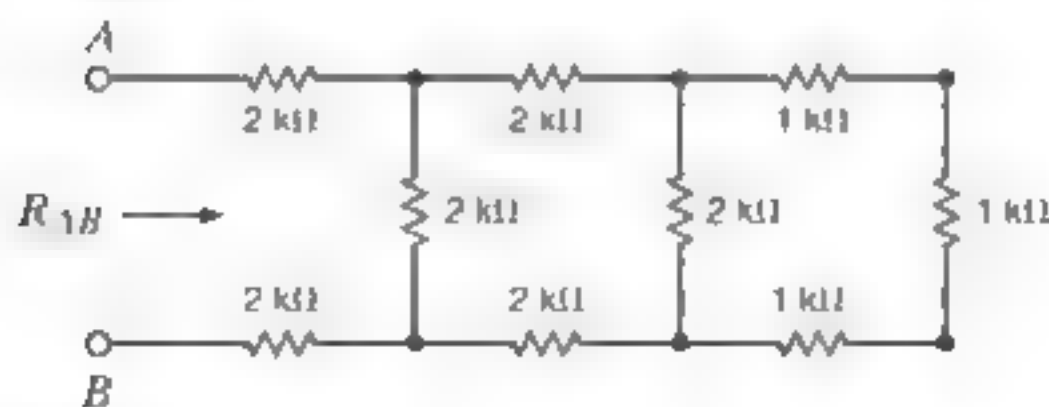


Figura P2.57

2.58 Determine a resistência R_{AB} da rede mostrada na Fig. P2.58

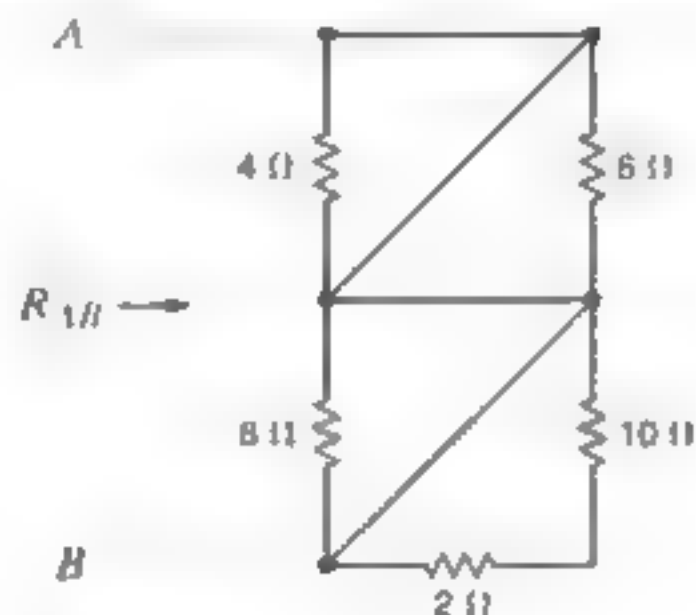


Figura P2.58

2.59 Determine a resistência R_{AB} do circuito mostrado na Fig. P2.59

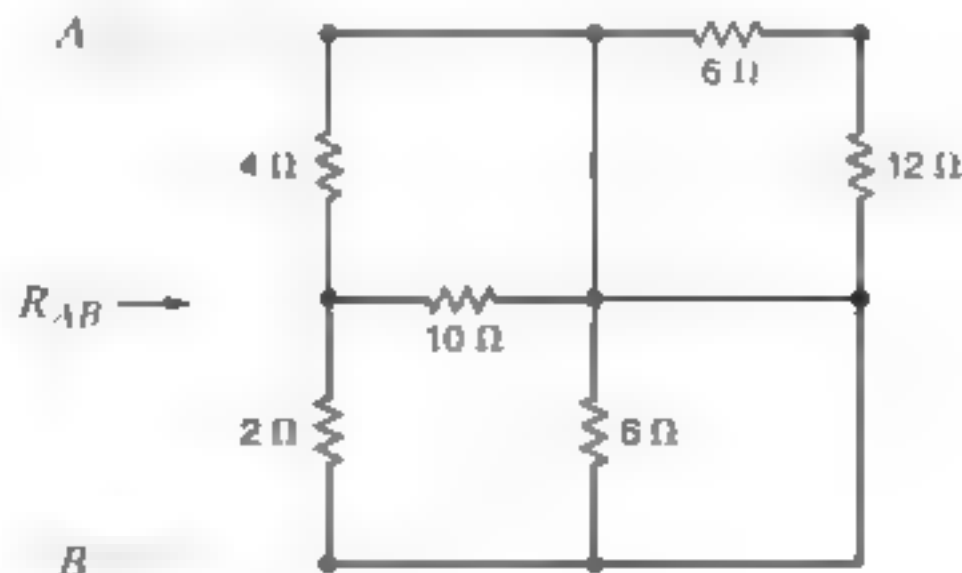


Figura P2.59

2.60 Determine a resistência R_{AB} da rede mostrada na Fig. P2.60.

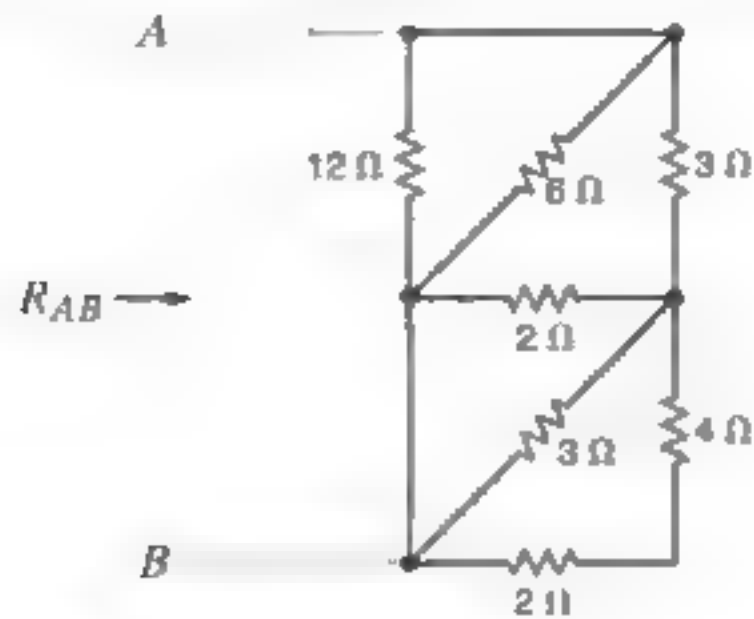


Figura P2.60

2.62 Determine a resistência R_{AB} da rede mostrada na Fig. P2.62.

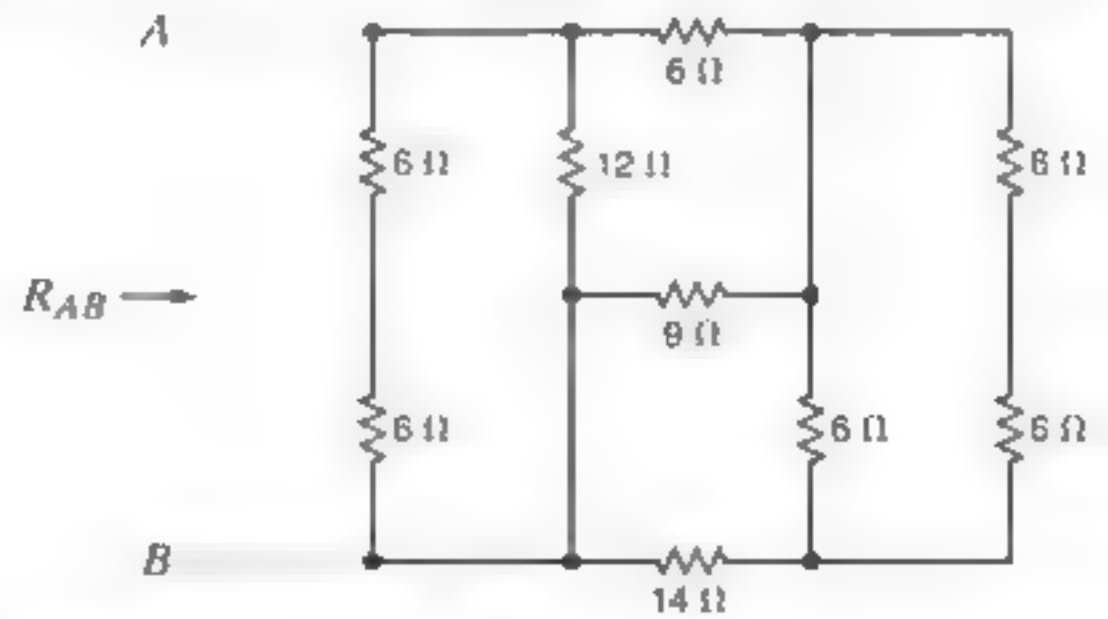


Figura P2.62

2.61 Determine a resistência R_{AB} do circuito mostrado na Fig. P2.61.

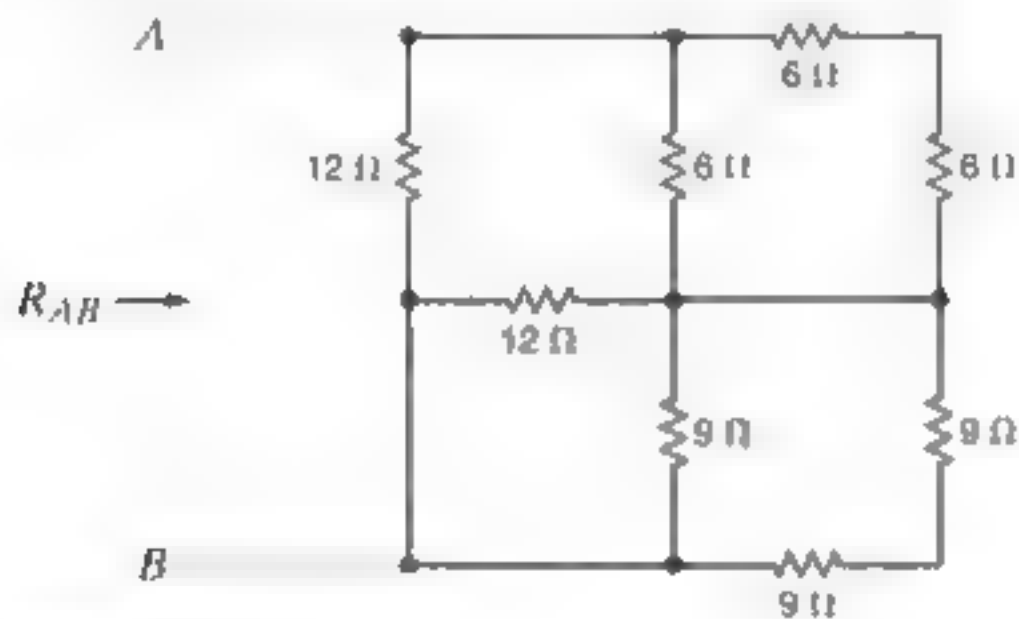


Figura P2.61

2.63 Determine a resistência equivalente R_{eq} da rede mostrada na Fig. P2.63.

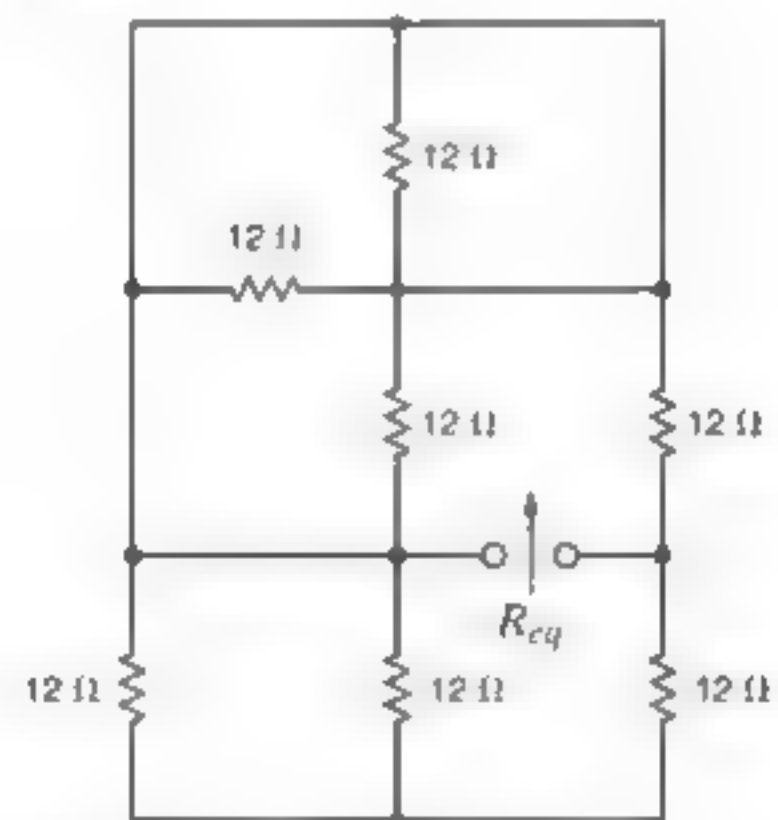


Figura P2.63

2.64 Determine a resistência equivalente observando os terminais a-b do circuito mostrado na Fig. P2.64.

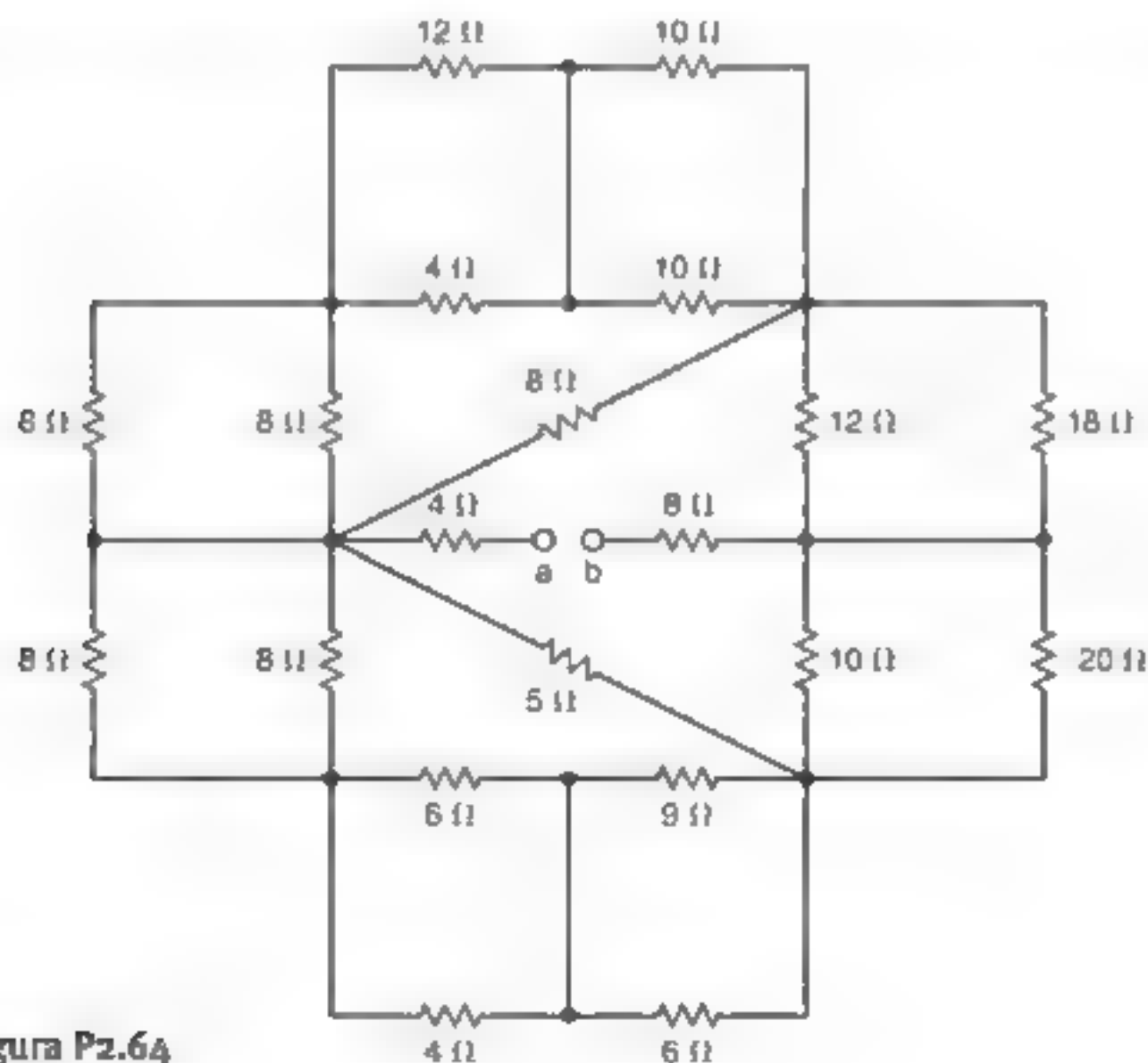


Figura P2.64

- 2.65 Dada a configuração de resistores mostrada na Fig. P2.65, determine a resistência equivalente entre os seguintes conjuntos de terminais: (1) a e b, (2) b e c, (3) a e c, (4) d e c, (5) a e e, (6) c e d, (7) a e d, (8) c e e, (9) b e d, e (10) b e e.

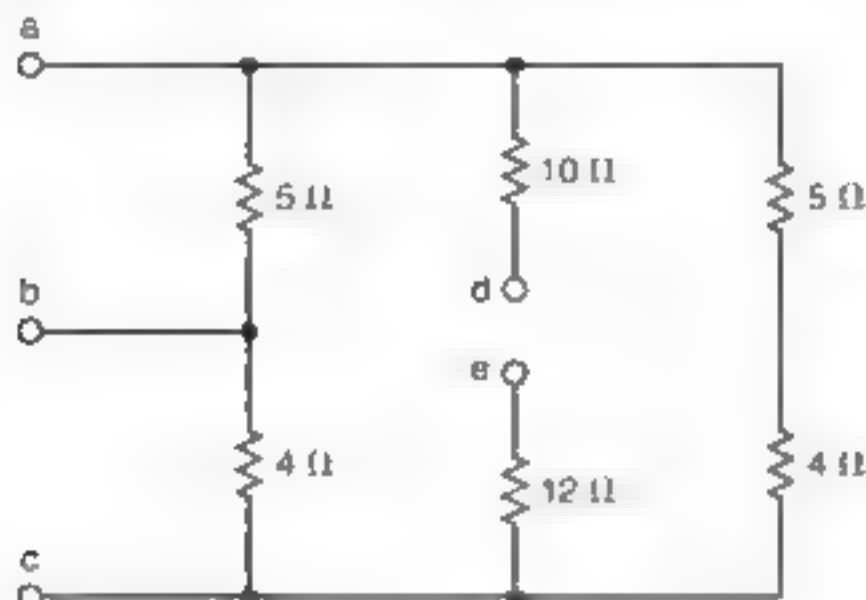


Figura P2.65

- 2.66 Dezesete possíveis valores de resistência equivalente podem ser obtidos utilizando-se três resistores. Determine os dezessete valores distintos considerando os três valores de resistores padronizados: 47 Ω, 33 Ω e 15 Ω.

- 2.67 Determine a corrente I_1 e a tensão V_1 do circuito mostrado na Fig. P2.67.

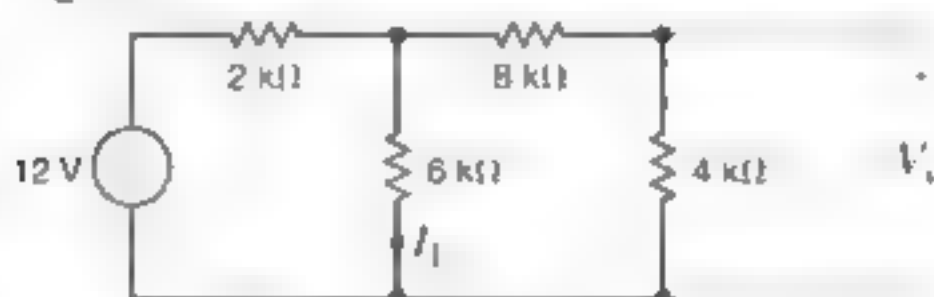


Figura P2.67

- 2.68 Determine a corrente I_1 e a tensão V_1 do circuito mostrado na Fig. P2.68.

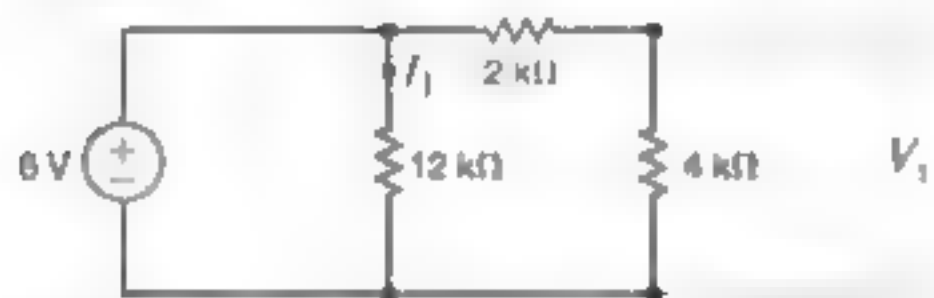


Figura P2.68

- 2.69 Determine as tensões V_{ab} e V_{dc} do circuito mostrado na Fig. P2.69.

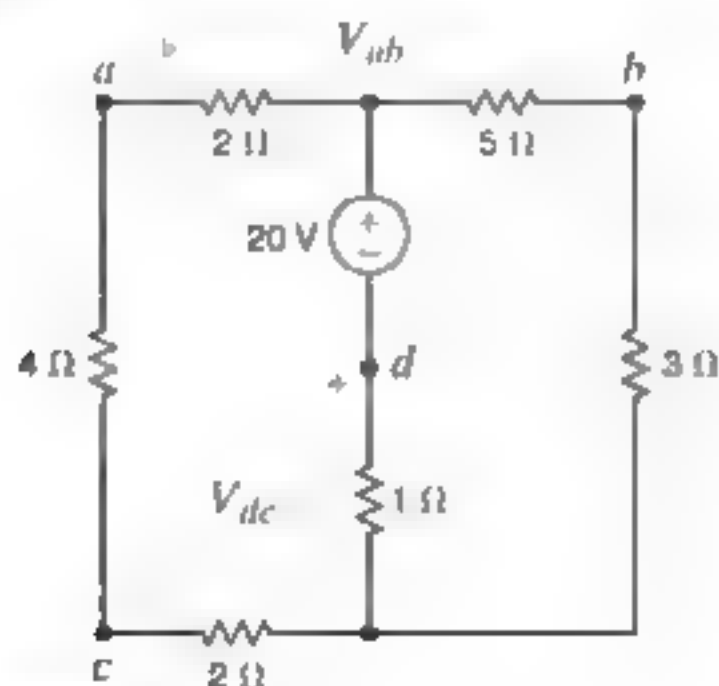


Figura P2.69

- 2.70 Determine a tensão V_1 e a corrente I_A do circuito mostrado na Fig. P2.70.

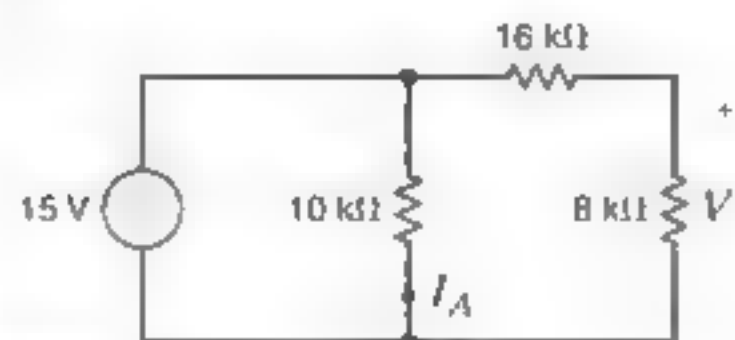


Figura P2.70

- 2.71 Determine a corrente I_1 da rede mostrada na Fig. P2.71.

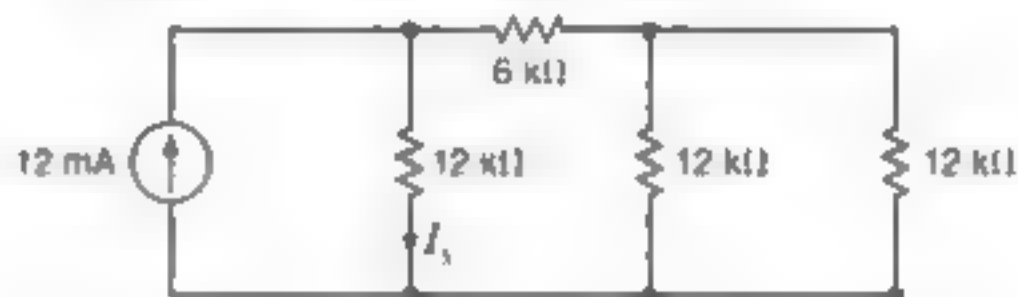


Figura P2.71

- 2.72 Determine a corrente I_1 do circuito mostrado na Fig. P2.72.

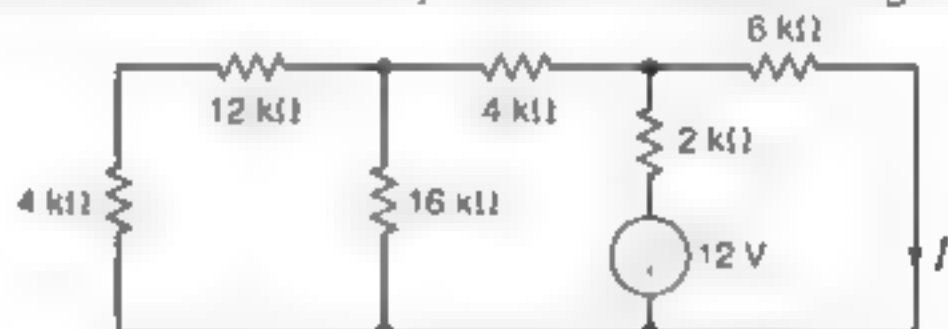


Figura P2.72

- 2.73 Determine a tensão V_1 da rede mostrada na Fig. P2.73.

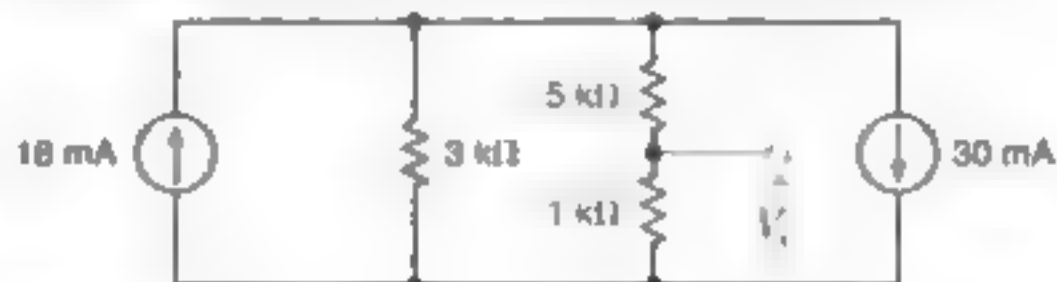


Figura P2.73

- 2.74 Calcule a tensão V_{ab} da rede mostrada na Fig. P2.74.

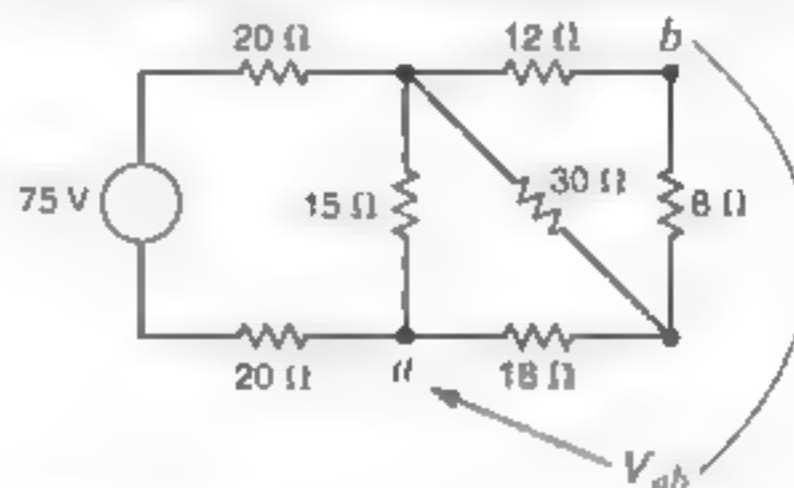


Figura P2.74

- 2.75 Calcule a tensão V_{AB} da rede mostrada na Fig. P2.75.

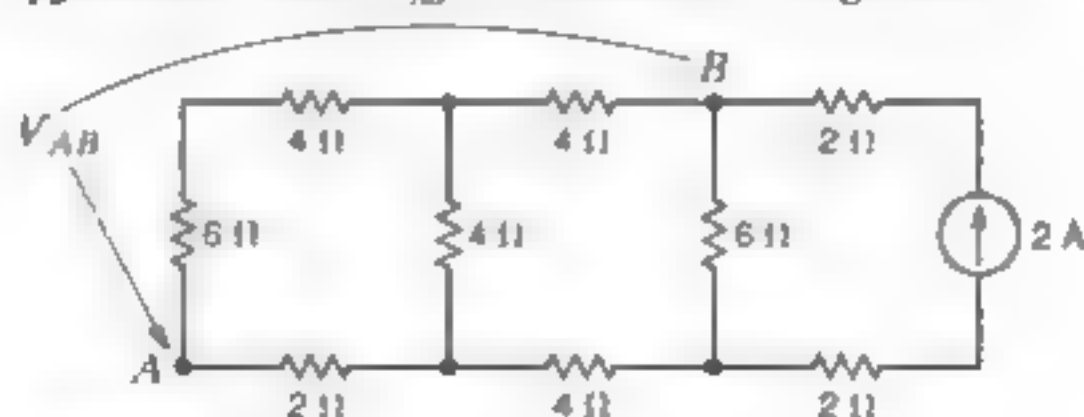


Figura P2.75

2.76 Calcule as tensões V_{ab} e V_1 da rede mostrada na Fig. P2.76.

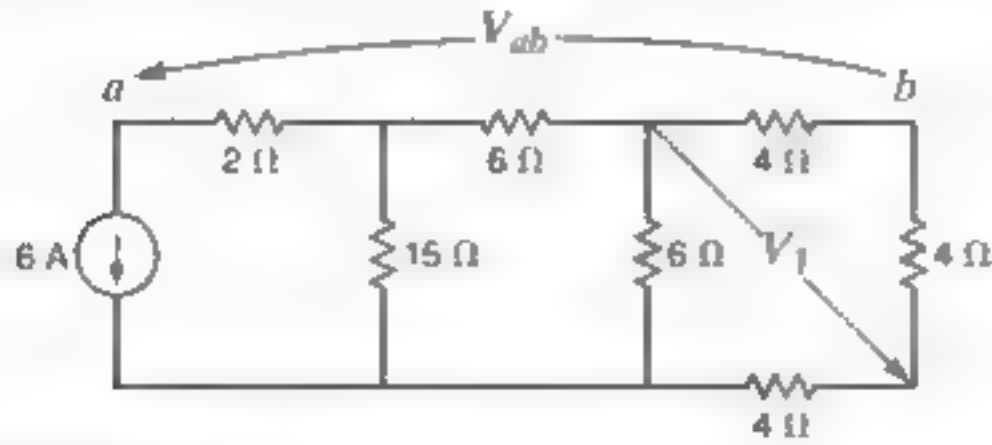


Figura P2.76

2.77 Calcule a tensão V_{AB} do circuito mostrado na Fig. P2.77.

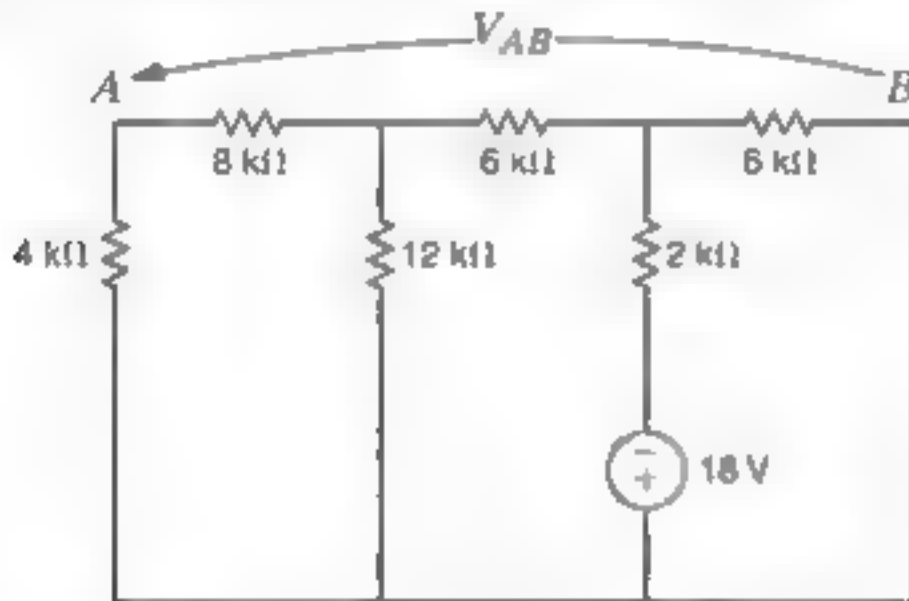


Figura P2.77

2.78 Calcule a tensão V_{AB} e a corrente I_1 do circuito mostrado na Fig. P2.78.

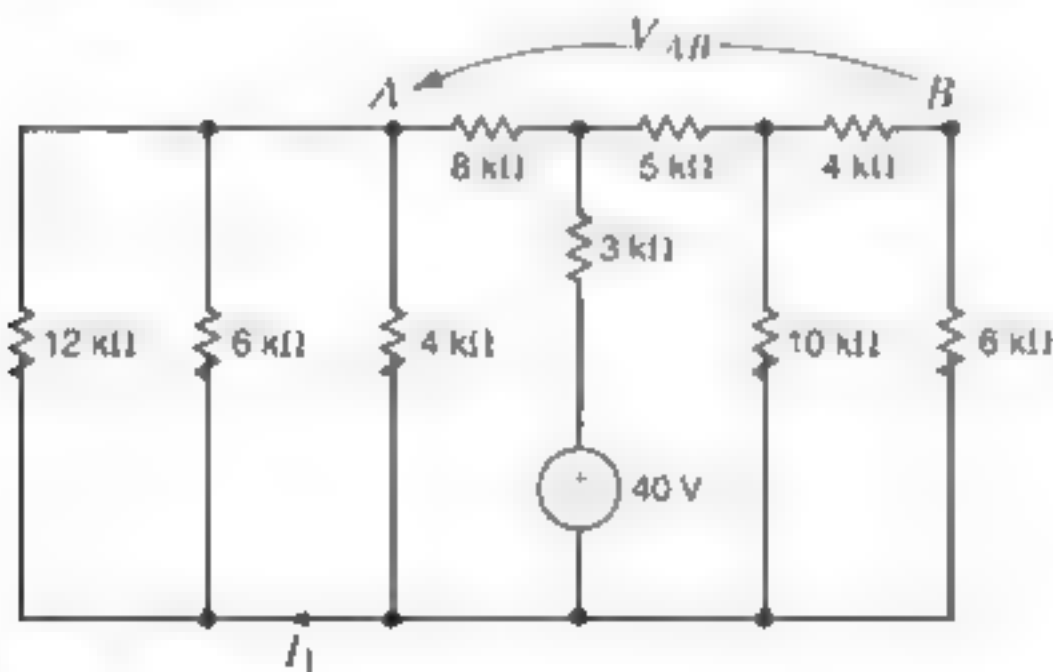


Figura P2.78

2.79 Calcule a tensão V_{AB} e a corrente I_1 do circuito mostrado na Fig. P2.79.

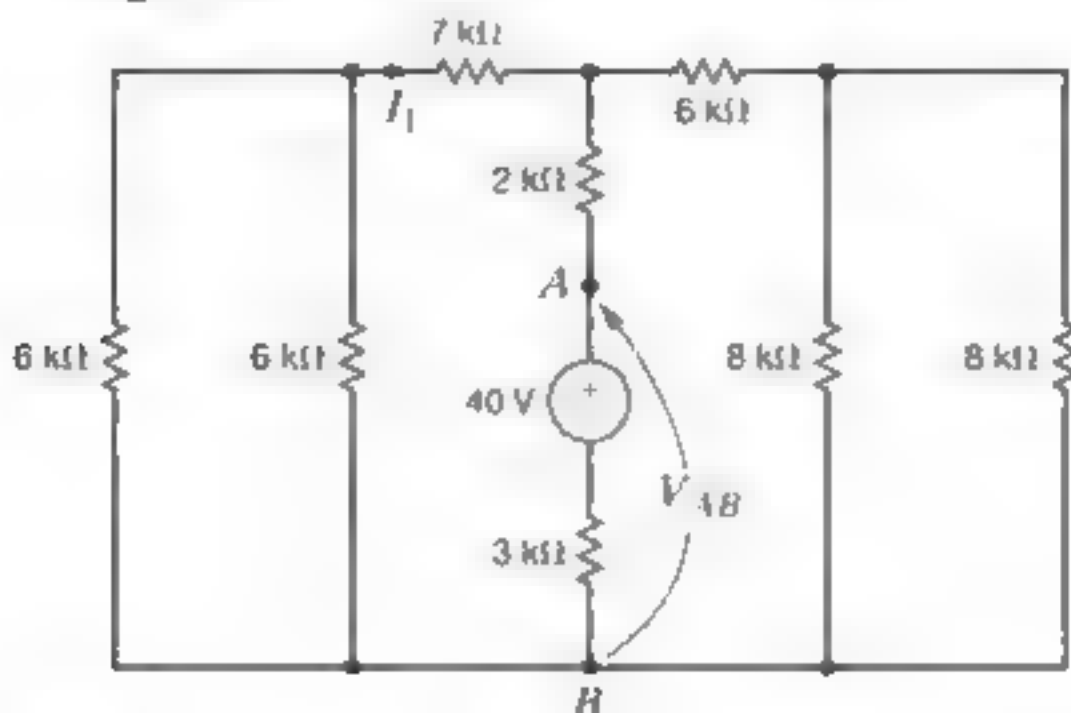


Figura P2.79

2.80 Determine a tensão V_{ab} da rede mostrada na Fig. P2.80.

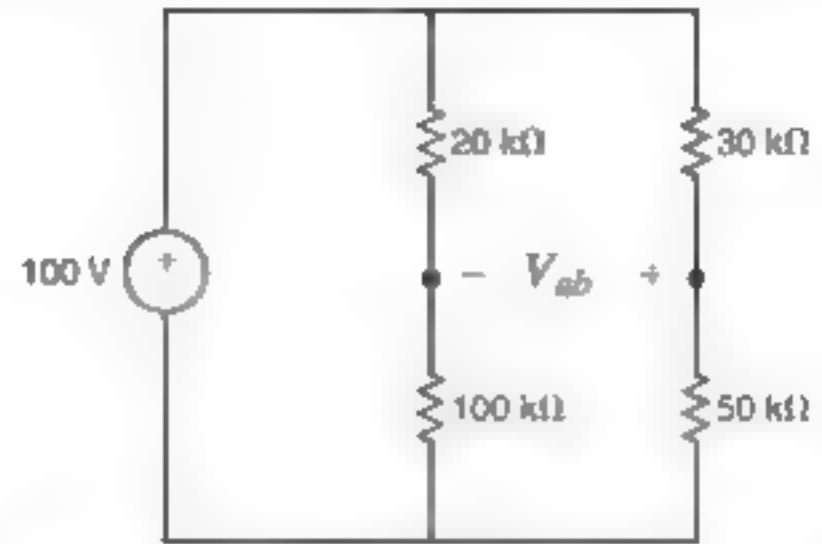


Figura P2.80

2.81 Considerando que a tensão V_x da rede mostrada na Fig. P2.81 vale 4 V, determine a tensão V_F .

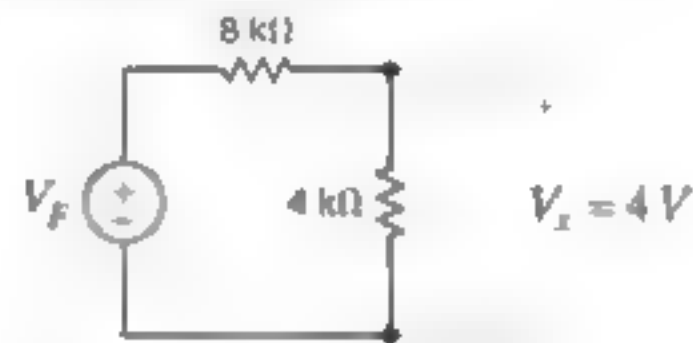


Figura P2.81

2.82 Considerando que a corrente I_x do circuito mostrado na Fig. P2.82 vale 5 mA, determine a corrente I_F .

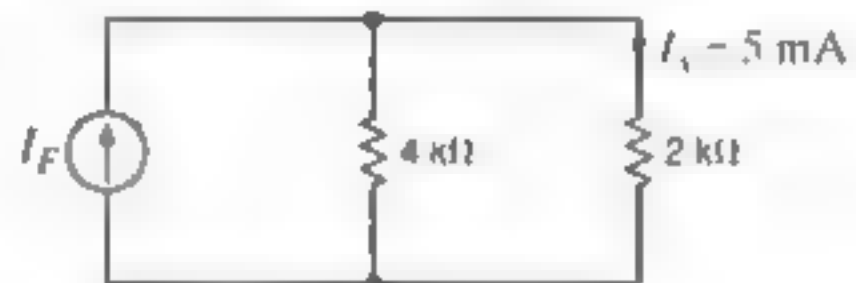


Figura P2.82

2.83 Considerando que a corrente I_x do circuito mostrado na Fig. P2.83 vale 2 mA, determine a tensão V_F .

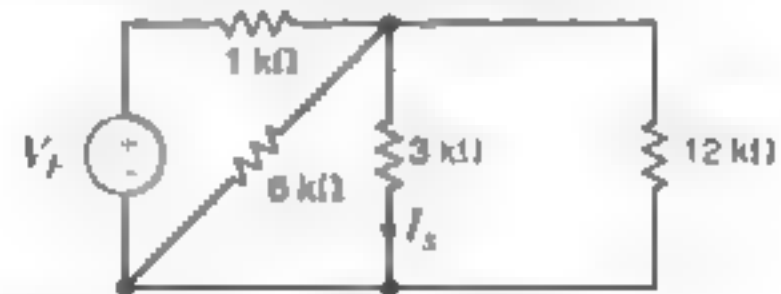


Figura P2.83

2.84 Determine o valor da tensão V_F da rede mostrada na Fig. P2.84 de modo que a potência fornecida pela fonte de corrente seja igual a zero.

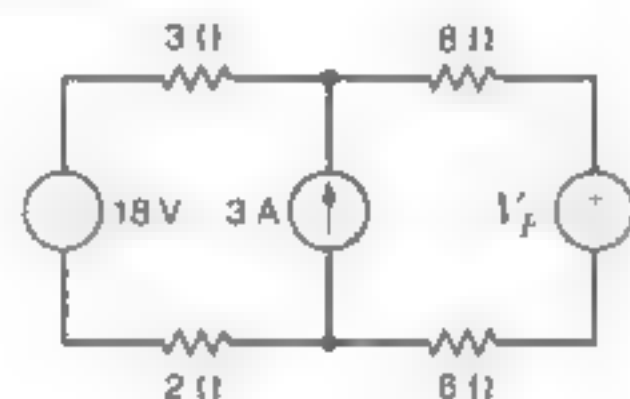


Figura P2.84

2.85 No circuito mostrado na Fig. P2.85, $V_1 = 6\text{ V}$. Determine I_F .

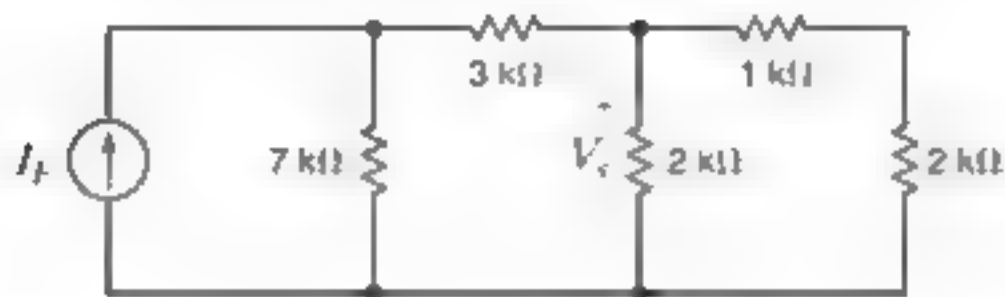


Figura P2.85

2.86 Determine o valor da tensão V_1 da rede mostrada na Fig. P2.86 de modo que $V_o = 0$.

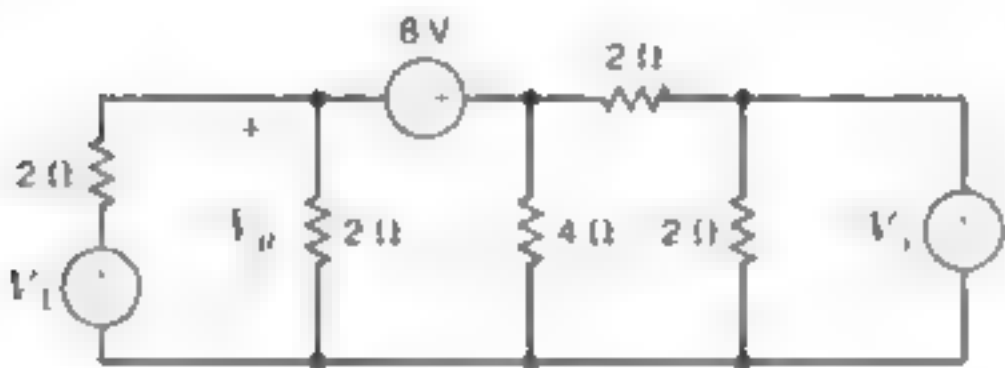


Figura P2.86

2.87 Considerando que a tensão V_1 do circuito mostrado na Fig. P2.87 vale 5 V, determine a tensão I_F .

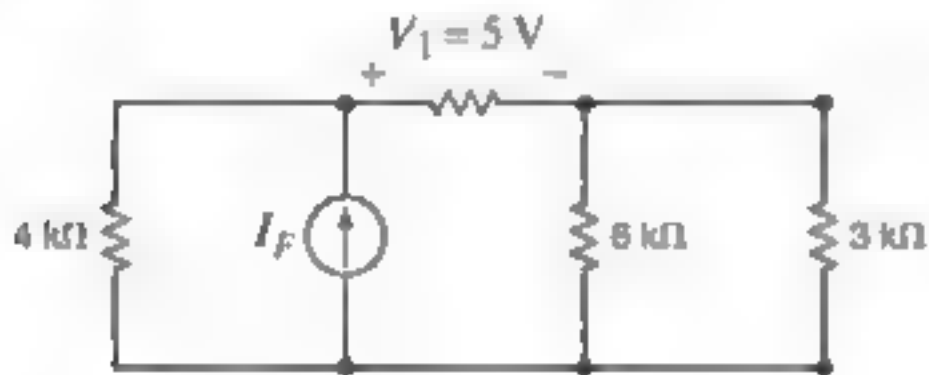


Figura P2.87

2.88 Na rede mostrada na Fig. P2.88, $V = 12\text{ V}$. Determine V_F .

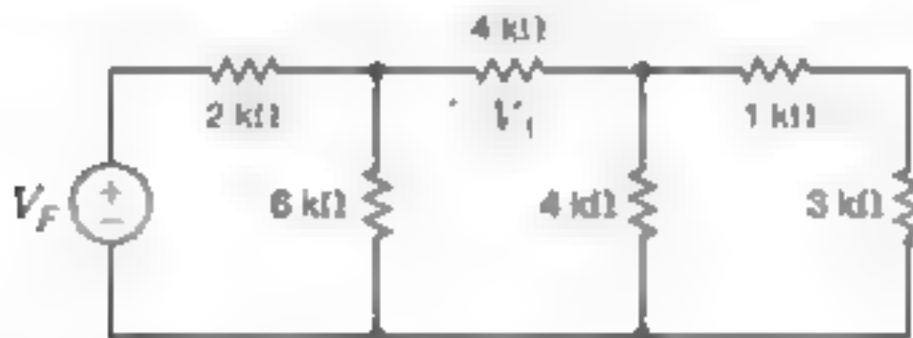


Figura P2.88

2.89 Dado que a tensão V_1 da rede mostrada na Fig. P2.89 vale 4 V, determine V_F .

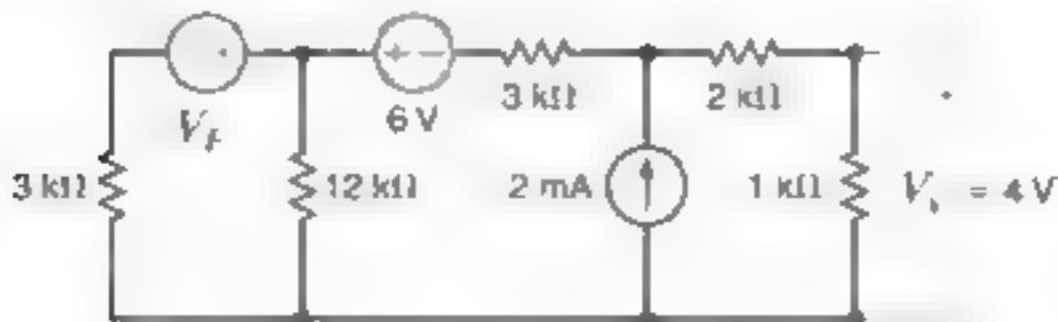


Figura P2.89

2.90 Considerando que a tensão $V_R = 15\text{ V}$, determine a tensão V_x da rede mostrada na Fig. P2.90.

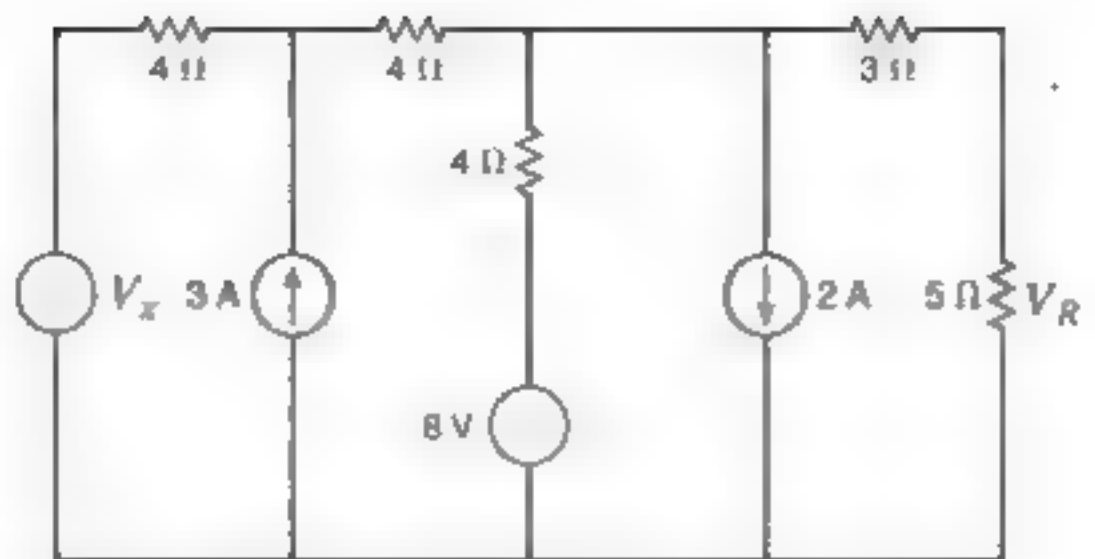


Figura P2.90

2.91 Considerando que a tensão $V_2 = 4\text{ V}$, calcule a tensão V_x da rede mostrada na Fig. P2.91.

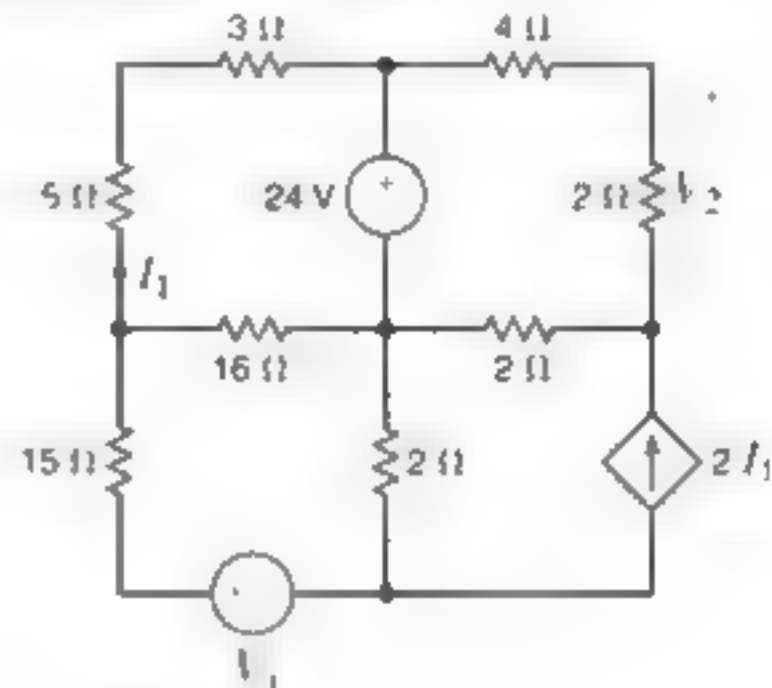


Figura P2.91

2.92 Determine o valor da corrente I_A da rede mostrada na Fig. P2.92.

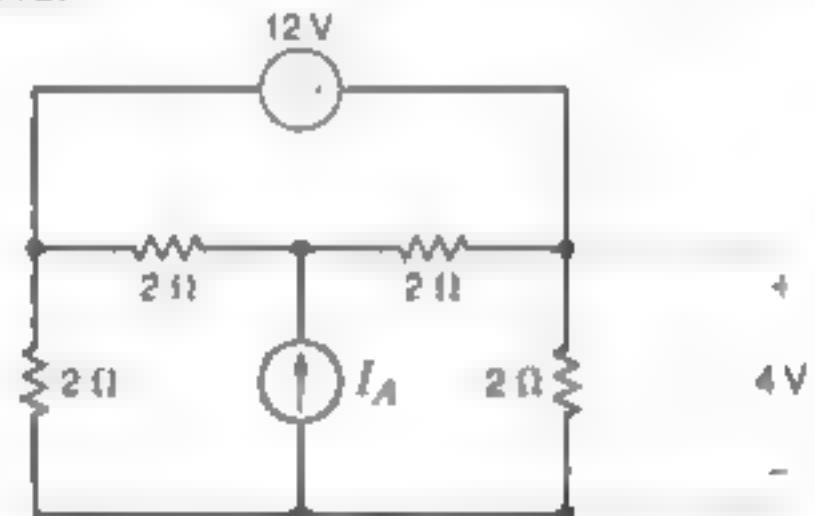


Figura P2.92

2.93 Determine o valor da corrente I_A do circuito mostrado na Fig. P2.93.

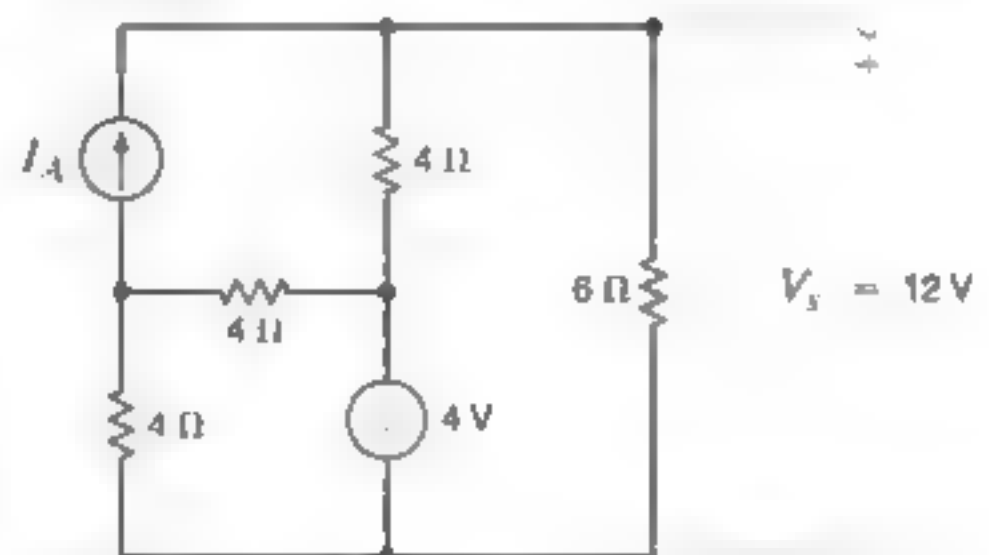


Figura P2.93

- 2.94** Determine o valor da corrente I_A da fonte da rede mostrada na Fig. P2.94.

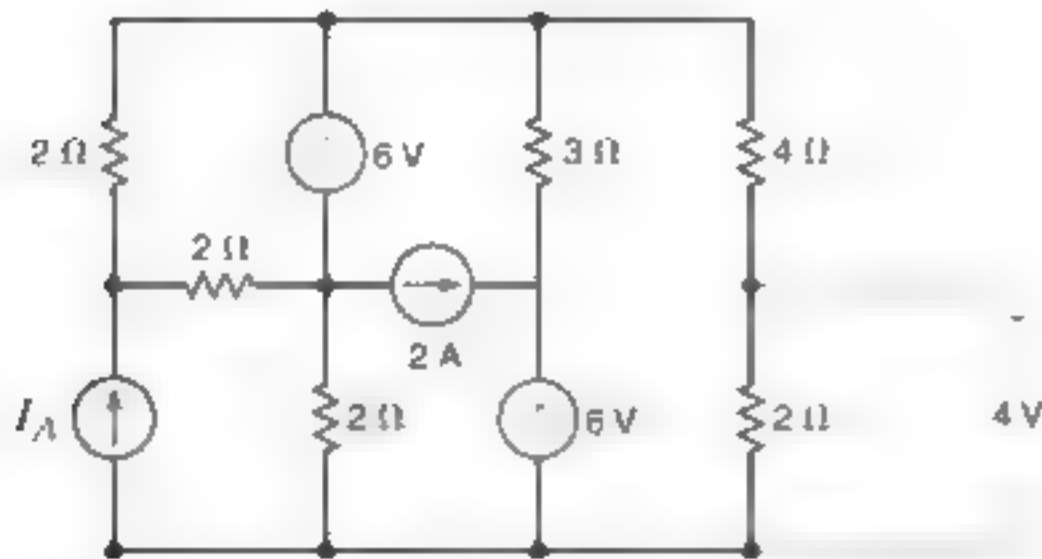


Figura P2.94

- 2.95** Dada a tensão $V_s = 12\text{ V}$, determine o valor da corrente I_A do circuito mostrado na Fig. P2.95

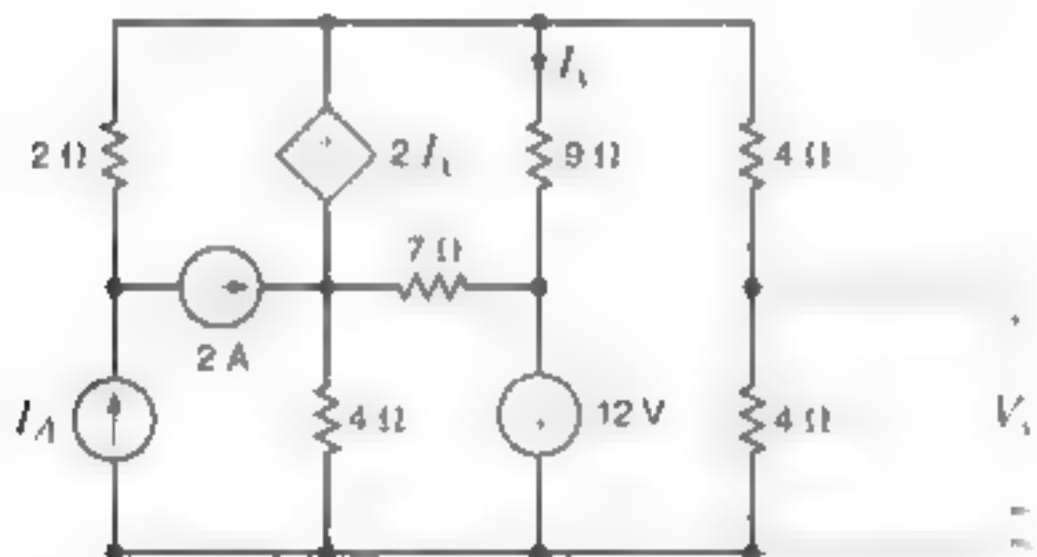


Figura P2.95

- 2.96** Determine o valor da tensão V_s da rede mostrada na Fig. P2.96 de modo que a fonte de corrente de 5 A forneça uma potência de 50 W.

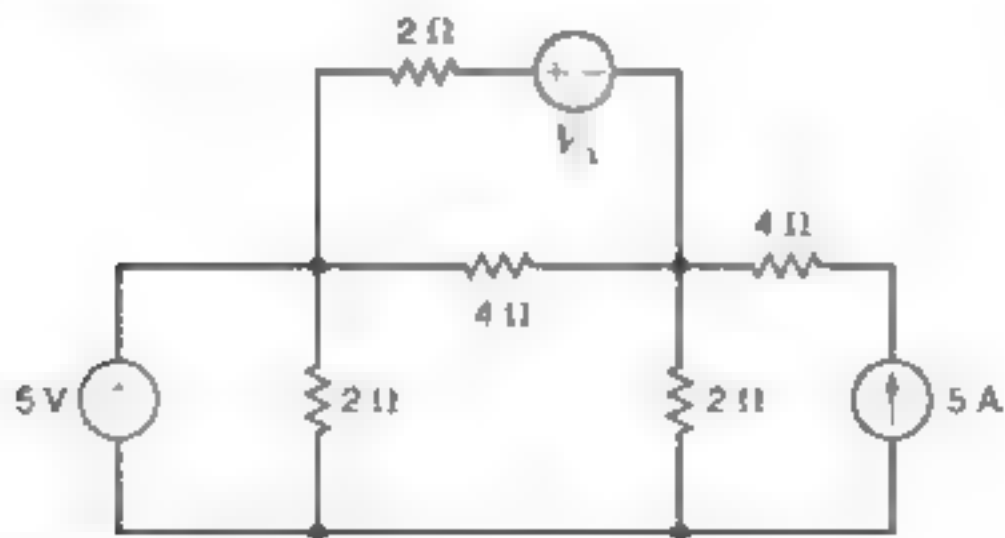


Figura P2.96

- 2.97** A fonte de corrente de 5 A do circuito mostrado na Fig. P2.97 fornece 150 W de potência. Calcule a tensão V_A .

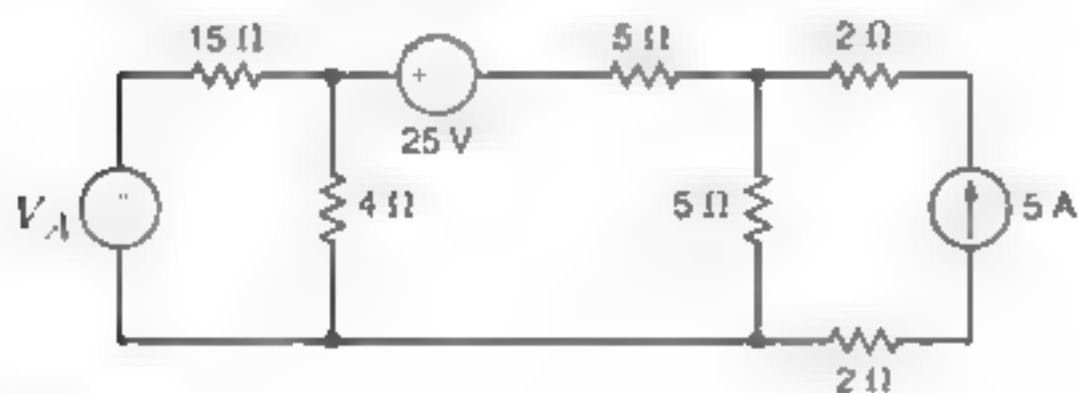


Figura P2.97

- 2.98** Dado que a corrente I_s do circuito mostrado na Fig. P2.98 vale 2 mA, determine a corrente I_A .

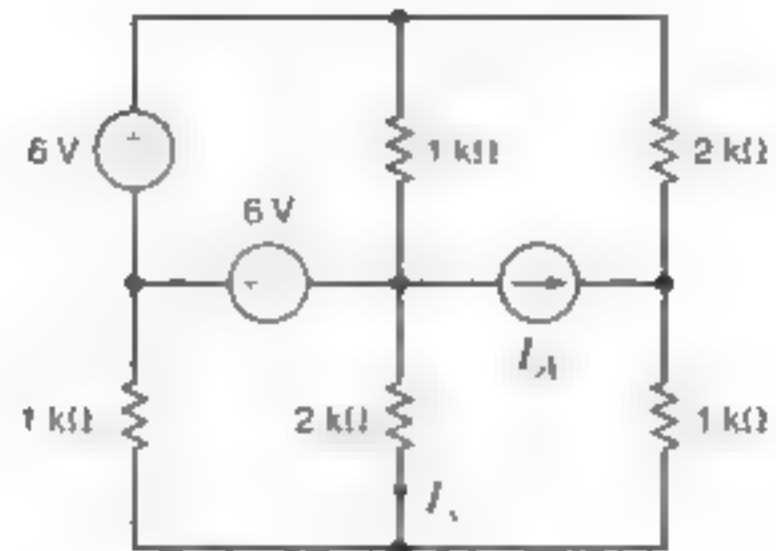


Figura P2.98

- 2.99** Dado que a corrente I_s do circuito mostrado na Fig. P2.99 vale 2 mA, determine a tensão V_A .

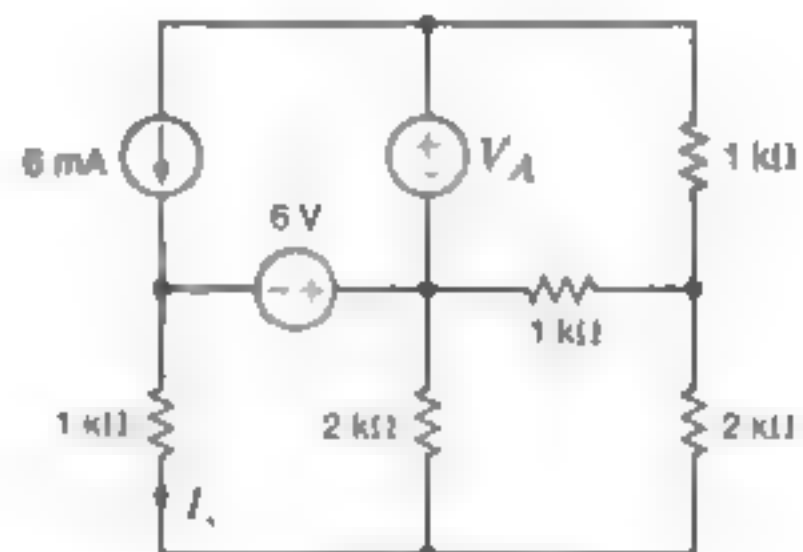


Figura P2.99

- 2.100** Dada a tensão V_s da rede mostrada na Fig. P2.100, determine a corrente I_A .

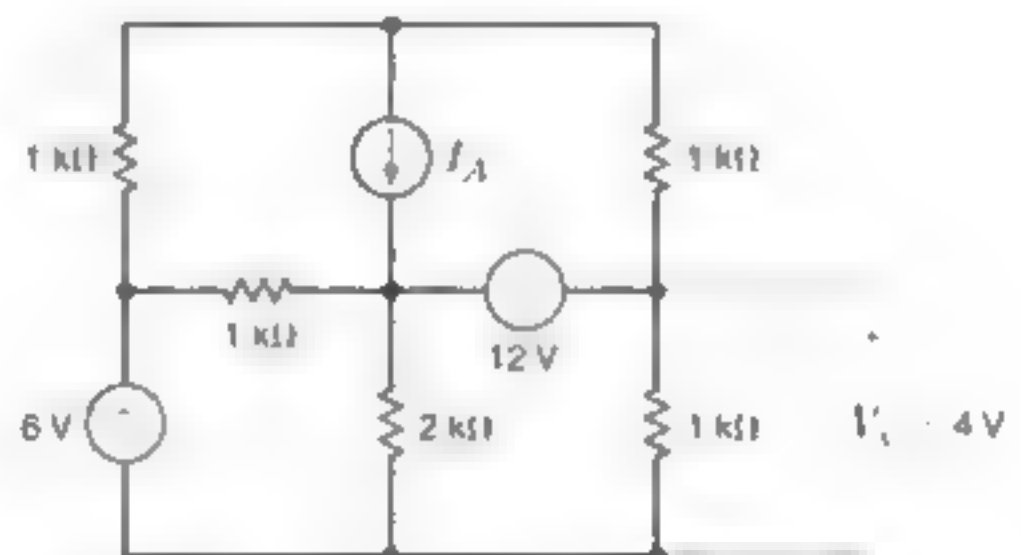


Figura P2.100

- 2.101** Determine o valor da tensão V_x do circuito mostrado na Fig. P2.101 de modo que a potência fornecida pela fonte de 5 A seja de 60 W.

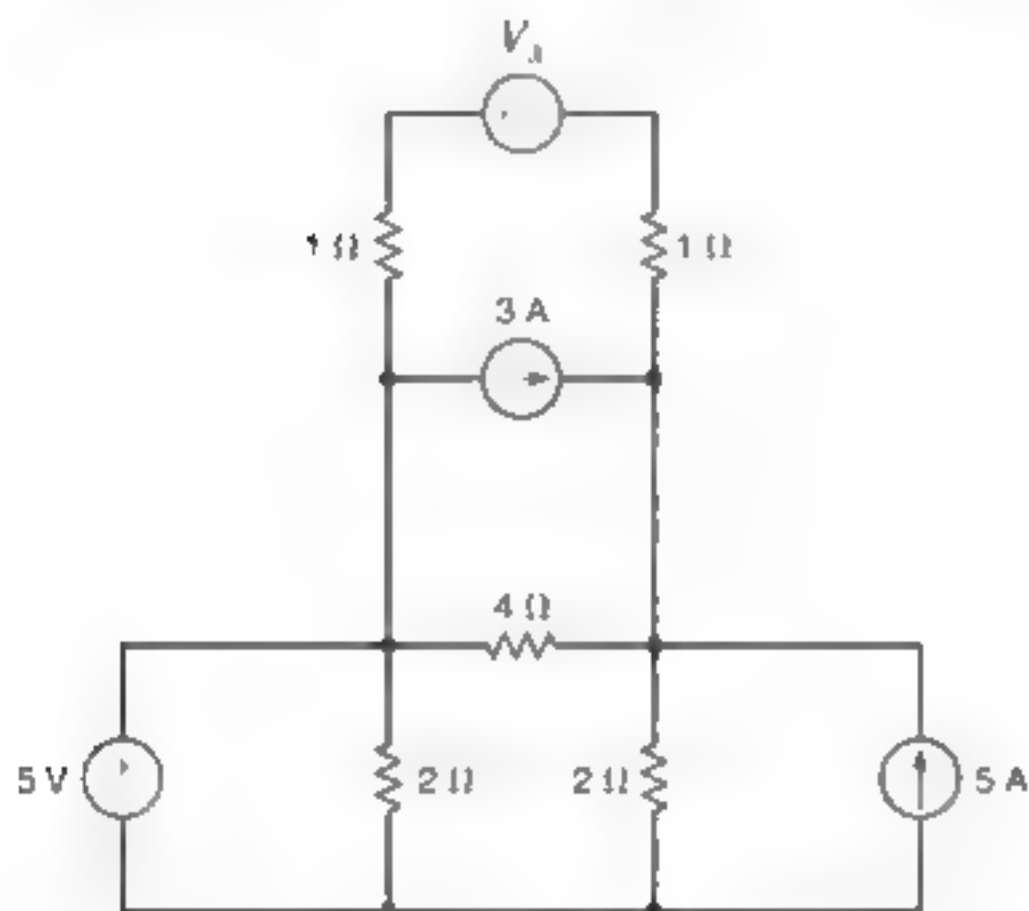


Figura P2.101

- 2.102** A fonte de corrente de 3 A do circuito mostrado na Fig. P2.102 está absorvendo uma potência de 12 W. Determine o valor do resistor R .

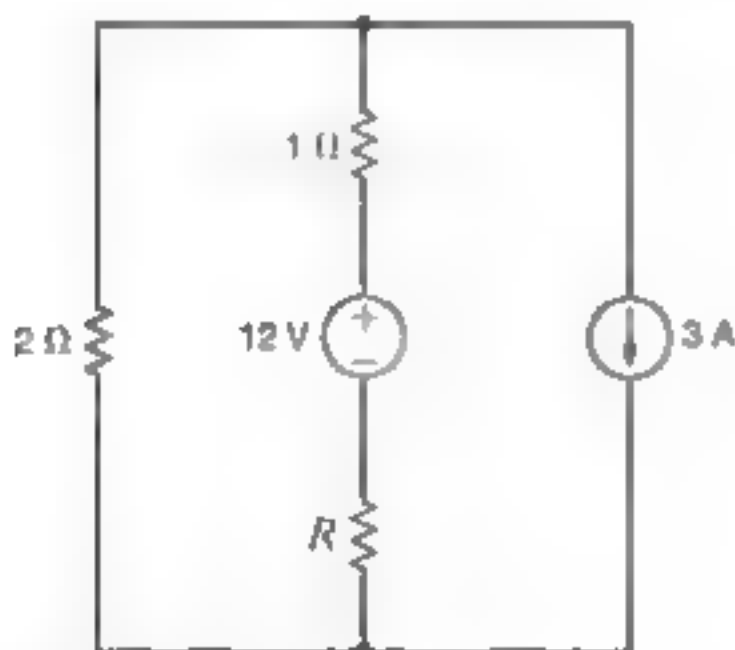


Figura P2.102

- 2.103** Se a potência fornecida pela fonte de 50 V do circuito mostrado na Fig. P2.103 vale 100 W, determine o valor do resistor R .

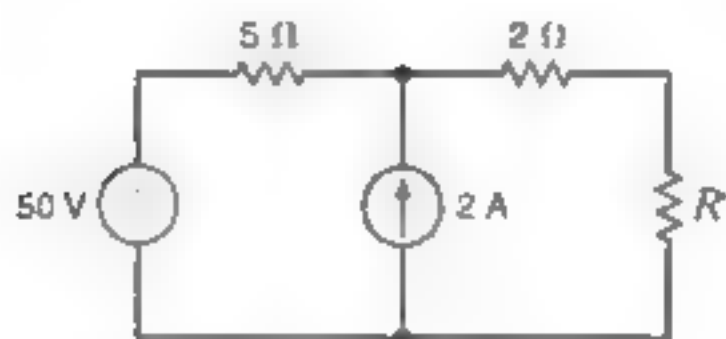


Figura P2.103

- 2.104** Dado que a tensão V_x do circuito mostrado na Fig. P2.104 vale 4 V, determine a tensão V_A e a resistência R_B .

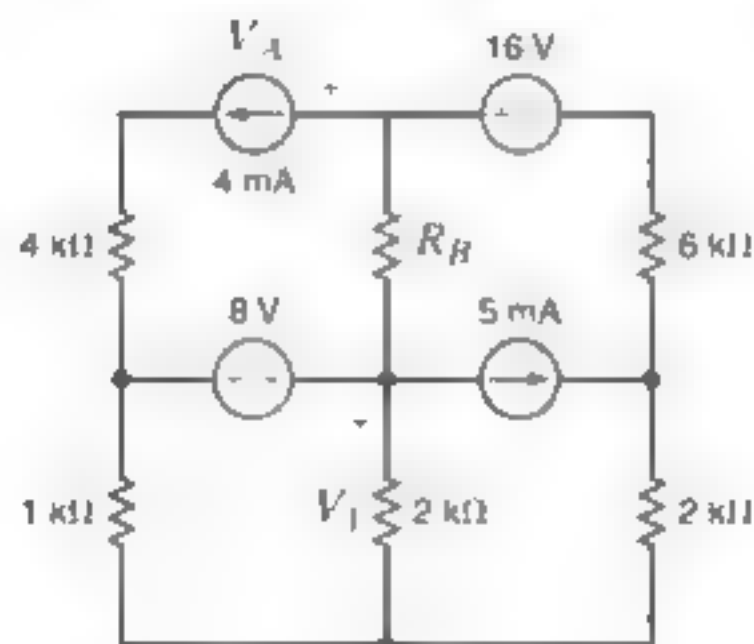


Figura P2.104

- 2.105** Determine a potência absorvida pela rede mostrada na Fig. P2.105.

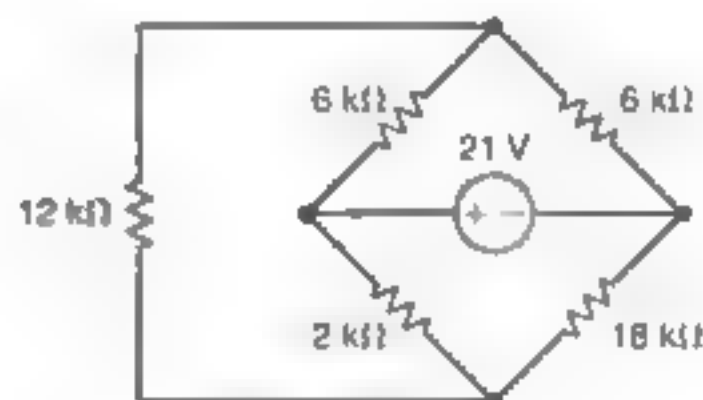


Figura P2.105

- 2.106** Determine o valor de g para o circuito mostrado na Fig. P2.106 de modo que a potência fornecida pela fonte de 3 A seja de 20 W.

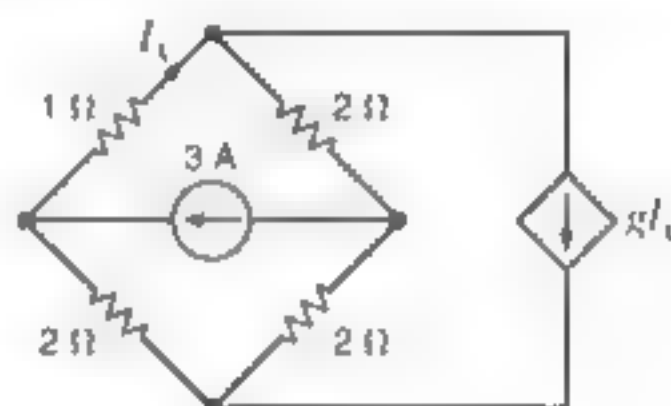


Figura P2.106

- 2.107** Determine a potência fornecida pela fonte de 24 V do circuito mostrado na Fig. P2.107.

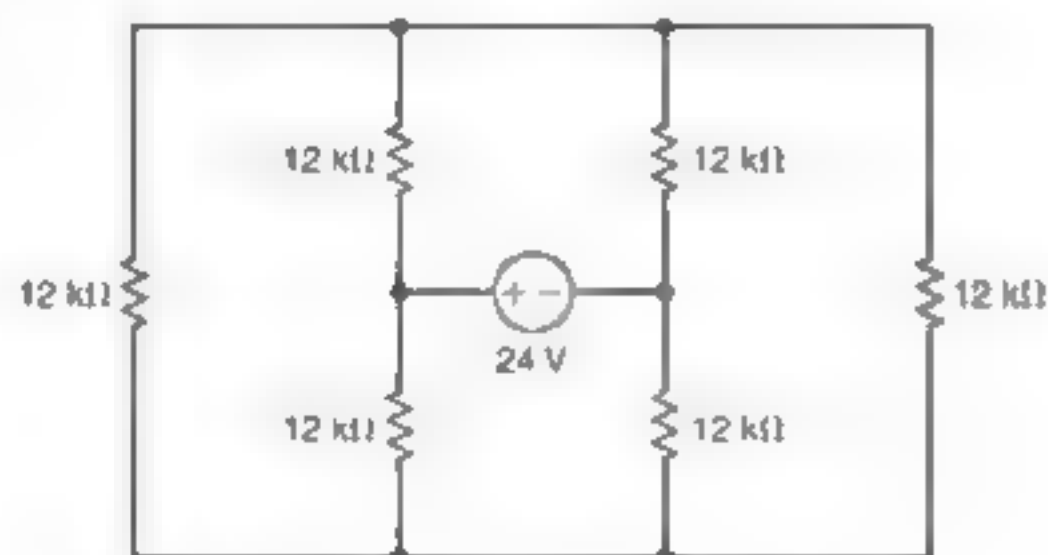


Figura P2.107

2.108 Determine a corrente I_x do circuito mostrado na Fig. P2.108.

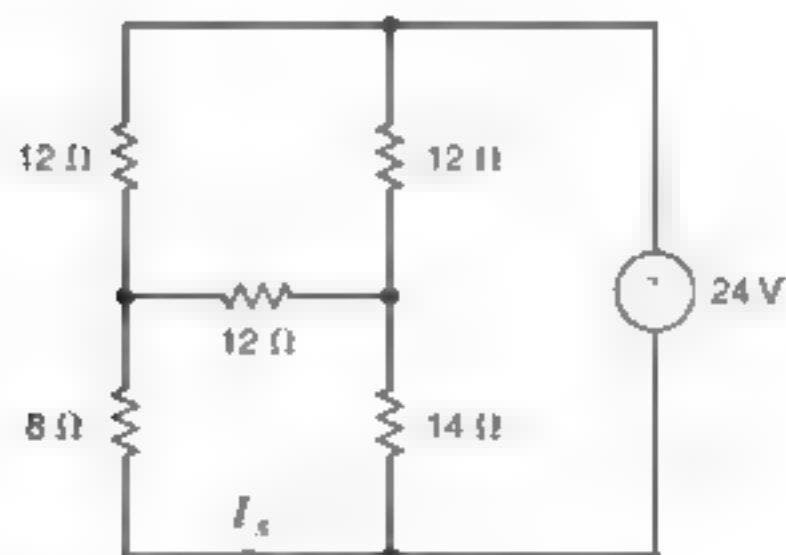


Figura P2.108

2.109 Determine a corrente I_x do circuito mostrado na Fig. P2.109.

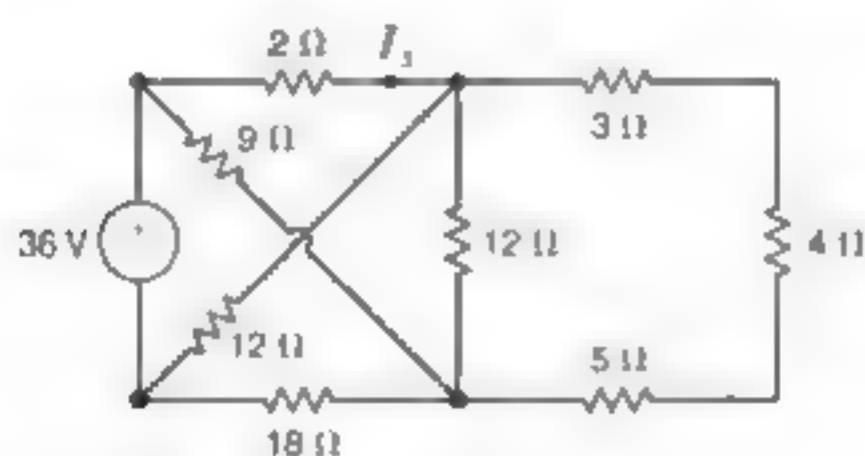


Figura P2.109

2.110 Determine o valor da tensão V_x do circuito mostrado na Fig. P2.110.

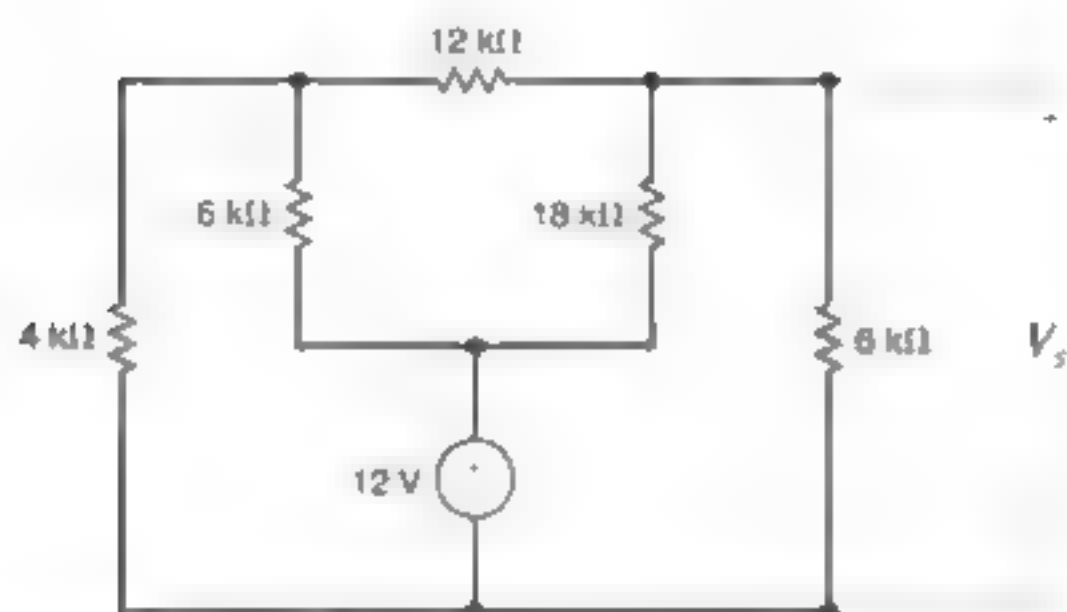


Figura P2.110

2.111 Determine a tensão V_x do circuito mostrado na Fig. P2.111.

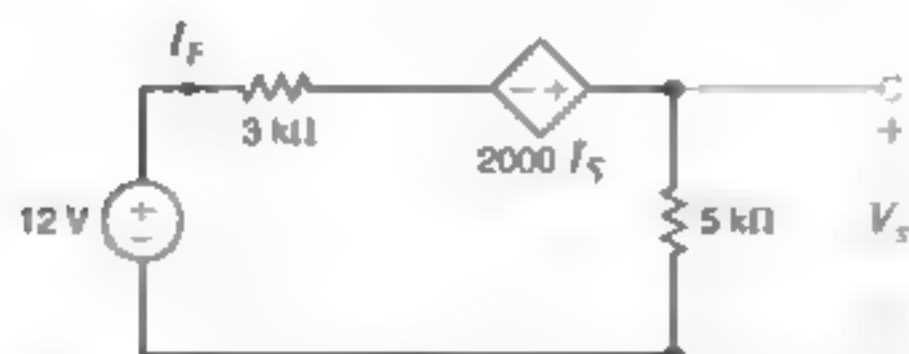


Figura P2.111

2.112 Determine a tensão V_x da rede mostrada na Fig. P2.112

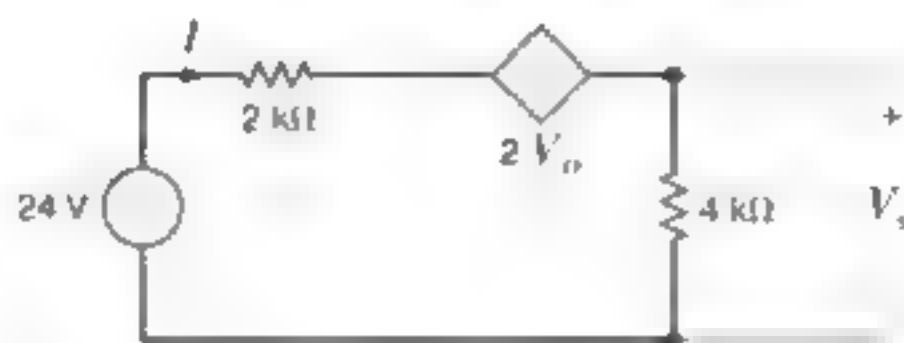


Figura P2.112

2.113 Determine a corrente I_x do circuito mostrado na Fig. P2.113.

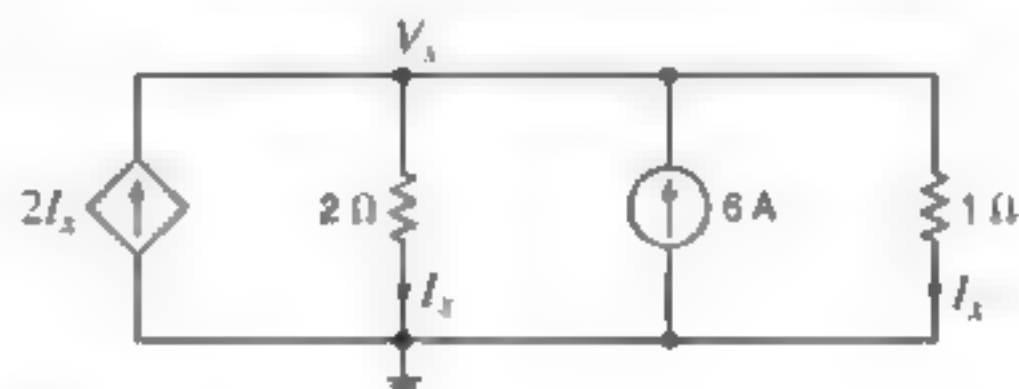


Figura P2.113

2.114 Determine a corrente I_x do circuito mostrado na Fig. P2.114.

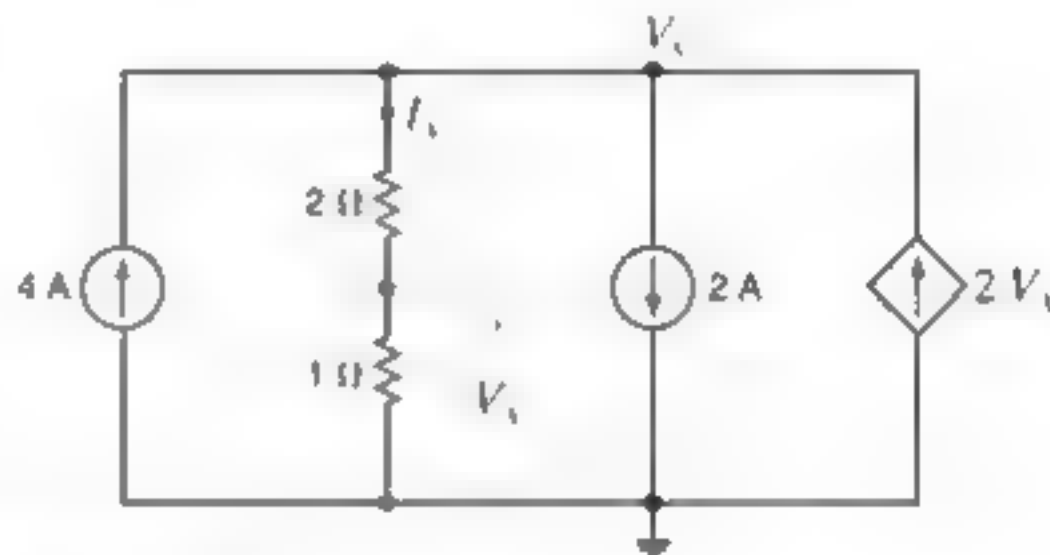


Figura P2.114

2.115 Determine a tensão V_x do circuito mostrado na Fig. P2.115.

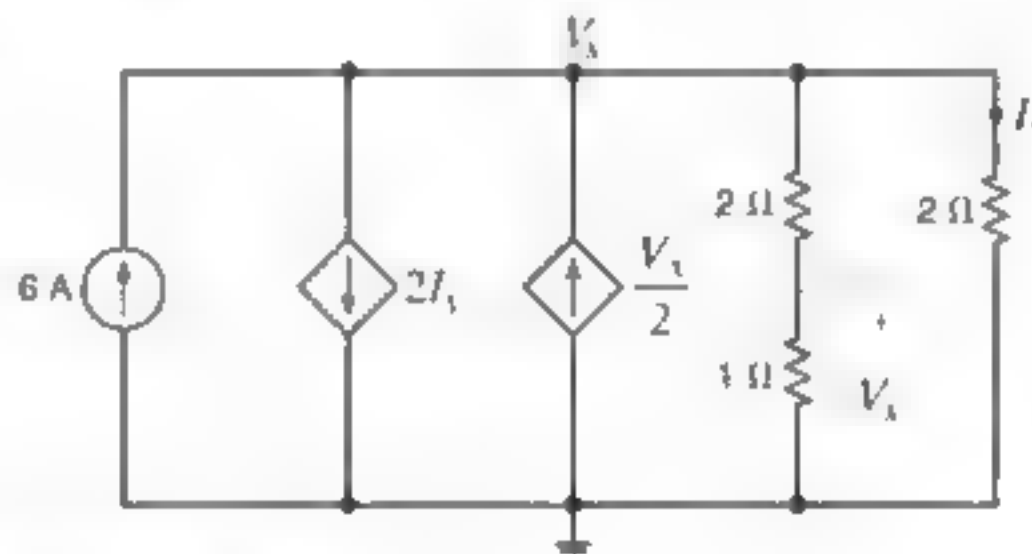


Figura P2.115

2.116 Determine a tensão V_x do circuito mostrado na Fig. P2.116.

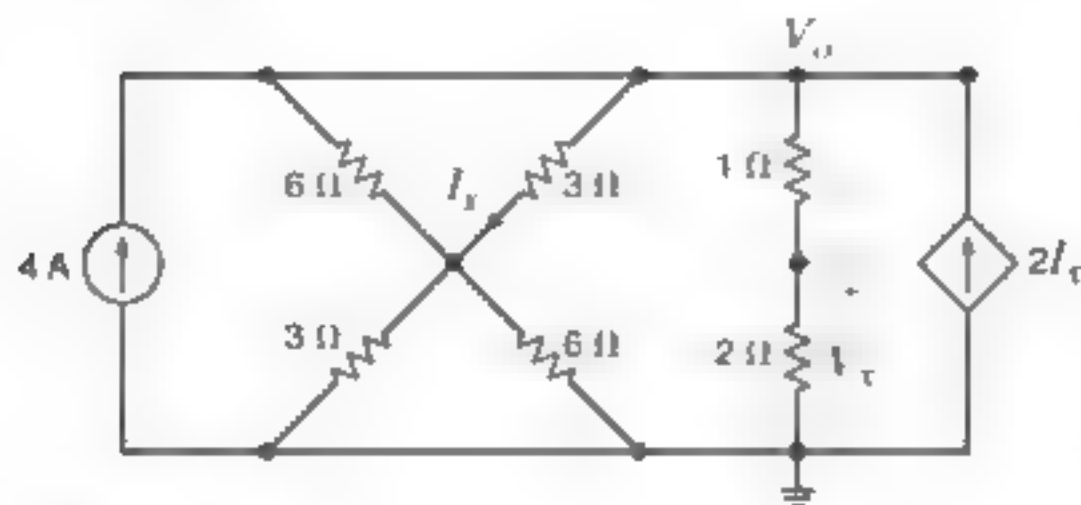


Figura P2.116

2.118 Determine as correntes I_1 , I_2 e I_3 do circuito mostrado na Fig. P2.118.

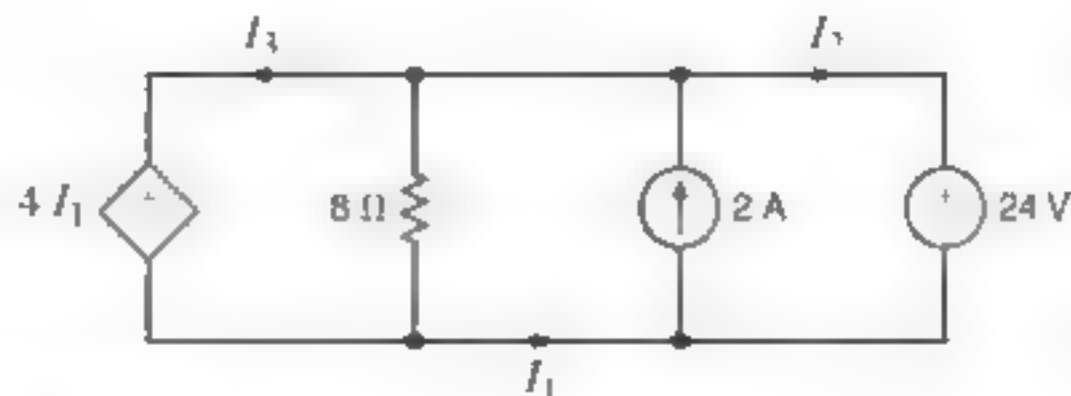


Figura P2.118

2.117 Determine a tensão V_x da rede mostrada na Fig. P2.117.

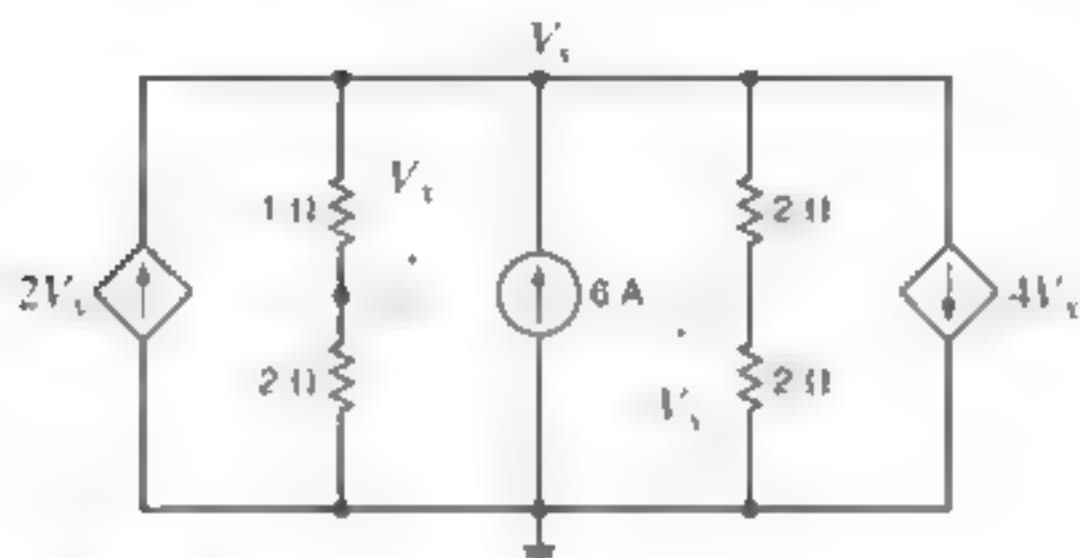


Figura P2.117

2.119 Determine a corrente I_x da rede mostrada na Fig. P2.119

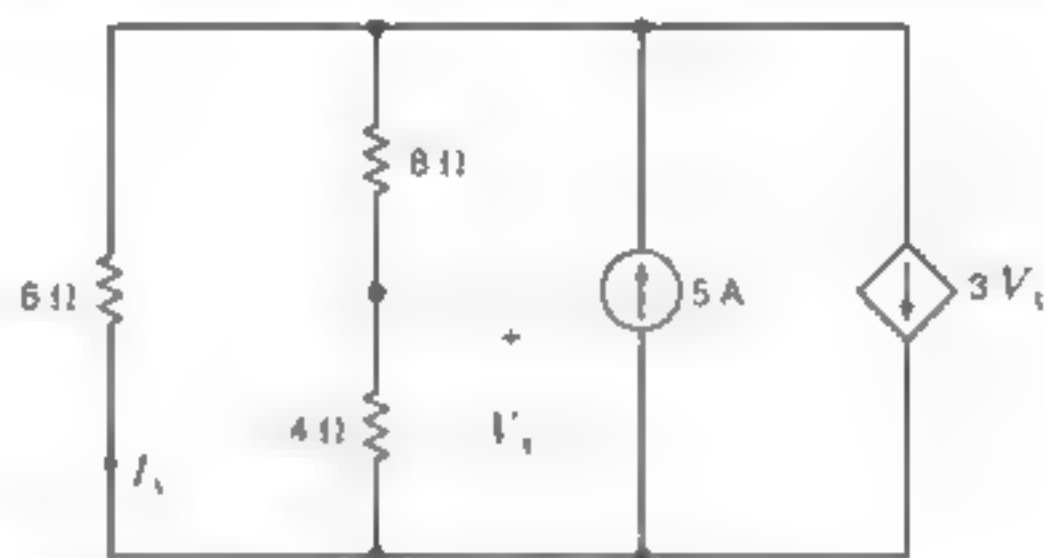


Figura P2.119

2.120 Um amplificador transistorizado típico é mostrado na Fig. P2.120. Determine o ganho do amplificador G (isto é, a relação entre suas tensões de saída e de entrada).

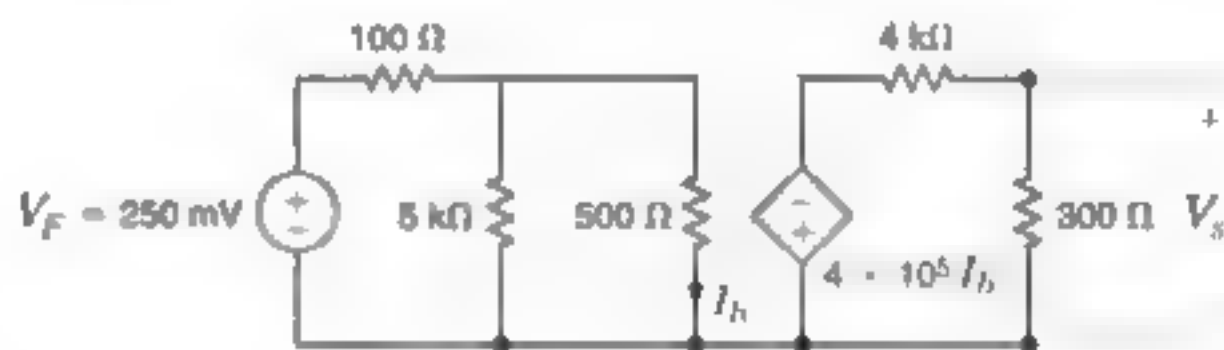


Figura P2.120

2.121 Determine o valor de k na rede mostrada na Fig. P2.121, de modo que a potência fornecida pela fonte de 6 A seja de 108 W

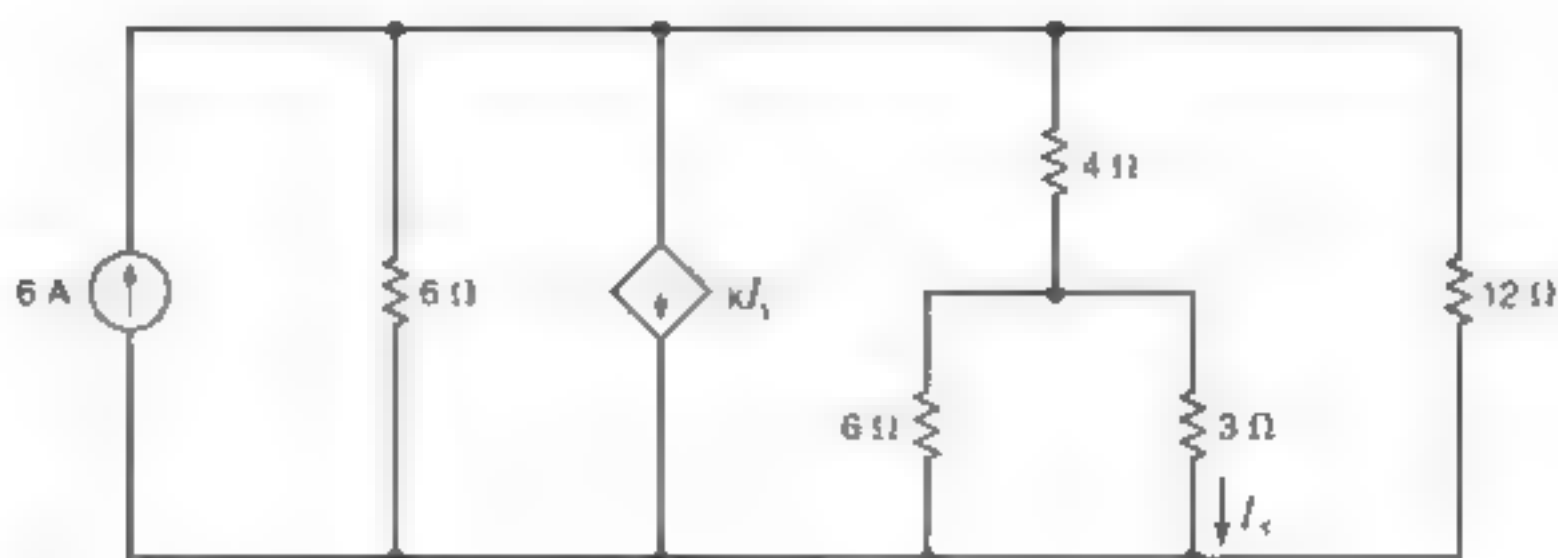


Figura P2.121

- 2.122** Determine a potência fornecida pela fonte de corrente dependente do circuito mostrado na Fig. P2.122

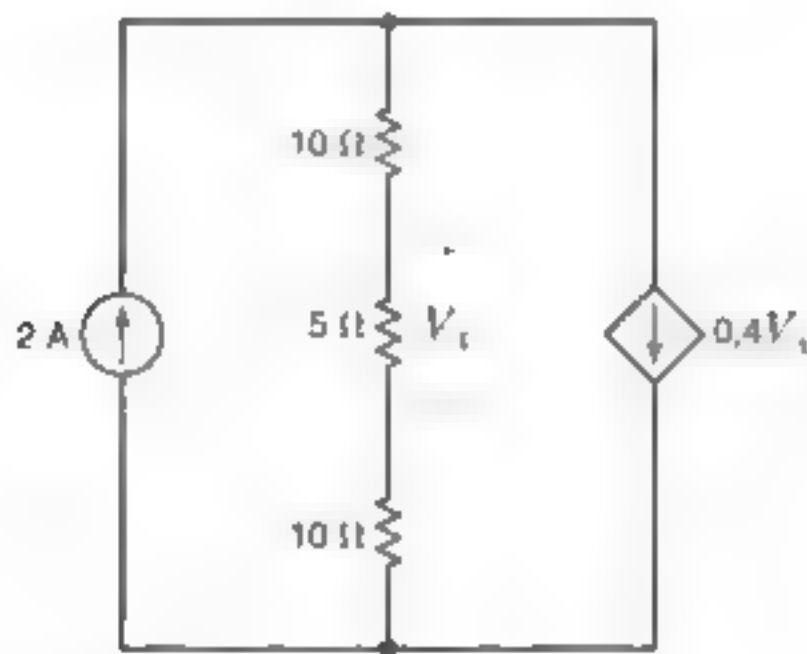


Figura P2.122

- 2.123** Se a potência absorvida pela fonte de 10 V do circuito mostrado na Fig. P2.123 é de 40 W, calcule I_F .

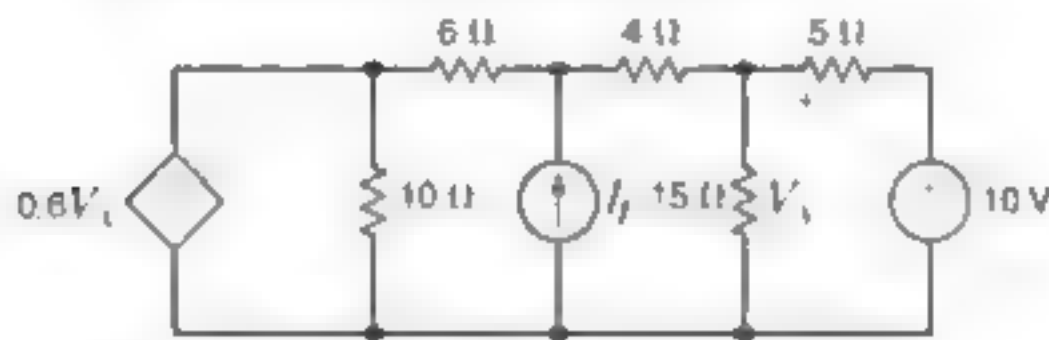


Figura P2.123

- 2.124** A potência fornecida pela fonte de corrente de 2 A do circuito mostrado na Fig. P2.124 é de 50 W. Calcule k .

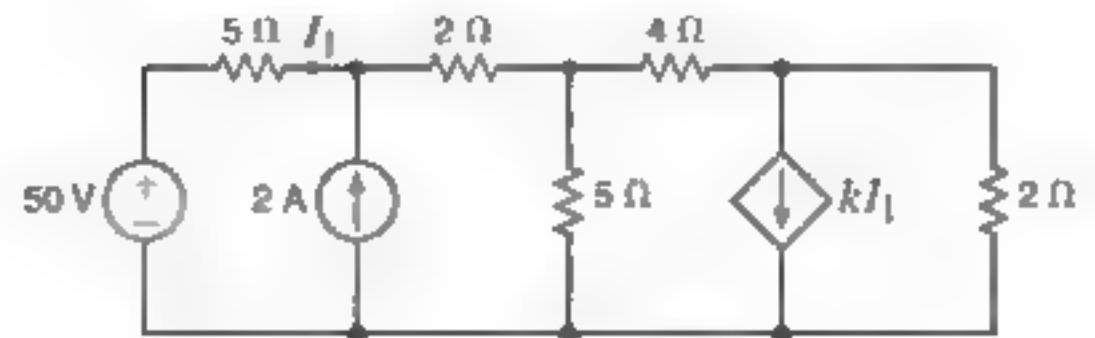


Figura P2.124

- 2.125** Dado o circuito mostrado na Fig. P2.125, determine o valor de k .

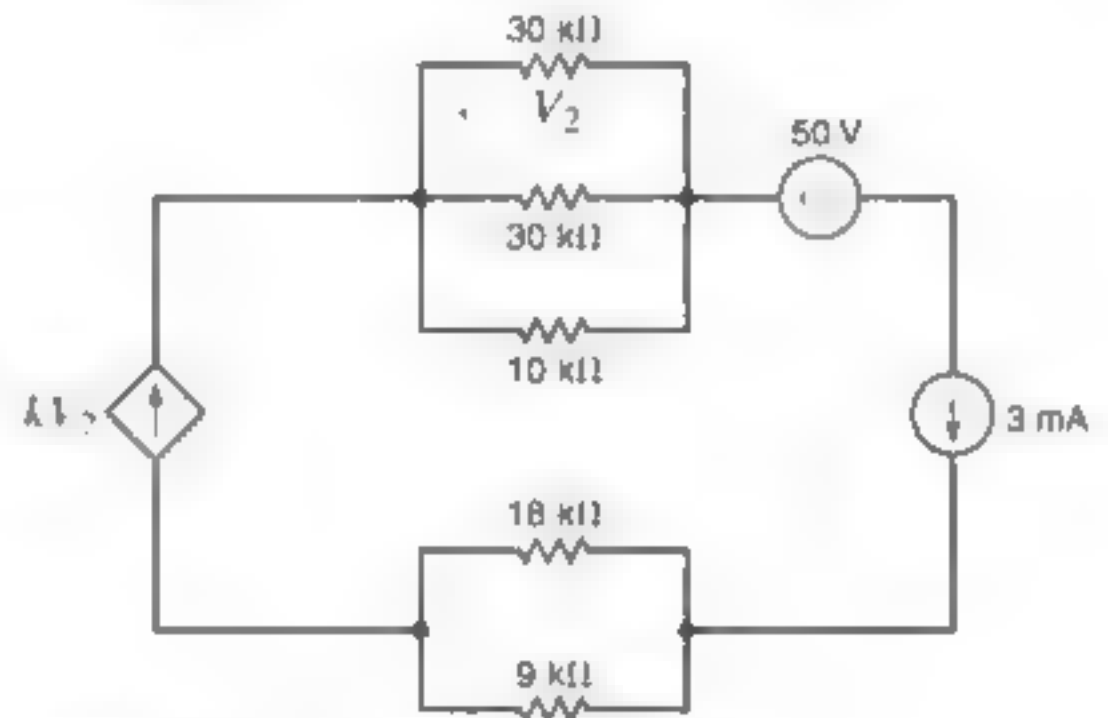


Figura P2.125

PROBLEMAS TÍPICOS DE EXAMES PROFISSIONAIS DE ENGENHARIA

- 2PEP-1** Qual é o valor da potência gerada pela fonte do circuito mostrado na Fig. 2PEP-1?

- 2,8 W
- 1,2 W
- 3,6 W
- 2,4 W

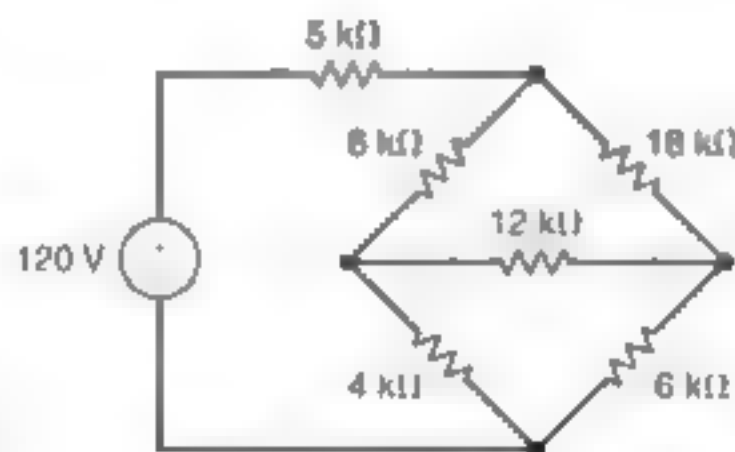


Figura 2PEP-1

- 2PEP-2** Determine a tensão V_{ab} do circuito mostrado na Fig. 2PEP-2.

- 5 V
- 10 V
- 15 V
- 10 V

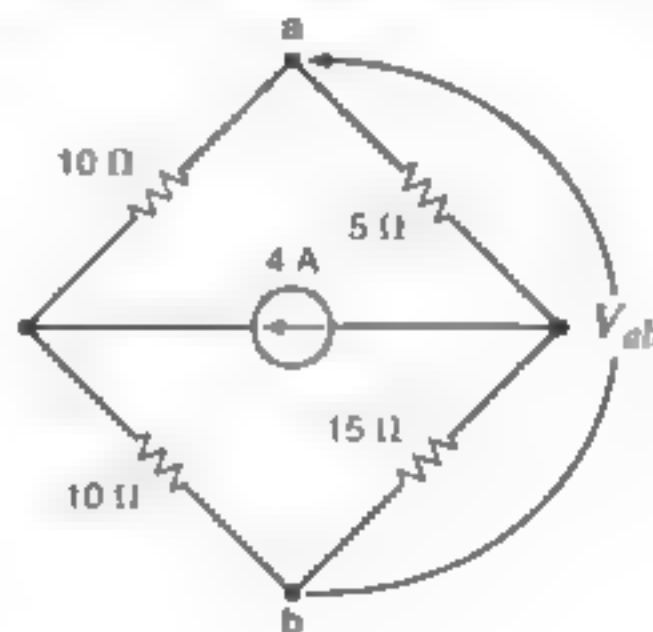


Figura 2PEP-2

- 2PEP-3** Se a resistência equivalente, R_{eq} , do circuito mostrado na Fig. 2PEP-3 vale $10,8 \Omega$, qual é o valor de R_2 ?

- 12Ω
- 20Ω
- 8Ω
- 18Ω

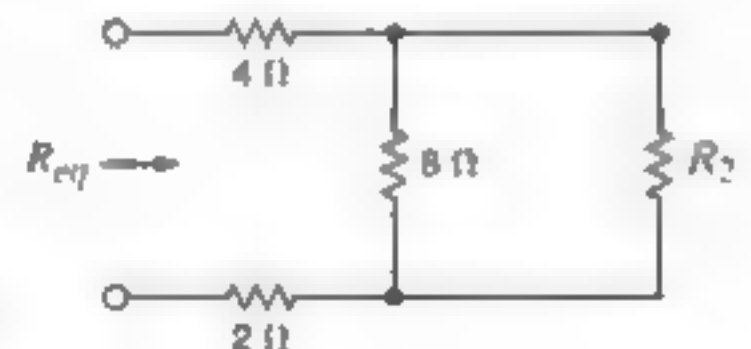


Figura 2PEP-3

- 2PEP-4** Determine a resistência equivalente do circuito mostrado na Fig. 2PEP-4 entre os terminais A-B

- $4 k\Omega$
- $12 k\Omega$
- $8 k\Omega$
- $20 k\Omega$

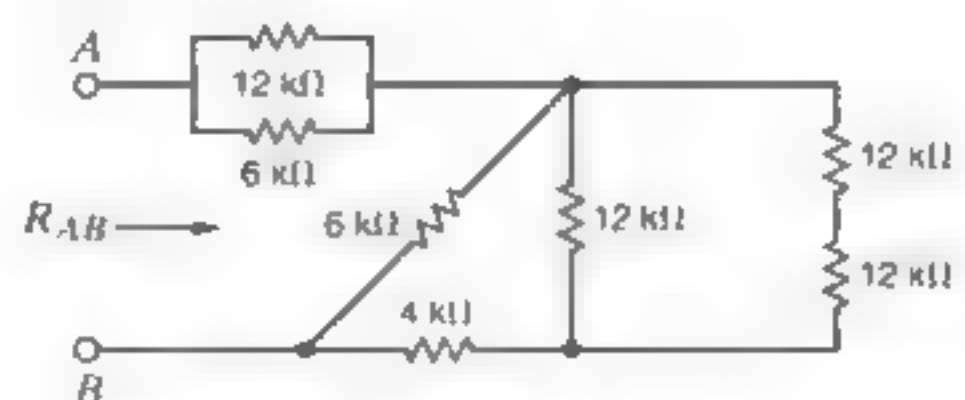


Figura 2PEP-4

2PEP-5 A fonte de 100 V da rede mostrada na Fig. 2PEP-5 está absorvendo uma potência de 50 W. Qual é o valor de R ?

- a. $17,27 \Omega$
- b. $9,42 \Omega$
- c. $19,25 \Omega$
- d. $15,12 \Omega$

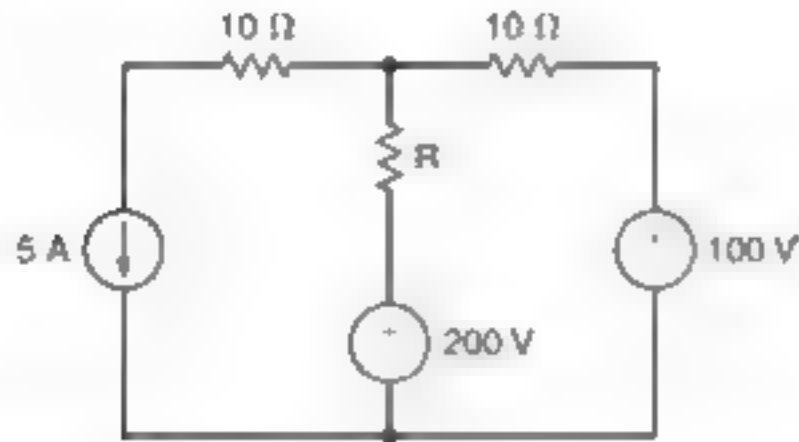


Figura 2PEP-5

2PEP-6 Determine a potência fornecida pela fonte de 40 V do circuito mostrado na Fig. 2PEP-6.

- a. 120 W
- b. 232 W
- c. 212 W
- d. 184 W

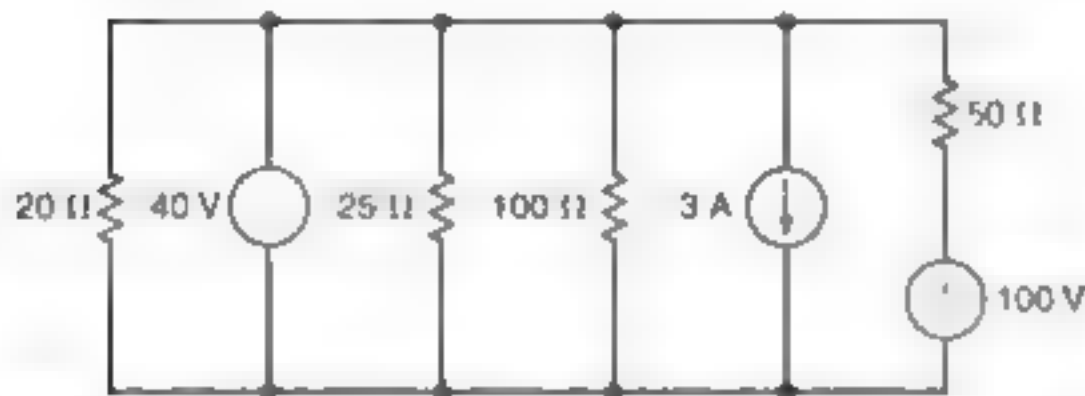


Figura 2PEP-6

2PEP-7 Qual é o valor da corrente I_x do circuito mostrado na Fig. 2PEP-7?

- a. 0,84 mA
- b. -1,25 mA
- c. 2,75 mA
- d. -0,22 mA

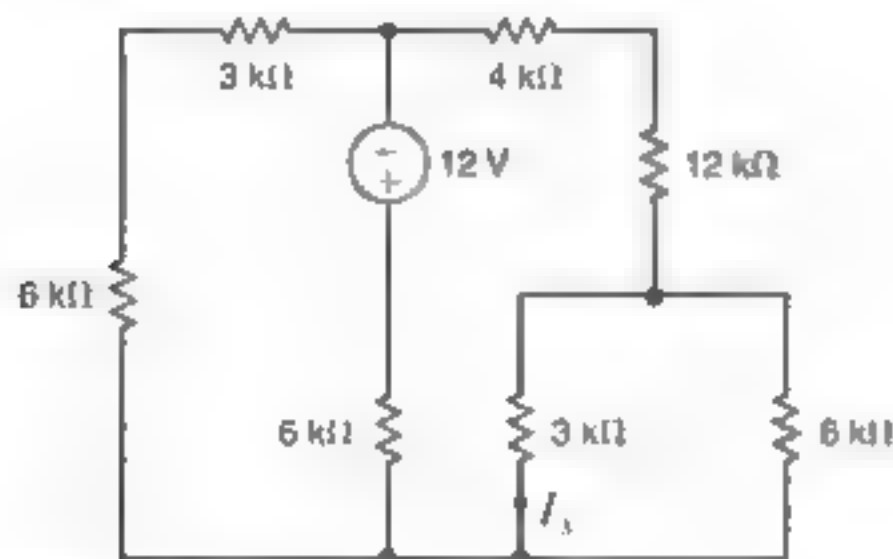


Figura 2PEP-7

2PEP-8 Determine a tensão V_x do circuito mostrado na Fig. 2PEP-8?

- a. 24 V
- b. 10 V
- c. 36 V
- d. 12 V

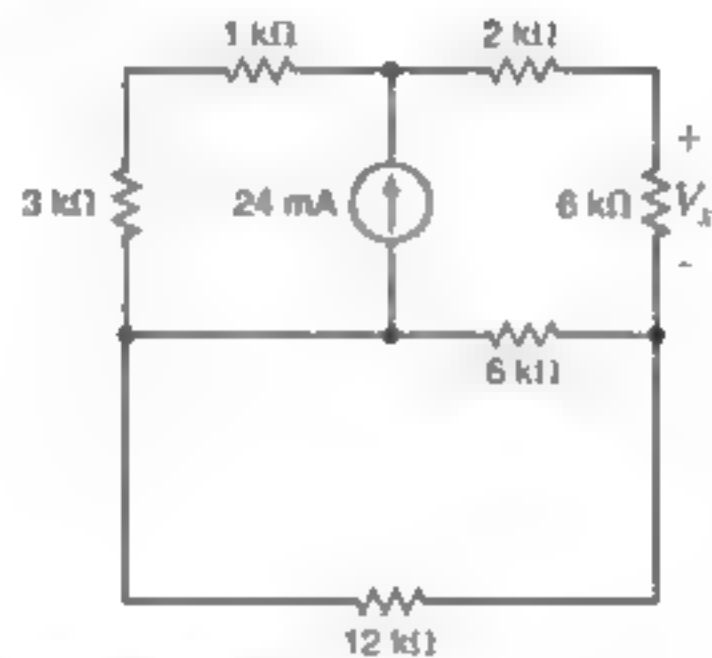


Figura 2PEP-8

2PEP-9 Qual é o valor da tensão V_x do circuito mostrado na Fig. 2PEP-9?

- a. 2 V
- b. 8 V
- c. 5 V
- d. 12 V



Figura 2PEP-9

2PEP-10 Determine a corrente I_x do circuito mostrado na Fig. 2PEP-10?

- a. $1/2$ A
- b. $5/3$ A
- c. $3/2$ A
- d. $8/3$ A

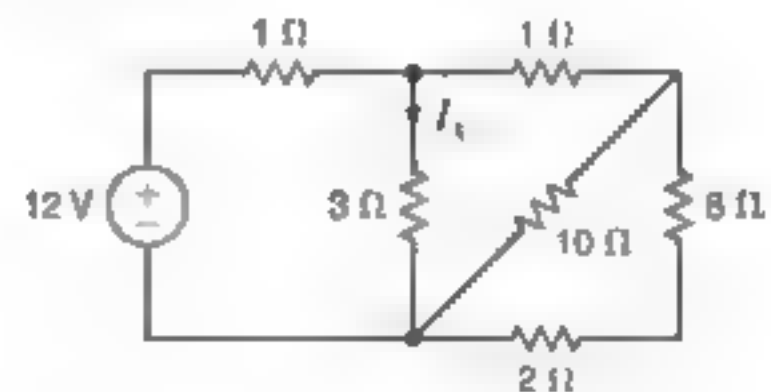


Figura 2PEP-10

TÉCNICAS DE ANÁLISE NODAL E DE LAÇOS



Cortesia de UPI/Ed Turner/Boeing/NewsCom

Boeing Dreamliner Um sonho se torna realidade; o Boeing 787 Dreamliner ampliou a faixa de operação dos grandes jatos para os aviões de dimensões médias. Uma satisfação para os viajantes usuários tanto de linhas internas quanto de linhas comerciais intercontinentais, esse avião supereficiente pode conduzir entre 210 e 330 passageiros em voos de longa distância, cobrindo rotas de 3.000 até 9.000 milhas. Utilizando prioritariamente materiais compostos, ele consegue aumentar significativamente sua eficiência, consumindo 20% menos combustível que seus competidores. Seu desenvolvimento passou por diversos estágios de projeto nos últimos seis anos. A planta final do conjunto foi aberta em 2007 no Estado de Washington, e o primeiro voo ocorreu em 2009.

Internamente a sua eficiente fuselagem, está presente o estado da arte da eletrônica. Baseado em uma arquitetura aberta, o Dreamliner possui sistemas de monitoramento de suas condições de operação, os quais permitem ao avião uma automonitoração e o registro da manutenção requerida para os sistemas de computação em terra. Uma comunicação em banda larga sem fio envia os dados com os diagnósticos em tempo real para os técnicos em terra. O objetivo é que as operações sejam mais seguras com a

AS METAS DE APRENDIZAGEM DESTE CAPÍTULO SÃO:

- Ser capaz de calcular todas as correntes e tensões em circuitos que contenham múltiplos nós e múltiplos laços
- Saber empregar a lei de Kirchhoff das correntes (LKC) para realizar a análise dos nós visando a determinação de todas as tensões nos nós de um circuito
- Saber empregar a lei de Kirchhoff das tensões (LKT) para realizar a análise dos laços visando a determinação de todas as correntes dos laços de uma rede
- Ser capaz de julgar qual das duas técnicas de análise deve ser utilizada para resolver um problema particular

previsão de eventuais problemas mecânicos e menores tempos de reparo. Um sistema ativo de alívio nas condições de rajadas de vento ou temporais que ajusta automaticamente as superfícies de controle das asas utilizando dados do sensor de turbulência no nariz do avião aumenta o controle do voo.

O projeto do Dreamliner é baseado nas leis fundamentais que conduzem a algoritmos implementados de forma mais eficiente em computadores. As duas técnicas básicas de análise de circuitos descritas nesse capítulo seguem essa mesma linha. A análise nodal é baseada no balanço de correntes que chegam e saem dos nós de um circuito. A análise de laços ou malhas é baseada no balanço dos aumentos e das reduções das tensões ao longo das trajetórias fechadas nos circuitos. Ambos os métodos seguem claramente as leis fundamentais introduzidas no Capítulo 2. Diferentemente de uma análise ramo por ramo que fornece um grande número de equações simples, esses dois métodos utilizam a topologia de rede para fornecer um número mínimo de equações. Exatamente como o Dreamliner se tornou superior aos seus antecessores em eficiência e faixa de operação, essas técnicas, com um procedimento bem ordenado e sequencial, permitem a manipulação simples de circuitos lineares mais complexos.

3.1 Análise Nodal

Na análise nodal, as variáveis de um circuito são selecionadas como as tensões nos nós. Essas tensões são definidas em relação a um ponto comum do circuito, isto é, um dos nós é selecionado como nó de referência e todas as tensões relacionadas aos demais nós são definidas relativamente àquele nó. É muito frequente que esse nó de referência seja o nó ao qual é conectado o maior número de ramos do circuito. Normalmente, ele é chamado de *nó terra* ou simplesmente *terra*, uma vez que é considerado como o nó com potencial nulo e, algumas vezes, representa o chassi ou a linha do terra em um circuito real.

As variáveis serão selecionadas como positivas em relação ao nó de referência. Se uma ou mais das tensões dos nós forem, na realidade, negativas relativamente ao nó de referência, a análise assim o indicará.

Para que se compreenda a importância de se conhecer todas as tensões nodais em um circuito, considera-se, uma vez mais, o circuito mostrado na Fig. 2.32, que é feito na Fig. 3.1. As tensões, V_F , V_a , V_b e V_c , são todas medidas relativamente ao nó inferior, o qual é selecionado como referência e identificado pelo símbolo terra \perp . Portanto, a tensão no nó 1 é $V_F = 12$ V em relação ao nó de referência 5; a tensão no nó 2 é $V_a = 3$ V em relação ao nó de referência 5, e assim por diante. Observe cuidadosamente que, uma vez conhecidas essas tensões, pode-se de imediato calcular a corrente em qualquer ramo ou a potência fornecida ou absorvida por qualquer componente, uma vez que a tensão entre os terminais de cada componente do circuito é conhecida. Por exemplo, a tensão V_1 entre os terminais do resistor de $9\text{ k}\Omega$ mais à esquerda será igual à diferença entre o potencial das duas extremidades do resistor, isto é,

$$\begin{aligned} V_1 &= V_F - V_a \\ &= 12 - 3 \\ &= 9\text{ V} \end{aligned}$$

Essa equação nada mais é do que a aplicação da LKT ao longo do laço mais à esquerda, isto é,

$$-V_F + V_1 + V_a = 0$$

De forma similar, obtém-se

$$V_F - V_a - V_b = 0$$

e

$$V_a - V_b - V_c = 0$$

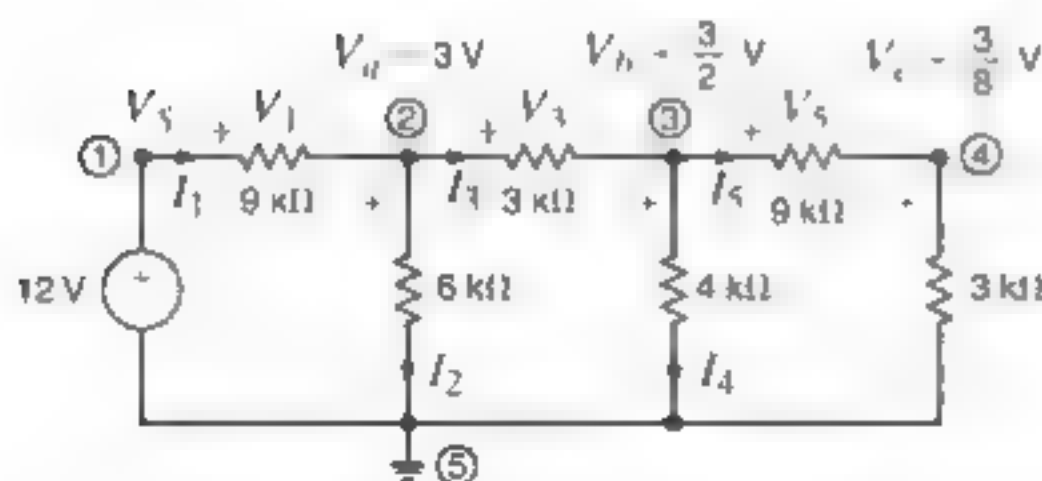


Figura 3.1 Circuito com as tensões nodais conhecidas.

Assim, as correntes relativas aos resistores são

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{V_1}{9\text{ k}} = \frac{V_F - V_a}{9\text{ k}} \\ I_3 &= \frac{V_3}{3\text{ k}} = \frac{V_a - V_b}{3\text{ k}} \\ I_5 &= \frac{V_5}{9\text{ k}} = \frac{V_b - V_c}{9\text{ k}} \end{aligned}$$

E, também,

$$\begin{aligned} I_2 &= \frac{V_a}{6\text{ k}} = \frac{0}{6\text{ k}} \\ I_4 &= \frac{V_b}{4\text{ k}} = \frac{0}{4\text{ k}} \end{aligned}$$

uma vez que o nó 5 de referência possui potencial nulo.

Assim, como regra geral, pode-se afirmar que, quando são conhecidas as tensões nos nós de um circuito, pode-se calcular a corrente por qualquer componente resistivo utilizando a lei de Ohm; isto é,

$$i = \frac{V_m - V_N}{R} \quad 3.1$$

conforme ilustrado na Fig. 3.2.

Uma vez demonstrada a importância de se conhecer as tensões em todos os nós de um circuito, passa-se a determinar o procedimento por meio do qual elas serão calculadas. Em uma análise nodal, as equações da LKC são empregadas de modo que as variáveis contidas nessas equações sejam as tensões incógnitas nos nós do circuito. Conforme mencionado anteriormente, um dos nós em um circuito com N nós é selecionado como nó de referência, e as tensões em todos os demais $N - 1$ nós são medidas relativamente a esse nó de referência. Utilizando a topologia do circuito, pode-se mostrar que a aplicação da LKC fornece exatamente as $N - 1$ equações linearmente independentes necessárias para se determinar as $N - 1$ tensões incógnitas nos nós. Portanto, teoricamente, uma vez selecionado um dos nós de um circuito com N nós como nó de referência, a tarefa a ser realizada limita-se a identificar os $N - 1$ nós remanescentes e a escrever uma equação, oriunda da LKC, para cada um deles.

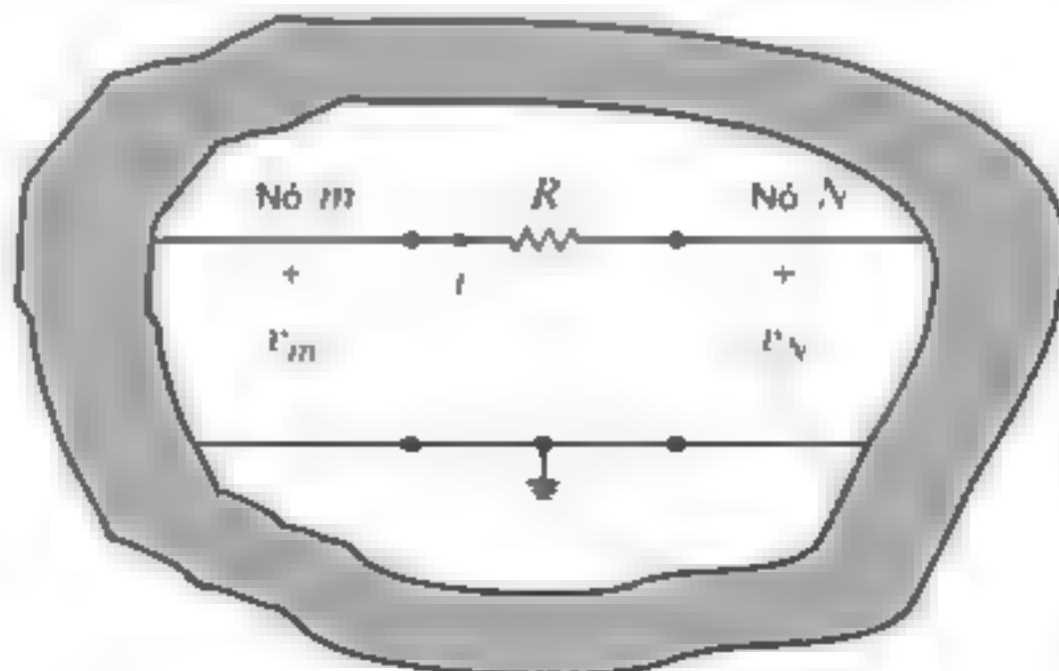


Figura 3.2 Circuito utilizado para ilustrar a aplicação da lei de Ohm em um circuito com múltiplos nós.

Em um circuito com múltiplos nós, esse processo resulta em um conjunto de $N - 1$ equações simultâneas linearmente independentes, nas quais as variáveis incógnitas são as $N - 1$ tensões nos nós. De modo a auxiliar a consolidação dessa ideia, considere, uma vez mais, o Exemplo 2.5. Observe que nesse circuito apenas quatro das cinco equações oriundas da LKC (uma para cada nó daquele circuito de cinco nós) são linearmente independentes. Além disso, muitas das correntes dos ramos nesse exemplo (essas não passando por uma fonte) podem ser escritas em termos das tensões nos nós, conforme ilustrado na Fig. 3.2 e expressas na Eq. (3.1). É dessa maneira, conforme será ilustrado na próxima seção, que as equações provenientes da aplicação da LKC contêm as tensões incógnitas dos nós.

É interessante utilizar a análise nodal examinando vários tipos diferentes de circuitos e destacando os aspectos mais importantes de cada um deles. Começa-se com o caso mais simples. Contudo, como preliminar da discussão dos detalhes da análise nodal, a experiência mostra que é importante se assegurar de que o conceito de tensão nodal está bem compreendido.

De início, é importante especificar uma referência. Por exemplo, afirmar que a tensão no nó A é de 12 V não significa nada, a menos que se estabeleça um ponto de referência; ou seja, a tensão no nó A é de 12 V em relação a que ponto? O circuito mostrado na Fig. 3.3 ilustra uma parte de uma rede que contém três nós, um dos quais é o nó de referência.

A tensão $V_1 = 4$ V é a tensão no nó 1 em relação ao nó de referência 3. Analogamente, a tensão $V_2 = -2$ V é a tensão no nó 2 em relação ao nó 3. Da mesma forma, a tensão no nó 1 em relação ao nó 2 é de +6 V e a tensão no nó 2 em relação ao nó 1 é de -6 V. Além disso, uma vez que a corrente flui do nó de potencial mais alto para o nó de potencial mais baixo, a corrente em R_1 é direcionada da parte superior para a parte inferior do circuito, a corrente em R_2 é orientada da esquerda para a direita e a corrente em R_3 tem sua orientação de baixo para cima.

Esses conceitos apresentam importantes ramificações no cotidiano de nossas vidas. Se um homem fosse se pendurar em pleno ar com uma de suas mãos em uma linha de alta tensão e com a outra em outra linha, e a tensão CC em cada linha fosse exatamente a mesma, a tensão que passaria por seu coração seria nula e ele estaria seguro. Entretanto, se ele largasse uma das linhas e colocasse seus pés no chão, passaria a existir uma tensão CC entre sua mão e seus pés passando, portanto, por seu coração. Ele provavelmente morreria no instante em que seus pés tocassem o chão.

Em uma determinada cidade, um homem tentou resgatar seu periquito que escapou da gaiola e pousou sobre uma linha de alta tensão. Ele subiu uma escada metálica e, com uma barra

também metálica, tentou resgatar o periquito; quando a barra metálica tocou a linha de alta tensão, o homem morreu instantaneamente. A energia elétrica é vital na vida moderna, porém também muito perigosa. O material apresentado neste livro não o qualifica para o seu manuseio com segurança. Portanto, seja sempre extremamente cuidadoso quando estiver próximo dos circuitos elétricos.

Agora, para iniciar a discussão sobre a análise nodal, o procedimento aqui adotado começa com casos simples e prossegue de forma sistemática para os casos mais desafiadores. Numerosos exemplos serão utilizados como meio para se demonstrar cada aspecto deste procedimento. Finalmente, ao término desta seção, será apresentada uma estratégia de abordagem para qualquer circuito utilizando a análise nodal.

CIRCUITOS CONTENDO APENAS FONTES DE CORRENTE INDEPENDENTES

Considere o circuito mostrado na Fig. 3.4. Observe que esse circuito possui três nós e, portanto, para se determinar as $N - 1 = 2$ tensões incógnitas nos nós serão necessárias exatamente $N - 1 = 3 - 1 = 2$ equações linearmente independentes da LKC. Inicialmente, seleciona-se o nó inferior como nó de referência e, em seguida, as tensões nos dois nós remanescentes, designadas por v_1 e v_2 , serão medidas relativamente a esse nó.

Admite-se que as correntes nos ramos estejam fluindo nos sentidos indicados na figura. Caso uma ou mais das correntes esteja, na realidade, fluindo no sentido oposto ao assumido, a análise simplesmente indicará uma corrente negativa.

A aplicação da LKC ao nó 1 fornece

$$i_1 - i_2 + i_3 = 0$$

[atenção]

Emprego da convenção passiva de sinais.

Utilizando a lei de Ohm ($i = Gv$) e notando que o nó de referência possui um potencial nulo, obtém-se

$$i_A + G_1(v_1 - 0) + G_2(v_1 - v_2) = 0$$

III

$$(G_1 + G_2)v_1 - G_2v_2 = i_A$$

A LKC aplicada ao nó 2 fornece

$$i_2 - i_B + i_3 = 0$$

ou

$$G_2(v_1 - v_2) - i_B + G_3v_2 = 0 \quad (4)$$

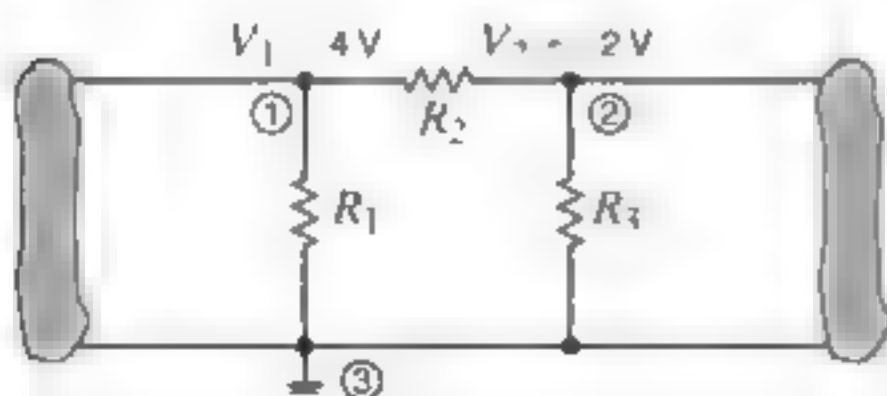


Figura 3.3 Ilustração das tensões nodais.

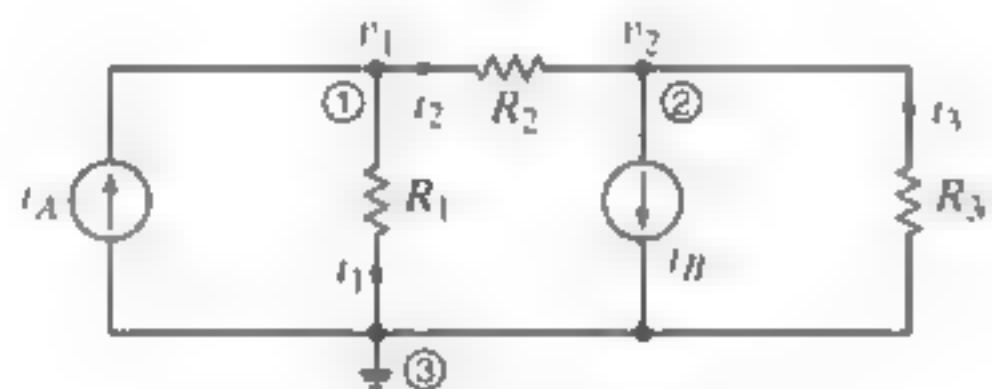


Figura 3.4 Circuito com três nós.

que pode ser expressa como

$$-G_2 v_1 + (G_2 + G_3) v_2 = -i_B$$

Portanto, as duas equações para as duas tensões nodais incógnitas v_1 e v_2 são

$$\begin{aligned} (G_1 + G_2) v_1 - G_2 v_2 &= i_A \\ -G_2 v_1 + (G_2 + G_3) v_2 &= -i_B \end{aligned} \quad 3.2$$

Observe que a análise produziu duas equações simultâneas envolvendo as incógnitas v_1 e v_2 . Essas equações podem ser resolvidas utilizando qualquer técnica conveniente, e as calculadoras modernas e os computadores pessoais são equipamentos muito eficientes para essa aplicação.

No que se segue, serão mostradas as três técnicas de solução de um conjunto de equações simultâneas linearmente independentes: eliminação gaussiana, análise matricial e o programa matemático MATLAB. Uma breve recordação que ilustra o uso da eliminação gaussiana e da análise matricial na solução dessas equações é apresentada no material Problem-Solving Companion disponível para esse texto. O uso do programa MATLAB é direto e será mostrado nas discussões das aplicações.

EXEMPLO 3.1

Suponha que o circuito mostrado na Fig. 3.4 possua os seguintes parâmetros $I_A = 1$ mA, $R_1 = 12$ k Ω , $R_2 = 6$ k Ω , $I_B = 4$ mA e $R_3 = 6$ k Ω . Determine todas as tensões nodais e as correntes dos ramos.

SOLUÇÃO

Para efeito de ilustração, esse problema será resolvido utilizando eliminação gaussiana, análise matricial e o programa MATLAB. Substituindo os valores dos parâmetros na Eq. (3.2), tem-se

$$\begin{aligned} v_1 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 12\text{k} & 6\text{k} \end{bmatrix} + v_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 6\text{k} \end{bmatrix} &= 1 \times 10^{-3} \\ v_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 6\text{k} \end{bmatrix} + v_2 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 6\text{k} & 6\text{k} \end{bmatrix} &= 4 \times 10^{-3} \end{aligned}$$

em que as letras maiúsculas foram empregadas na representação das tensões pelo fato de serem constantes. As equações podem, assim, ser escritas como

$$\begin{aligned} \frac{v_1}{4\text{k}} - \frac{v_2}{6\text{k}} &= 1 \times 10^{-3} \\ -\frac{v_1}{6\text{k}} + \frac{v_2}{3\text{k}} &= -4 \times 10^{-3} \end{aligned}$$

Utilizando a eliminação gaussiana, explicita-se V_1 em função de V_2 na primeira equação, isto é,

$$v_1 = v_2 \left(\frac{2}{3} \right) + 4$$

As equações da LKC para os nós 1 e 2 geraram as seguintes duas equações simultâneas linearmente independentes:

$$\begin{aligned} i_A + i_1 + i_2 &= 0 \\ i_2 + i_B + i_3 &= 0 \end{aligned}$$

A equação da LKC para o terceiro nó (referência) é

$$-i_1 - i_2 - i_B - i_3 = 0$$

Note que se as duas primeiras equações forem somadas, será obtida a terceira. Além disso, quaisquer duas das equações podem ser utilizadas para se obter a equação remanescente. Portanto, nesse circuito com $N = 3$ nós, apenas $N - 1 = 2$ das equações são linearmente independentes e necessárias para se determinar as $N - 1 = 2$ tensões nodais incógnitas.

Observe também que a análise nodal emprega a LKC conjugada com a lei de Ohm. Uma vez que o sentido das correntes nos ramos foi *assumido*, então, a lei de Ohm, conforme ilustrada pela Fig. 3.2 e expressa pela Eq. (3.1), é utilizada para expressar as correntes dos vários ramos do circuito em função das tensões nodais incógnitas. Pode-se admitir que as correntes estejam em qualquer sentido. Entretanto, uma vez admitido um sentido particular, deve-se tomar o cuidado de escrever corretamente as correntes em função das tensões nodais utilizando a lei de Ohm.

Este valor é então substituído na segunda equação, que fornece

$$\frac{-1}{6\text{k}} \left(\frac{2}{3} V_2 + 4 \right) + \frac{V_2}{3\text{k}} = -4 \times 10^{-3}$$

ou

$$V_2 = 15 \text{ V}$$

Esse valor de V_2 é agora substituído na equação de V_1 em função de V_2 , fornecendo

$$\begin{aligned} v_1 &= \frac{2}{3} V_2 + 4 \\ &= -6 \text{ V} \end{aligned}$$

As equações do circuito podem também ser resolvidas utilizando a análise matricial. A forma geral da equação matricial é

$$\mathbf{GV} = \mathbf{I}$$

em que, neste caso,

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4\text{k}} & -\frac{1}{6\text{k}} \\ -\frac{1}{6\text{k}} & \frac{1}{3\text{k}} \end{bmatrix}, \mathbf{V} = \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix}, \text{ e } \mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 \times 10^{-3} \\ -4 \times 10^{-3} \end{bmatrix}$$

A solução da equação matricial é

$$\mathbf{V} = \mathbf{G}^{-1}\mathbf{I}$$

e, portanto,

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4\text{k}} & -\frac{1}{6\text{k}} \\ -\frac{1}{6\text{k}} & \frac{1}{3\text{k}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \times 10^{-3} \\ -4 \times 10^{-3} \end{bmatrix}$$

Para calcular a inversa da matriz \mathbf{G} , precisa-se de sua adjunta e de seu determinante. A adjunta é

$$\text{Adj } \mathbf{G} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3\text{k} & 6\text{k} \\ \frac{1}{6\text{k}} & \frac{1}{4\text{k}} \end{bmatrix}$$

e o determinante vale

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3\text{k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 4\text{k} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 6\text{k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 6\text{k} \end{pmatrix} = \frac{1}{18\text{k}^2}$$

Portanto,

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = 18\text{k}^2 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3\text{k} & 6\text{k} \\ \frac{1}{6\text{k}} & \frac{1}{4\text{k}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \times 10^{-3} \\ -4 \times 10^{-3} \end{bmatrix}$$

$$18\text{k}^2 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3\text{k} & 6\text{k} \\ \frac{1}{6\text{k}} & \frac{1}{4\text{k}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 15 \end{bmatrix}$$

Conhecendo-se as tensões nos nós, todas as correntes podem ser determinadas utilizando a lei de Ohm, isto é,

$$I_1 = \frac{V_1}{R_1} = \frac{6}{12\text{k}} = \frac{1}{2} \text{ mA}$$

$$I_2 = \frac{V_1 - V_2}{6\text{k}} = \frac{6 - 15}{6\text{k}} = -\frac{3}{2} \text{ mA}$$

e

$$I_3 = \frac{V_2}{6\text{k}} = \frac{15}{6\text{k}} = \frac{5}{2} \text{ mA}$$

A Fig. 3.5 ilustra os resultados de todos os cálculos. Note que a LKC é atendida em cada nó.

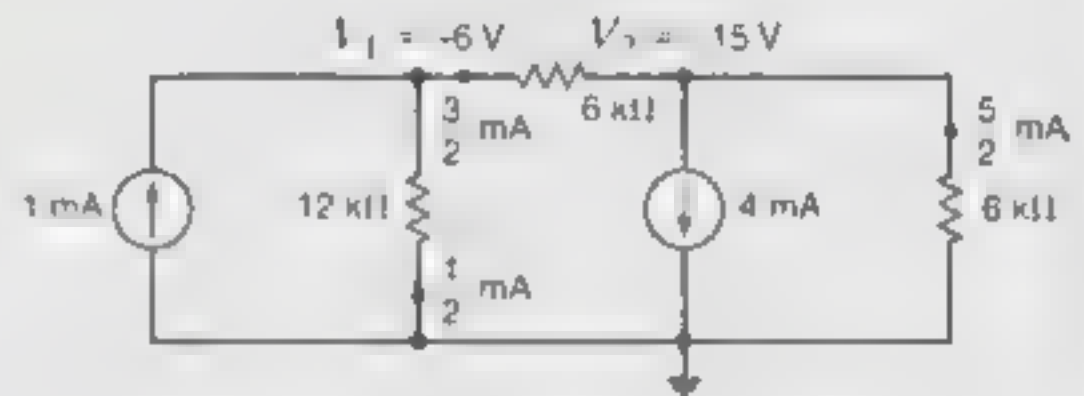


Figura 3.5 Circuito utilizado no Exemplo 3.1.

Analisa-se agora o circuito mostrado na Fig. 3.6. O sentido das correntes é admitido conforme indicado na figura.

Nota-se que esse circuito possui quatro nós. O nó na parte inferior do circuito é selecionado como nó de referência e nele é representado o símbolo do terra. Como $N = 4$, serão necessárias $N - 1 = 3$ equações linearmente independentes, provenientes da LKC, para se determinar as três tensões nodais incógnitas, designadas por v_1 , v_2 e v_3 .

Para o nó 1, a LKC fornece

$$i_1 + i_2 - i_3 = 0$$

ou

$$\frac{v_1}{R_1} + \frac{v_1 - v_2}{R_2} - \frac{v_1}{R_3} = 0$$

$$v_1 \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_3} \right) - \frac{v_2}{R_2} = 0$$

Para o nó 2, a LKC fornece

$$i_3 + i_4 - i_5 = 0$$

ou

$$\frac{v_1 - v_2}{R_2} + \frac{v_2}{R_4} - \frac{v_2 - v_3}{R_5} = 0$$

$$-\frac{v_1}{R_2} + v_2 \left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_4} - \frac{1}{R_5} \right) + \frac{v_3}{R_5} = 0$$

Para o nó 3, a equação fica

$$i_5 + i_6 - i_7 = 0$$

ou

$$\frac{v_2 - v_3}{R_5} + \frac{v_3}{R_6} - \frac{v_3}{R_7} = 0$$

$$v_2 \frac{1}{R_5} - v_3 \frac{1}{R_5} + v_3 \left(\frac{1}{R_6} - \frac{1}{R_7} \right) = 0$$

Agrupando as equações dos três nós, obtém-se

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_3} & -\frac{1}{R_2} & 0 \\ -\frac{1}{R_2} & \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_4} - \frac{1}{R_5} & \frac{1}{R_5} \\ 0 & \frac{1}{R_5} & \frac{1}{R_6} - \frac{1}{R_7} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ i_7 \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

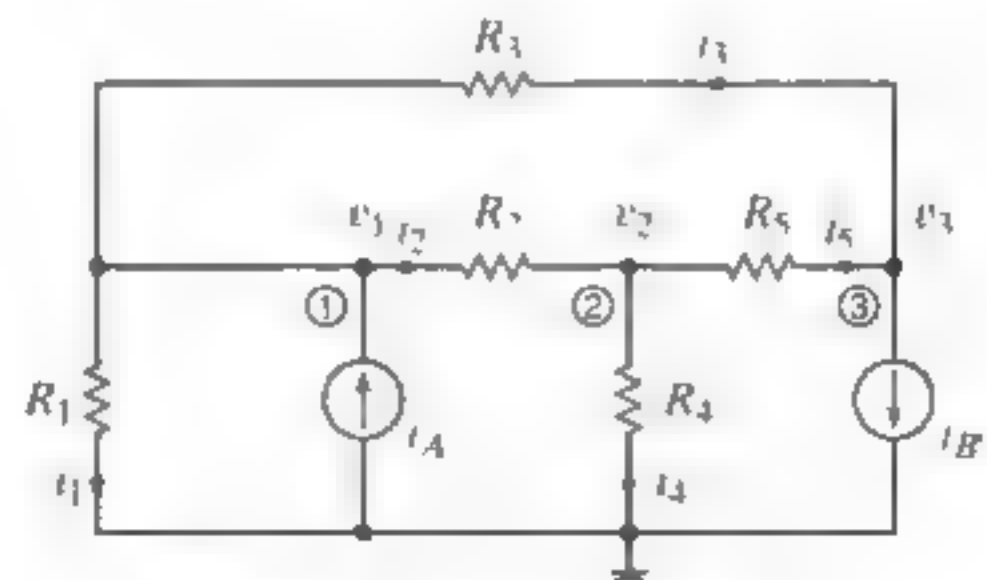


Figura 3.6 Circuito com quatro nós.

Note que essa análise produzirá três equações simultâneas com três tensões nodais incógnitas v_1 , v_2 e v_3 . As equações podem também ser escritas na forma matricial como

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{R} + \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} & -\frac{1}{R_1} & -\frac{1}{R_2} \\ -\frac{1}{R_1} & \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} & -\frac{1}{R_4} \\ -\frac{1}{R_2} & -\frac{1}{R_4} & \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i_A \\ 0 \\ -i_B \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

Nesse ponto, é importante observar a forma simétrica das equações que descrevem os dois circuitos anteriores. As Eqs. (3.2) e (3.3) apresentam o mesmo tipo de forma simétrica. A matriz G para cada um dos circuitos é uma matriz simétrica. Essa simetria não é casual. As equações nodais para circuitos que contêm apenas resistores e fontes de corrente independentes podem sempre ser escritas nessa forma simétrica. Pode-se tirar vantagem desse fato e aprender a escrever as equações por inspeção. Note que na primeira das Equações (3.2) o coeficiente de v_1 é a soma de todas as condutâncias conectadas ao nó 1 e o coeficiente de v_2 é o negativo das condutâncias conectadas en-

tre os nós 1 e 2. O lado direito da equação é a soma das correntes que entram no nó 1 e passam pelas fontes de corrente. Essa equação é a LKC aplicada ao nó 1. Na segunda das Equações (3.2), o coeficiente de v_2 é a soma de todas as condutâncias conectadas ao nó 2, o coeficiente de v_1 é o negativo da condutância conectada entre os nós 2 e 1, e o lado direito da equação é a soma das correntes que entram no nó 2 e passam pelas fontes de corrente. Essa equação é a LKC aplicada ao nó 2. Analogamente, na primeira das Equações (3.3) o coeficiente de v_1 é a soma das condutâncias conectadas ao nó 1, o coeficiente de v_2 é o negativo da condutância conectada entre os nós 1 e 2, o coeficiente de v_3 é o negativo da condutância conectada entre os nós 1 e 3, e o lado direito da equação é a soma das correntes que entram no nó 1 e passam pelas fontes de corrente. As duas outras equações em (3.3) são obtidas de forma similar. Em geral, se a LKC é aplicada ao nó j cuja tensão nodal é v_j , o coeficiente de v_j é a soma de todas as condutâncias conectadas ao nó j e os coeficientes das demais tensões nodais (por exemplo, v_{j-1} , v_{j+1}) são iguais ao valor negativo da soma das condutâncias conectadas diretamente entre esses nós e o nó j . O lado direito da equação é igual à soma das correntes que entram no nó pelas fontes de corrente. Portanto, o lado esquerdo da equação representa a soma das correntes que saem do nó j e o lado direito da equação representa as correntes que entram no nó j .

EXEMPLO 3.2

Seja a aplicação do que acaba de ser aprendido para escrever as equações referentes ao circuito mostrado na Fig. 3.7 por inspeção. Assim, com os parâmetros fornecidos a seguir, são determinadas as tensões nodais utilizando o programa MATLAB. Considere $R_1 = R_2 = 2 \text{ k}\Omega$, $R_3 = R_4 = 4 \text{ k}\Omega$, $R_5 = 1 \text{ k}\Omega$, $i_A = 4 \text{ mA}$ e $i_B = 2 \text{ mA}$.

SOLUÇÃO

As equações são

$$v_1 \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R_1} \right) - v_2 \left(\frac{1}{R_1} \right) - v_3 \left(\frac{1}{R_2} \right) = -i_A$$

$$i_A(0) + v_2 \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_3} \right) - v_3 \left(\frac{1}{R_4} \right) = i_A - i_B$$

$$-i \left(\frac{1}{R} \right) - i \left(\frac{1}{R_1} \right) + i \left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_5} \right) = 0$$

que podem também ser escritas diretamente na forma matricial como

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{R} + \frac{1}{R_1} & 0 & -\frac{1}{R_2} \\ 0 & \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_3} & -\frac{1}{R_4} \\ -\frac{1}{R} & -\frac{1}{R_1} & \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -i_A \\ i_A - i_B \\ 0 \end{bmatrix}$$

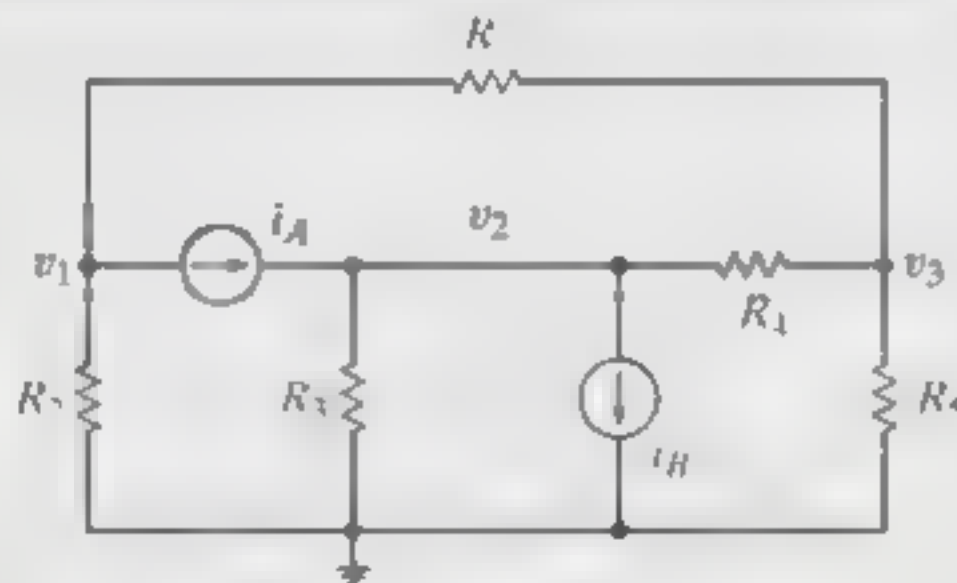


Figura 3.7 Circuito utilizado no Exemplo 3.2.

Tanto as equações quanto a matriz G apresentam a simetria que sempre está presente nos circuitos que contêm apenas elementos resistivos e fontes de corrente.

Se os valores dos componentes forem agora utilizados, a equação matricial fica

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2k} + \frac{1}{2k} & 0 & -\frac{1}{2k} \\ 0 & \frac{1}{4k} + \frac{1}{4k} & -\frac{1}{4k} \\ -\frac{1}{2k} & -\frac{1}{4k} & \frac{1}{2k} + \frac{1}{4k} + \frac{1}{1k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,004 \\ 0,002 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ou

$$\begin{bmatrix} 0,001 & 0 & -0,0005 \\ 0 & 0,0005 & 0,00025 \\ -0,0005 & -0,00025 & 0,00175 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,004 \\ 0,002 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Essa equação está na forma $Gv = i$. Portanto, $v = G^{-1}i$. Realizando essa operação obtém-se as seguintes tensões:

$$v_1 = -4,3636 \text{ V}$$

$$v_2 = 3,6364 \text{ V}$$

$$v_3 = 0,7273 \text{ V}$$

Avaliação do Aprendizado

E3.1 Escreva as equações referentes aos nós do circuito mostrado na Fig. E3.1.

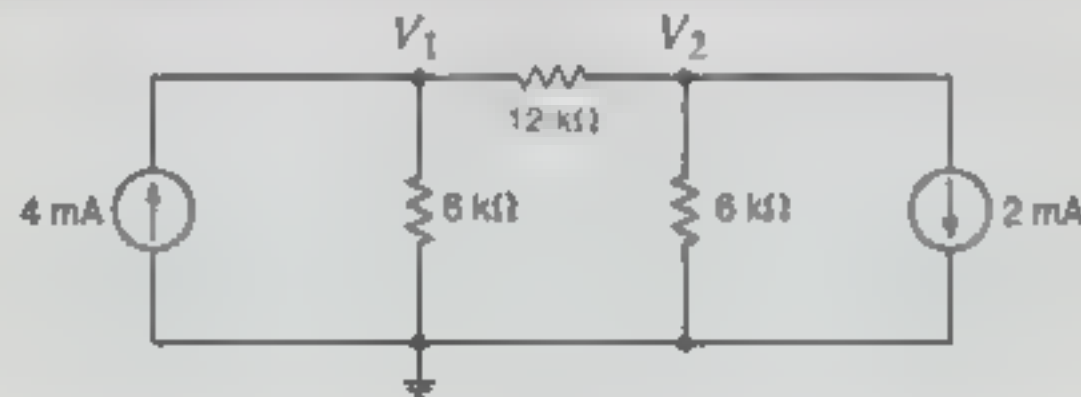


Figura E3.1

RESPOSTAS:

$$\frac{1}{4k} v_1 - \frac{1}{12k} v_2 = 4 \times 10^{-3},$$

$$-\frac{1}{12k} v_1 + \frac{1}{4k} v_2 = -2 \times 10^{-3},$$

E3.2 Determine todas as tensões nodais do circuito mostrado na Fig. E3.2 utilizando o programa MATLAB.

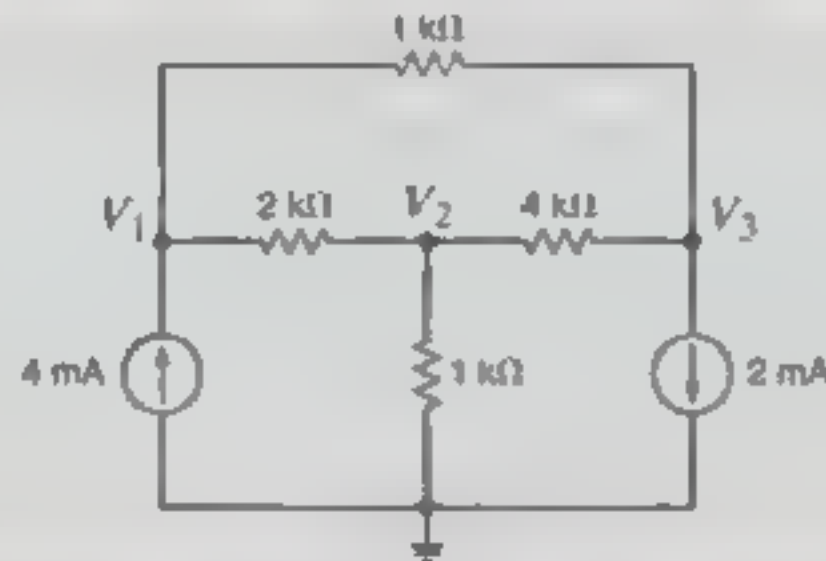


Figura E3.2

RESPOSTAS: $V_1 = 5,4286 \text{ V}$,

$V_2 = 2,000 \text{ V}$,

$V_3 = 3,1429 \text{ V}$.

E3.3 Utilize a análise nodal para obter a tensão V_x do circuito mostrado na Fig. E3.3.

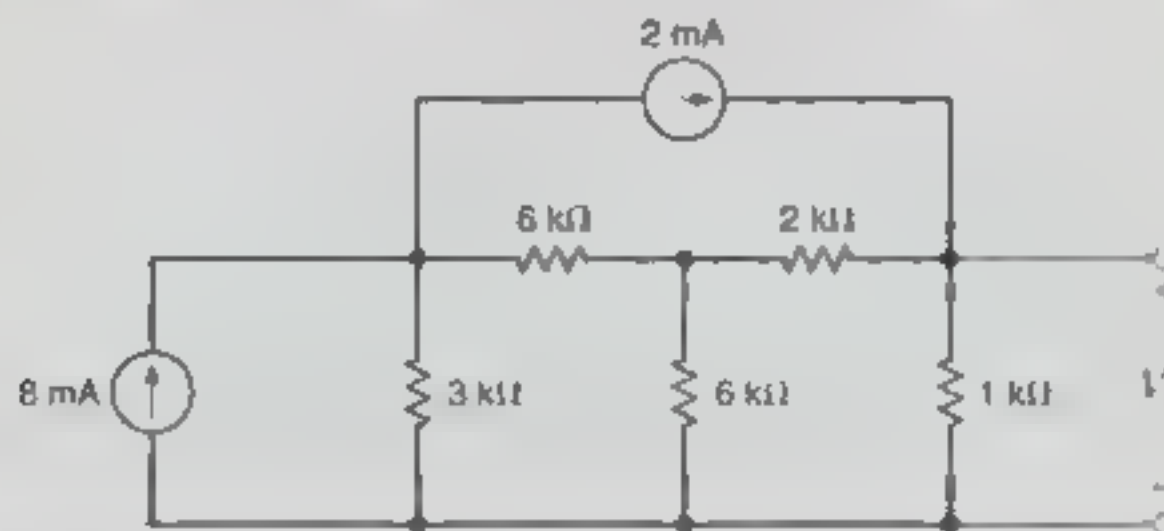


Figura E3.3

RESPOSTA: $V_x = 2,79 \text{ V}$.

CIRCUITOS CONTENDO FONTES DE CORRENTE DEPENDENTES

A presença de uma fonte dependente pode destruir a forma simétrica das equações referentes aos nós que definem o circuito. Considere o circuito mostrado na Fig. 3.8, que contém uma fonte de corrente controlada por corrente. As equações provenientes da aplicação da LKC para os nós que não são referência são

$$\beta i_x + \frac{v_1}{R_1} - \frac{v_2}{R_2} = 0$$

e

$$\frac{v_2}{R_2} - \frac{v_3}{R_3} - i_x - i_4 = 0$$

em que $i_x = v_2/R_3$. Simplificando as equações, obtém-se

$$(G_1 + G_2)v_1 - (G_2 - \beta G_3)v_2 = 0$$

$$-G_2v_1 + (G_2 + G_3)v_2 = i_A$$

ou, na forma matricial,

$$\begin{bmatrix} (G_1 + G_2) & -G_2 + \beta G_3 \\ -G_2 & (G_2 + G_3) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ i_A \end{bmatrix}$$

Note que a presença da fonte dependente eliminou a natureza simétrica da equação nodal.

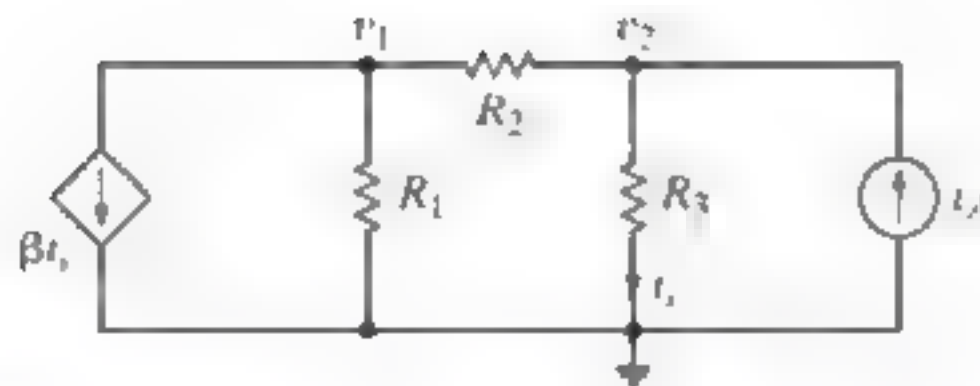


Figura 3.8 Circuito com uma fonte dependente.

EXEMPLO 3.3

Seja a determinação das tensões nodais referentes ao circuito mostrado na Fig. 3.8 considerando os seguintes parâmetros:

$$\begin{array}{lll} \beta = 2 & R_2 = 6 \text{ k}\Omega & i_A = 2 \text{ mA} \\ R_1 = 2 \text{ k}\Omega & R_3 = 3 \text{ k}\Omega & \end{array}$$

SOLUÇÃO

A utilização desses valores nas equações do circuito fornece

$$\begin{aligned} \frac{1}{4\text{k}} V_1 + \frac{1}{2\text{k}} V_1 &= 0 \\ -\frac{1}{6\text{k}} V_1 + \frac{1}{2\text{k}} V_2 &= 2 \times 10^{-3} \end{aligned}$$

A solução dessas equações utilizando qualquer procedimento conveniente fornece $V_1 = -24/5 \text{ V}$ e $V_2 = 12/5 \text{ V}$. A veri-

ficação dessas respostas pode ser realizada determinando-se as correntes nos ramos do circuito e, em seguida, utilizando essas informações, testando-se a LKC nos nós. Por exemplo, a corrente que passa por R_3 fluindo da parte superior para a parte inferior do circuito é

$$I = \frac{V_2}{R_3} = \frac{12/5}{3\text{k}} = \frac{4}{5\text{k}} \text{ A}$$

Analogamente, a corrente que passa por R_2 fluindo da direita para a esquerda vale

$$I_2 = \frac{V_2 - V_1}{R_2} = \frac{12/5 - (-24/5)}{6\text{k}} = \frac{6}{5\text{k}} \text{ A}$$

Todos esses resultados são mostrados na Fig. 3.9. Observe que a LKC é atendida em cada um dos nós do circuito.

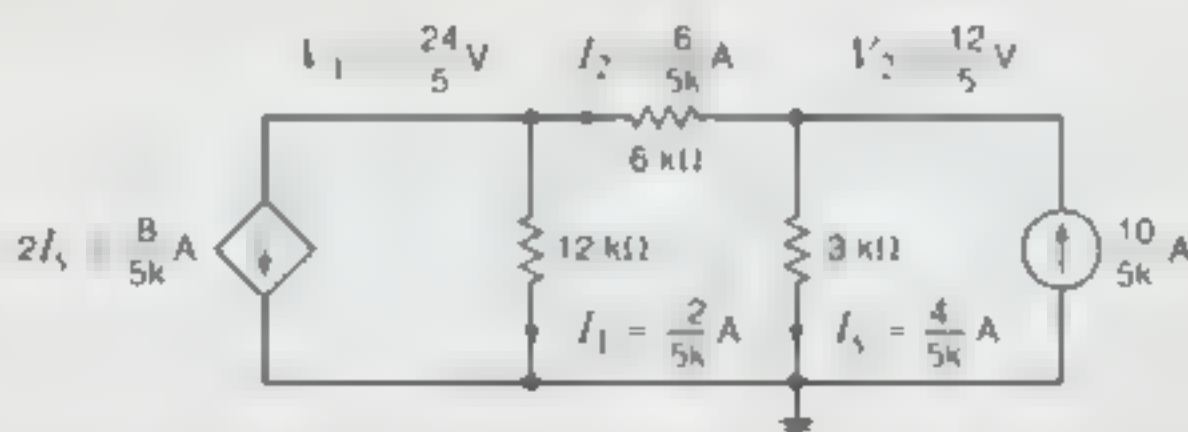


Figura 3.9 Circuito utilizado no Exemplo 3.3.

EXEMPLO 3.4

Seja a determinação do conjunto de equações linearmente independentes que, ao serem resolvidas, fornecerão as tensões nos nós do circuito mostrado na Fig. 3.10. Em seguida, com os valores fornecidos para os componentes, calcule as tensões nodais utilizando o programa MATLAB. Considere $R_1 = 1 \text{ k}\Omega$, $R_2 = R_3 = 2 \text{ k}\Omega$, $R_4 = 4 \text{ k}\Omega$, $i_A = 2 \text{ mA}$, $i_B = 4 \text{ mA}$ e $\alpha = 2$.

A aplicação da LKC a cada nó que não seja referência fornece as equações

$$\begin{aligned} G_3 v_1 + G_1(v_1 - v_2) - i_A &= 0 \\ i_A + G_1(v_2 - v_1) + \alpha i_B + G_2 v_2 - i_B &= 0 \\ G_2(v_2 - v_1) + G_4 v_2 - i_B &= 0 \end{aligned}$$

em que $v_x = v_2 - v_1$. Simplificando essas equações, obtém-se

$$\begin{aligned} (G_1 + G_3)v_1 - G_1 v_2 &= i_A \\ -G_1 v_1 + (G_1 + \alpha + G_2)v_2 - (\alpha + G_2)v_3 &= -i_A \\ -G_2 v_2 + (G_2 + G_4)v_3 &= i_B \end{aligned}$$

Substituindo os valores dos componentes, as equações ficam

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{1\text{k}} + \frac{1}{2\text{k}} & -\frac{1}{2\text{k}} & 0 \\ -\frac{1}{2\text{k}} & \frac{1}{2\text{k}} + 2 + \frac{1}{2\text{k}} & -\left(2 + \frac{1}{2\text{k}}\right) \\ 0 & \frac{1}{2\text{k}} & \frac{1}{2\text{k}} + \frac{1}{4\text{k}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,002 \\ -0,002 \\ 0,004 \end{bmatrix}$$

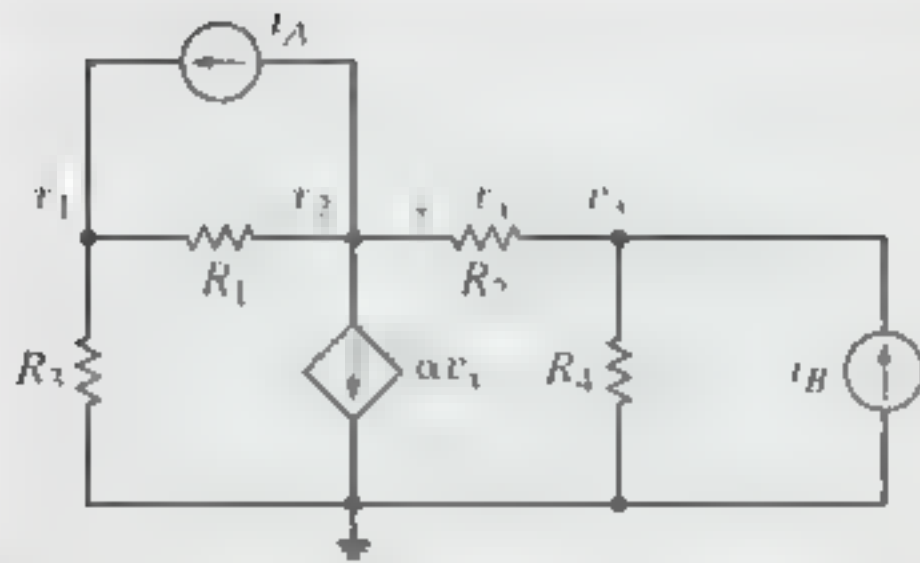


Figura 3.10 Circuito contendo uma fonte de corrente controlada por tensão.

ou

$$\begin{bmatrix} 0,0015 & -0,001 & 0 \\ 0,001 & 2,0015 & -2,0005 \\ 0 & -0,0005 & 0,00075 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,002 \\ -0,002 \\ 0,004 \end{bmatrix}$$

Mais uma vez, as equações resultantes para o circuito a partir de uma análise nodal ou na forma $Gv = i$, e os resultados obtidos realizando-se a operação $v = G^{-1}i$ são

$$v_1 = 11,9940 \text{ V}$$

$$v_2 = 15,9910 \text{ V}$$

$$v_3 = 15,9940 \text{ V}$$

Avaliação do Aprendizado

E3.4 Determine as tensões referentes aos nós do circuito mostrado na Fig. E3.4.

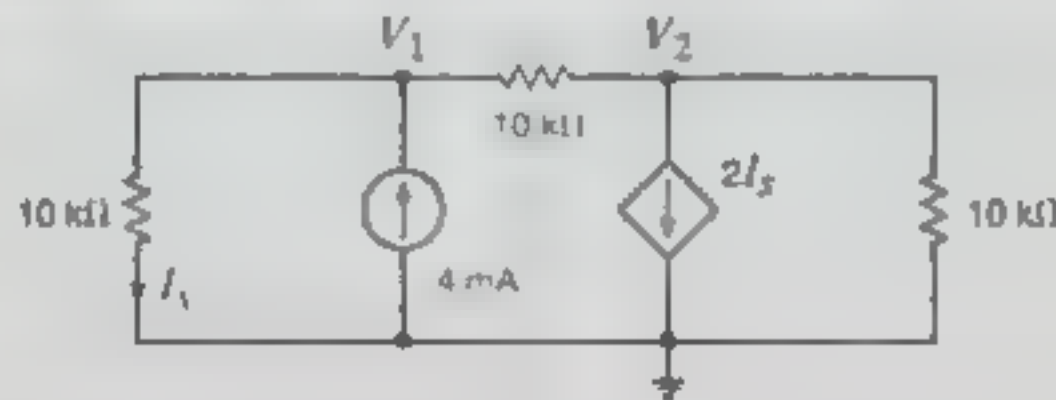


Figura E3.4

RESPOSTAS: $V_1 = 16 \text{ V}$,
 $V_2 = -8 \text{ V}$.

E3.5 Determine a tensão V_x da rede mostrada na Fig. E3.5.

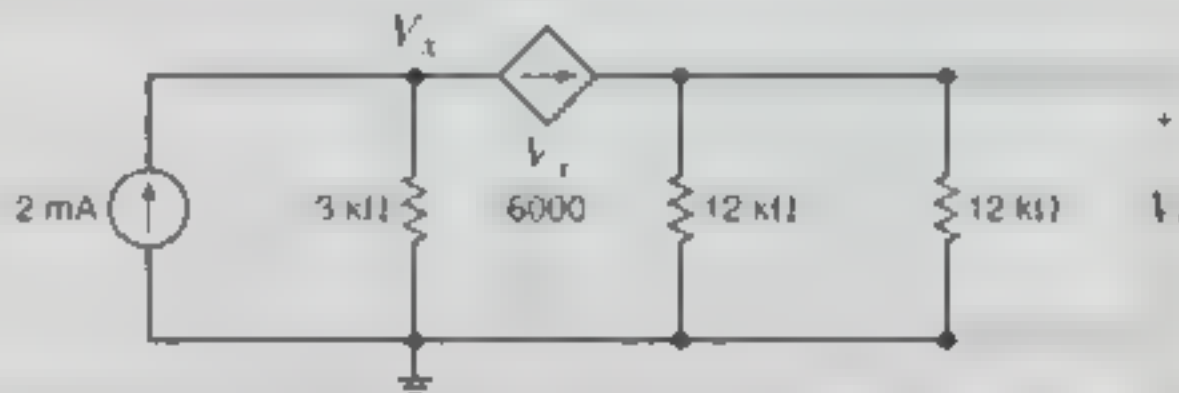


Figura E3.5

RESPOSTA: $V_x = 4 \text{ V}$.

E3.6 Determine a tensão V_x do circuito mostrado na Fig. E3.6 utilizando a análise nodal.

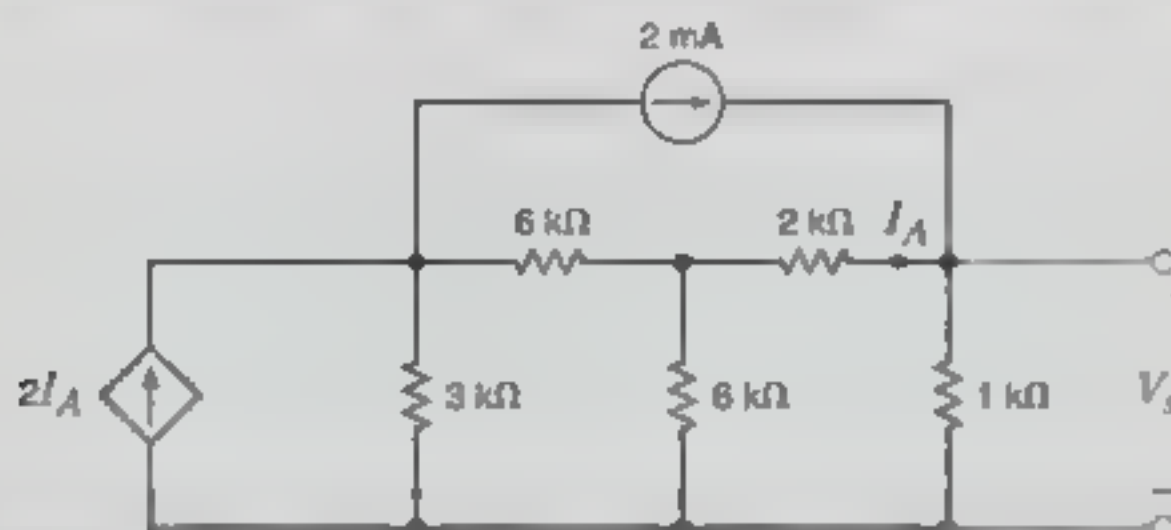


Figura E3.6

RESPOSTA: $V_x = 0,952 \text{ V}$.

CIRCUITOS CONTENDO FONTES DE TENSÃO INDEPENDENTES Como é prática usual neste livro, a apresentação dos casos associados a esse tópico será feita no sentido dos casos mais

simples para os casos mais complexos. O caso mais simples é aquele em que uma fonte de tensão independente é conectada ao nó de referência. O exemplo que se segue ilustra essa situação.

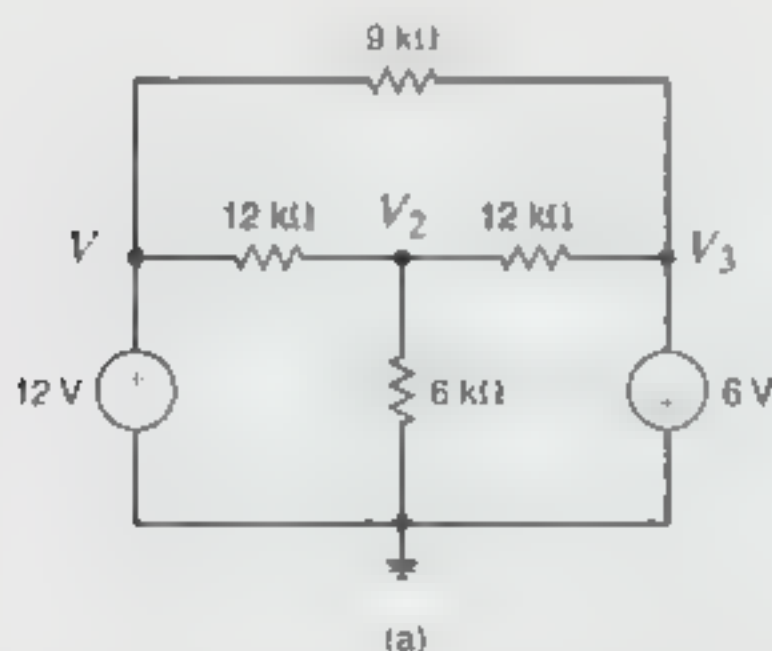
EXEMPLO 3.5

Considere o circuito mostrado na Fig. 3.11a. Determine todas as tensões nodais e todas as correntes dos ramos.

SOLUÇÃO

A rede desse circuito possui três nós que não são nós de referência. As tensões nesses nós foram designadas por V_1 , V_2 e V_3 . Com base nas discussões anteriores, poder-se-ia admitir que as tensões nodais seriam obtidas escrevendo-se as equações referentes à LKC para cada um desses nós. As três equações linearmente independentes resultantes conduziriam à determinação das tensões incógnitas. Entretanto, note que V_1 e V_3 são grandezas conhecidas uma vez que uma fonte de tensão independente é conectada diretamente entre o nó que não é referência e cada um desses nós. Portanto, $V_1 = 12\text{ V}$ e $V_3 = -6\text{ V}$. Além disso, note que a corrente que passa pelo resistor de $9\text{ k}\Omega$ vale $[12 - (-6)]/9\text{ k} = 2\text{ mA}$ orientada da esquerda para a direita. Tanto a tensão V_2 quanto as correntes nos resistores remanescentes não são conhecidas. Entretanto, como apenas a tensão em um dos nós não é conhecida, uma única equação nodal resolverá este problema. A aplicação da LKC a este nó central do circuito fornece

$$\frac{V_1 - V_2}{12\text{ k}} + \frac{V_1 - 0}{6\text{ k}} + \frac{V_2 - V_3}{12\text{ k}} = 0$$



ou

$$\frac{V_1 - 12}{12\text{ k}} + \frac{V_2}{6\text{ k}} + \frac{V_2 - (-6)}{12\text{ k}} = 0$$

logo, obtém-se

$$V_2 = 3\text{ V}$$

Uma vez conhecidas todas as tensões nos nós, a lei de Ohm pode ser utilizada para se obter as correntes nos ramos. Essas correntes são ilustradas na Fig. 3.11b. O diagrama mostra que a LKC é satisfeita em todos os nós.

[atenção]

Em todos os casos em que uma fonte de tensão independente é conectada entre o nó de referência e um nó que não seja nó de referência, a tensão nesse nó será conhecida.

Note que a presença das fontes de tensão neste exemplo simplifica a análise, pois duas das três equações linearmente independentes são $V_1 = 12\text{ V}$ e $V_3 = -6\text{ V}$. Será constatado posteriormente que, como regra geral, sempre que as fontes de tensão estiverem presentes entre os nós, as equações das tensões nodais que descrevem o circuito serão mais simples.

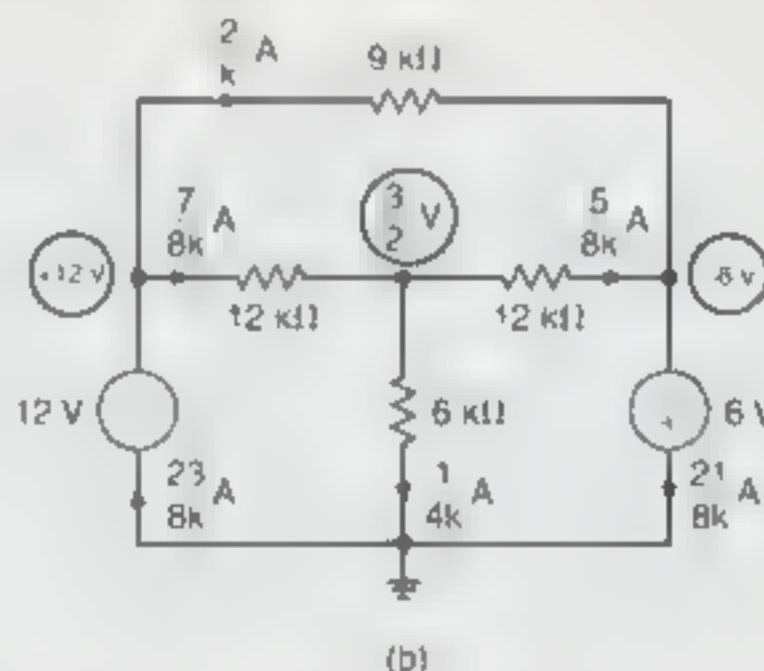
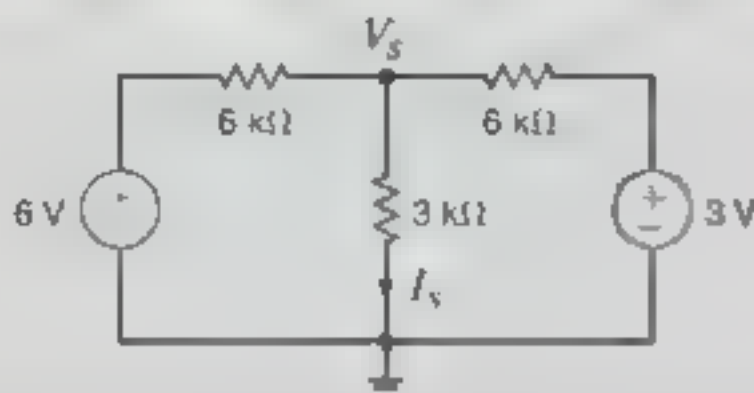


Figura 3.11 Circuito utilizado no Exemplo 3.5.

Avaliação do Aprendizado

E3.7 Utilize a análise nodal para obter a corrente I_x do circuito mostrado na Fig. E3.7



RESPOSTA: $I_x = \frac{3}{4}\text{ mA}$.

Figura E3.7

E3.8 Determine a tensão V_1 da rede mostrada na Fig E3.8 utilizando uma análise nodal

RESPOSTA: $V_1 = 3,89$ V.

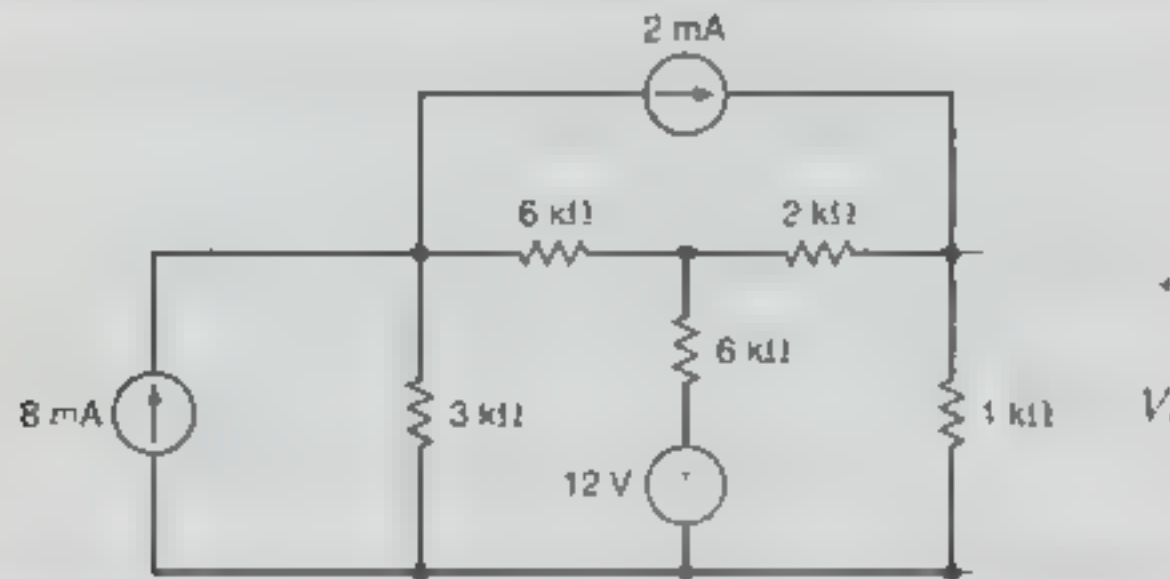


Figura E3.8

Considere agora o caso em que uma fonte de tensão independente é conectada entre dois nós que não são nós de referência.

EXEMPLO 3.6

Deseja-se determinar as correntes que passam pelos dois resistores do circuito mostrado na Fig. 3.12a.

SOLUÇÃO

Ao se tentar abordar esse problema de forma grosseira, de imediato aparecerá uma dificuldade. De início, as correntes dos ramos ou estão relacionadas a fontes com valores conhecidos ou podem ser expressas como a tensão no ramo dividida pela resistência nele presente. Entretanto, a corrente no ramo da fonte de 6 V certamente não é conhecida e não pode ser expressa diretamente utilizando-se a lei de Ohm. De fato, pode-se atribuir um nome a essa corrente e escrever as equações associadas à LKC para os dois nós que não são nós de referência em função dessa corrente. Todavia, esse procedimento não resolve o problema, uma vez que resultará em *duas* equações linearmente independentes em função de *três* incógnitas, a saber, as tensões nos dois nós e a corrente na fonte de tensão.

Para resolver esse dilema, lembre-se de que são necessárias $N - 1$ equações linearmente independentes para se determinar as $N - 1$ tensões nos nós que não são nós de referência em um circuito com N nós. Uma vez que o circuito aqui analisado possui três nós, precisa-se de duas equações linearmente independentes. Observe que se uma das tensões nodais for conhecida, pode-se imediatamente conhecer a outra; isto é, se a tensão V_1 for conhecida, então $V_2 = V_1 - 6$. Se V_2 for conhecida, então $V_1 = V_2 + 6$. Portanto, a diferença no potencial entre os dois nós é *limitada* pela fonte de tensão, logo,

$$V_1 - V_2 = 6$$

Essa equação de restrição é uma das duas equações linearmente independentes necessárias para a determinação das tensões nodais.

Considere agora o circuito mostrado na Fig. 3.12b, em que a fonte de 6 V é isolada na superfície definida pela curva tracejada. A equação de restrição governa esta parte isolada do circuito. A equação remanescente é obtida pela aplicação da LKC a essa superfície, que é comumente chamada de *supernó*. Lembre-se de que no Capítulo 2 demonstrou-se que a LKC deve ser atendida para uma superfície, e essa técnica elimina o problema de se lidar com uma corrente que passa por uma fonte de tensão. A LKC para o supernó é

$$6 \times 10^{-3} + \frac{V_1}{6k} - \frac{V_2}{12k} + 4 \times 10^{-3} = 0$$

A solução dessas equações fornece $V_1 = 10$ V e $V_2 = 4$ V, e portanto, $I_1 = 5/3$ mA e $I_2 = 1/3$ mA. A partir de uma rápida verificação, constata-se que a LKC é satisfeita em cada nó do circuito.

Observe que ao se aplicar a LKC ao nó de referência, obtém-se a mesma equação mostrada anteriormente. O leitor deve perceber que a aplicação da LKC ao nó de referência evita a necessidade de ter que se tratar com supernós. Lembre-se de que não se aplica a LKC a qualquer nó – mesmo o nó de referência – que contenha uma fonte de tensão independente. Essa ideia pode ser ilustrada com o circuito do próximo exemplo.

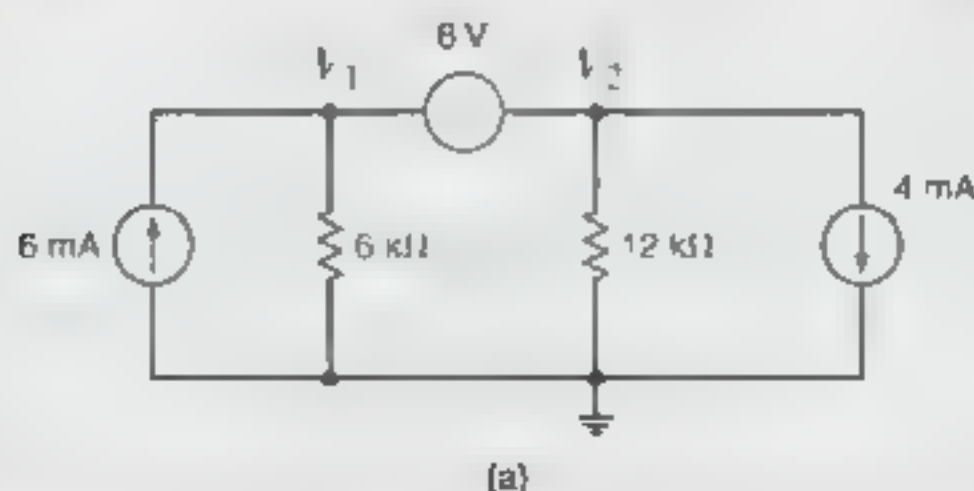
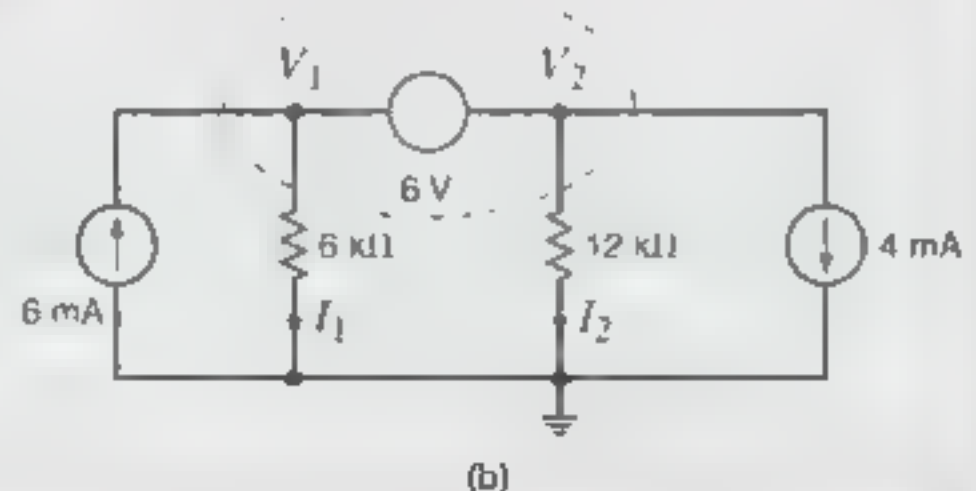


Figura 3.12
Circuito
utilizado no
Exemplo 3.6.



EXEMPLO 3.7

Seja a determinação da corrente I_x do circuito mostrado na Fig. 3.13a.

SOLUÇÃO

Examinando o circuito, observa-se que as tensões nodais V_2 e V_4 são conhecidas e que as tensões nodais V_1 e V_3 estão relacionadas pela equação

$$V_1 - V_3 = 12$$

O circuito é redesenhado na Fig. 3.13b.

Uma vez que se deseja obter a corrente I_x , a tensão V_1 (no supernó que contém V_1 e V_3) é escrita como $V_3 + 12$. A equação da LKC aplicada ao supernó fica

$$\frac{V_3 + 12 - (-6)}{2k} + \frac{V_3 + 12 - 12}{2k} - \frac{V_3 - (-6)}{1k} + \frac{V_3}{1k} - \frac{V_3}{2k} = 0$$

A solução da equação para V_3 fornece

$$V_3 = -\frac{6}{7} \text{ V}$$

A corrente I_x pode, assim, ser calculada imediatamente como

$$I_x = \frac{6}{2k} - \frac{6}{7} = \frac{3}{7} \text{ mA}$$

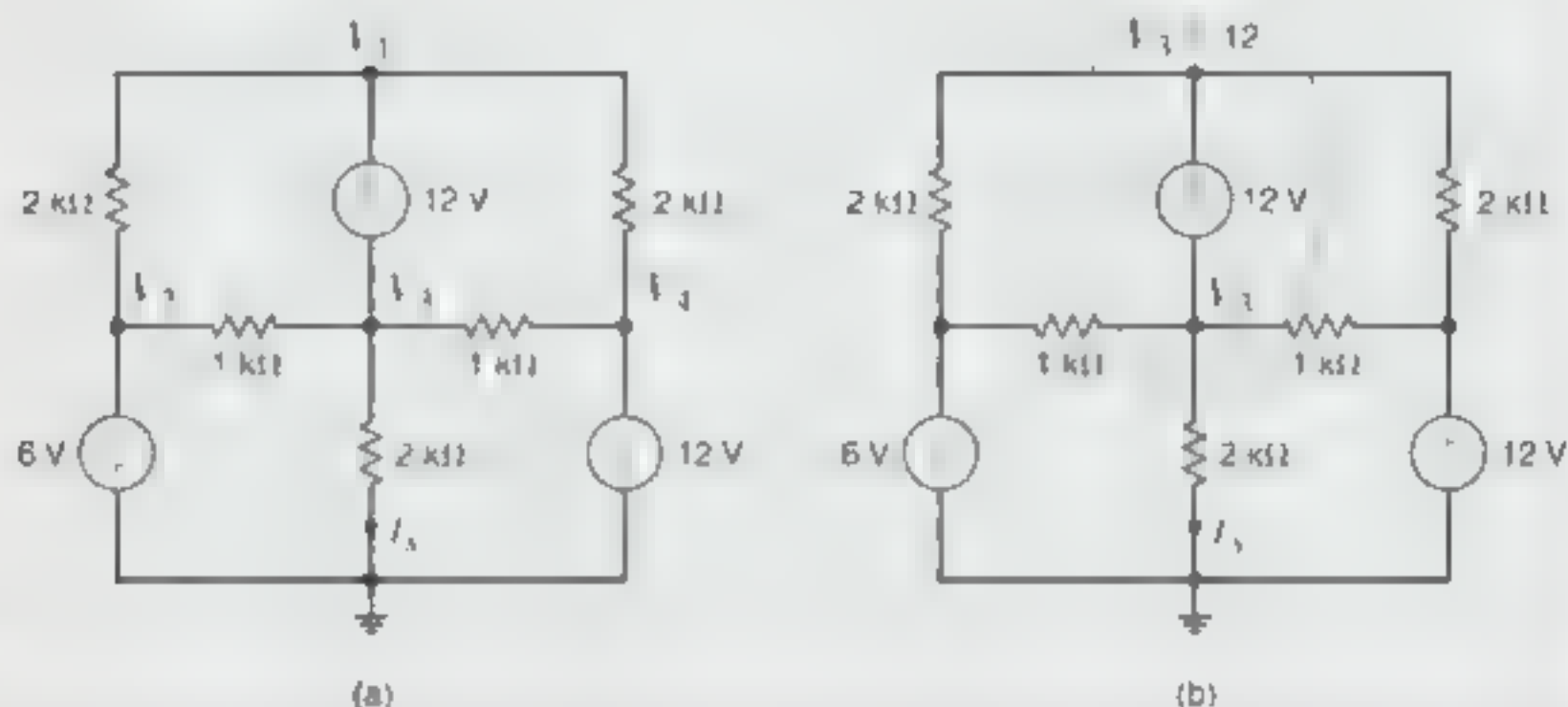


Figura 3.13 Exemplo de circuito com supernós.

Avaliação do Aprendizado

E3.9 Utilize a análise nodal para obter a corrente I_x do circuito mostrado na Fig. E3.9

RESPOSTA: $I_x = 3,8 \text{ mA}$.

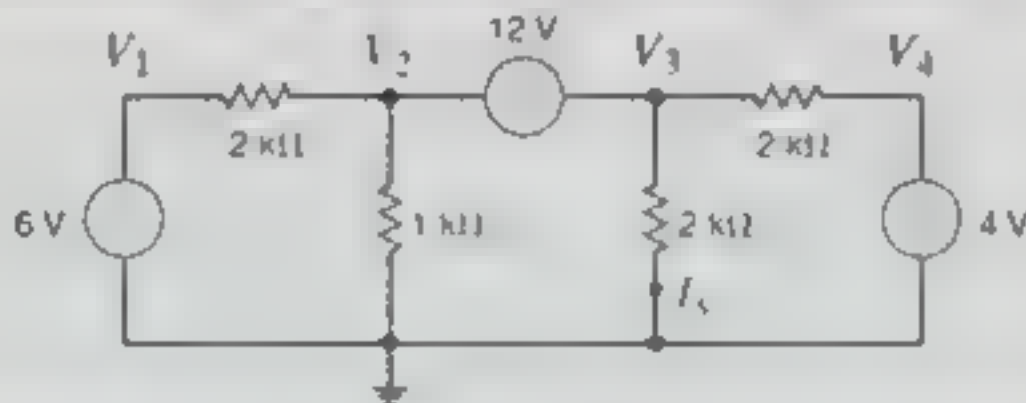


Figura E3.9

E3.10 Determine a tensão V_x da rede mostrada na Fig. E3.10 utilizando uma análise nodal

RESPOSTA: $V_x = 5,6 \text{ V}$.

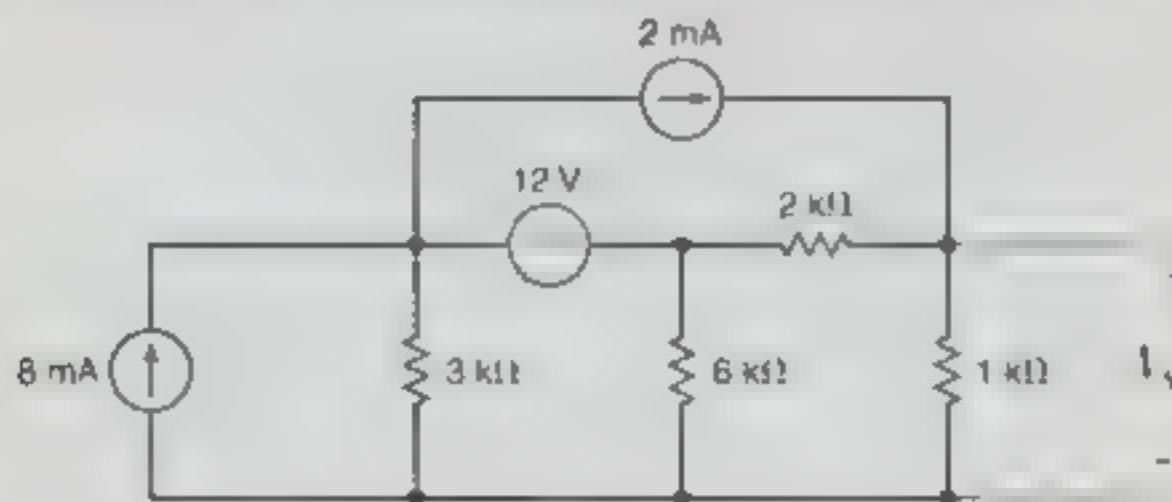


Figura E3.10

CIRCUITOS CONTENDO FONTES DE TENSÃO DEPENDENTES

Conforme os exemplos a seguir irão mostrar, os circuitos que

contêm fontes dependentes (controladas) são analisados da mesma forma descrita anteriormente.

EXEMPLO 3.8

Deseja-se determinar a corrente I_x do circuito mostrado na Fig. 3.14.

SOLUÇÃO

Uma vez que a fonte de tensão dependente está conectada entre o nó cuja tensão é V_1 e o nó de referência, tem-se

$$V_1 = 2kI_x$$

A LKC aplicada ao nó cuja tensão é V_2 fica

$$\frac{V_2 - V}{2k} - \frac{4}{k} + \frac{V}{1k} = 0$$

em que

$$I_x = \frac{V_1}{1k}$$

A solução dessas equações fornece $V_2 = 8 \text{ V}$ e $V_1 = 16 \text{ V}$. Portanto,

$$I_x = \frac{V_1}{2k} = \frac{16}{2k} = 8 \text{ mA}$$

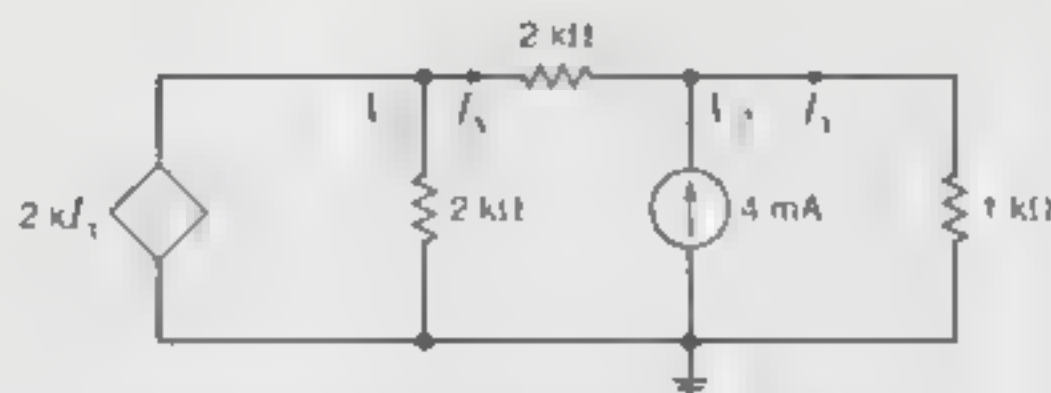


Figura 3.14 Circuito utilizado no Exemplo 3.8.

EXEMPLO 3.9

Seja a determinação da corrente I_x do circuito mostrado na Fig. 3.15.

SOLUÇÃO

Este circuito contém tanto uma fonte de tensão independente quanto uma fonte de tensão controlada por tensão. Note que

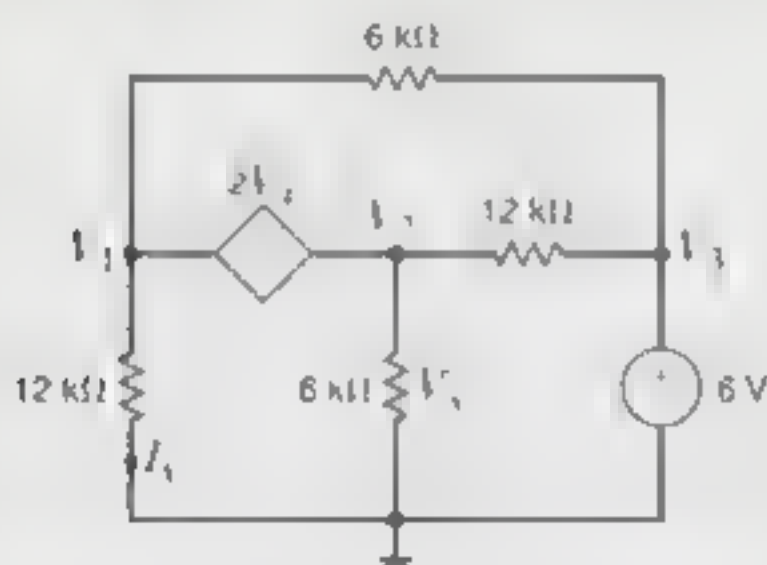


Figura 3.15 Circuito utilizado no Exemplo 3.9.

$V_3 = 6 \text{ V}$, $V_2 = V_x$ e que existe um supernó entre os nós cujas tensões são designadas por V_1 e V_2 .

Aplicando a LKC ao supernó, obtém-se

$$\frac{V_1 - V_3}{6k} + \frac{V_1}{12k} + \frac{V_2}{6k} + \frac{V_2 - V_1}{12k} = 0$$

onde a equação de restrição para o supernó é

$$V_1 - V_2 = 2V_x$$

A equação final é

$$V_1 = 6$$

Resolvendo essas equações, obtém-se

$$V_x = \frac{9}{2} \text{ V}$$

e, portanto,

$$I_x = \frac{V_x}{12k} = \frac{3}{8} \text{ mA}$$

Finalmente, são considerados dois circuitos adicionais os quais, para efeito de comparação, serão examinados por mais de um método

EXEMPLO 3.10

Deseja-se determinar a tensão V_x do circuito mostrado na Fig. 3.16a. Note que o circuito possui duas fontes de tensão, uma das quais é uma fonte controlada, e duas fontes de corrente independentes. O circuito é redesenhado na Fig. 3.16b de

modo a se atribuir nomes aos nós e identificar o supernó no entorno da fonte controlada. Devido à presença da fonte de tensão independente, a tensão no nó 4 é conhecida e vale 4 V. O conhecimento dessa tensão será utilizado para escrever as equações dos nós do circuito.

Como o circuito possui cinco nós, serão suficientes quatro equações linearmente independentes para se determinar as tensões em todos os nós. Para o supernó, fica definida a equação

$$V_1 - V_3 = 2V_2$$

em que

$$V_2 = V_1$$

e, portanto

$$V_1 = 3V_2$$

Além disso, sabe-se que uma equação adicional é

$$V_4 = 4$$

Portanto, dadas essas duas equações, serão necessárias apenas mais duas equações para se resolver o problema das tensões incógnitas dos nós. Essas equações adicionais resultam da

aplicação da LKC ao supernó e ao nó cuja tensão é V_3 . As equações são

$$\frac{2}{k} + \frac{V_1}{1k} + \frac{V_1 - V_3}{1k} + \frac{3V_1 - V_3}{1k} + \frac{V_3}{1k} = 0$$

$$\frac{V_1 - 3V_3}{1k} + \frac{V_1 - V_3}{1k} = -\frac{2}{k}$$

A combinação das equações fornece as seguintes duas equações

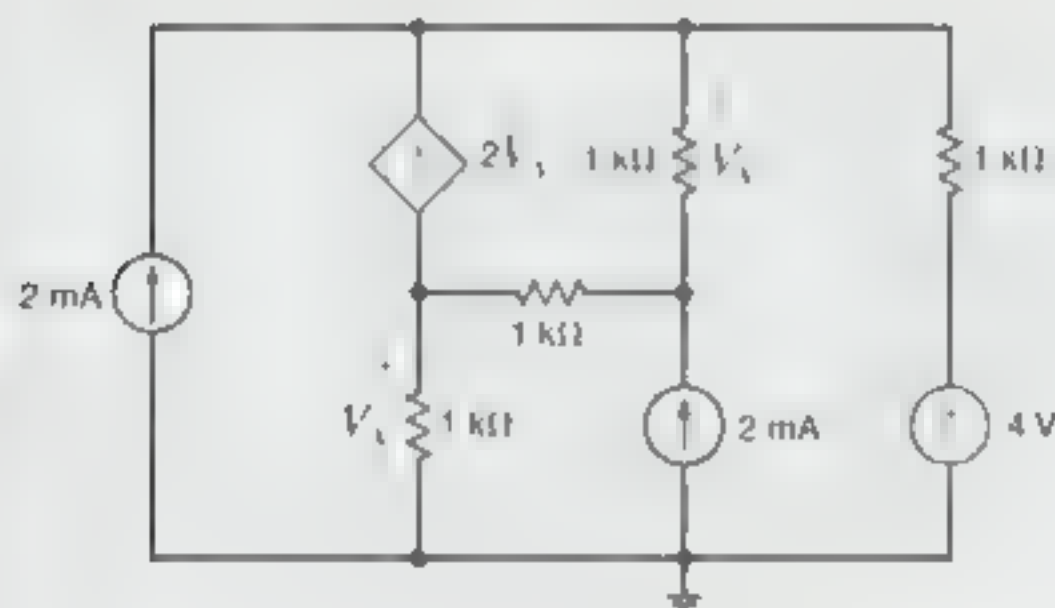
$$8V_1 - 2V_3 = 6$$

$$-4V_1 + 2V_3 = 2$$

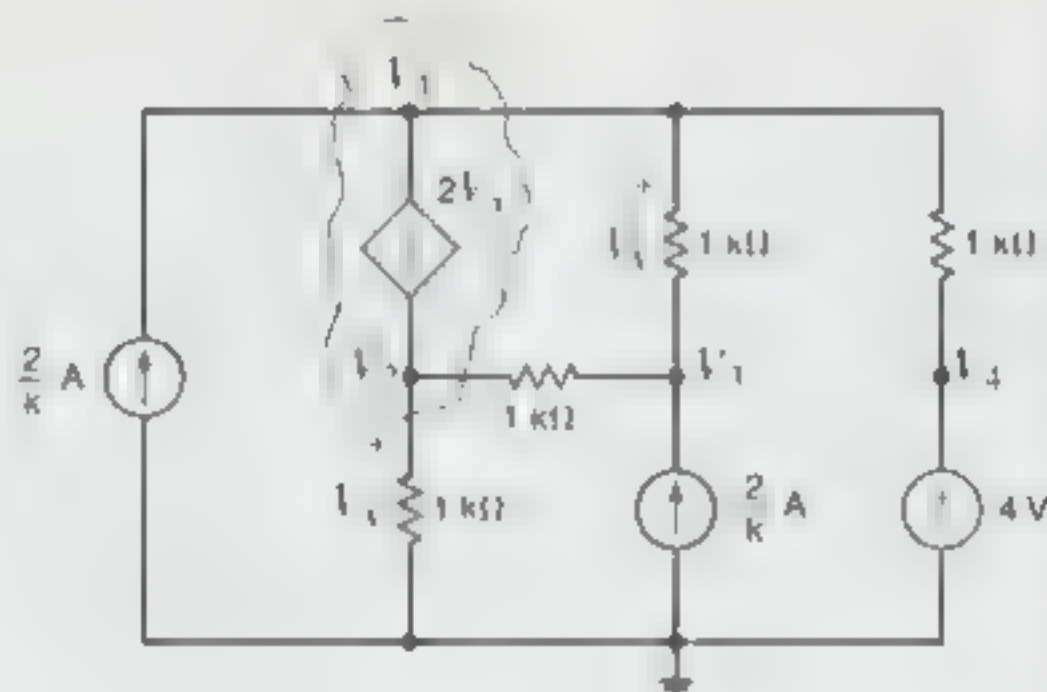
Resolvendo essas equações, obtém-se

$$V_1 = 2 \text{ V} \quad \text{e} \quad V_3 = 5 \text{ V}$$

$$V_2 = 3V_1 = V_3 = 1 \text{ V}$$



(a)



(b)

Figura 3.16 Circuito utilizado no Exemplo 3.10.

EXEMPLO 3.11

Deseja-se determinar a corrente I_1 do circuito mostrado na Fig. 3.17a. Observe que esse circuito contém três fontes de tensão, uma das quais é uma fonte controlada, e uma fonte de corrente controlada por corrente. Como duas das fontes de tensão são conectadas ao nó de referência, uma das tensões nodais é conhecida diretamente e a outra é definida pela fonte dependente. Além disso, a diferença das tensões entre dois nós é definida pela fonte independente de 6 V.

O circuito é redesenhado na Fig. 3.17b para que se possa nomear os nós e identificar o supernó. Como o circuito possui seis nós, são necessárias cinco equações linearmente independentes para se determinar as tensões nodais incógnitas.

As duas equações para o supernó são

$$V_1 - V_4 = -6$$

$$\frac{V_1}{1k} + \frac{V_1 - V_3}{1k} + \frac{2I_1}{k} + \frac{V_2 - V_3}{1k} + \frac{V_3 - V_4}{1k} + \frac{V_3}{1k} = 0$$

As três equações remanescentes são

$$V_2 = 12$$

$$V_3 = 2V_1$$

$$\frac{V_1 - V_2}{1k} + \frac{V_1 - V_3}{1k} = 2I_1$$

As equações dos parâmetros de controle são

$$I_1 = I_2 = 12$$

$$I_2 = \frac{V_1}{1k}$$

A combinação dessas equações fornece o seguinte conjunto de equações:

$$-2V_1 + 5V_4 - V_5 = -36$$

$$V_1 - V_5 = -6$$

$$-3V_4 + 2V_5 = 0$$

Resolvendo essas equações por qualquer meio conveniente, tem-se

$$V_1 = 38 \text{ V}$$

$$V_4 = -32 \text{ V}$$

$$V_5 = -48 \text{ V}$$

Portanto, como $V_3 = 2V_1$, $V_3 = -100 \text{ V}$. A corrente I_x vale -48 mA . O leitor é encorajado a verificar que a LKC é atendida em cada um dos nós.

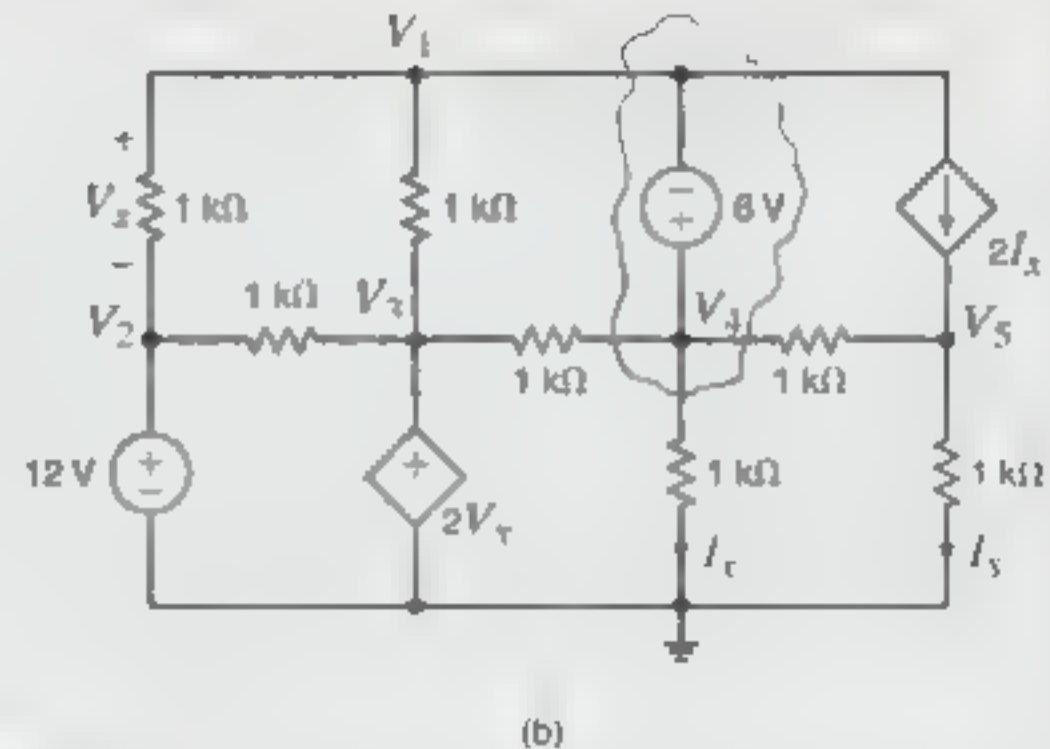
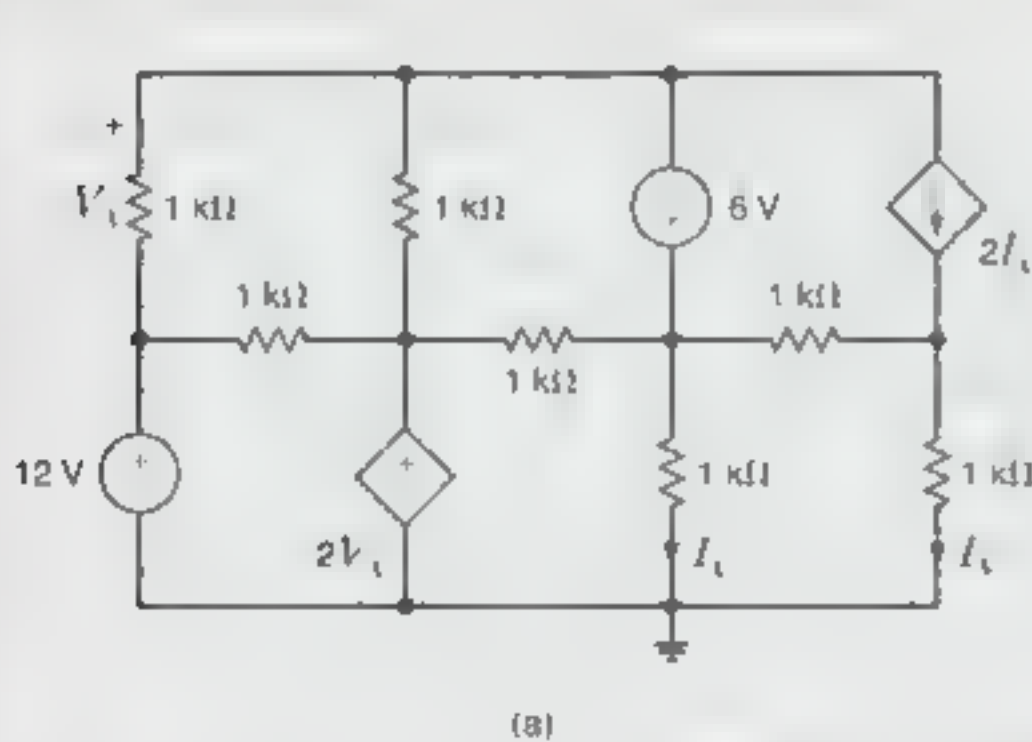


Figura 3.17 Circuito utilizado no Exemplo 3.11.

Estratégia para Solução de Problemas

Análise Nodal

Etapas 1. Determine o número de nós do circuito. Selecione um nó como referência. Estabeleça uma tensão nodal entre cada nó que não é referência e o nó de referência. Todas as tensões nodais são admitidas como positivas em relação ao nó de referência. Para um circuito de N nós, existem $N - 1$ tensões nodais. Consequentemente, devem ser escritas $N - 1$ equações linearmente independentes para que se possa determinar as tensões nodais.

Etapas 2. Utilizando a LKT, escreva uma equação de restrição para cada fonte de tensão – dependente ou independente – do circuito em função das tensões nodais estabelecidas. Cada equação de restrição representa uma das equações linearmente independentes necessárias, e as N_v fontes de tensão fornecem N_v equações linearmente independentes. Para cada fonte de tensão dependente, expresse as variáveis de controle daquela fonte em termos das tensões nodais.

Uma fonte de tensão – dependente ou independente – pode ser conectada entre um nó que não seja o de referência e o nó de referência, ou entre dois nós que não sejam o de referência. Um supernó é formado por uma fonte de tensão e seus dois nós de conexão, que não sejam de referência.

Etapas 3. Utilize a LKC para formular as remanescentes $N - 1 - N_v$ equações linearmente independentes. Inicialmente, aplique a LKC a cada nó que não seja referência e que não esteja conectado a uma fonte de tensão. Em seguida, aplique a LKC a cada supernó. Ao formular as equações com base na LKC, trate as fontes de corrente dependentes da mesma forma que as fontes de corrente independentes. Para cada fonte de corrente dependente, expresse as variáveis de controle em termos das tensões nodais.

Avaliação do Aprendizado

E3.11 Utilize a análise nodal para determinar a corrente I_x do circuito mostrado na Fig. E3.11

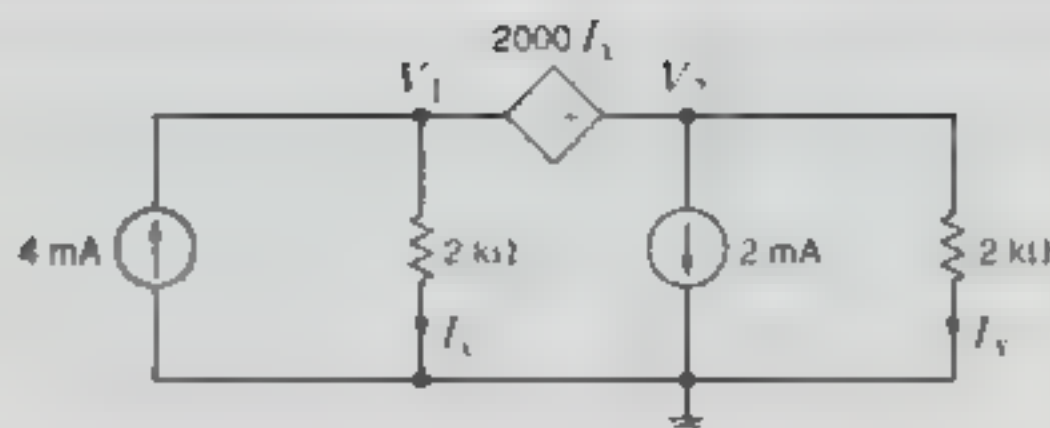
RESPOSTA: $I_x = \frac{4}{3}$ mA.

Figura E3.11

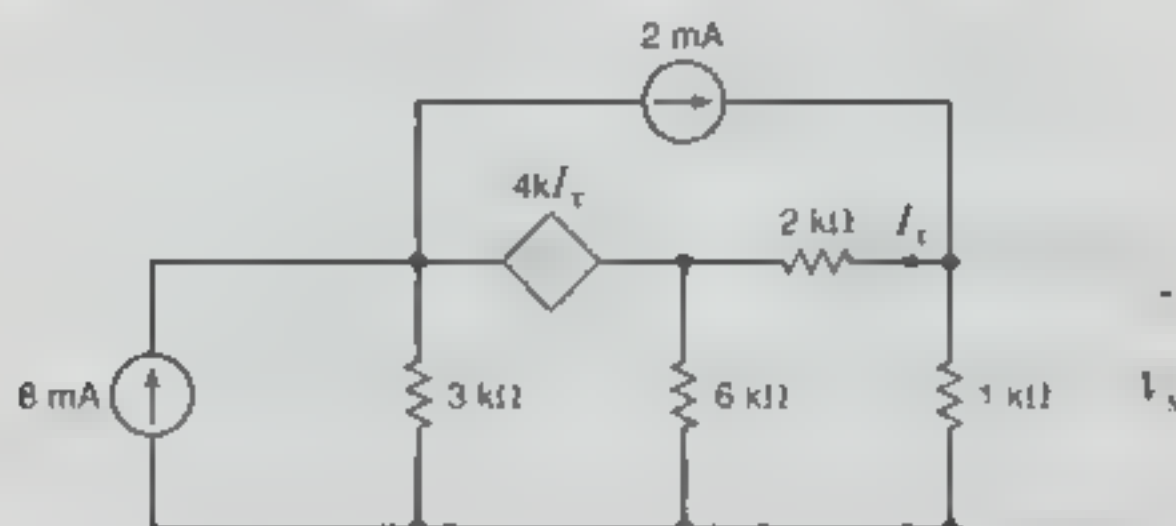
E3.12 Determine a tensão V_x do circuito mostrado na Fig. E3.12 utilizando uma análise nodal.RESPOSTA: $V_x = 6,29$ V.

Figura E3.12

3.2 Análise dos Laços

Verificou-se que, em uma análise nodal, as variáveis incógnitas são as tensões nodais e a LKC foi empregada em sua determinação. Uma vez calculadas essas tensões nodais todas as correntes dos ramos do circuito podem ser facilmente determinadas utilizando a lei de Ohm. Ao contrário desse procedimento, a análise das malhas (ou dos laços) utiliza a LKT para determinar as correntes nas malhas do circuito. Uma vez conhecidas as correntes, a lei de Ohm pode ser utilizada para se calcular qualquer das tensões no circuito. Por meio da topologia da rede, pode ser mostrado que, em geral, existem exatamente $B - N + 1$ equações linearmente independentes provenientes da LKT para qualquer circuito, em que B é o número de ramos do circuito e N é o número de nós. Por exemplo, examinando novamente o circuito da Fig. 2.5, verifica-se que existem oito ramos e cinco

nós. Assim, o número de equações linearmente independentes propiciadas pela LKT, necessárias para se determinar todas as correntes do circuito, é $B - N + 1 = 8 - 5 + 1 = 4$. O circuito mostrado na Fig. 2.5 é redesenhado, conforme mostrado na Fig. 3.18, com quatro correntes de laços, designadas conforme indicado. As correntes nos ramos são então determinadas como

$$\begin{aligned} i_1(t) &= i_A(t) \\ i_2(t) &= i_A(t) - i_B(t) \\ i_3(t) &= i_B(t) \\ i_4(t) &= i_A(t) - i_C(t) \\ i_5(t) &= i_B(t) - i_D(t) \\ i_6(t) &= -i_C(t) \\ i_7(t) &= i_C(t) - i_D(t) \\ i_8(t) &= -i_D(t) \end{aligned}$$

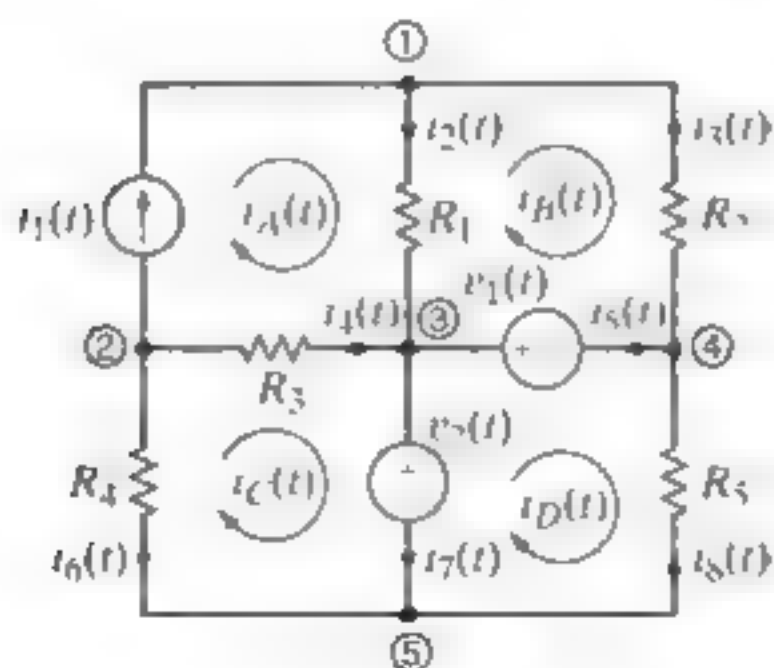


Figura 3.18 Figura 2.5 redesenhada com a indicação das correntes dos laços.

Todos os circuitos a serem analisados neste livro serão *planos*, o que significa dizer que é possível desenhar o circuito em uma folha de papel de forma que os condutores não se cruzem. Quando um circuito é plano, as malhas são identificadas mais facilmente. Por exemplo, lembre-se de que, no Capítulo 2, foi mostrada a necessidade de uma única equação para se determinar a corrente em um circuito que continha um único laço. Caso o circuito possua N laços independentes, será mostrado (e a fórmula topológica geral $B - N + 1$ pode ser utilizada para verificação) que serão necessárias N equações simultâneas independentes para descrever o circuito.

O procedimento da análise dos laços se espelha no procedimento utilizado pela análise nodal (isto é, inicia-se com os casos simples e, gradualmente, chega-se àqueles com maior complexidade). Em seguida, ao final desta seção, descreve-se uma estratégia geral a ser empregada na análise dos laços.

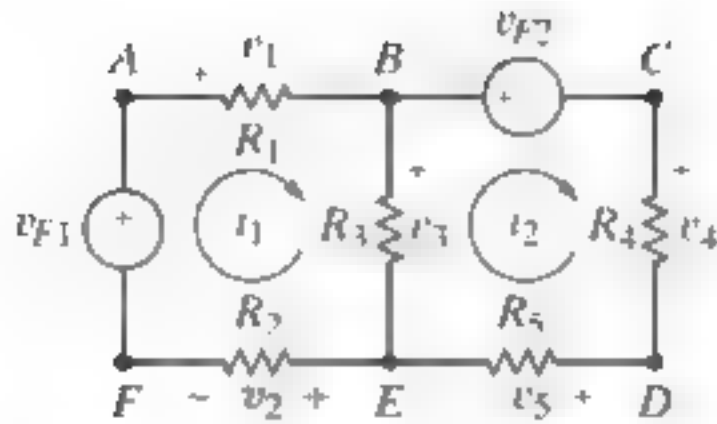


Figura 3.19 Circuito com dois laços.

CIRCUITOS CONTENDO APENAS FONTES DE TENSÃO INDEPENDENTES Para começar esta análise, considere o circuito mostrado na Fig. 3.19. Pode-se observar que esse circuito possui sete ramos e seis nós e, portanto, o número de equações linearmente independentes propiciadas pela LKT, necessárias para se determinar todas as correntes do circuito, é $B - N + 1 = 7 - 6 + 1 = 2$. Como são necessárias duas equações linearmente independentes, a serem obtidas pela LKT, dois laços independentes são identificados nesse circuito: $A-B-E-F-A$ e $B-C-D-E-B$. Define-se agora um novo conjunto de variáveis de correntes chamado de *correntes de laço*, que pode ser utilizado para se obter as correntes físicas do circuito. Admite-se que a corrente i_1 flui no primeiro laço e que a corrente i_2 flui no segundo laço. Assim, a corrente que flui do nó B para o nó E passando por R_3 é $i_1 - i_2$. O sentido das correntes foi admitido como o indicado na figura. Conforme ocorreu na análise nodal, caso as correntes reais não estejam no sentido indicado, seus valores calculados serão negativos.

A aplicação da LKT ao primeiro laço fornece

$$+v_{F1} + v_1 + v_2 - v_3 = 0$$

A LKT aplicada ao laço 2 fornece

$$+v_{F2} + v_4 + v_5 - v_3 = 0$$

em que $v_1 = i_1 R_1$, $v_2 = i_1 R_2$, $v_3 = (i_1 - i_2) R_3$, $v_4 = i_2 R_4$ e $v_5 = i_2 R_5$.

[atenção]

As equações empregam a convenção passiva de sinais.

A substituição desses valores nas duas equações provenientes da LKT resulta nas duas equações simultâneas necessárias para se determinar as duas correntes dos laços; isto é,

$$\begin{aligned} i_1(R_1 + R_2 + R_3) - i_2(R_3) &= v_{F1} \\ -i_1(R_3) + i_2(R_3 + R_4 + R_5) &= -v_{F2} \end{aligned}$$

ou, na forma matricial,

$$\begin{bmatrix} R_1 + R_2 + R_3 & -R_3 \\ -R_3 & R_3 + R_4 + R_5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_{F1} \\ -v_{F2} \end{bmatrix}$$

Nesse ponto, é importante definir a chamada *malha* de um circuito. Uma malha é um tipo especial de laço que não contém quaisquer outros laços em seu interior. Portanto, ao se percorrer a trajetória fechada de uma malha, nenhum componente do circuito estará no interior dessa malha. Por exemplo, o circuito mostrado na Fig. 3.19 contém duas malhas, que podem ser definidas pelos caminhos $A-B-E-F-A$ e $B-C-D-E-B$. O caminho $A-B-C-D-E-F-A$ é um laço, porém não é uma malha. Uma vez que a maioria das análises realizadas nesta seção envolverá a definição das equações oriundas da LKT para as malhas, as correntes serão referidas como correntes de malha e a análise como *análise de malha*.

EXEMPLO 3.12

Considere o circuito mostrado na Fig. 3.20a. Deseja-se determinar a corrente I_x .

SOLUÇÃO

A análise é iniciada escrevendo-se as equações das malhas. Note que a indicação dos sinais $+$ e $-$ não é atribuída aos resistores. Eles não são necessários, uma vez que a lei de Ohm é aplicada a cada componente resistivo ao se escrever as equações oriundas da LKT. A equação para a primeira malha é

$$-12 + 6kI_1 + 6k(I_1 - I_2) = 0$$

A equação resultante da aplicação da LKT para a segunda malha é

$$6kI_2 - I_1 + 3kI_2 + 3 = 0$$

em que $I_x = I_1 - I_2$.

A solução das duas equações simultâneas fornece $I_1 = 5/4$ mA e $I_2 = 1/2$ mA. Portanto, $I_x = 3/4$ mA. Todas as tensões e correntes do circuito estão mostradas na Fig. 3.20b. Lembre-se, da análise nodal, que, uma vez determinadas as tensões nos nós, pode-se verificar os resultados utilizando a LKC nos nós.

Neste caso, as correntes dos ramos são conhecidas e utiliza-se a LKT percorrendo qualquer caminho fechado para verificar os resultados. Por exemplo, a aplicação da LKT ao laço externo fornece

$$-12 + \frac{15}{2} + \frac{3}{2} + 3 = 0$$

Uma vez que se deseja calcular a corrente I_x , utiliza-se a análise de laços, conforme mostrado na Fig. 3.20c. Note que a corrente de laço I_1 passa através do ramo central do circuito e, portanto, $I_1 = I_x$. As duas equações dos laços, neste caso, são

$$-12 + 6k(I_1 + I_2) - 6kI_1 = 0$$

e

$$12 + 6k(I_1 + I_2) + 3kI_x + 3 = 0$$

A solução dessas equações fornece $I_1 = 3/4$ mA e $I_2 = 1/2$ mA. Uma vez que a corrente na fonte de 12 V é $I_1 + I_2 = 5/4$ mA, esse resultado está de acordo com a análise das malhas.

Finalmente, para efeito de comparação, pode-se obter I_x utilizando a análise nodal. A presença das duas fontes de tensão indica que esse é um procedimento viável. Aplicando a LKC ao nó central superior, obtém-se

$$V_1 \frac{12}{6k} + \frac{V_1}{6k} + \frac{V_1}{3k} = 0$$

e, portanto,

$$V_1 = -\frac{9}{2} \text{ V}$$

e, assim

$$I_1 = \frac{V_1}{6k} = -\frac{3}{4} \text{ mA}$$

Note que, neste caso, resolveu-se apenas uma equação em vez de duas.

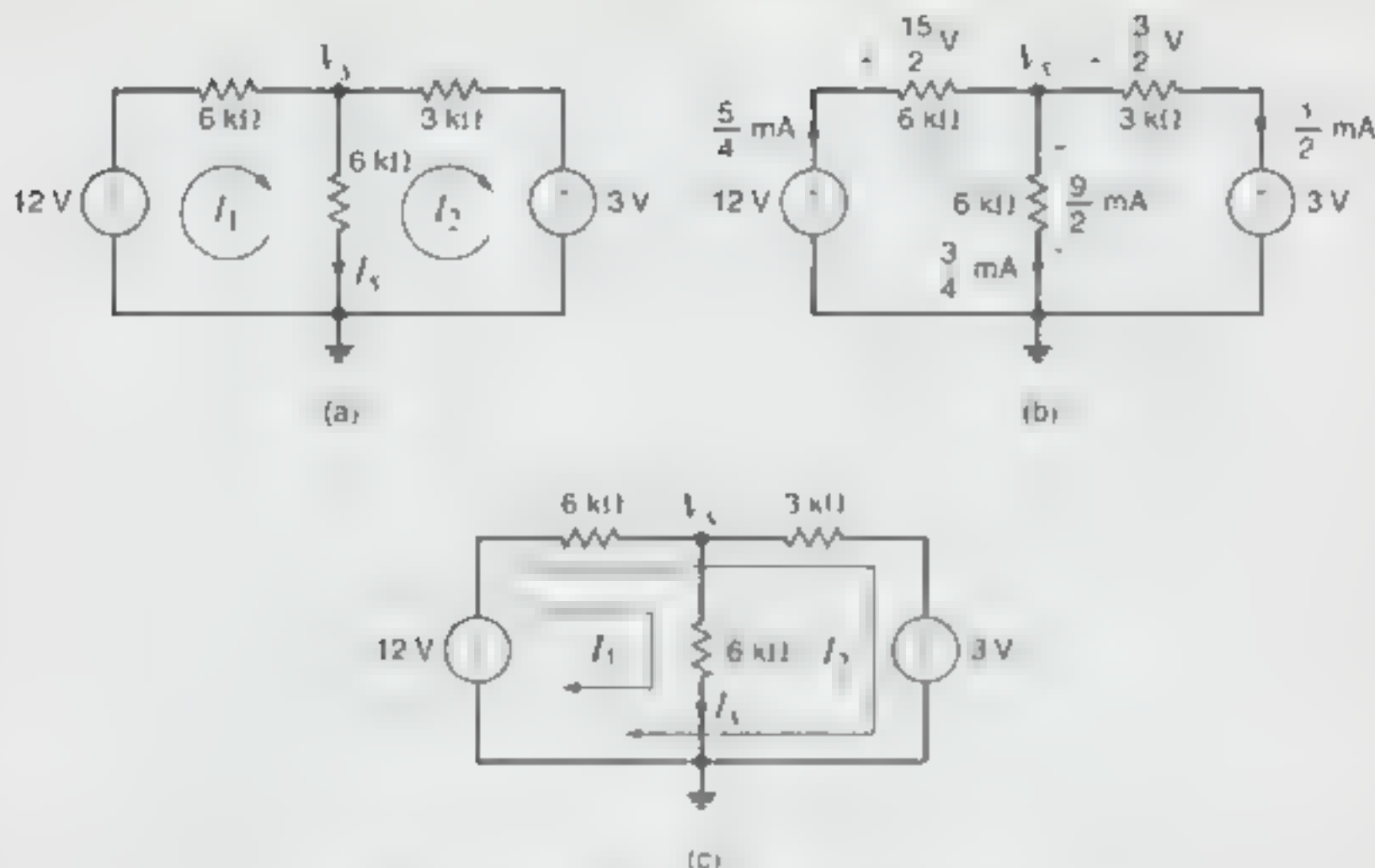


Figura 3.20 Circuito utilizado no Exemplo 3.12.

Novamente, deve-se observar a forma simétrica das equações das malhas que descrevem o circuito apresentado na Fig. 3.19. Note que a matriz de coeficientes desse circuito é simétrica.

Uma vez que, em geral, essa simetria é obtida para as redes que contêm resistores e fontes de tensão independentes, pode-se aprender a escrever as equações das malhas por inspeção. Na primeira equação, o coeficiente de i_1 é a soma das resistências por meio das quais flui a corrente da malha 1, e o coeficiente de i_2 é o negativo da soma das resistências comuns às correntes das malhas 1 e 2. O lado direito da equação é a soma algébrica das tensões das fontes presentes na malha 1. O sinal da tensão da fonte de tensão será positivo se ela atender ao sentido admitido para o fluxo da corrente e negativo se ela se opor ao sentido desse fluxo. A primeira equação é decorrente da aplicação da

LKT para a malha 1. Na segunda equação, o coeficiente de i_2 é a soma de todas as resistências presentes na malha 2, o coeficiente de i_1 é o negativo da soma das resistências comuns às malhas 1 e 2, e o lado direito da equação é a soma algébrica das tensões das fontes presentes na malha 2. Em geral, admite-se que todas as correntes da malha possuem o mesmo sentido (sentido horário ou anti-horário). Assim, se a LKT é aplicada à malha j com a corrente de malha i_j , o coeficiente de i_j será a soma das resistências na malha j e os coeficientes das outras correntes de malha (por exemplo, i_{j-1} , i_{j+1}) serão os negativos das resistências comuns àquelas malhas e à malha j . O lado direito da equação será igual à soma algébrica das tensões das fontes presentes na malha j . Essas tensões das fontes possuirão sinais positivos se estiverem de acordo com o fluxo da corrente i_j e sinais negativos em caso contrário.

EXEMPLO 3.13

Seja a determinação das equações das malhas do circuito mostrado na Fig. 3.21. Em seguida, utilizando o programa MATLAB, as equações devem ser resolvidas para se obter as correntes das malhas.

SOLUÇÃO

As três equações simultâneas linearmente independentes são

$$\begin{aligned} (4k + 6k)I_1 - (0)I_2 - (6k)I_3 &= -6 \\ -(0)I_1 + (9k + 3k)I_2 - (3k)I_3 &= 6 \\ -(6k)I_1 - (3k)I_2 + (3k + 6k + 12k)I_3 &= 0 \end{aligned}$$

ou, na forma matricial,

$$\begin{bmatrix} 10k & 0 & -6k \\ 0 & 12k & -3k \\ 6k & -3k & 21k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 \\ 6 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Observe a forma simétrica das equações. A forma geral da equação matricial é

$$\mathbf{R}\mathbf{I} = \mathbf{V}$$

e a solução dessa equação matricial é

$$\mathbf{I} = \mathbf{R}^{-1}\mathbf{V}$$

A realização da operação indicada fornece as seguintes correntes para os laços:

$$I_1 = -0,6757 \text{ mA}$$

$$I_2 = 0,4685 \text{ mA}$$

$$I_3 = -0,1261 \text{ mA}$$

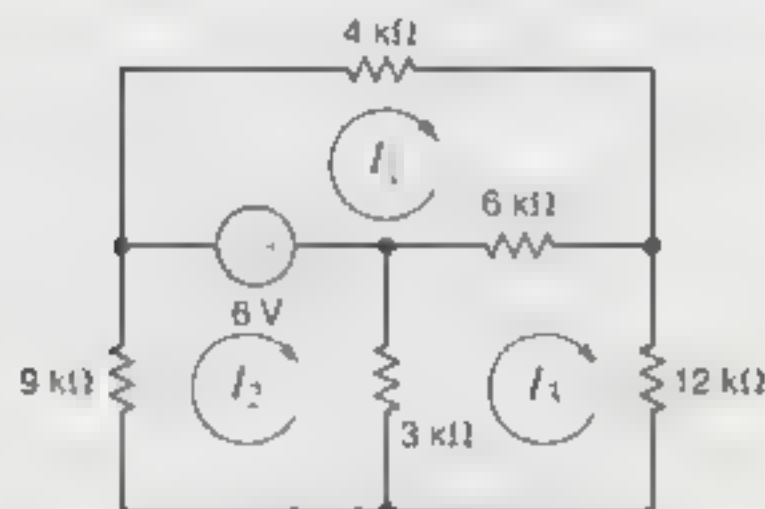


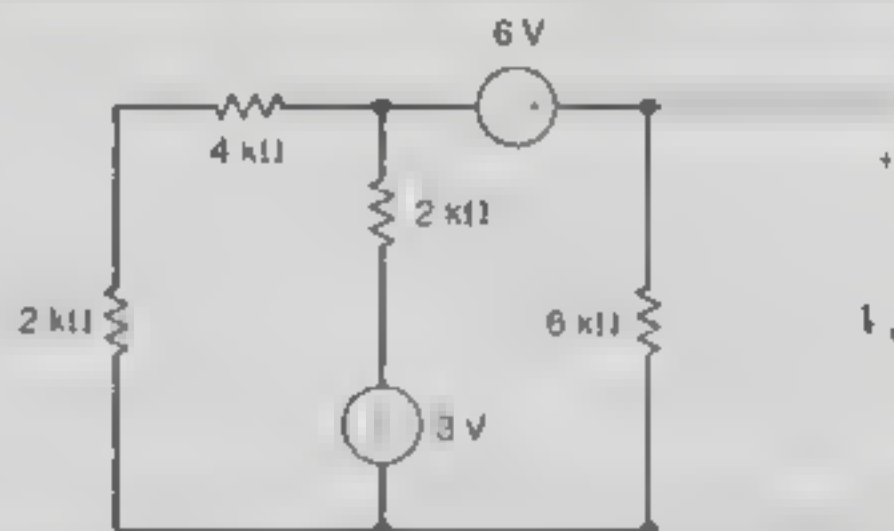
Figura 3.21 Circuito utilizado no Exemplo 3.13.

CIRCUITOS CONTENDO FONTES DE CORRENTE INDEPENDENTES Assim como a presença de uma fonte de tensão em uma rede simplificou a análise nodal, a presença de uma fonte de

corrente simplifica uma análise de laços. O exemplo a seguir ilustra essa questão.

Avaliação do Aprendizado

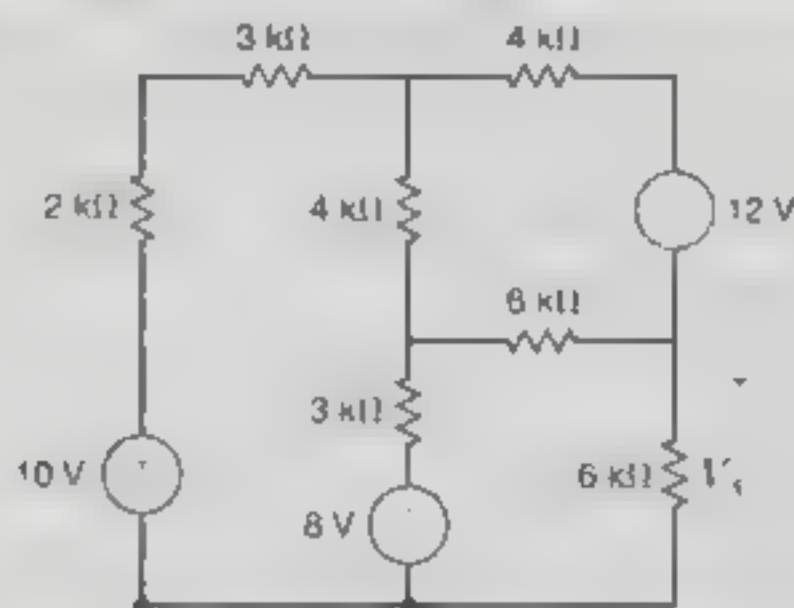
E3.13 Utilize as equações das malhas para determinar a tensão V_x do circuito mostrado na Fig. E3.13.



RESPOSTA: $V_x = \frac{32}{5} \text{ V}$.

Figura E3.13

E3.14 Determine a tensão V_x do circuito mostrado na Fig. E3.14 utilizando a análise das malhas.



RESPOSTA: $V_x = 8,96 \text{ V}$.

Figura E3.14

EXEMPLO 3.14

Seja a determinação das tensões V_x e V_y do circuito mostrado na Fig. 3.22.

SOLUÇÃO

Embora aparentemente existam duas correntes de malha incógnitas, a corrente I_1 é definida diretamente pela fonte de corrente c , portanto, I_1 está limitada a 2 mA. Assim, apenas a

corrente I_2 é efetivamente desconhecida. A aplicação da LKT para a malha mais à direita fornece

$$2k(I_2 - I_1) - 2 + 6kI_2 = 0$$

E, naturalmente,

$$I_1 = 2 \times 10^{-3}$$

Essas equações podem ser escritas como

$$\begin{aligned} -2kI_1 + 8kI_2 &= 2 \\ I_1 &= 2/k \end{aligned}$$

Resolvendo-se essas equações para I_2 , tem-se $I_2 = \frac{3}{4}$ kA e, assim,

$$V_1 = 6kI_2 = \frac{9}{2} \text{ V}$$

Para se obter V_1 , aplica-se a LKT ao longo de qualquer caminho fechado. Ao se utilizar o laço mais externo, a equação da LKT fica

$$V_1 - 4kI_1 - 2 + 6kI_2 = 0$$

e, portanto,

$$V_1 = \frac{21}{2} \text{ V}$$

Note que, como a corrente I_1 é conhecida, o resistor de $4 \text{ k}\Omega$ não entra na equação utilizada para se obter V_1 . Entretanto, ele aparece em cada laço que contém a fonte de corrente e, assim, é utilizado para se obter V_1 .

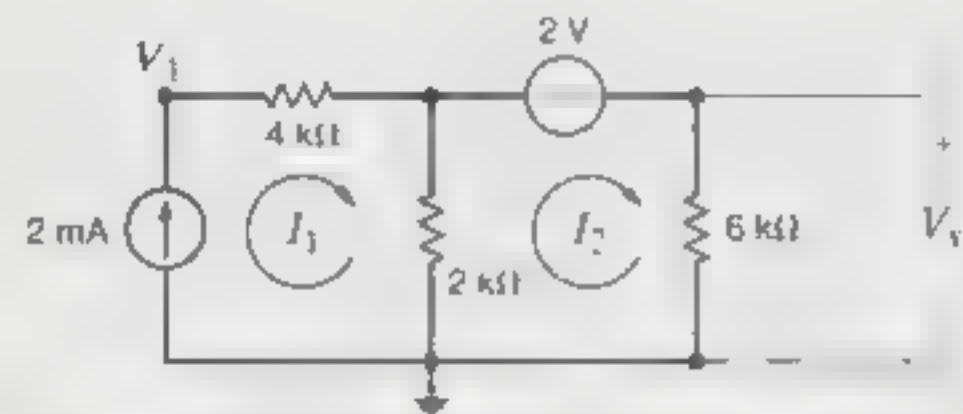


Figura 3.22 Circuito utilizado no Exemplo 3.14.

EXEMPLO 3.15

Deseja-se determinar a tensão V_1 do circuito mostrado na Fig. 3.23.

SOLUÇÃO

Uma vez que as correntes I_1 e I_2 passam diretamente por uma fonte de corrente, serão necessárias duas das três equações possíveis de serem escritas

$$\begin{aligned} I_1 &= 4 \times 10^{-3} \\ I_2 &= -2 \times 10^{-3} \end{aligned}$$

A terceira equação é obtida pela aplicação da LKT à malha que contém a fonte de tensão; isto é,

$$4k(I_2 - I_1) + 2k(I_1 - I_3) + 6kI_3 - 3 = 0$$

Essas equações fornecem

$$I_3 = \frac{1}{4} \text{ mA}$$

e, portanto,

$$V_1 = 6kI_3 = 3 = \frac{3}{2} \text{ V}$$

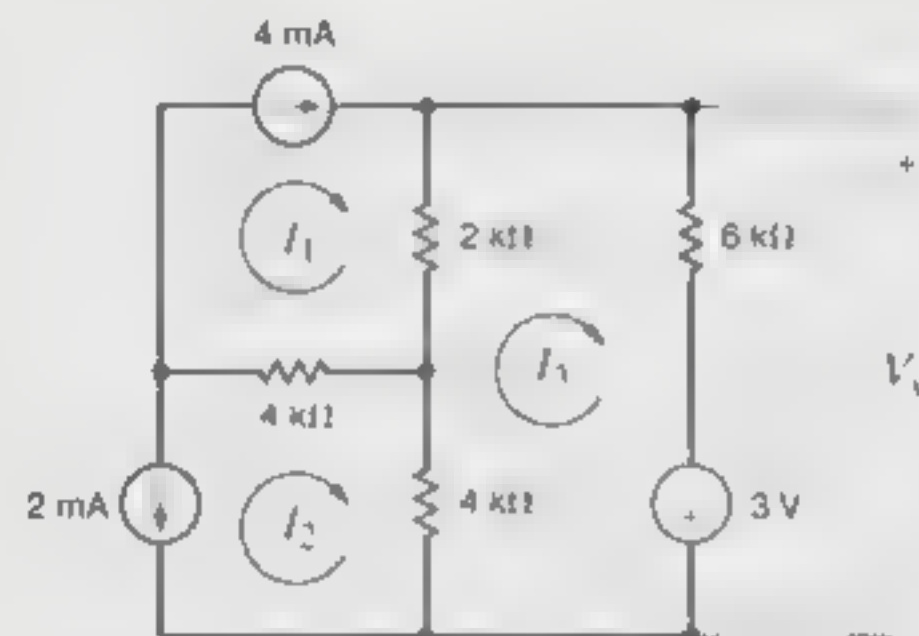


Figura 3.23 Circuito utilizado no Exemplo 3.15.

O exemplo anterior mostrou o procedimento geral de abordagem para se escrever as equações decorrentes da LKT para os problemas em que apareçam fontes de corrente independentes, isto é, utiliza-se um laço por fonte de corrente. O número de

“janelas” presentes no circuito informa quantas equações são necessárias. Utilizando a LKT, podem, assim, ser escritas equações adicionais para a análise dos componentes remanescentes do circuito. O exemplo a seguir ilustra esse procedimento.

EXEMPLO 3.16

Seja a determinação da corrente I_x do circuito mostrado na Fig. 3.24a

SOLUÇÃO

Inicialmente, são seleccionados dois laços de correntes, I_1 e I_2 , de forma que I_1 passe diretamente pela fonte de 2 mA, e I_2

passa diretamente pela fonte de 4 mA, conforme ilustrado na Fig. 3.24b. Assim, duas das três equações linearmente independentes são

$$I_1 = 2 \times 10^{-3}$$

$$I_2 = 4 \times 10^{-3}$$

[atenção]

Neste caso, a fonte de corrente de 4 mA está localizada em um ramo entre duas malhas. Assim, serão mostradas duas técnicas de abordagem para esse tipo de situação. Uma é a técnica de laço especial e a outra é conhecida como técnica da supermalha.

O laço de corrente remanescente I_3 deve passar pelos componentes do circuito que não estejam sendo considerados pelas duas equações anteriores e, certamente, não podem passar pelas fontes de corrente. O caminho para esse laço de corrente remanescente pode ser obtido pela abertura do circuito nas fontes de corrente, conforme mostrado na Fig. 3.24c. Com todas as correntes definidas no circuito original, a aplicação da LKT para esse último laço, conforme mostrado na Fig. 3.24d, é

$$6 + 1kI_1 + 2k(I_2 + I_3) + 2k(I_3 + I_2 - I_1) + 1k(I_3 - I_1) = 0$$

A solução das equações fornece

$$I_3 = -\frac{2}{3} \text{ mA}$$

e, portanto,

$$I_x = I_1 - I_2 - I_3 = -\frac{4}{3} \text{ mA}$$

Considere a seguir a técnica da supermalha. Nesse caso, as três correntes de malha são especificadas conforme mostrado

na Fig. 3.24e e, uma vez que a tensão entre os terminais da fonte de corrente de 4 mA é desconhecida, pode-se admiti-la como V_x . As correntes das malhas limitadas pelas fontes de corrente são

$$I_1 = 2 \times 10^{-3}$$

$$I_2 = I_3 = 4 \times 10^{-3}$$

As equações decorrentes da aplicação da LKT para as malhas 2 e 3 são, respectivamente,

$$2kI_2 + 2k(I_2 - I_1) - V_x = 0$$

$$6 + 1kI_1 + V_x + 1k(I_3 - I_1) = 0$$

A soma das duas últimas equações fornece

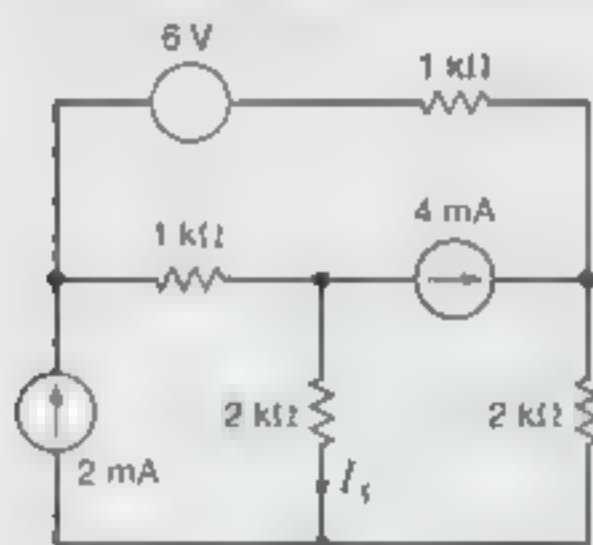
$$-6 + 1kI_1 + 2kI_2 + 2k(I_2 - I_1) + 1k(I_3 - I_1) = 0$$

Note que a tensão incógnita V_x foi eliminada. As duas equações de restrição, juntamente com essa última equação, fornecem o resultado desejado.

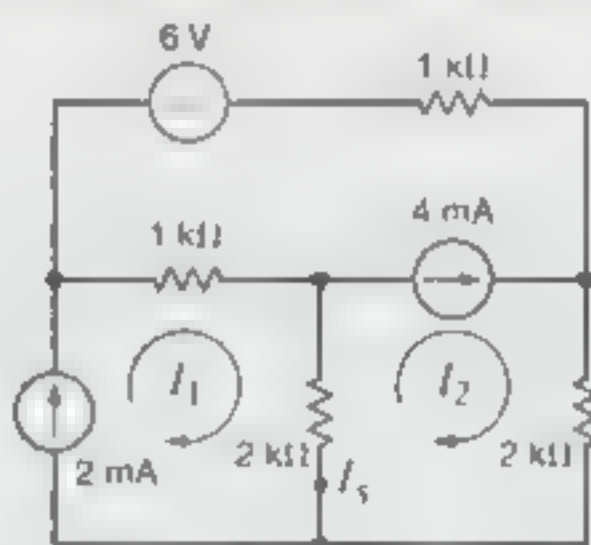
O objetivo do procedimento utilizando o conceito de supermalha é o de se evitar a introdução da tensão incógnita V_x . A supermalha é criada pela eliminação, mentalmente, da fonte de corrente de 4 mA, conforme mostrado na Fig. 3.24f. Ao se escrever a equação decorrente da aplicação da LKT, percorrendo o caminho pontilhado que define a supermalha, utilizando a malha de correntes original conforme mostrado na Fig. 3.24e, tem-se

$$-6 + 1kI_1 + 2kI_2 + 2k(I_2 - I_1) + 1k(I_3 - I_1) = 0$$

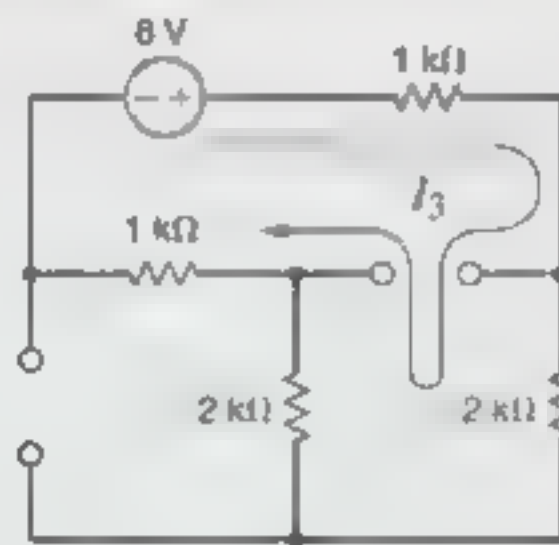
Observe que essa equação da supermalha é a mesma equação obtida anteriormente pela introdução da tensão V_x .



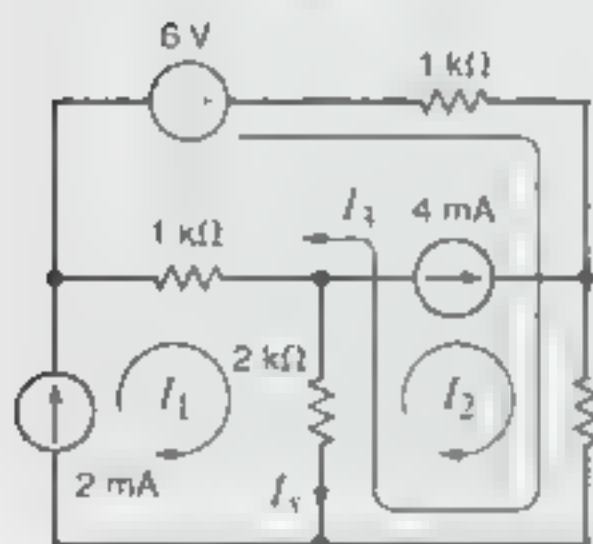
(a)



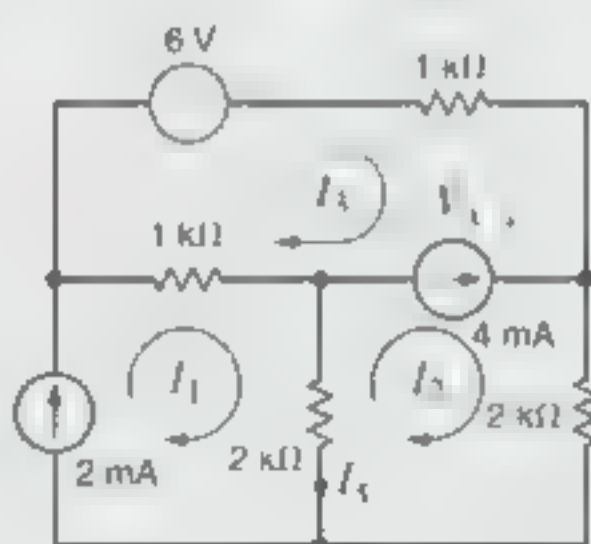
(b)



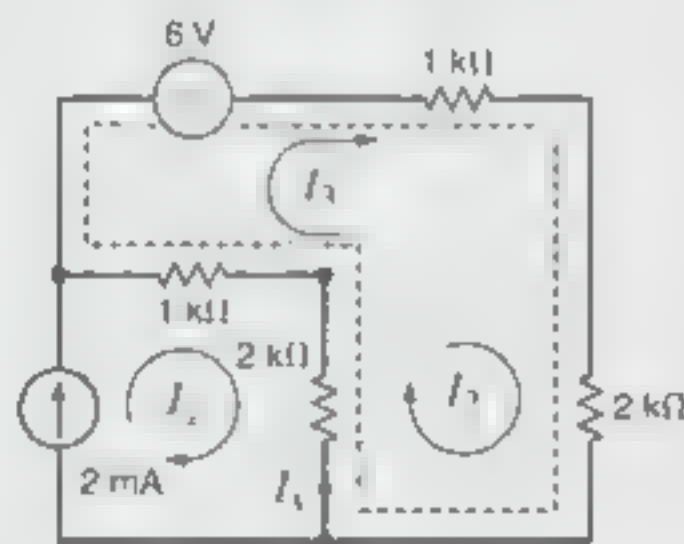
(c)



(d)



(e)



(f)

Figura 3.24 Circuitos utilizados no Exemplo 3.16.

Avaliação do Aprendizado

E3.15 Determine a tensão V_x do circuito mostrado na Fig. E3.15.

RESPOSTA: $V_x = \frac{33}{5} \text{ V}$

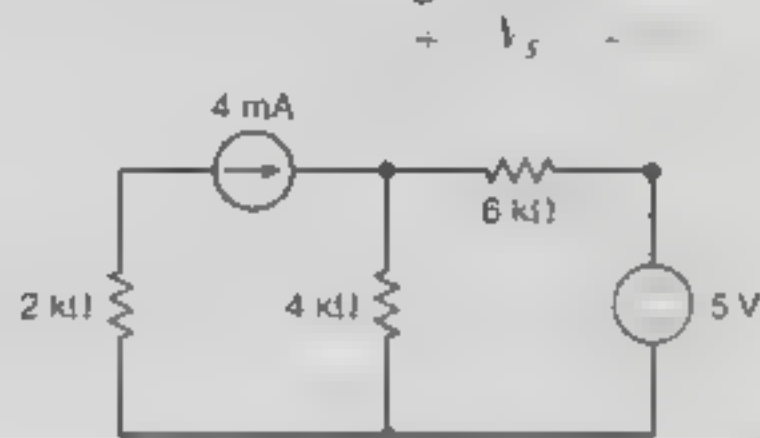


Figura E3.15

E3.16 Determine a tensão V_x do circuito mostrado na Fig. E3.16.

RESPOSTA: $V_x = \frac{32}{5} \text{ V}$

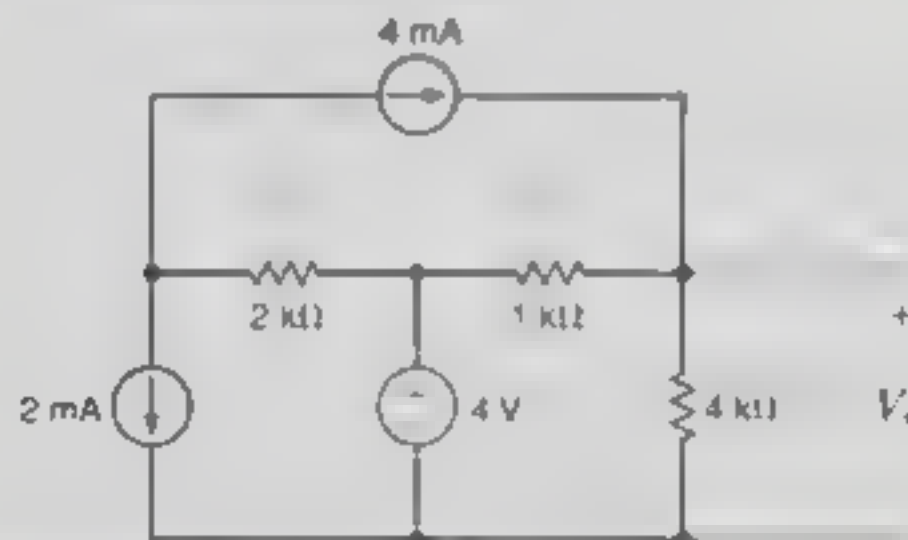


Figura E3.16

E3.17 Determine a tensão V_x do circuito mostrado na Fig. E3.17 utilizando a análise dos laços.

RESPOSTA: $V_x = 9,71 \text{ V}$

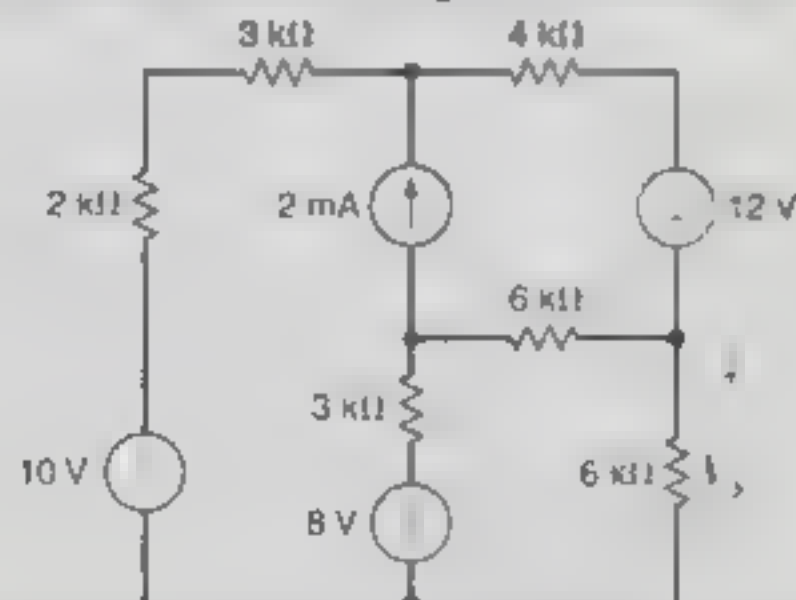


Figura E3.17

E3.18 Determine a tensão V_x do circuito mostrado na Fig. E3.17 utilizando a análise das malhas. RESPOSTA: $V_x = 9,71 \text{ V}$.

CIRCUITOS CONTENDO FONTES DEPENDENTES Os circuitos que contêm fontes dependentes são tratados da mesma forma que nos casos anteriores. Inicialmente, ao se escrever as equações decorrentes da aplicação da LKT, considera-se uma

fonte dependente como se ela fosse uma fonte independente. Em seguida, escreve-se a equação de controle para a fonte dependente. Os exemplos a seguir ilustram essa situação

EXEMPLO 3.17

Seja a determinação da tensão V_x do circuito mostrado na Fig. 3.25, o qual contém uma fonte de tensão controlada por tensão.

SOLUÇÃO

As equações referentes às correntes das malhas mostradas na figura são

$$\begin{aligned} -2V_x + 2k(I_1 + I_2) + 4kI_1 &= 0 \\ -2V_x + 2k(I_1 + I_2) - 3 + 6kI_2 &= 0 \end{aligned}$$

em que

$$V_x = 4kI_1$$

Essas equações podem ser combinadas e escritas como

$$\begin{aligned} -2kI_1 + 2kI_2 &= 0 \\ 6kI_1 - 8kI_2 &= 3 \end{aligned}$$

Essas equações podem ser colocadas na forma $RI = V$, em que

$$R = \begin{bmatrix} -2000 & 2000 \\ 6000 & 8000 \end{bmatrix} \quad I = \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} \quad V = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}$$

A solução desse sistema é $I = R^{-1}V$, e essa operação fornece

$$i_1 = 1,5 \text{ mA}$$

$$i_2 = 1,5 \text{ mA}$$

e, portanto,

$$V_1 = 6k i_2 = 9 \text{ V}$$

Para efeito de comparação, este problema é também resolvido utilizando a análise nodal. A presença das fontes de tensão indica que este método poderia ser mais simples. Considerando a fonte de 3 V e seus nós de conexão como um supernó e

escrevendo a equação proveniente da LKC para este supernó tem-se

$$\frac{V_1}{2k} + \frac{V_1}{4k} + \frac{V_1 + 3}{6k} = 0$$

em que

$$V_1 = V_1 + 3$$

Essas equações também fornecem $V_1 = 9 \text{ V}$.

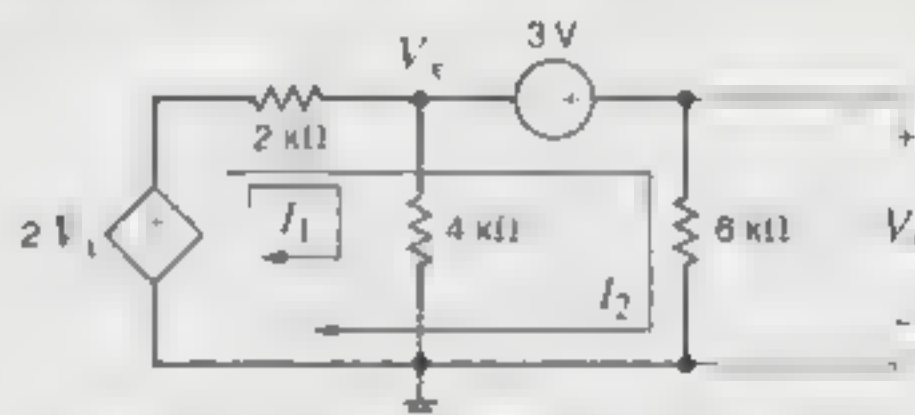


Figura 3.25 Circuito utilizado no Exemplo 3.17.

EXEMPLO 3.18

Seja a determinação da tensão V_1 do circuito mostrado na Fig. 3.26, o qual contém uma fonte de corrente controlada por tensão.

SOLUÇÃO

As correntes I_1 e I_2 são indicadas passando pelas fontes de corrente. Portanto, duas das equações necessárias são

$$I_1 = \frac{V_1}{2000}$$

$$I_2 = 2 \times 10^{-3}$$

A equação proveniente da LKT para a terceira malha é

$$-3 + 2k(I_3 - I_1) + 6kI_3 = 0$$

em que

$$V_1 = 4k(I_1 - I_2)$$

Combinando essas equações, tem-se

$$-I_1 + 2I_2 = 0$$

$$I_2 = 2/k$$

$$-2kI_2 + 8kI_1 = 3$$

Essas equações podem ser expressas na forma matricial como $IR = V$, em que

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2000 & 0 & 8000 \end{bmatrix} \quad I = \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} \quad V = \begin{bmatrix} 0 \\ 0,002 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Realizando-se a operação $I = R^{-1}V$, obtêm-se as correntes

$$i_1 = 4,0 \text{ mA}$$

$$i_2 = 2,0 \text{ mA}$$

$$i_3 = 1,375 \text{ mA}$$

E, portanto, $V_1 = 8,25 \text{ V}$.

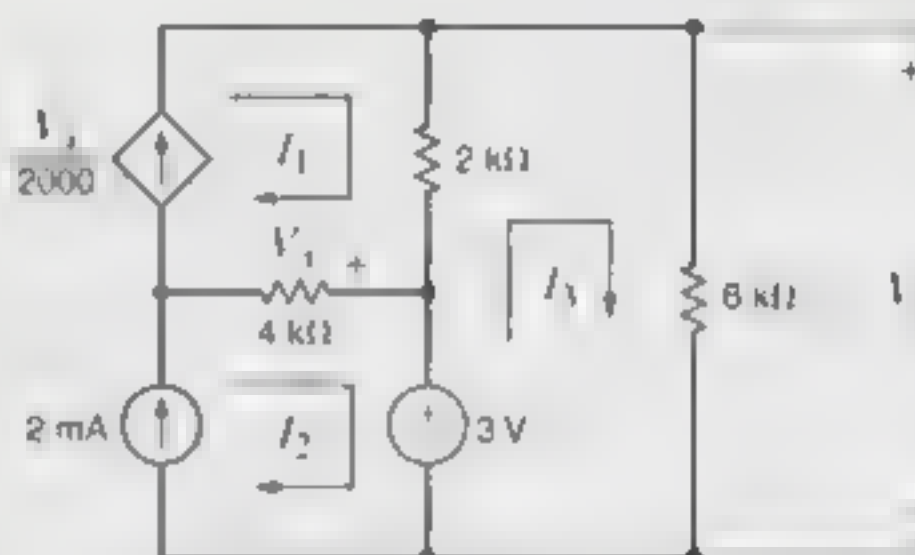


Figura 3.26 Circuito utilizado no Exemplo 3.18.

EXEMPLO 3.19

A rede mostrada na Fig. 3.27 contém tanto uma fonte de tensão controlada por corrente quanto uma fonte de corrente controlada por tensão. Utilize o programa MATLAB para determinar as correntes dos laços.

SOLUÇÃO

As equações para as correntes dos laços mostrados na figura são

$$I_3 = \frac{4}{k}$$

$$I_4 = \frac{V_1}{2k}$$

$$-1kI_1 + 2k(I_3 - I_1) + 1k(I_3 - I_4) = 0$$

$$1k(I_4 - I_3) + 1k(I_4 - I_2) + 12 = 0$$

em que

$$V_x = 2k(I_3 - I_1)$$

$$I_x = I_3 - I_2$$

A combinação dessas equações fornece

$$\begin{aligned} I_1 + I_2 - I_3 &= 0 \\ 1kI_1 + 3kI_3 - 2kI_4 &= 8 \\ 1kI_2 + 1kI_3 - 2kI_4 &= 12 \end{aligned}$$

Na forma matricial essas equações ficam

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1k & 3k & -2k \\ 0 & 1k & 1k & -2k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ k \\ 8 \\ 12 \end{bmatrix}$$

As equações ficam, assim, na forma matricial $RI = V$, e a solução desse sistema de equações é $I = R^{-1}V$, que fornece os valores

$$I_1 = 4,0 \text{ mA}$$

$$I_2 = 6,0 \text{ mA}$$

$$I_3 = 2,0 \text{ mA}$$

$$I_4 = 1,0 \text{ mA}$$

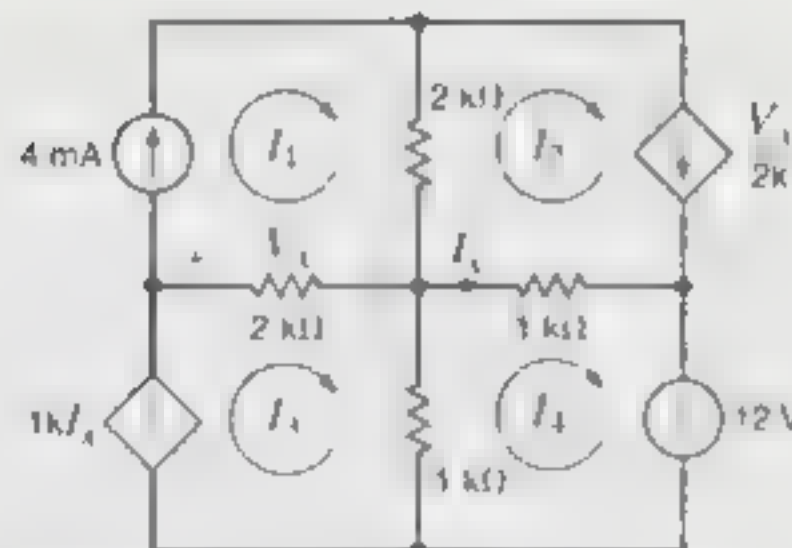


Figura 3.27 Circuito utilizado no Exemplo 3.19.

EXEMPLO 3.20

Examina-se, agora, novamente, o circuito do Exemplo 3.10, que será analisado utilizando as equações dos laços. Lembre-se de que como a rede possui duas fontes de tensão, a análise nodal se torna mais simples. Da mesma forma, a presença das fontes de corrente simplifica a análise dos laços.

Claramente, a rede possui quatro laços e, assim, são necessárias quatro equações linearmente independentes para se determinar as correntes dos laços. A rede é redesenhada na Fig. 3.28, em que as correntes dos laços são especificadas. Observe que foi indicada uma corrente para cada fonte de corrente independente. Essa escolha de correntes simplifica a análise, uma vez que duas das quatro equações ficam

$$I_1 = 2/k$$

$$I_3 = -2/k$$

As duas outras equações, provenientes da LKT, para as correntes dos laços, I_2 e I_4 , são

$$\begin{aligned} 2V_x + 1kI_2 + (I_2 - I_4)1k &= 0 \\ (I_4 + I_2 - I_4)1k - 2V_x + 1kI_2 + 4 &= 0 \end{aligned}$$

em que

$$V_x = 1k(I_1 - I_3)$$

A substituição das equações para I_1 e I_3 nas duas equações da LKT, fornece

$$\begin{aligned} 2kI_2 + 2kI_4 &= 6 \\ 1kI_4 &= 8 \end{aligned}$$

Resolvendo essas equações para I_2 e I_4 , obtém-se

$$I_4 = 2 \text{ mA}$$

$$I_2 = 1 \text{ mA}$$

e, assim,

$$V_x = 1 \text{ V}$$

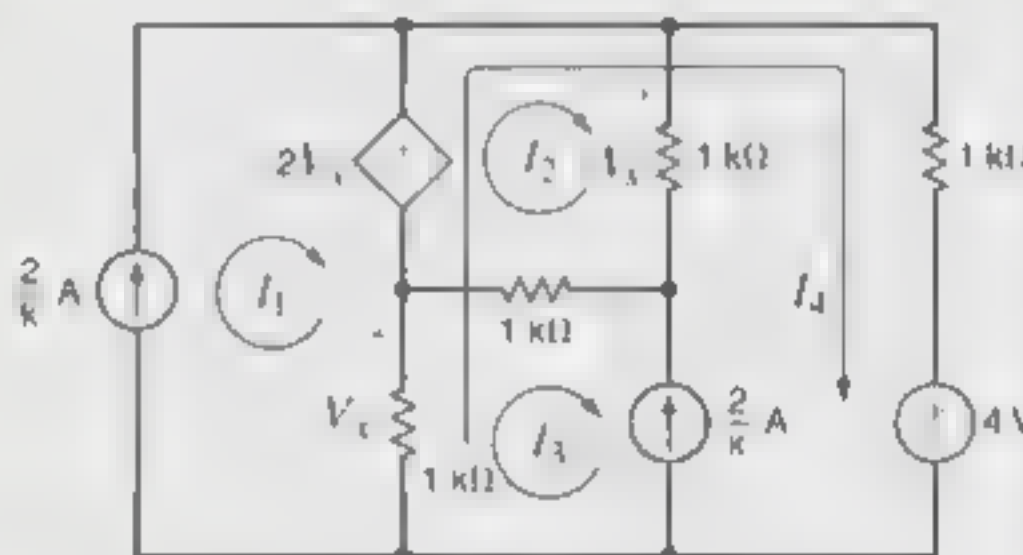


Figura 3.28 Circuito utilizado no Exemplo 3.20.

EXEMPLO 3.21

Considera-se, agora, novamente, o circuito do Exemplo 3.11. Dessa vez a rede será examinada utilizando a análise dos laços. Embora existam quatro fontes, duas das quais dependentes, ape-

nas uma delas é uma fonte de corrente. Assim, em princípio, espera-se que a análise dos laços seja mais trabalhosa que a análise nodal. Naturalmente, observa-se que o circuito contém seis laços. Portanto, são necessárias seis equações linearmente independentes para resolver o problema para todas as correntes incógnitas

A rede é redesenhada na Fig. 3.29, em que os laços são especificados. As seis equações da LKT que descrevem a rede são

$$1kI_1 + 1k(I_1 - I_2) + 1k(I_1 - I_4) = 0$$

$$1k(I_2 - I_1) + 6 + 1k(I_2 - I_5) = 0$$

$$I_1 = 2I_4$$

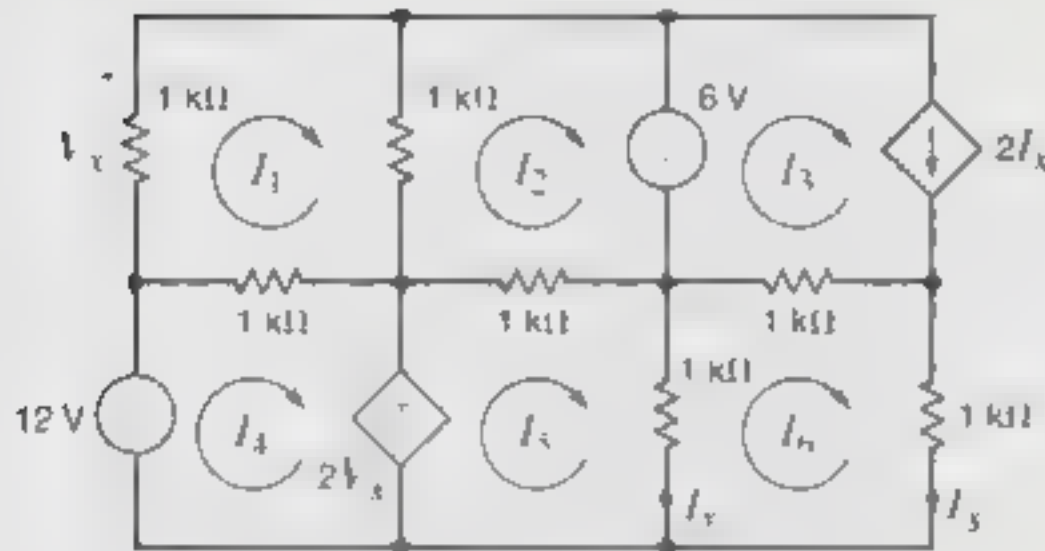


Figura 3.29 Circuito utilizado no Exemplo 3.21.

$$-12 + 1k(I_4 - I_1) + 2V_x = 0$$

$$-2V_x + 1k(I_5 - I_2) + 1k(I_1 - I_4) = 0$$

$$1k(I_1 - I_2) + 1k(I_4 - I_5) + 1kI_6 = 0$$

As variáveis de controle das duas fontes dependentes são

$$V_x = 1kI_1$$

$$I_x = I_1 - I_2$$

A substituição dos parâmetros de controle nas seis equações provenientes da LKT fornece

$$3I_1 - I_2 + 0 - I_4 + 0 + 0 = 0$$

$$-I_1 + 2I_2 + 0 + 0 - I_5 + 0 = 6/k$$

$$0 + 0 + I_2 + 0 - 2I_5 + 2I_6 = 0$$

$$-3I_1 + 0 + 0 + I_4 + 0 + 0 = 12/k$$

$$2I_1 + I_2 + 0 + 0 + 2I_5 + I_6 = 0$$

$$0 + 0 + 0 + 0 - 3I_5 + 5I_6 = 0$$

as quais podem ser reescritas na forma matricial como

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & 2 \\ -3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \\ I_5 \\ I_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 6/k \\ 0 \\ 12/k \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

A solução da equação matricial $RI = V$ é

$$I_1 = 50,0 \text{ mA}$$

$$I_2 = -12,0 \text{ mA}$$

$$I_3 = 64,0 \text{ mA}$$

$$I_4 = 162,0 \text{ mA}$$

$$I_5 = 80,0 \text{ mA}$$

$$I_6 = 48,0 \text{ mA}$$

Como última consideração dentro deste contexto, cabe ressaltar que é muito importante examinar-se o circuito cuidadosamente antes de se adotar um procedimento de análise. Um método pode ser muito mais simples que outro; e um pequeno tempo investido antes da solução pode evitar um desperdício de tempo com longos desenvolvimentos. Para um circuito com N nós, devem ser formuladas $N - 1$ equações linearmente independentes para se determinar as $N - 1$ tensões nodais. Um circuito com N laços requer a formulação de N equações linearmente independentes. Uma consideração na escolha de um método seria o número de equações linearmente independentes que devem ser formuladas. O mesmo circuito foi resolvido no Exemplo 3.10 utilizando a análise nodal e no Exemplo 3.20 utilizando a análise dos laços. O circuito apresentado na Fig. 3.30 possui quatro tensões nodais incógnitas. Como resultado, são necessárias quatro equações linearmente independentes. Como existem duas fontes de tensão, são necessárias duas equações de restrição.

Foi destacado no Exemplo 3.20 que esse mesmo circuito possui quatro laços, o que requer quatro equações linearmente independentes. As duas fontes de corrente produzem duas equações de restrição.

O esforço necessário para se resolver esse circuito utilizando a análise nodal ou a análise dos laços é similar. Entretanto, essa situação não é verdadeira para muitos circuitos. Considere o circuito mostrado na Fig. 3.30. Esse circuito possui oito laços. A seleção das correntes dos laços, de modo que apenas uma corrente de laço flua pela fonte de corrente independente, resulta em sete correntes de laço incógnitas. Como esse circuito possui sete nós, existem seis tensões nodais e, portanto, devem ser formuladas seis equações linearmente independentes. Por meio de seleção criteriosa do nó inferior como nó de referência, quatro das tensões nodais são conhecidas, o que resulta em apenas duas tensões nodais incógnitas — a tensão nodal pela fonte de corrente e a tensão nodal por resistores de 3Ω e 6Ω . A aplicação

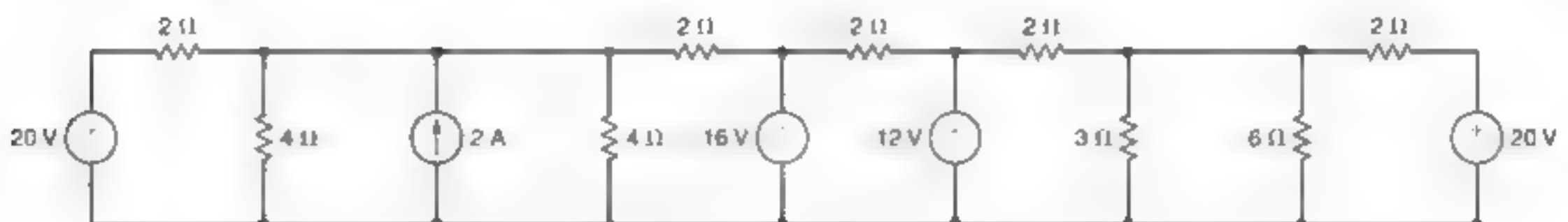


Figura 3.30 Circuito utilizado na discussão da seleção de uma técnica de análise.

da LKC a esses dois nós fornece duas equações que podem ser resolvidas para as duas tensões nodais incógnitas. Mesmo com o uso das modernas calculadoras ou de um programa de com-

putador, como o MATLAB, a solução de duas equações simultâneas requer um esforço menor que a solução de sete equações simultâneas, o que seria necessário pela análise dos laços.

Estratégia para Solução de Problemas

Análise de Laços

Etapa 1. Determine o número de laços independentes do circuito. Designe uma corrente de laço para cada laço independente. Para um circuito com N laços, existem N correntes de laço. Logo, devem ser escritas N equações linearmente independentes para se determinar as correntes dos laços.

Caso o circuito contenha fontes de corrente, qualquer das duas técnicas pode ser empregada. No primeiro caso, uma corrente de laço é selecionada de modo que passe por uma das fontes de corrente. As correntes de laço remanescentes são determinadas abrindo-se o circuito nas fontes de corrente do circuito e utilizando esse circuito modificado para selecioná-las. No segundo caso, uma corrente é designada para cada malha do circuito.

Etapa 2. Escreva uma equação de restrição para cada fonte de corrente – independente ou dependente – do

circuito em termos das correntes de laço designadas utilizando a LKC. Cada equação de restrição representa uma das equações linearmente independentes necessárias, e N_i fontes de corrente fornecem N_i equações linearmente independentes. Para cada fonte de corrente dependente, expresse a variável de controle da fonte em termos das correntes dos laços.

Etapa 3. Utilize a LKT para formular as $N - N_i$ equações linearmente independentes remanescentes. Ao estabelecer as equações da LKT, considere as fontes de tensão dependentes como fontes de tensão independentes. Para cada fonte de tensão dependente, expresse a variável de controle em termos das correntes dos laços.

Avaliação do Aprendizado

E3.19 Utilize a análise das malhas para determinar a tensão V_x do circuito mostrado na Fig. E3.19.

RESPOSTA: $V_x = 12\text{ V}$.

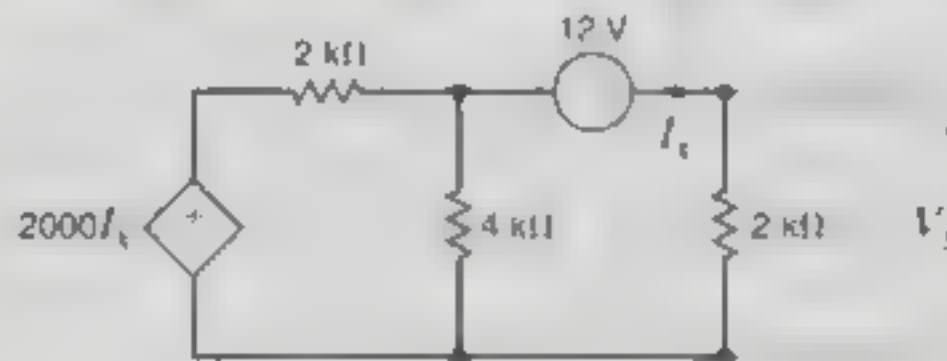


Figura E3.19

E3.20 Utilize a análise dos laços para resolver a rede mostrada no Exemplo 3.5 e compare o tempo e o esforço envolvidos nas duas técnicas de solução.

E3.21 Utilize a análise nodal para resolver o circuito mostrado no Exemplo 3.15 e compare o tempo e o esforço envolvidos nas duas estratégias de solução.

E3.22 Determine a tensão V_x do circuito mostrado na Fig. E3.22 utilizando a análise das malhas.

RESPOSTA: $V_x = 6,97\text{ V}$.

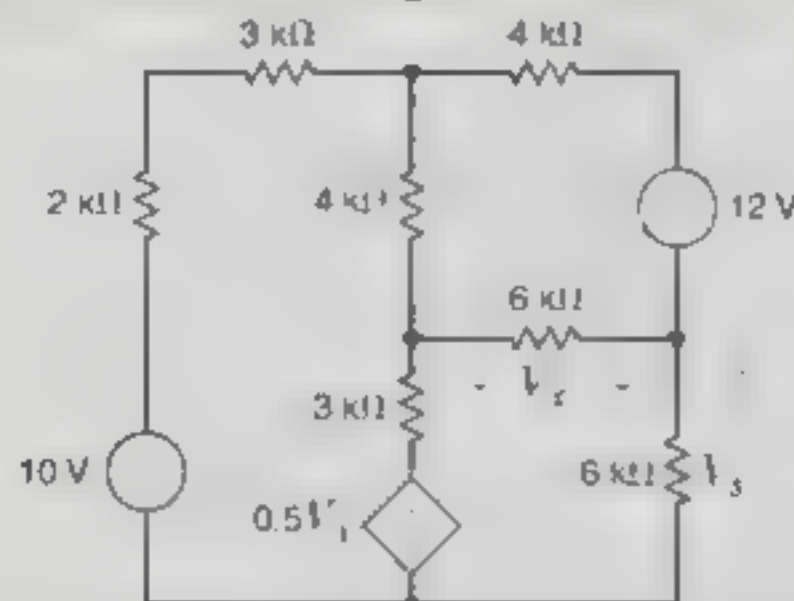


Figura E3.22

E3.23 Determine a tensão V_x da rede mostrada na Fig. E3.23 utilizando a análise das malhas

RESPOSTA: $V_x = 9 \text{ V}$.

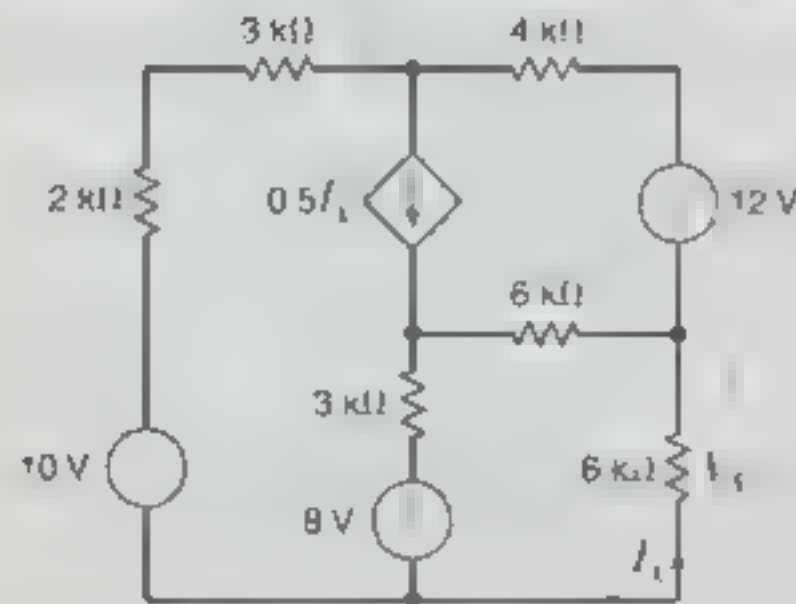


Figura E3.23

3.3 Exemplo de Aplicação

EXEMPLO DE APLICAÇÃO 3.22

A Fig. 3.31a mostra, conceitualmente, um circuito utilizado para o ajuste manual da velocidade de um motor elétrico CC. Os resistores R_1 e R_2 representam um componente interno chamado potenciômetro, o qual nada mais é que um resistor ajustável, utilizado, por exemplo, no controle de volume. Um giro no botão de controle muda a relação $\alpha = R_2/(R_1 + R_2)$, porém a resistência total, $R_{\text{pot}} = R_1 + R_2$, permanece inalterada. Dessa forma, o potenciômetro forma um divisor de tensão que ajusta a tensão V_{veloc}^* . A saída do amplificador de potência, V_M , é quatro vezes maior que V_{veloc}^* . Dos amplificadores de potência podem sair as altas correntes necessárias para acionar o motor. Finalmente, a velocidade do motor CC é proporcional

a V_M ; isto é, a velocidade em rpm é igual a uma constante k que multiplica a tensão V . Sem o conhecimento dos detalhes do amplificador de potência, seria possível analisar esse sistema? Em particular, é possível desenvolver uma relação entre a velocidade do motor em rpm e α ?

SOLUÇÃO

Como a tensão de saída do amplificador de potência é proporcional à sua entrada, pode-se modelar o amplificador como uma simples fonte dependente. O esquema de circuito resultante é o mostrado na Figura 3.31b. Desenvolve-se, agora, facilmente uma relação entre a velocidade do motor e a posição, α , do potenciômetro. As equações que governam a operação

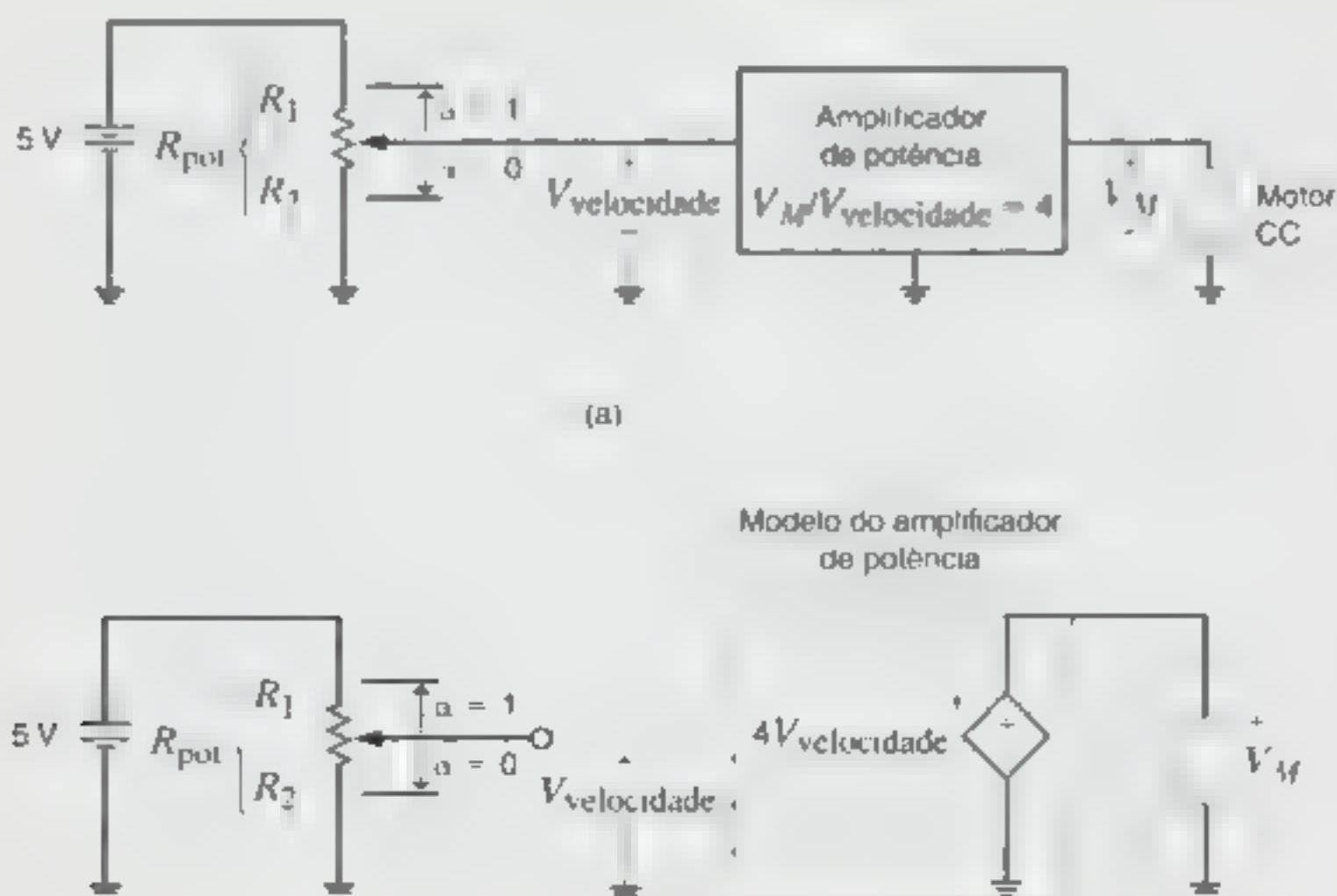


Figura 3.31 (a) Um simples acionador de motor CC e (b) o modelo de circuito utilizado para análise.

do motor, do amplificador de potência e do divisor de tensão são

$$\begin{aligned} \text{velocidade (rpm)} &= K_M V_M \\ V_M &= 4V_{\text{velocidade}} \\ V_{\text{velocidade}} &= 5 \frac{R_2}{R_1 + R_2} = 5 \left[\frac{R_2}{R_{\text{pot}} + R_2} \right] = 5\alpha \\ R_2 &= \alpha R_{\text{pot}} \quad R = (1 + \alpha) R_{\text{pot}} \end{aligned}$$

A combinação dessas relações para eliminar a tensão $V_{\text{velocidade}}$ fornece uma relação entre a velocidade do motor e α , isto é, $\text{rpm} = 20\alpha$. Se, por exemplo, a constante do motor K_M vale 50 rpm/V, então,

$$\text{rpm} = 1000\alpha$$

Essa relação estabelece que a velocidade do motor é proporcional à posição do botão do potenciômetro. Como o valor máximo de α é 1, a velocidade do motor varia na faixa de 0 a 1000 rpm.

Note que no modelo, o amplificador, modelado pela fonte dependente, pode desenvolver *qualquer* corrente demandada pelo motor. Obviamente, isso não é possível e mostra os limites impostos pelos procedimentos de modelagem. Escolhendo-se um modelo simples, foi possível desenvolver a relação necessária rapidamente. Entretanto, outras características de um amplificador de potência real foram omitidas nesse modelo.

3.4 Exemplo de Projeto

EXEMPLO DE PROJETO 3.23

Uma fonte de 8 V deve ser utilizada em conjunção com dois resistores padronizados para projetar um divisor de tensão que apresente uma saída de 5 V ao ser conectado a uma carga de 100 μA . Mantendo a potência consumida tão baixa quanto possível, deseja-se minimizar o erro entre a saída real e os 5 V requeridos.

SOLUÇÃO

O divisor pode ser modelado conforme mostrado na Fig. 3.32. A aplicação da LKC ao nó de saída fornece a equação

$$\frac{V_F}{R_1} - \frac{V}{R_2} + I_L = 0$$

Utilizando os parâmetros especificados para a tensão de entrada, para a tensão de saída desejada e para a fonte de corrente, obtém-se

$$R_1 = \frac{3R_2}{5 + (100\mu\text{A})R_2}$$

Por meio de um processo de tentativa e erro, conclui-se que excelentes valores para os dois resistores padronizados são $R_1 = 10 \text{ k}\Omega$ e $R_2 = 27 \text{ k}\Omega$. Valores maiores de resistência são utilizados para minimizar o consumo de potência. Com essa seleção de resistores, a tensão de saída é de 5,11 V, o que representa um erro percentual de apenas 2,15%.

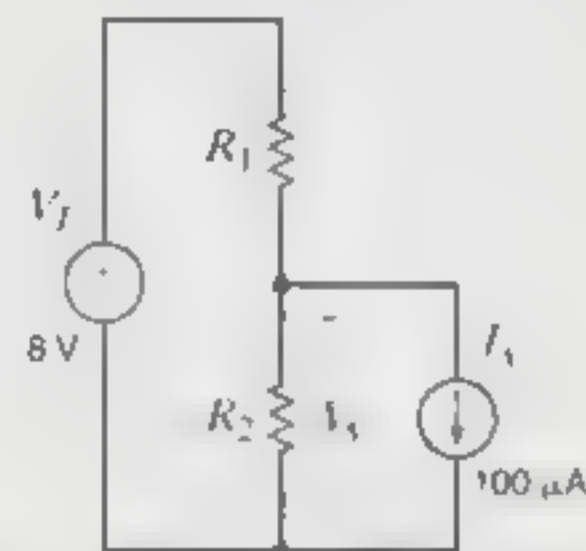


Figura 3.32 Circuito para um divisor de tensão simples com uma carga de 100 μA .

RESUMO

Análise Nodal de um Circuito com N nós

- Determine o número de nós do circuito. Escolha um nó como referência. Estabeleça uma tensão nodal entre cada nó que não seja referência e o nó de referência. Todas as tensões nodais são admitidas como positivas em relação ao nó de referência. Para um circuito de N nós, existem $N - 1$ tensões nodais. Consequentemente, devem ser escritas $N - 1$ equações linearmente independentes para que as tensões nodais possam ser determinadas.
- Utilizando a LKT, escreva uma equação de restrição para cada fonte de tensão — dependente ou independente —

do circuito em função das tensões nodais estabelecidas. Cada equação de restrição representa uma das equações linearmente independentes necessárias, e as N_v fontes de tensão fornecem N_v equações linearmente independentes. Para cada fonte de tensão dependente, expresse as variáveis de controle daquela fonte em termos das tensões nodais.

Uma fonte de tensão — dependente ou independente — pode ser conectada entre um nó que não seja o de referência e o nó de referência, ou entre dois nós que não sejam de referência. Um supernó é formado por uma fonte de tensão e seus dois nós de conexão (que não sejam de referência).

- Utilize a LKC para formular as remanescentes $N - 1 - N_t$ equações linearmente independentes. Inicialmente, aplique a LKC a cada nó que não seja referência e que não esteja conectado a uma fonte de tensão. Em seguida, aplique a LKC a cada supernó. Ao formular as equações com base na LKC, trate as fontes de corrente dependentes como fontes de corrente independentes. Para cada fonte de corrente dependente, expresse as variáveis de controle em termos das tensões nodais.

Análise dos Laços de um Circuito com N Laços

- Determine o número de laços independentes do circuito. Designe uma corrente de laço para cada laço independente. Para um circuito com N laços, existem N correntes de laço. Logo, devem ser escritas N equações linearmente independentes para que as correntes dos laços possam ser determinadas.
- Caso o circuito apresente fontes de corrente, qualquer das duas técnicas pode ser empregada. No primeiro caso, uma corrente de laço é seleccionada de modo a passar por uma das

fontes de corrente. As correntes de laço remanescentes são determinadas abrindo-se o circuito nas fontes de corrente do circuito e utilizando esse circuito modificado para seleccioná-las. No segundo caso, uma corrente é designada para cada malha do circuito.

- Escreva uma equação de restrição para cada fonte de corrente — independente ou dependente — do circuito em termos das correntes de laço designadas utilizando a LKC. Cada equação de restrição representa uma das equações linearmente independentes necessárias, e N_t fontes de corrente fornecem N_t equações linearmente independentes. Para cada fonte de corrente dependente, expresse a variável de controle da fonte em termos das correntes dos laços.
- Utilize a LKT para formular as $N - N_t$ equações linearmente independentes remanescentes. Ao estabelecer as equações da LKT, considere as fontes de tensão dependentes como fontes de tensão independentes. Para cada fonte de tensão dependente, expresse a variável de controle em termos das correntes dos laços.

PROBLEMAS

3.1 Determine a corrente I_1 do circuito mostrado na Fig. P3.1.

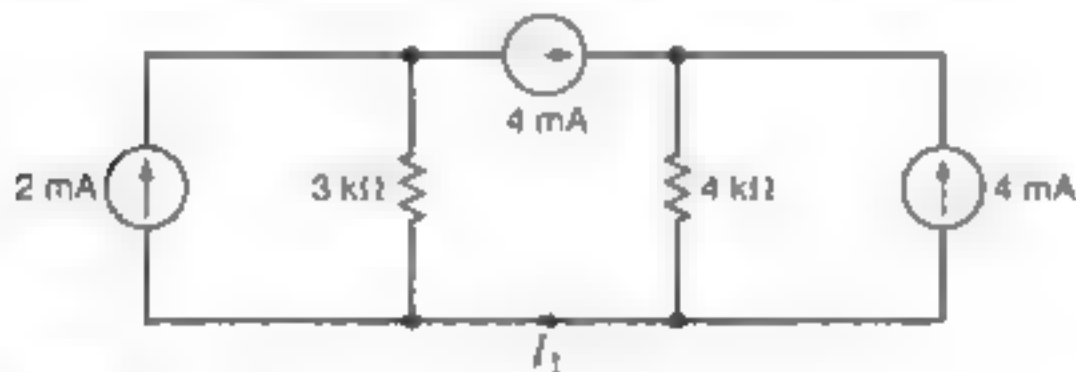


Figura P3.1

3.2 Determine a corrente I_1 da rede mostrada na Fig. P3.2.

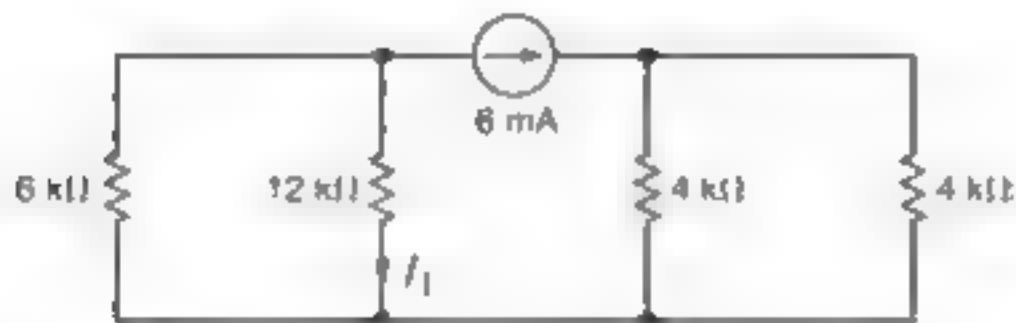


Figura P3.2

3.3 Determine a corrente I_1 do circuito mostrado na Fig. P3.3

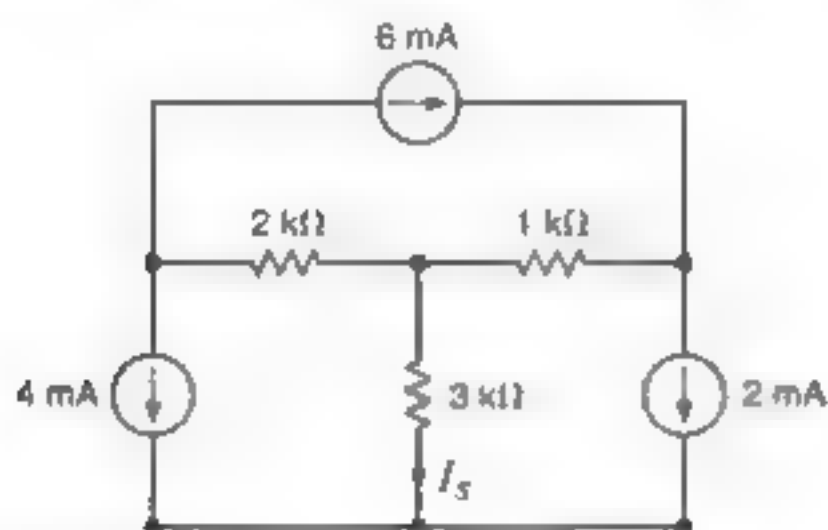


Figura P3.3

3.4 Utilize a análise nodal para determinar a tensão V_1 do circuito mostrado na Fig. P3.4.

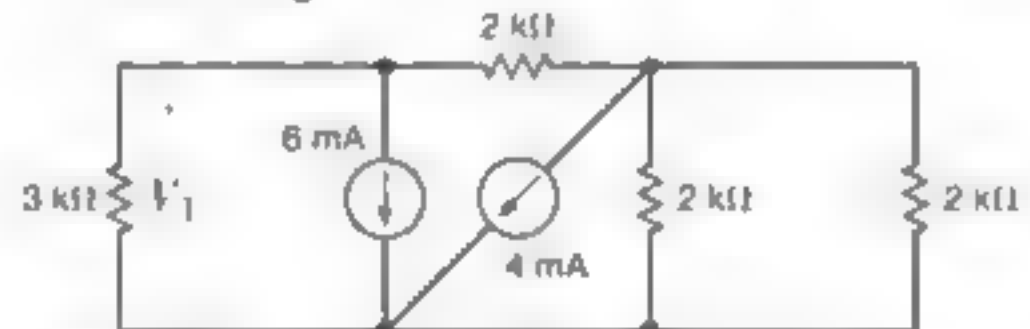


Figura P3.4

3.5 Determine as tensões V_1 e V_2 do circuito mostrado na Fig. P3.5 utilizando a análise nodal

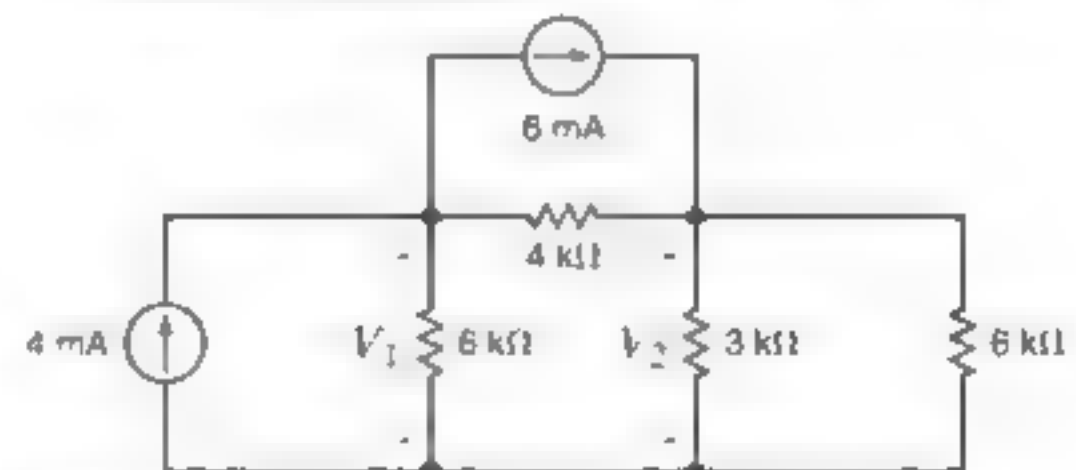


Figura P3.5

3.6 Utilize a análise nodal para determinar as tensões V_1 e V_2 do circuito mostrado na Fig. P3.6.

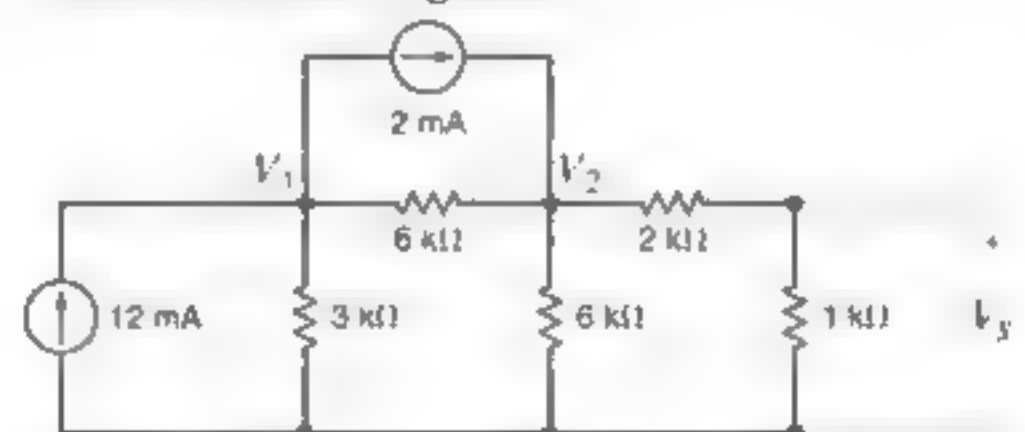


Figura P3.6

- 3.7 Determine a corrente I_s do circuito mostrado na Fig. P3.7 utilizando a análise nodal.

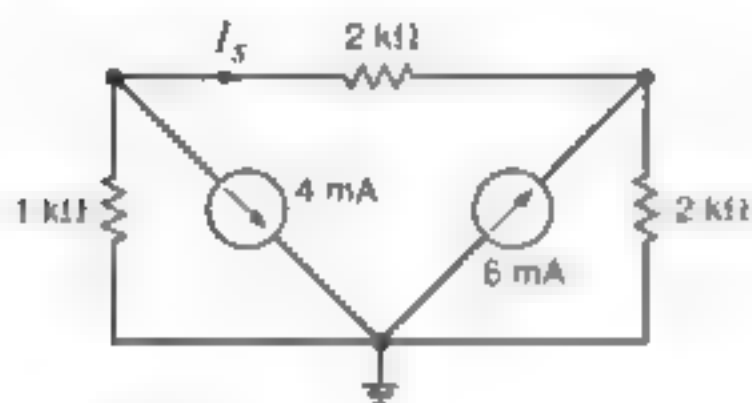


Figura P3.7

- 3.8 Determine a corrente I_s da rede mostrada na Fig. P3.8 utilizando a análise nodal.

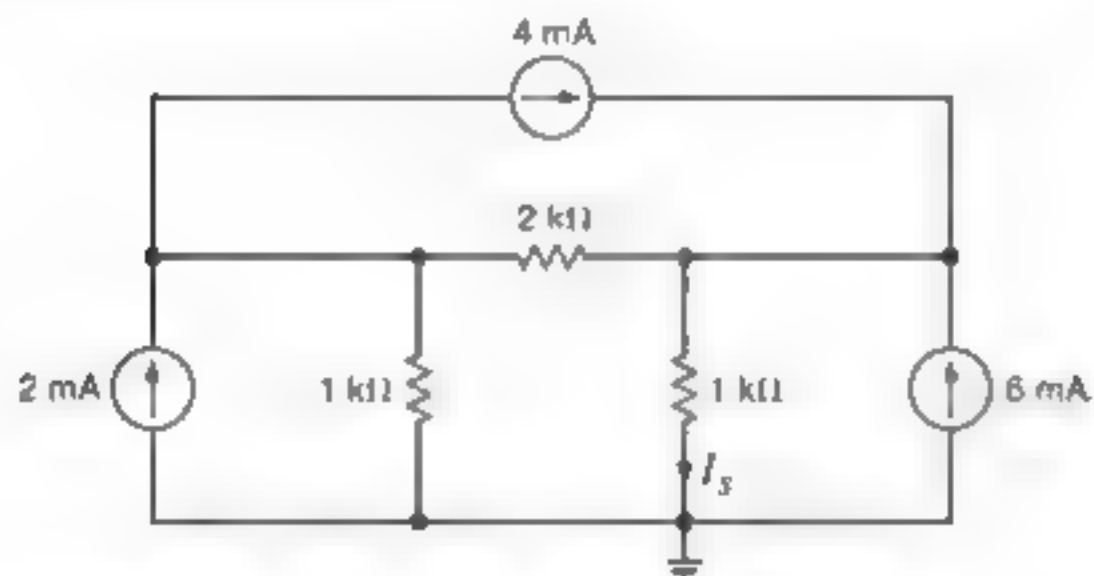


Figura P3.8

- 3.9 Determine a corrente I_s do circuito mostrado na Fig. P3.9.

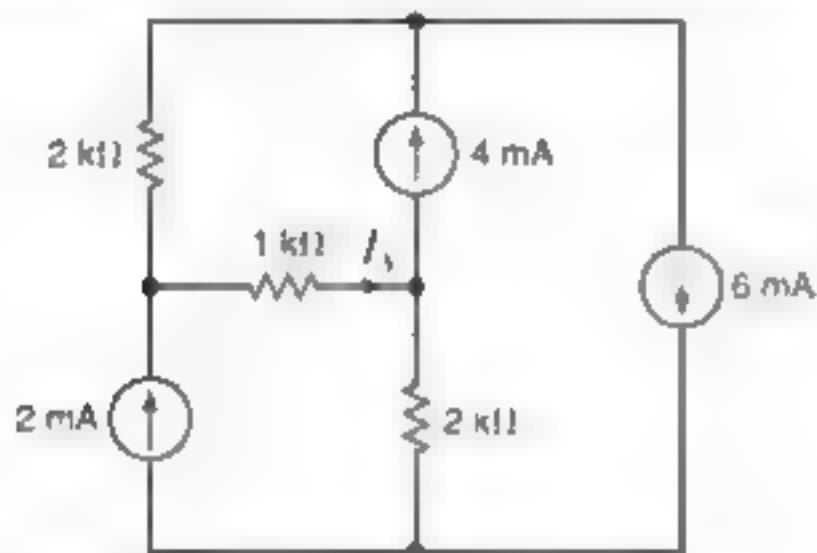


Figura P3.9

- 3.10 Determine a corrente I_s do circuito mostrado na Fig. P3.10 utilizando a análise nodal.

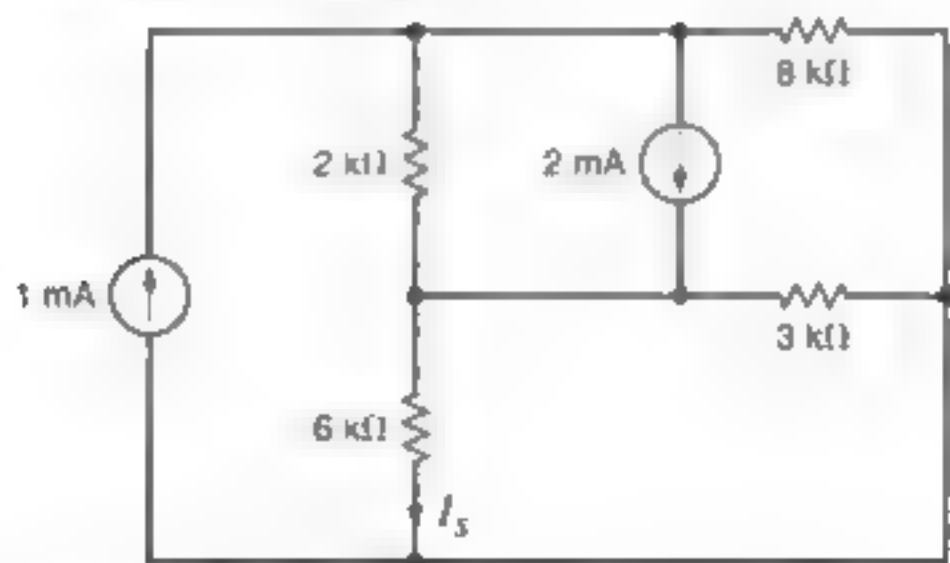


Figura P3.10

- 3.11 Utilize a análise nodal para determinar a corrente I_s da rede mostrada na Fig. 3.11.

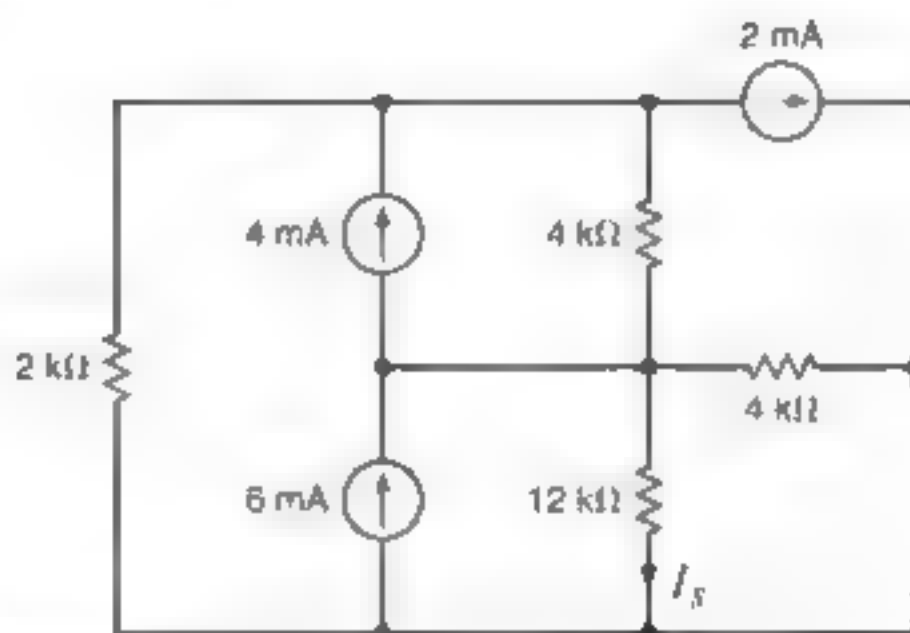


Figura P3.11

- 3.12 Determine a tensão V_s da rede mostrada na Fig. P3.12 utilizando a análise nodal.

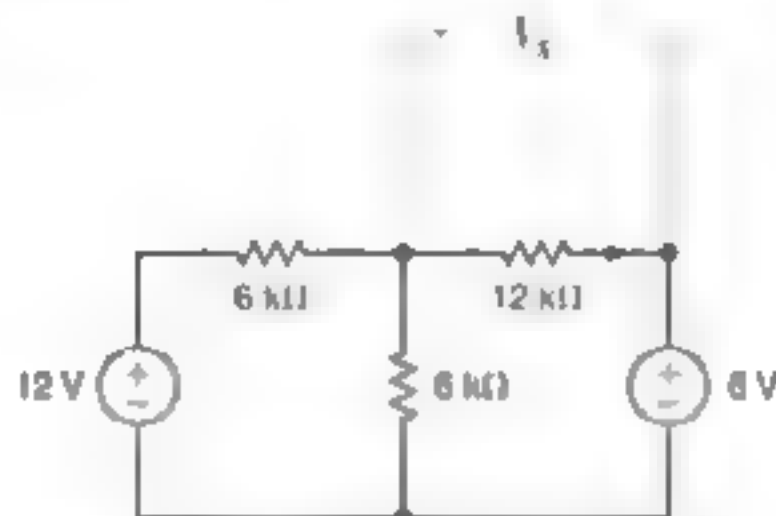


Figura P3.12

- 3.13 Determine a tensão V_s do circuito mostrado na Fig. P3.13 utilizando a análise nodal.

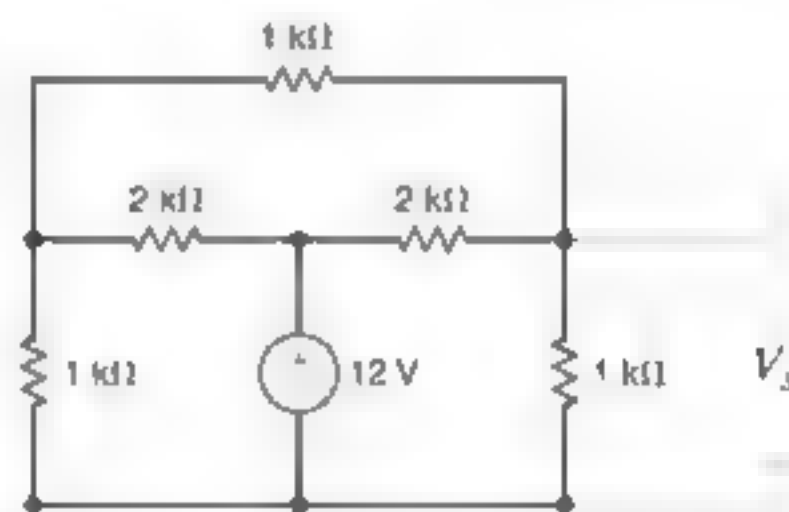


Figura P3.13

- 3.14 Utilize a análise nodal para determinar a tensão V_s do circuito mostrado na Fig. 3.14.

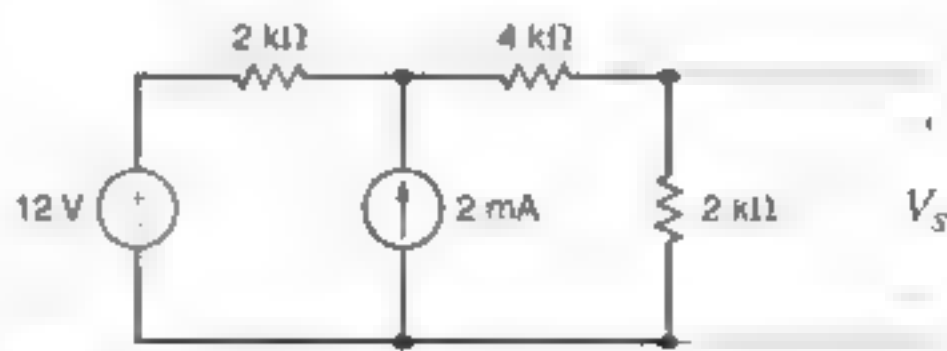


Figura P3.14

- 3.15** Determine a corrente I_x da rede mostrada na Fig. P3.15 utilizando a análise nodal.

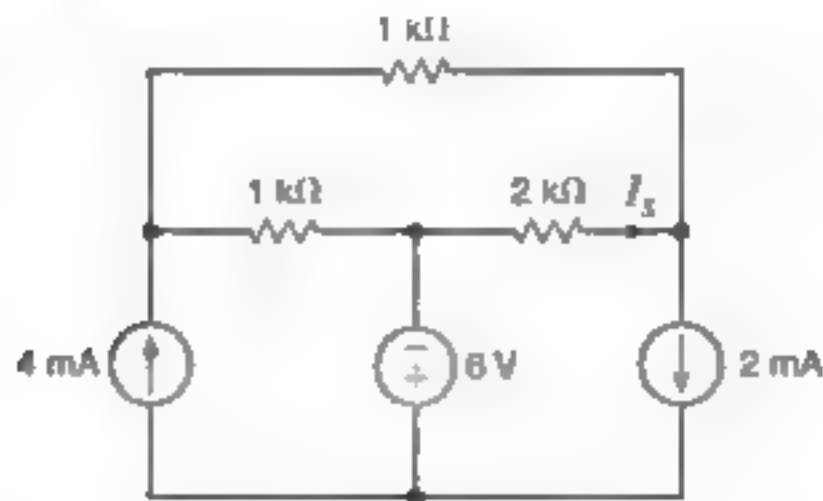


Figura P3.15

- 3.16** Determine a corrente I_x do circuito mostrado na Fig. P3.16 utilizando a análise nodal.

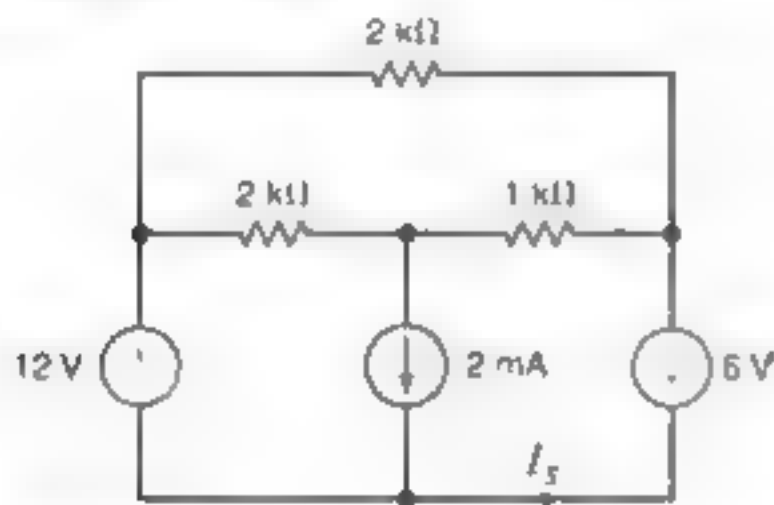


Figura P3.16

- 3.17** Determine a tensão V_x do circuito mostrado na Fig. P3.17 utilizando a análise nodal.

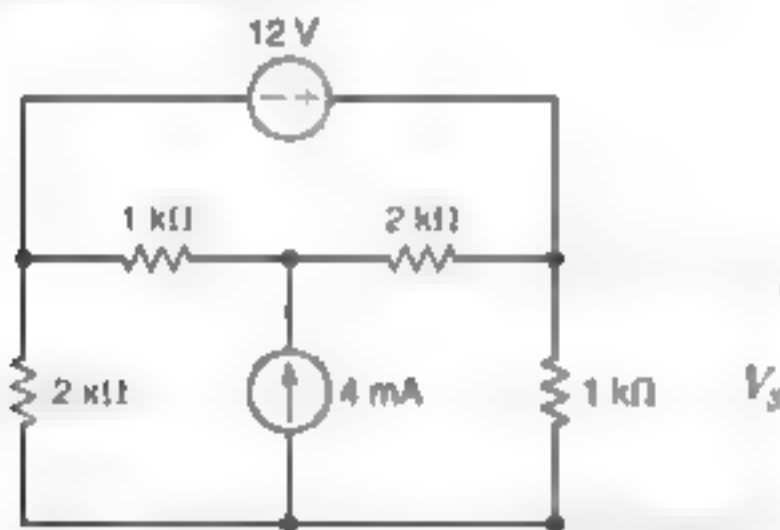


Figura P3.17

- 3.18** Determine a tensão V_x do circuito mostrado na Fig. P3.18 utilizando a análise nodal.

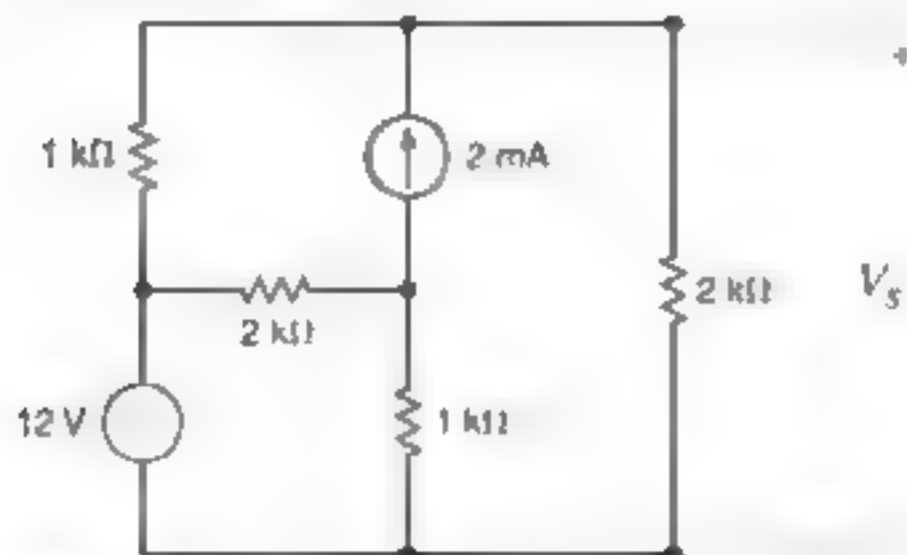


Figura P3.18

- 3.19** Determine a corrente I_x do circuito mostrado na Fig. P3.19 utilizando a análise nodal.

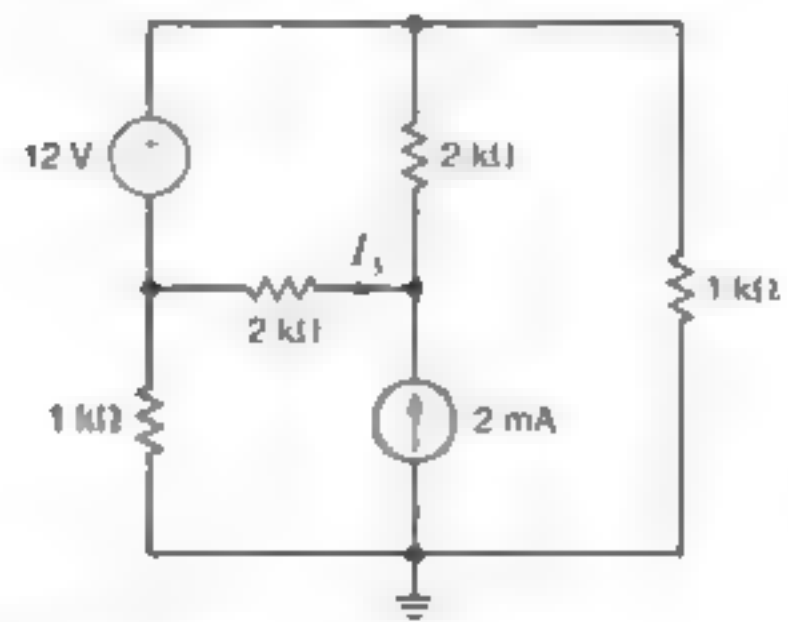


Figura P3.19

- 3.20** Determine a tensão V_x da rede mostrada na Fig. P3.20 utilizando a análise nodal.

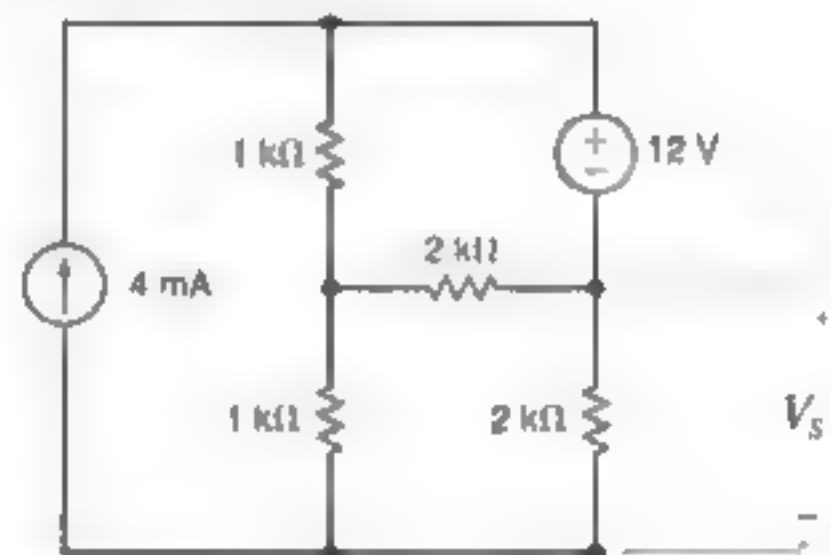


Figura P3.20

- 3.21** Determine a tensão V_x do circuito mostrado na Fig. P3.21 utilizando a análise nodal.

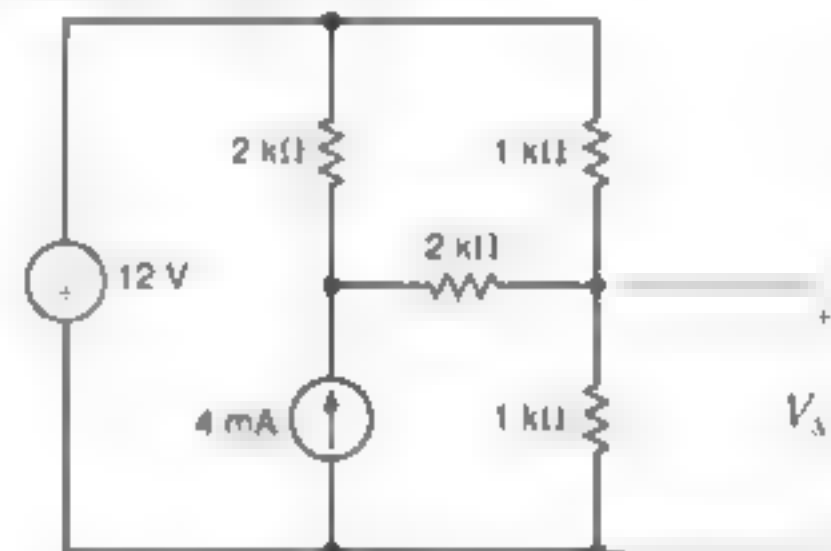


Figura P3.21

- 3.22** Determine a tensão V_x da rede mostrada na Fig. P3.22 utilizando a análise nodal.

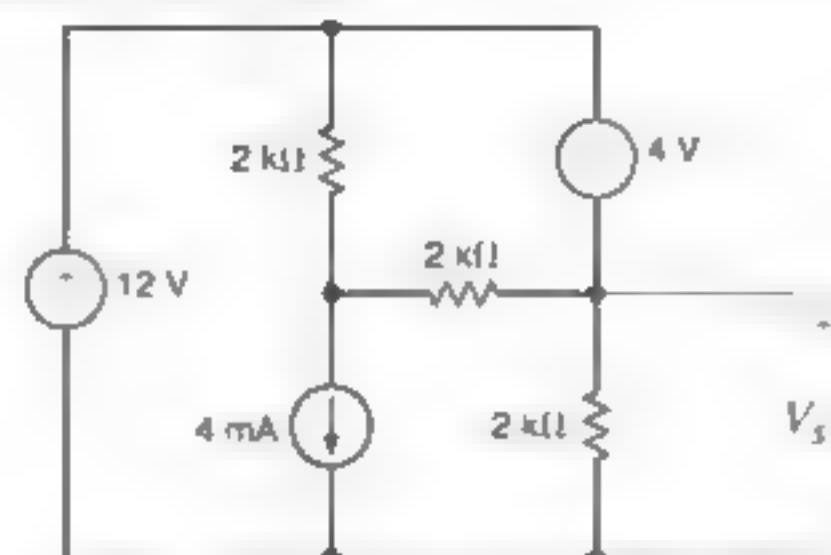


Figura P3.22

- 3.23** Determine a corrente I_s do circuito mostrado na Fig. P3.23 utilizando a análise nodal.

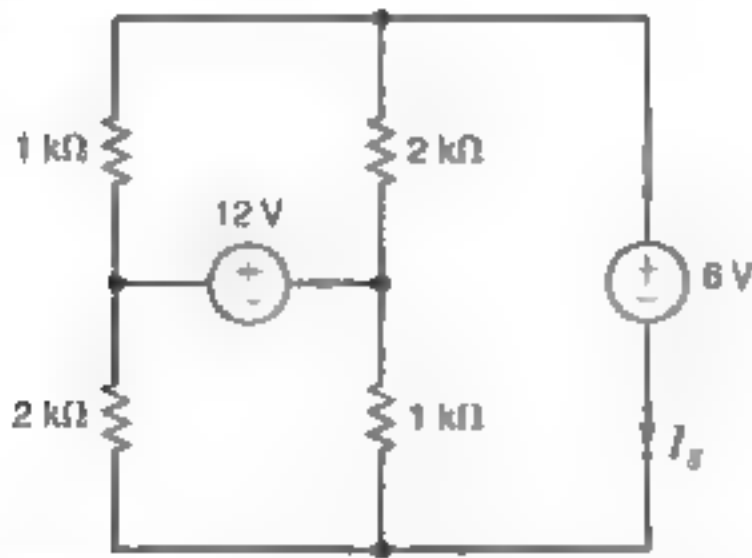


Figura P3.23

- 3.24** Determine a corrente I_s do circuito mostrado na Fig. P3.24 utilizando a análise nodal.

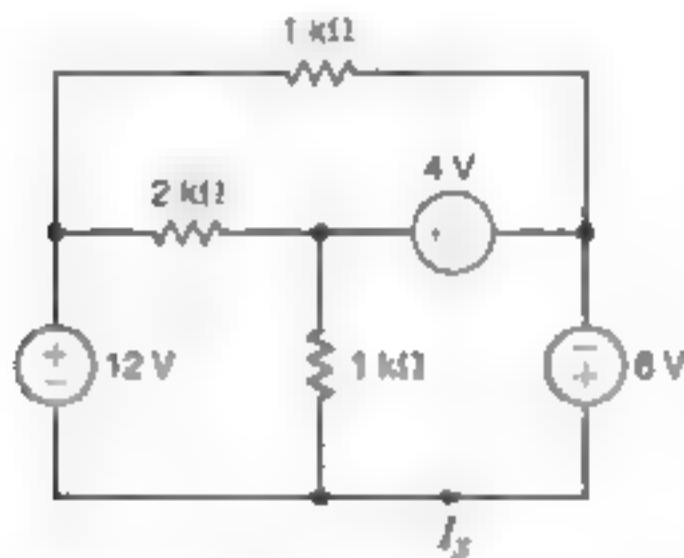


Figura P3.24

- 3.25** Utilize a análise nodal para determinar as tensões nodais do circuito mostrado na Fig. P3.25. Calcule também a potência fornecida pela fonte de corrente de 2 mA.

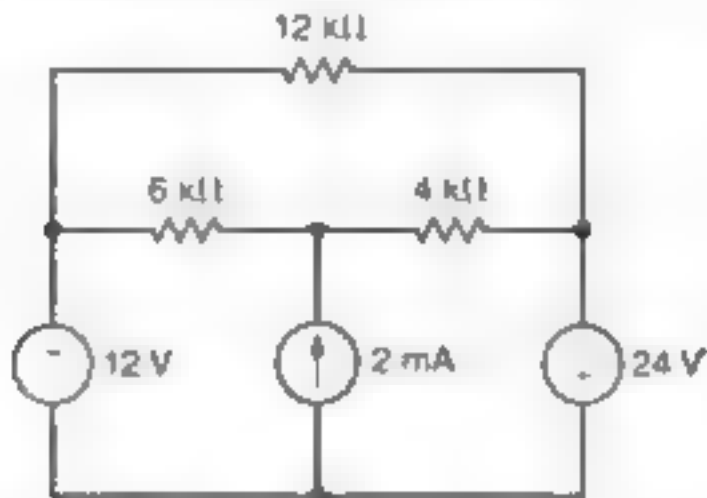


Figura P3.25

- 3.26** Utilize a análise nodal para determinar as tensões nodais definidas no circuito mostrado na Fig. P3.26.

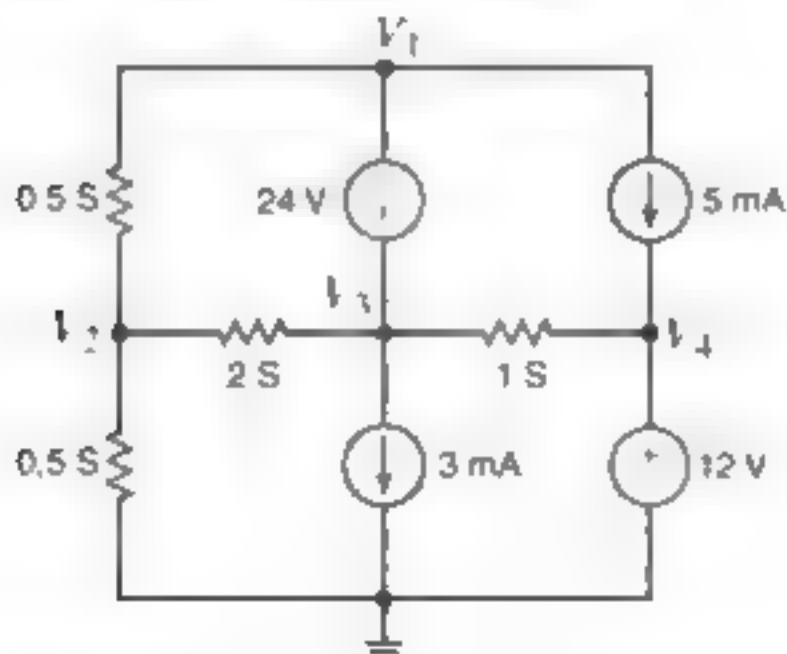


Figura P3.26

- 3.27** Utilize a análise nodal para determinar as tensões nodais do circuito mostrado na Fig. P3.27. Calcule também a potência fornecida pela fonte de corrente de 2 mA.

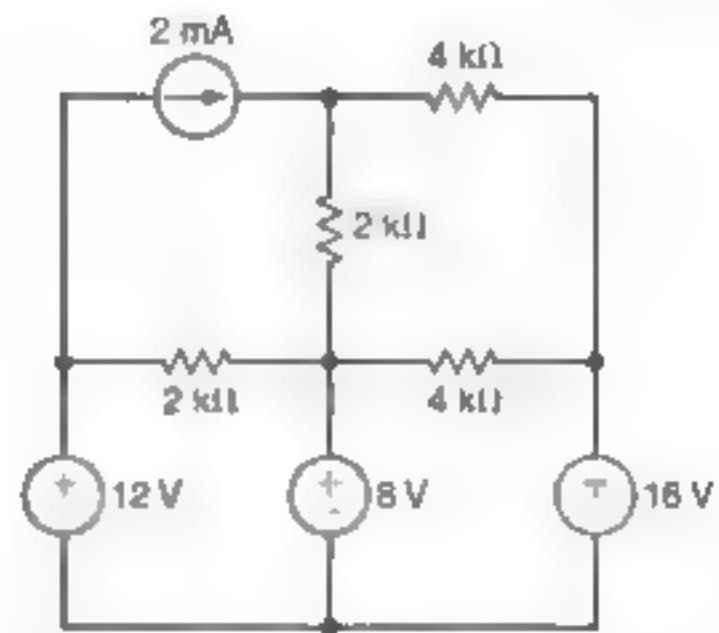


Figura P3.27

- 3.28** Utilize a análise nodal para determinar a tensão V_r da rede mostrada na Fig. P3.28.

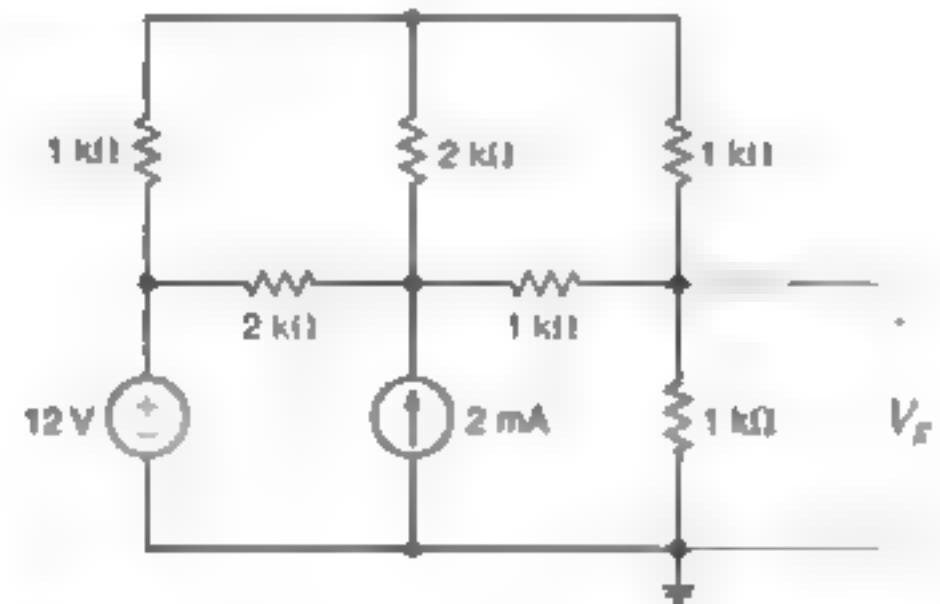


Figura P3.28

- 3.29** Utilize a análise nodal para determinar a tensão V_s do circuito mostrado na Fig. P3.29.

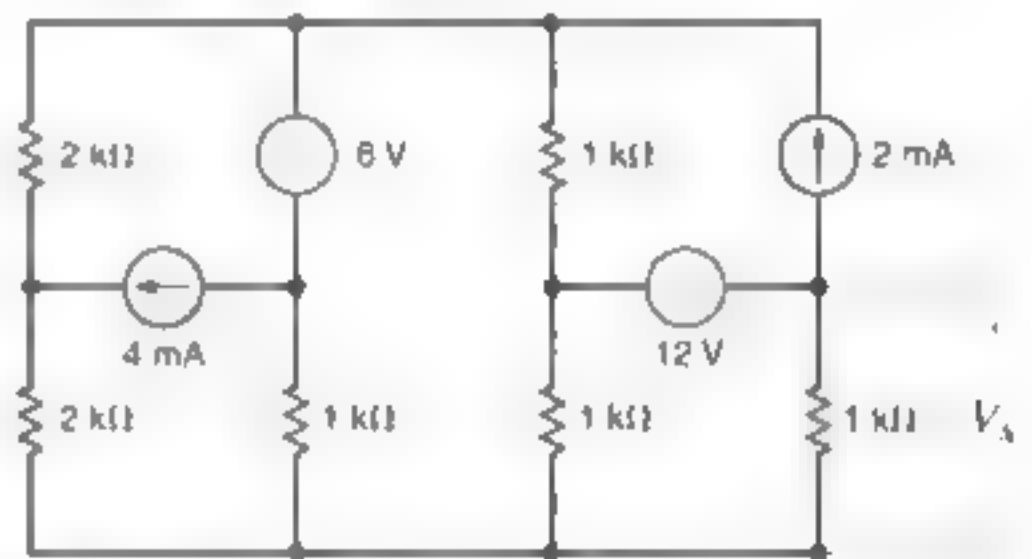


Figura P3.29

- 3.30** Utilize a análise nodal para determinar a tensão V_s do circuito mostrado na Fig. P3.30.

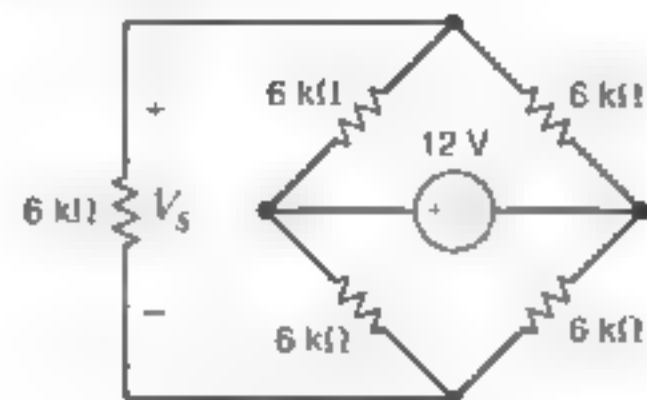


Figura P3.30

- 3.31 Determine a tensão V_x da rede mostrada na Fig. P3.31.

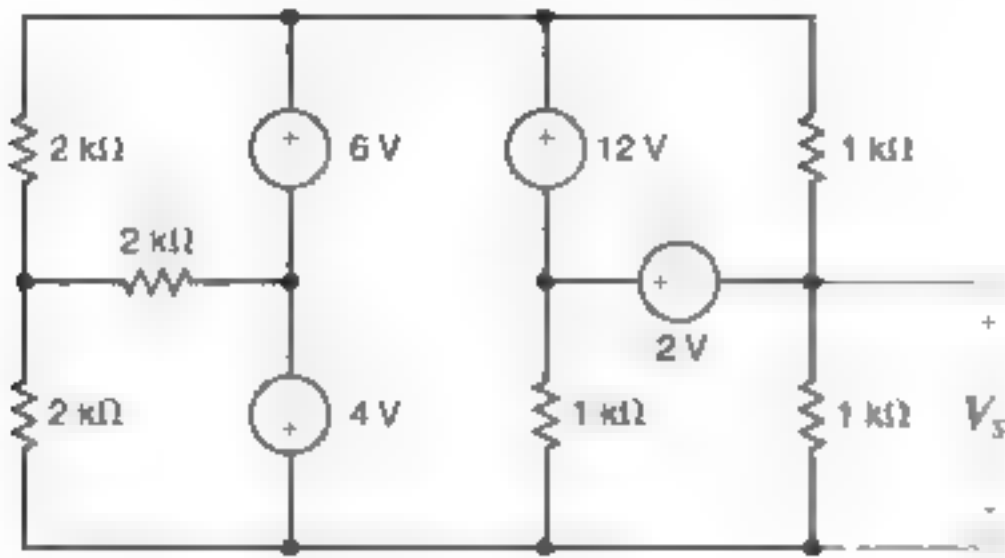


Figura P3.31

- 3.32 Determine a corrente I_x da rede mostrada na Fig. P3.32 utilizando a análise nodal.

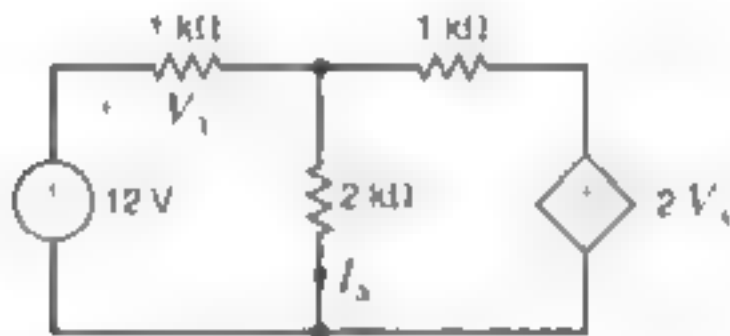


Figura P3.32

- 3.33 Determine a corrente I_x da rede mostrada na Fig. P3.33 utilizando a análise nodal.

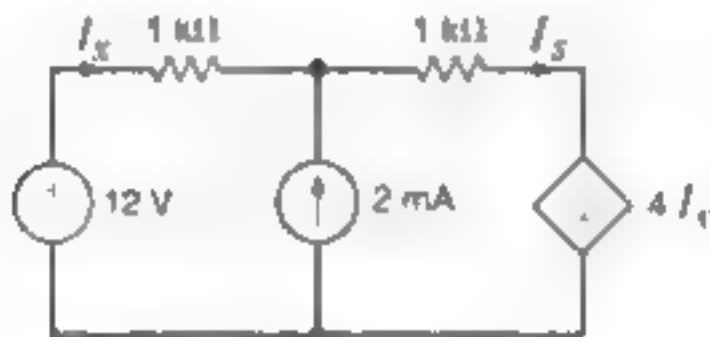


Figura P3.33

- 3.34 Determine a tensão V_x da rede mostrada na Fig. P3.34 utilizando a análise nodal.

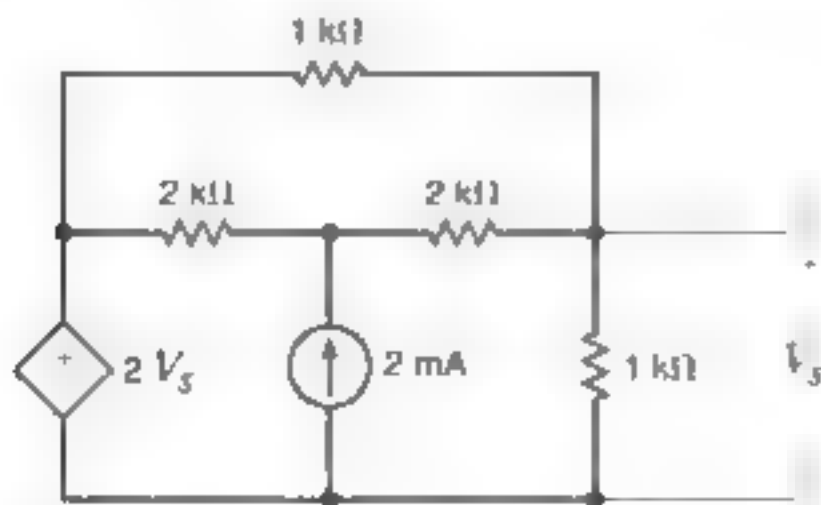


Figura P3.34

- 3.35 Determine a tensão V_x do circuito mostrado na Fig. P3.35 utilizando a análise nodal.

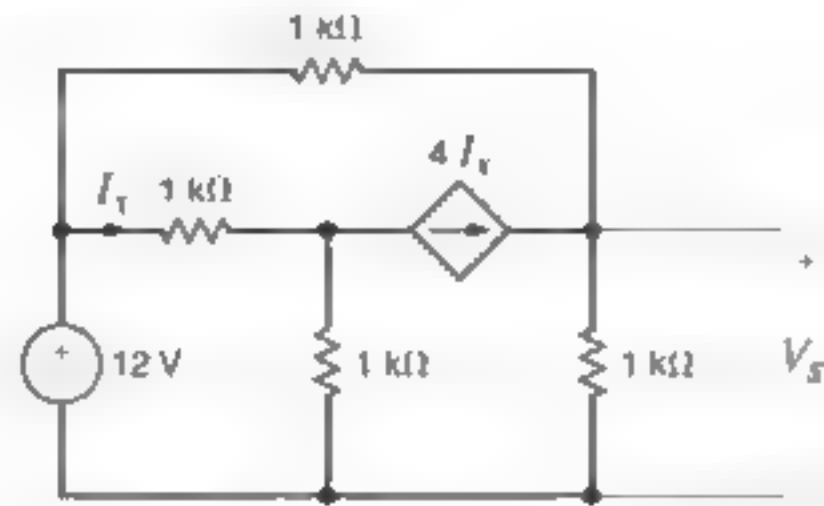


Figura P3.35

- 3.36 Determine a tensão V_x da rede mostrada na Fig. P3.36 utilizando a análise nodal.

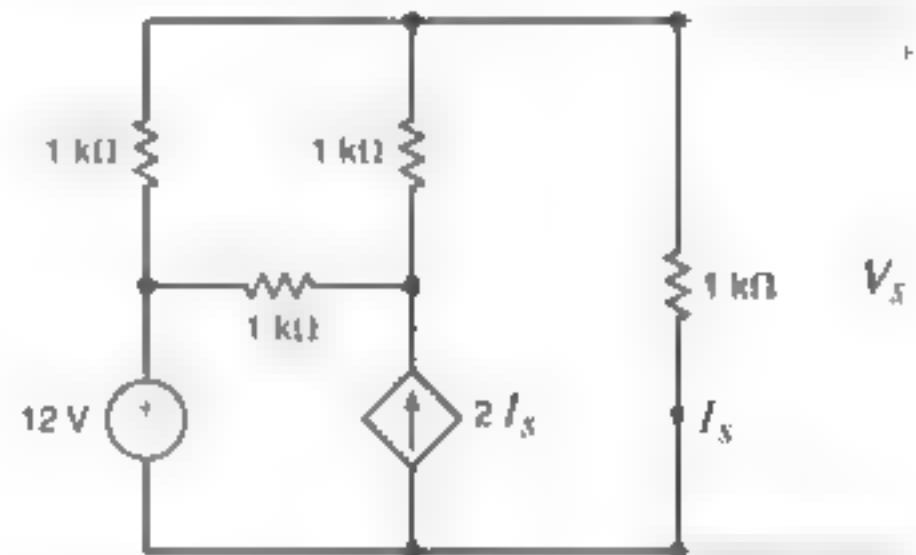


Figura P3.36

- 3.37 Determine a corrente I_x da rede mostrada na Fig. P3.37 utilizando a análise nodal.

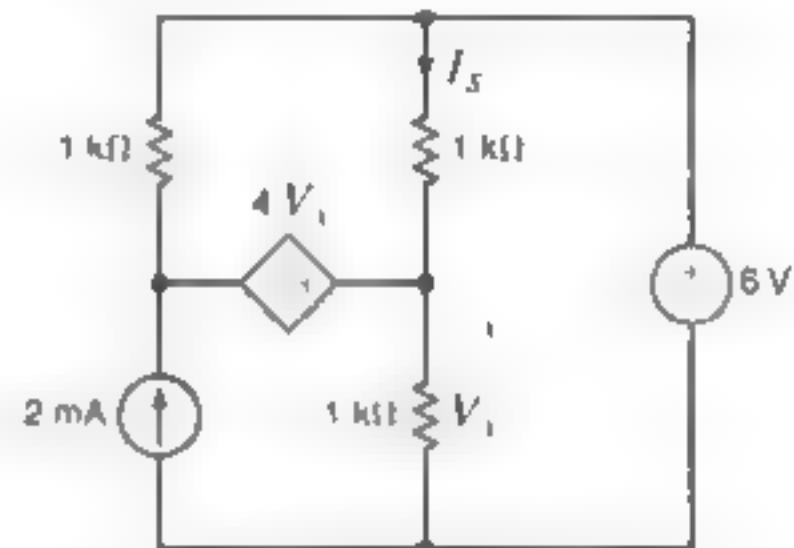


Figura P3.37

- 3.38 Determine a corrente I_x da rede mostrada na Fig. P3.38 utilizando a análise nodal.

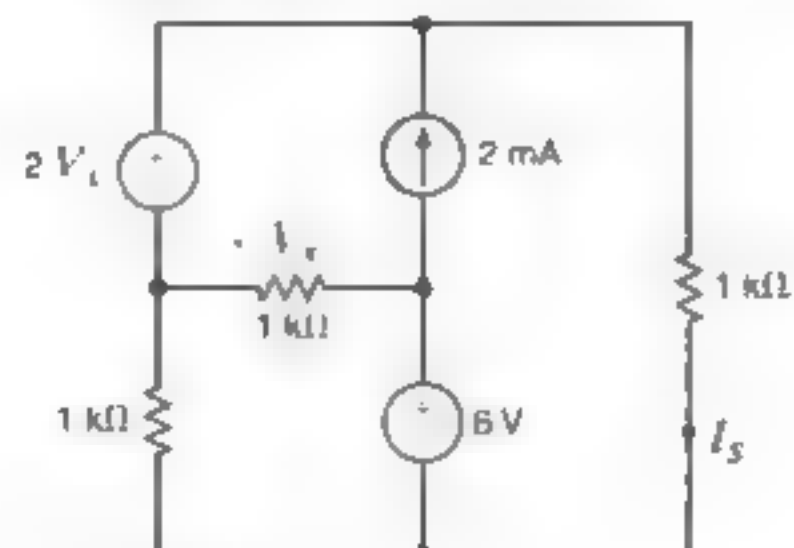


Figura P3.38

- 3.39** Determine a tensão V_x da rede mostrada na Fig. P3.39 utilizando a análise nodal.

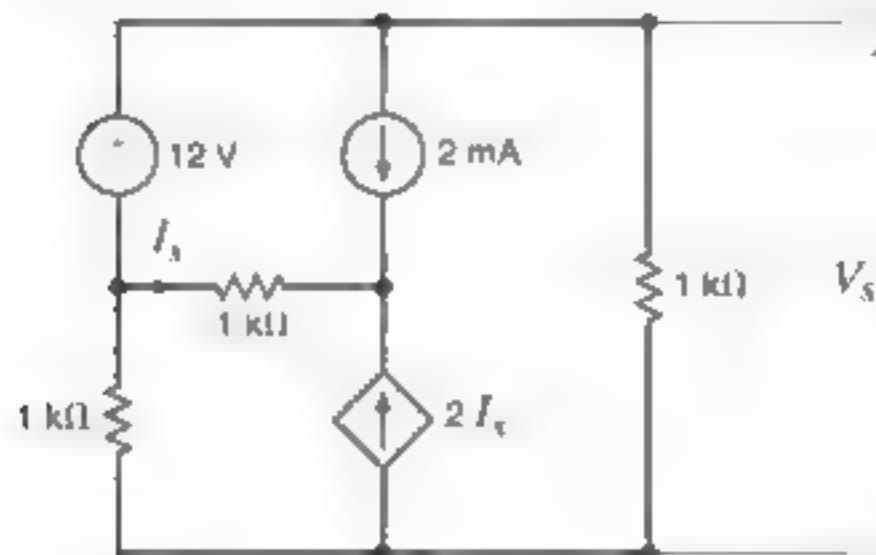


Figura P3.39

- 3.40** Utilize a análise nodal para determinar a tensão V_x do circuito mostrado na Fig. P3.40.

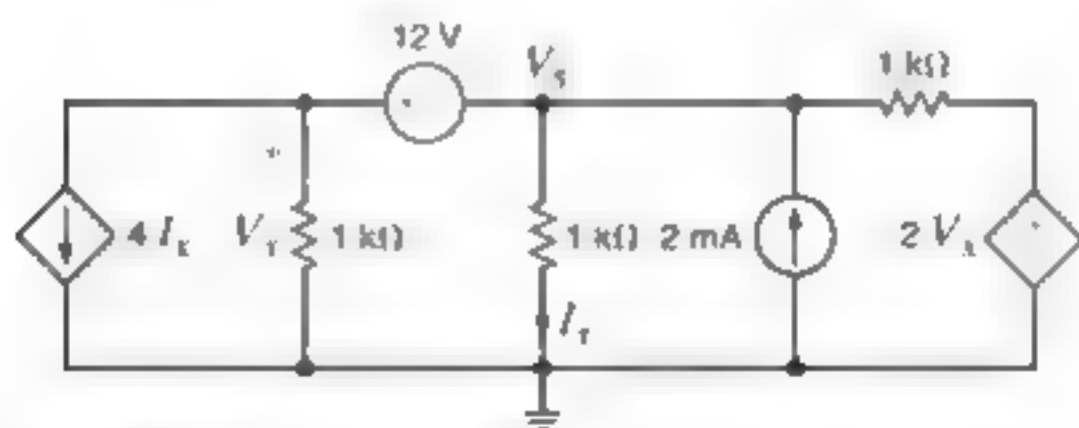


Figura P3.40

- 3.41** Utilize a análise nodal para determinar a tensão V_x do circuito mostrado na Fig. P3.41.

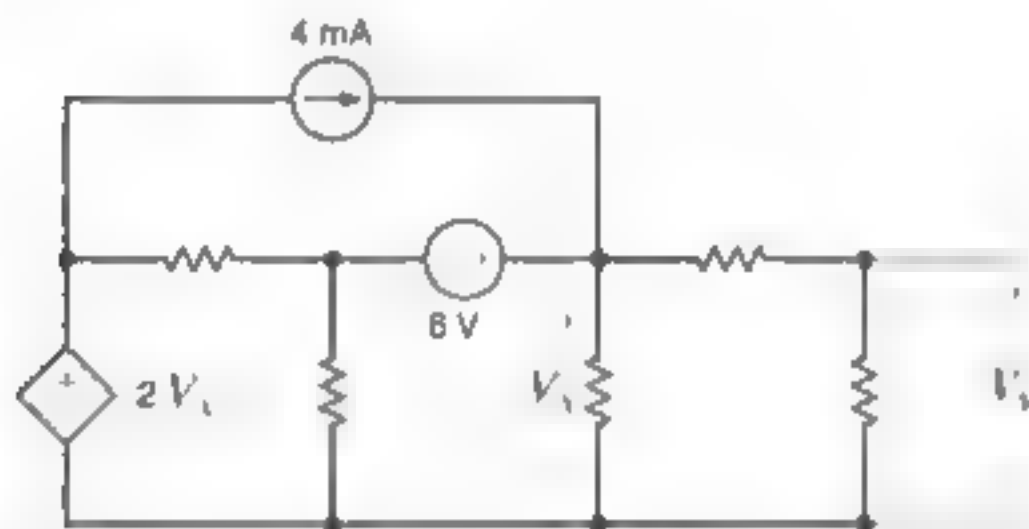


Figura P3.41

- 3.42** Utilize a análise nodal para determinar a tensão V_x da rede mostrada na Fig. P3.42.

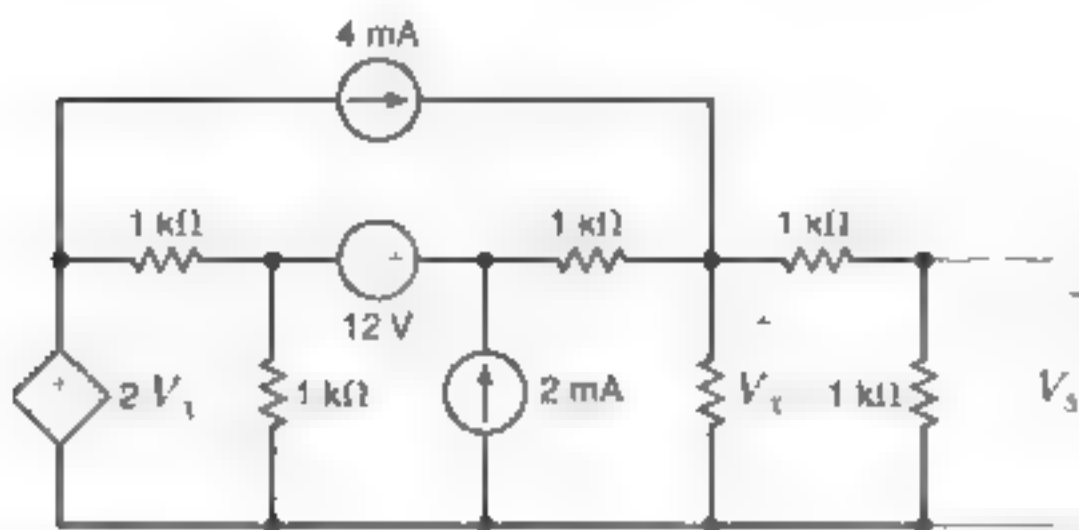


Figura P3.42

- 3.43** Utilize a análise nodal para determinar a tensão V_x do circuito mostrado na Fig. P3.43.

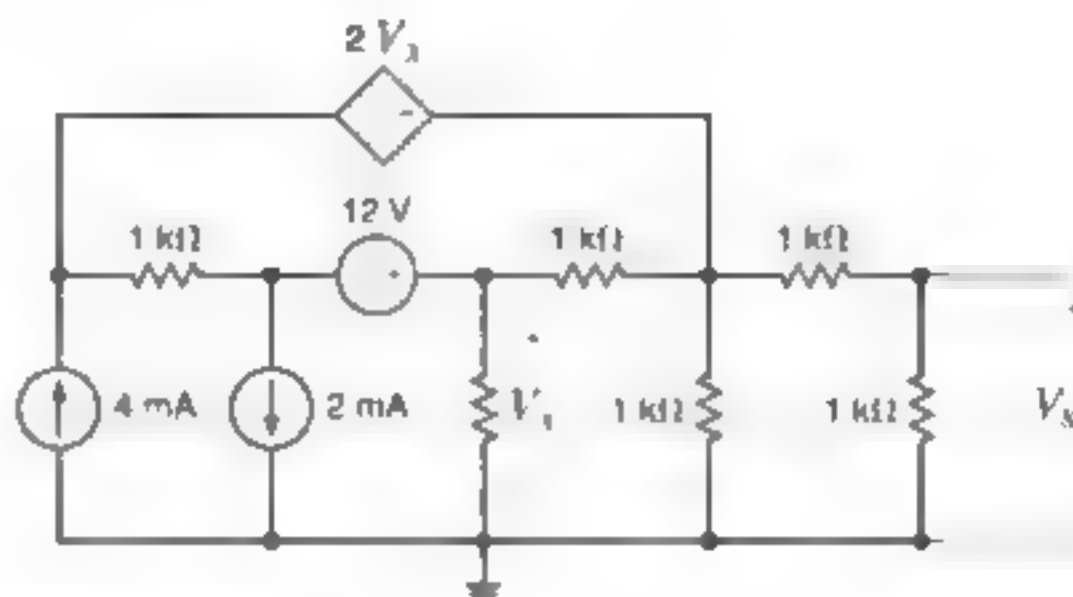


Figura P3.43

- 3.44** Utilize a análise nodal para determinar a corrente I_x do circuito mostrado na Fig. 3.44.

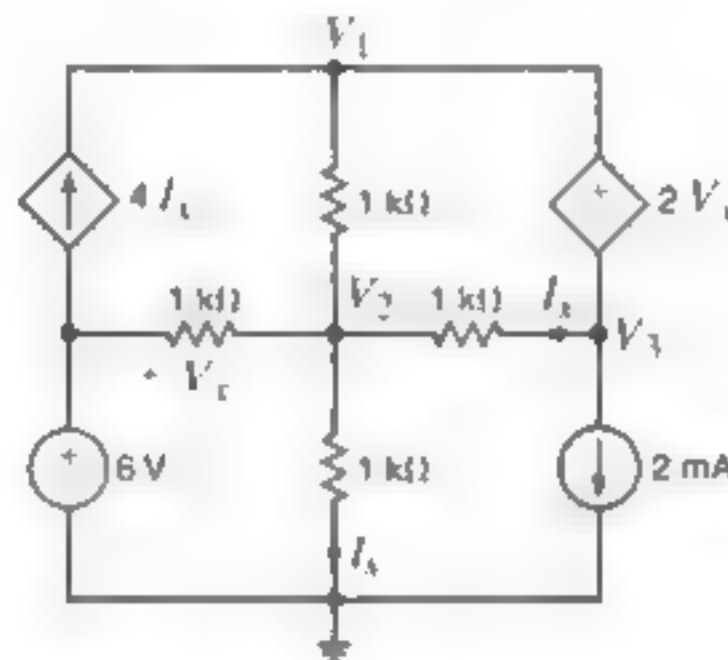


Figura P3.44

- 3.45** Determine a corrente I_x do circuito mostrado na Fig. P3.45 utilizando a análise nodal.

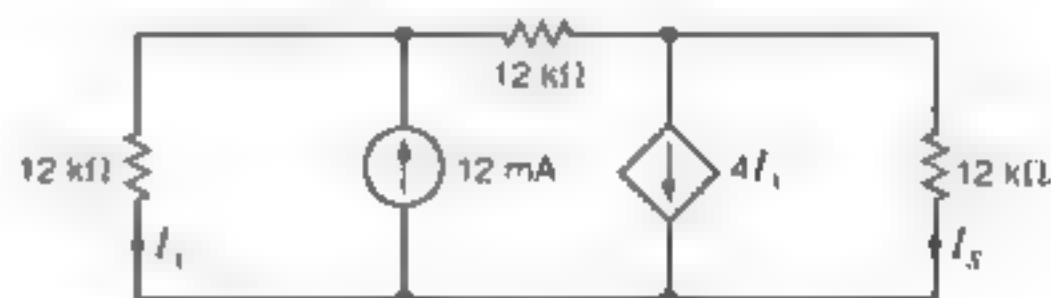


Figura P3.45

- 3.46** Determine a tensão V_x do circuito mostrado na Fig. P3.46.

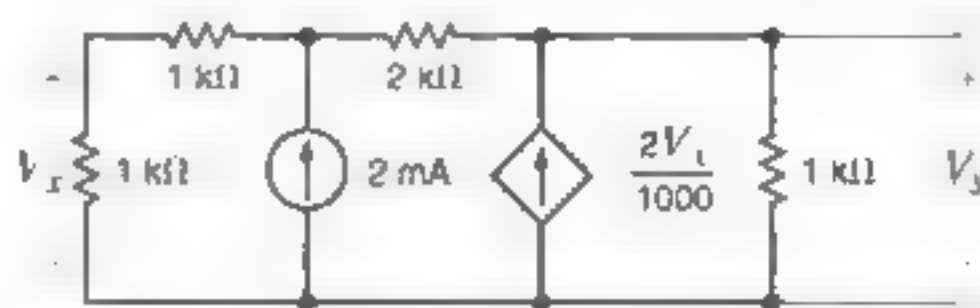


Figura P3.46

- 3.47** Utilize a análise nodal para determinar a tensão V_x do circuito mostrado na Fig. P3.47. Além disso, determine as correntes de todos os ramos e verifique suas respostas utilizando a LKC em cada nó.

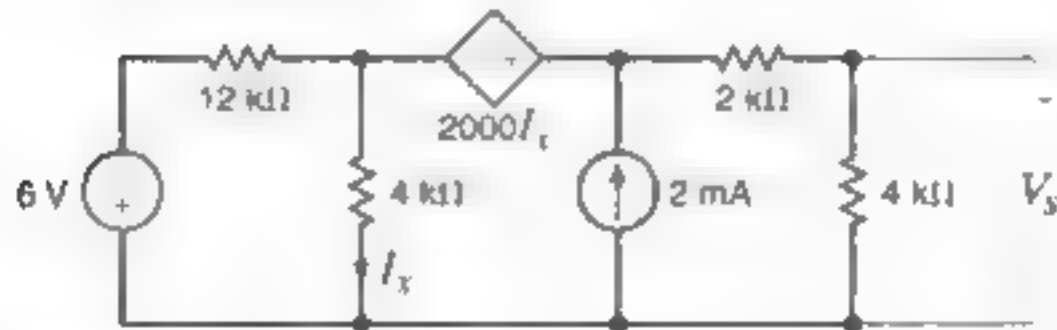


Figura P3.47

- 3.48** Determine a tensão V_x da rede mostrada na Fig. P3.48 utilizando a análise nodal.

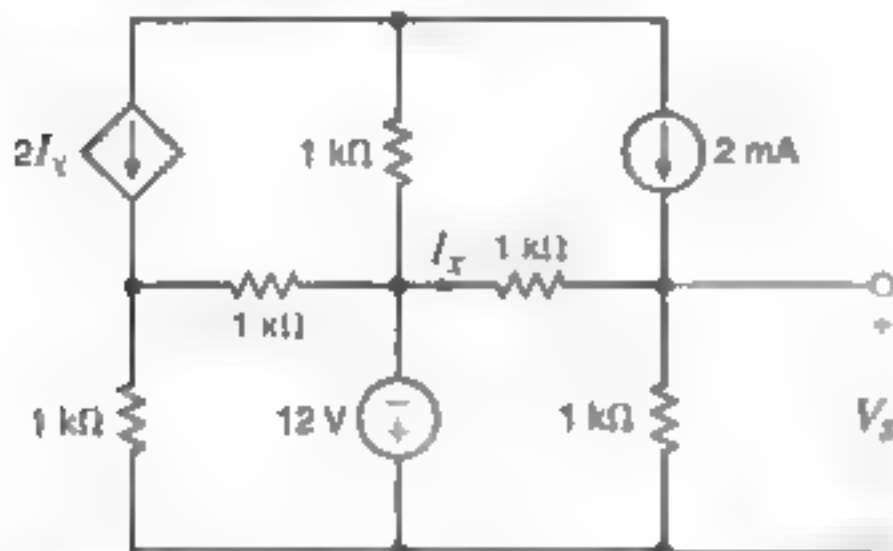


Figura P3.48

- 3.49** Utilize a análise nodal para determinar as tensões V_1 , V_2 , V_3 e V_4 do circuito mostrado na Fig. P3.49.

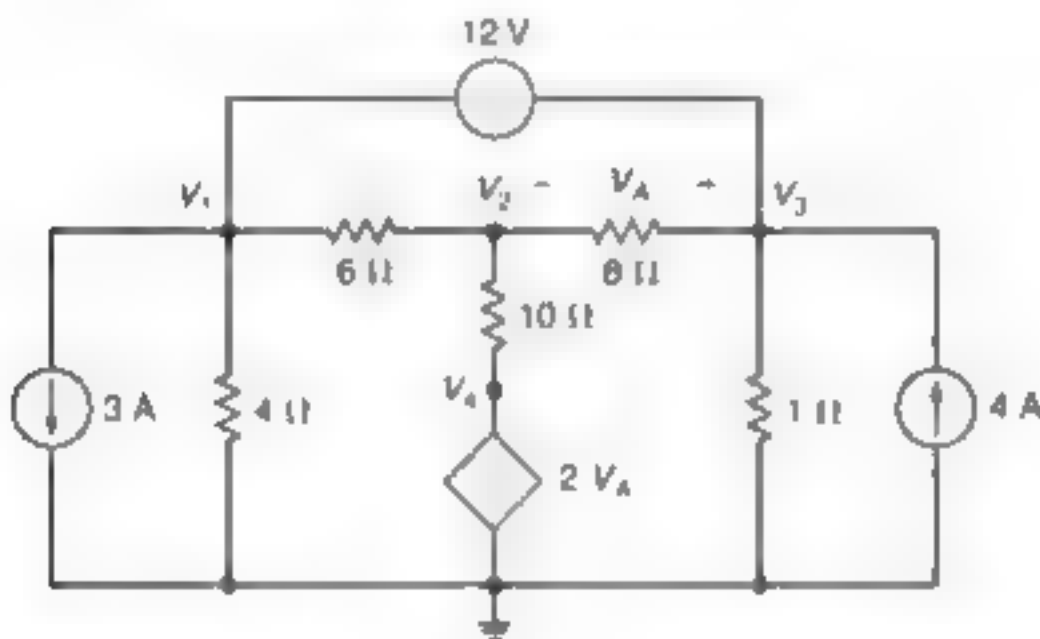


Figura P3.49

- 3.50** Utilize a análise nodal para determinar as tensões nos nós definidas no circuito mostrado na Fig. P3.50.

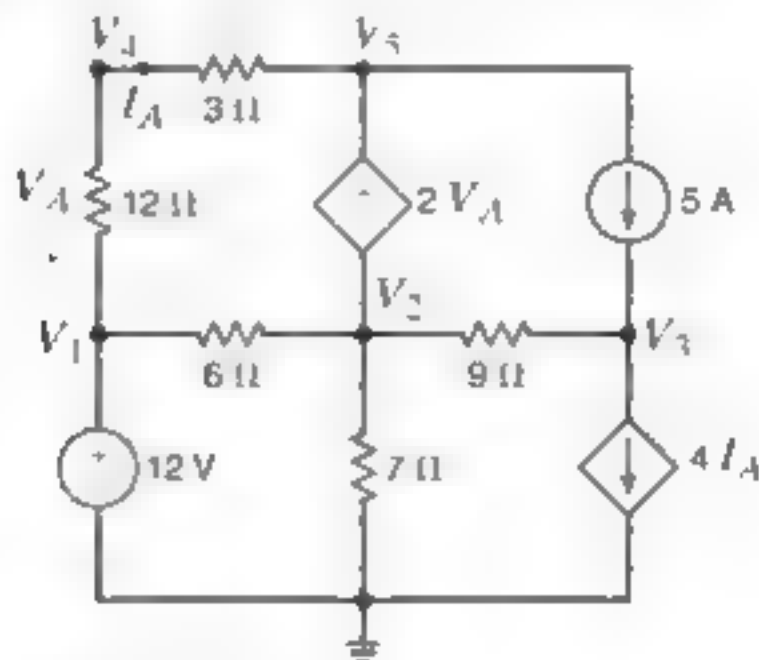


Figura P3.50

- 3.51** Utilize a análise nodal para determinar as tensões nos nós definidas no circuito mostrado na Fig. P3.51.

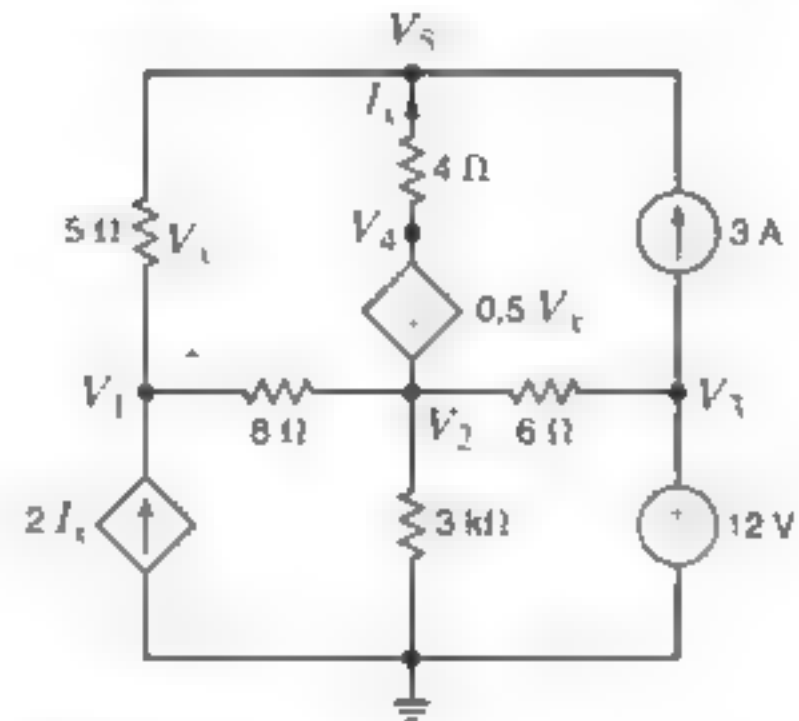


Figura P3.51

- 3.52** Utilize a análise nodal para determinar as tensões nos nós definidas no circuito mostrado na Fig. P3.52.

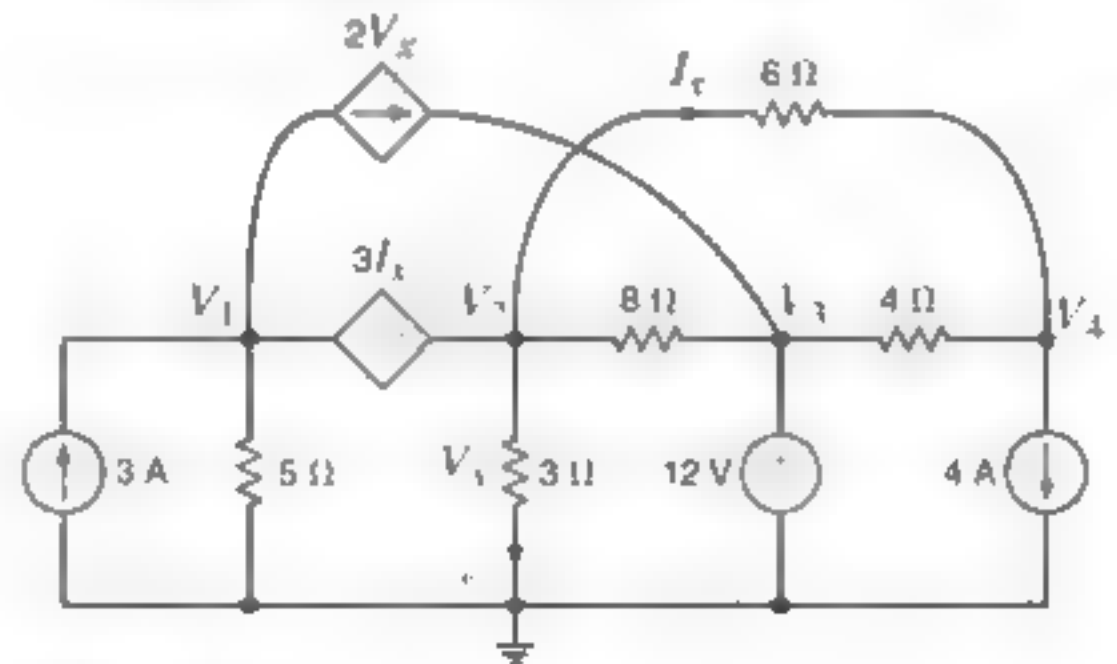


Figura P3.52

- 3.53** Determine a corrente I_x da rede mostrada na Fig. P3.53 utilizando a análise das malhas.

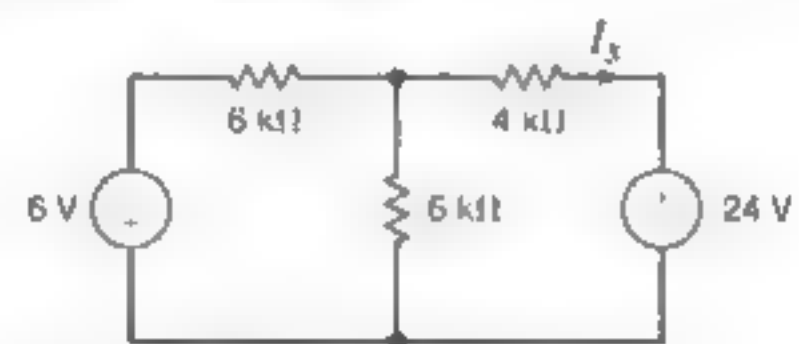


Figura P3.53

- 3.54** Determine a corrente I_x do circuito mostrado na Fig. P3.54.

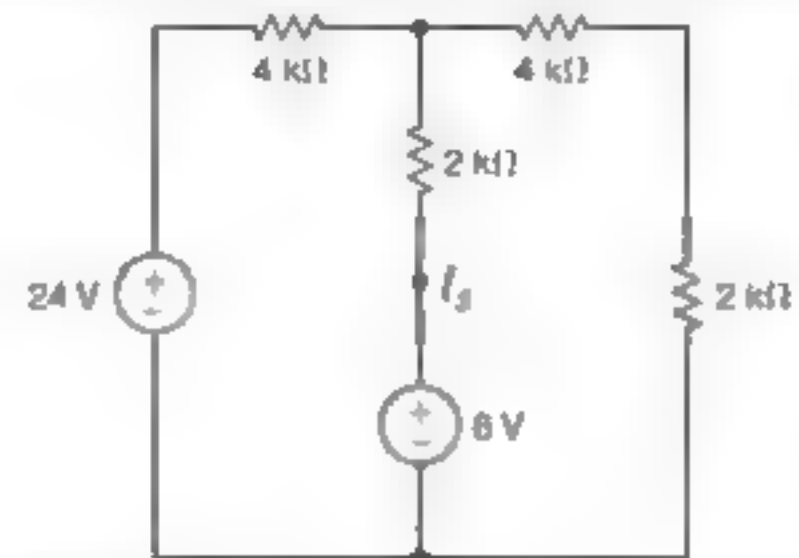


Figura P3.54

- 3.55 Determine a tensão V_s da rede mostrada na Fig. P3.55 utilizando a análise das malhas.

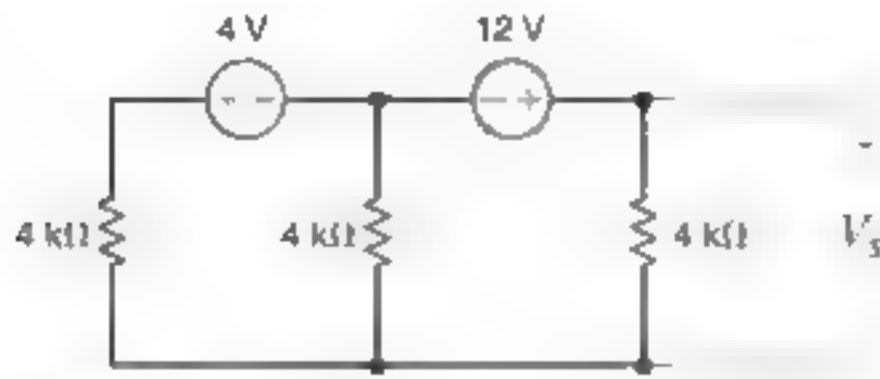


Figura P3.55

- 3.56 Determine a corrente I_1 do circuito mostrado na Fig. P3.56.

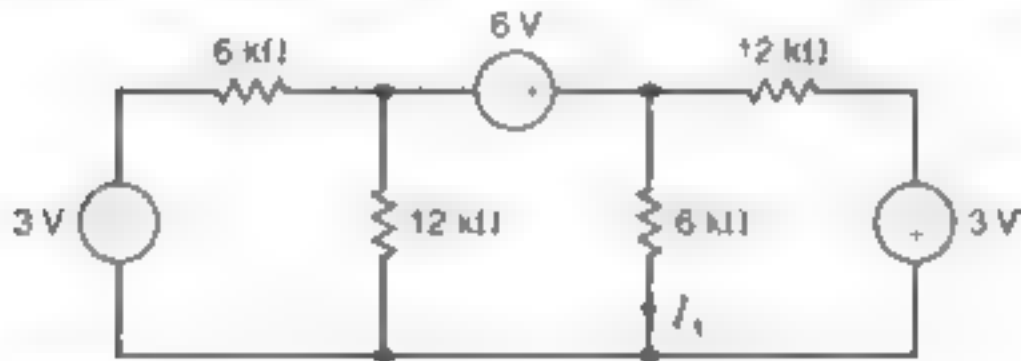


Figura P3.56

- 3.57 Utilize a análise das malhas para determinar a potência dissipada no resistor de $6 \text{ k}\Omega$ do circuito mostrado na Fig. P3.57.

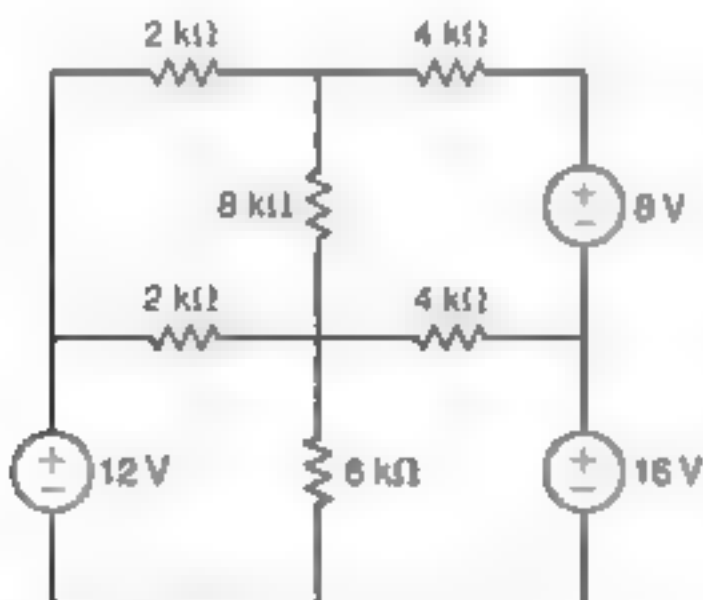


Figura P3.57

- 3.58 Determine a tensão V_s do circuito mostrado na Fig. P3.58 utilizando a análise das malhas.

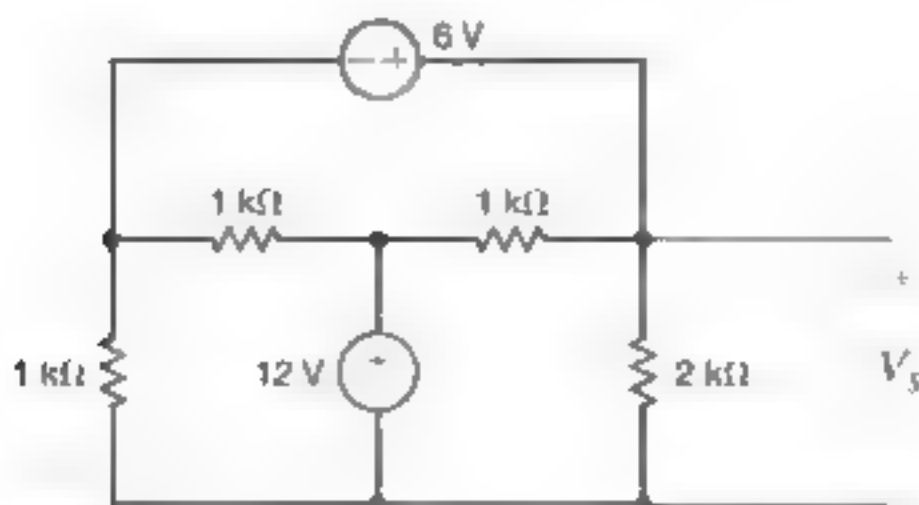


Figura P3.58

- 3.59 Utilize a análise dos laços para determinar a tensão V_s da rede mostrada na Fig. P3.59.

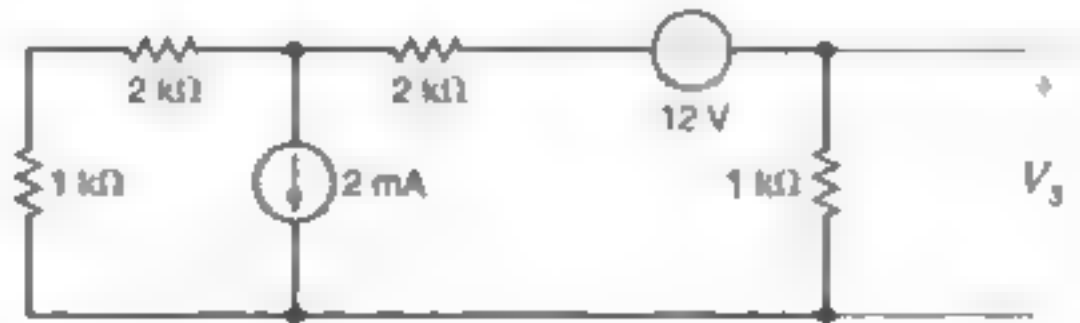


Figura P3.59

- 3.60 Utilize a análise das malhas para determinar a tensão V_s da rede mostrada na Fig. P3.60.

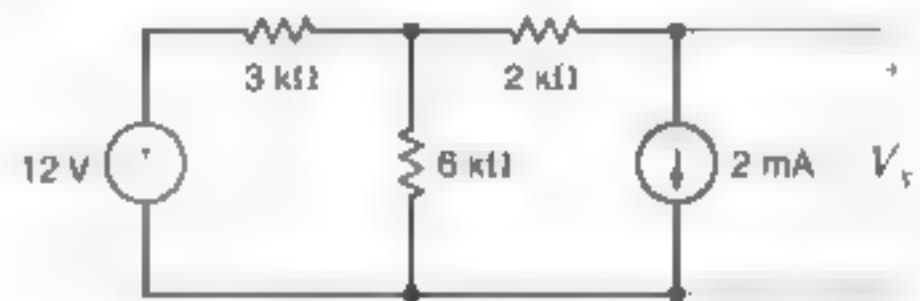


Figura P3.60

- 3.61 Determine a tensão V_s da rede mostrada na Fig. P3.61 utilizando a análise dos laços.

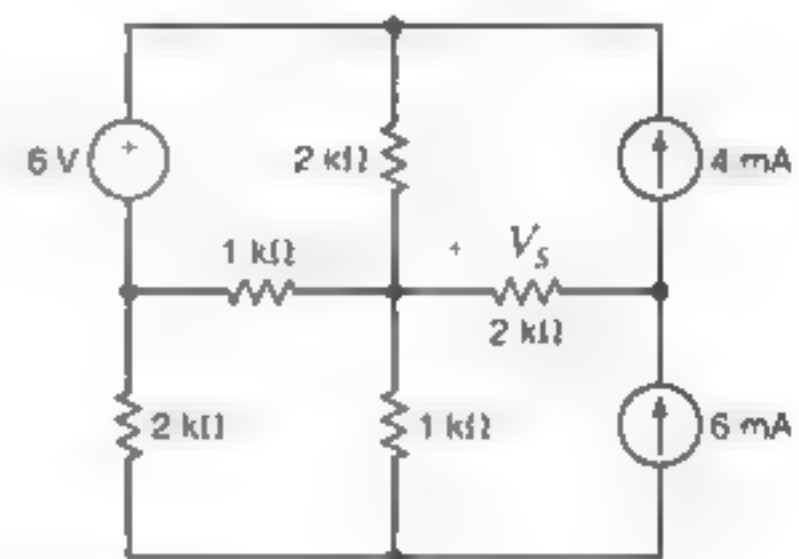


Figura P3.61

- 3.62 Determine a tensão V_s do circuito mostrado na Fig. P3.62 utilizando a análise dos laços.

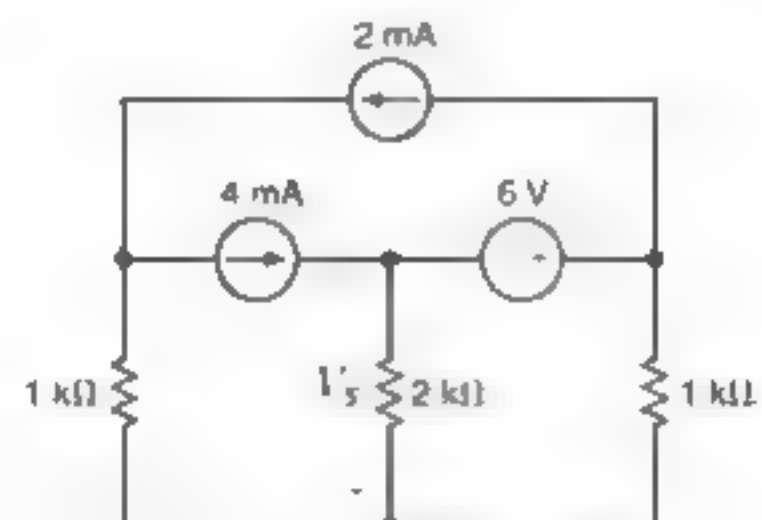


Figura P3.62

- 3.63** Determine a corrente I_s do circuito mostrado na Fig. P3.63 utilizando a análise dos laços.

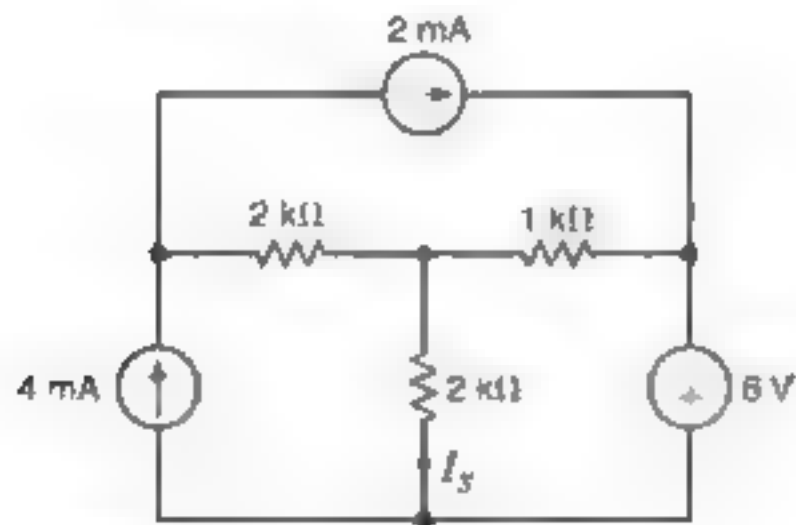


Figura P3.63

- 3.64** Determine a corrente I_s da rede mostrada na Fig. P3.64 utilizando a análise dos laços.

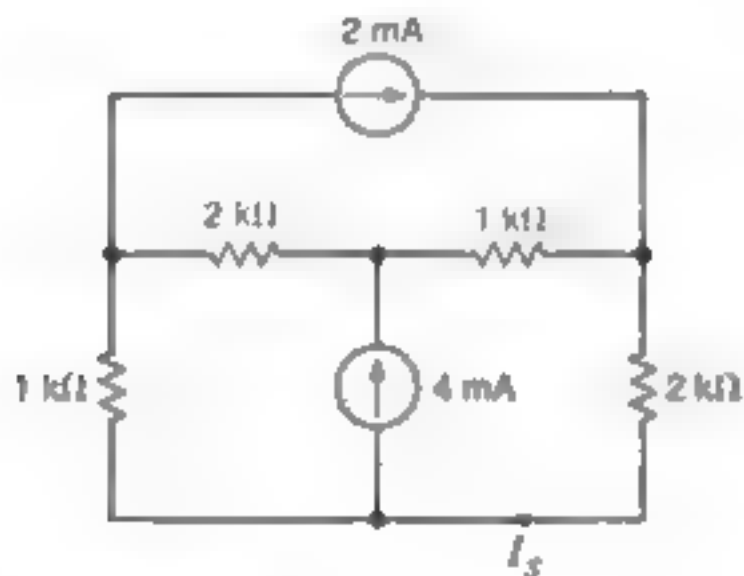


Figura P3.64

- 3.65** Determine a tensão V_s da rede mostrada na Fig. P3.65 utilizando a análise dos laços.

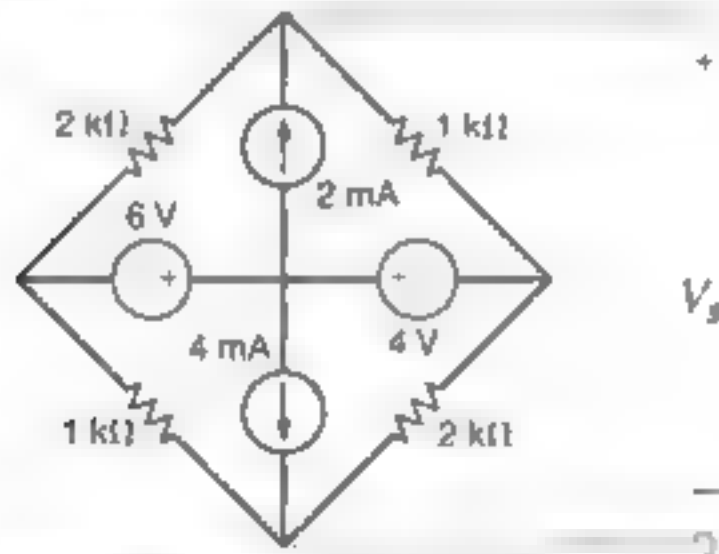


Figura P3.65

- 3.66** Determine a tensão V_s do circuito mostrado na Fig. P3.66 utilizando a análise dos laços.

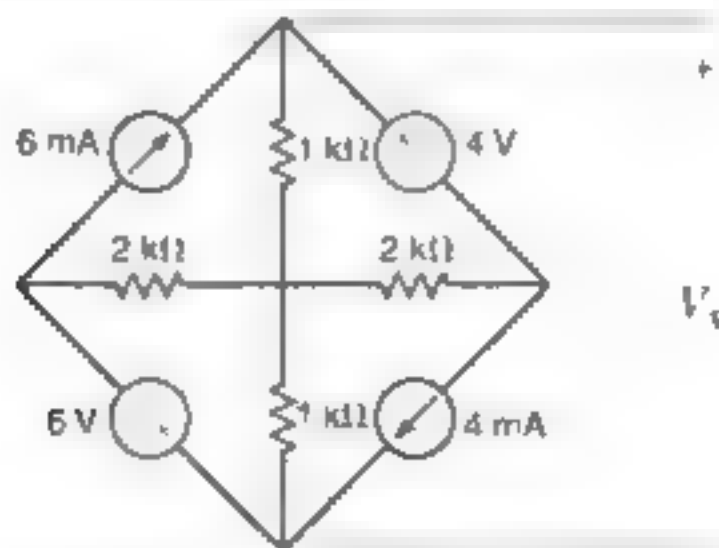


Figura P3.66

- 3.67** Determine a corrente I_s da rede mostrada na Fig. P3.67 utilizando a análise dos laços.

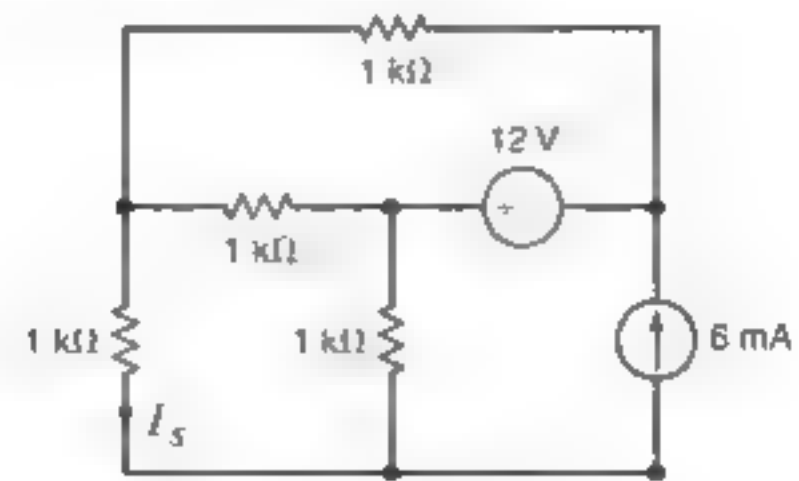


Figura P3.67

- 3.68** Determine a corrente I_s da rede mostrada na Fig. P3.68 utilizando a análise dos laços.

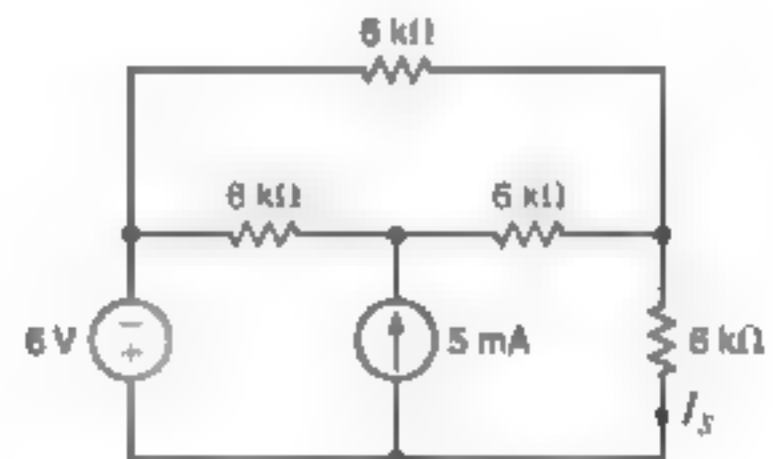


Figura P3.68

- 3.69** Utilize a análise dos laços para determinar a tensão V_s do circuito mostrado na Fig. P3.69

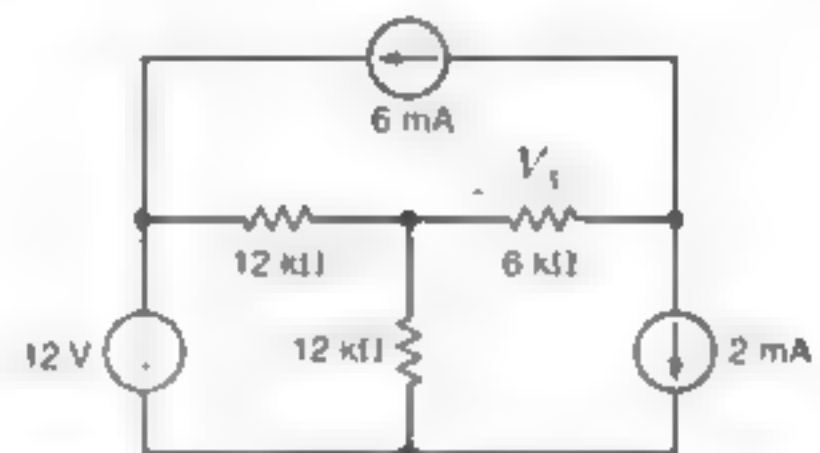


Figura P3.69

- 3.70** Utilizando a análise dos laços, determine a tensão V_s da rede mostrada na Fig. P3.70.

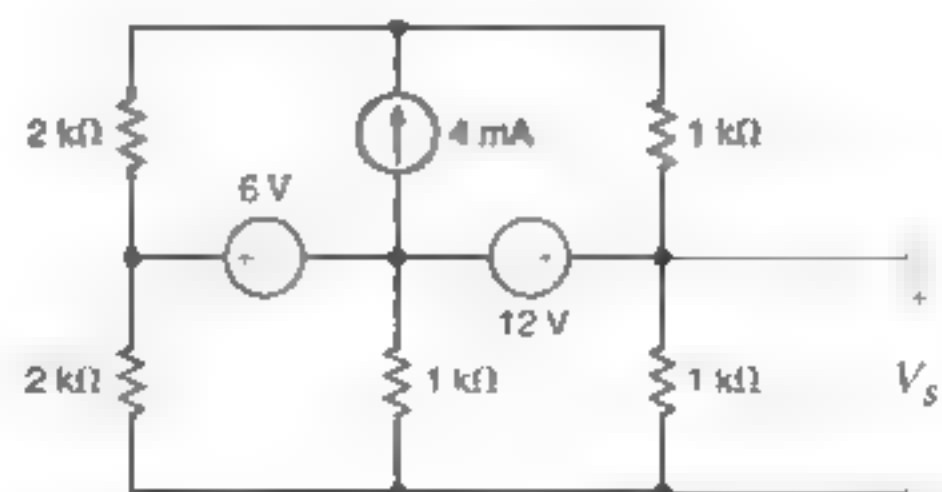


Figura P3.70

3.71 Determine a corrente I_s do circuito mostrado na Fig. P3.71.

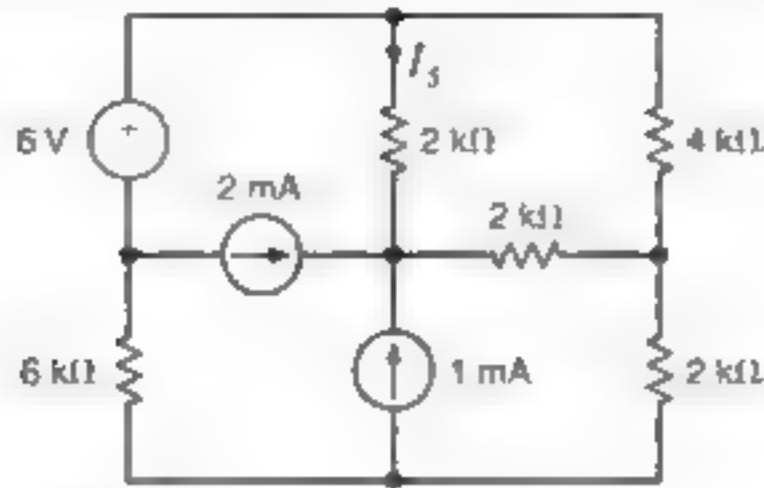


Figura P3.71

3.72 Utilize a análise dos laços para determinar a corrente I_s da rede mostrada na Fig. P3.72.

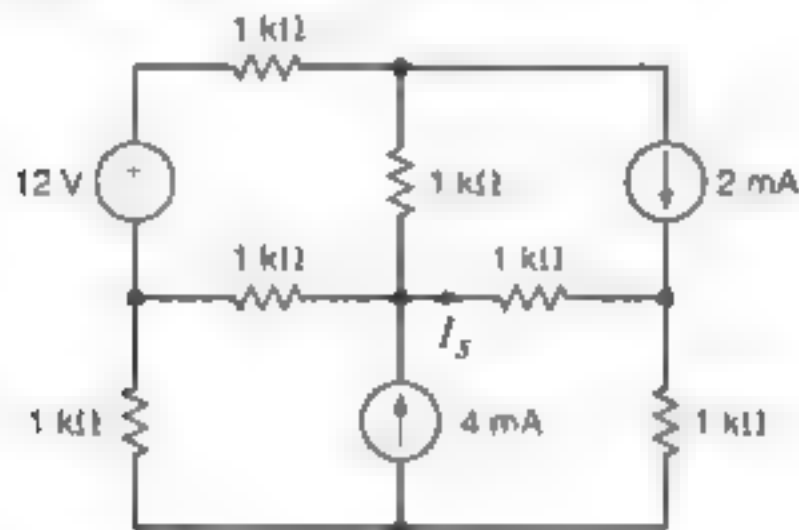


Figura P3.72

3.73 Determine a corrente I_s do circuito mostrado na Fig. P3.73 utilizando a análise dos laços.

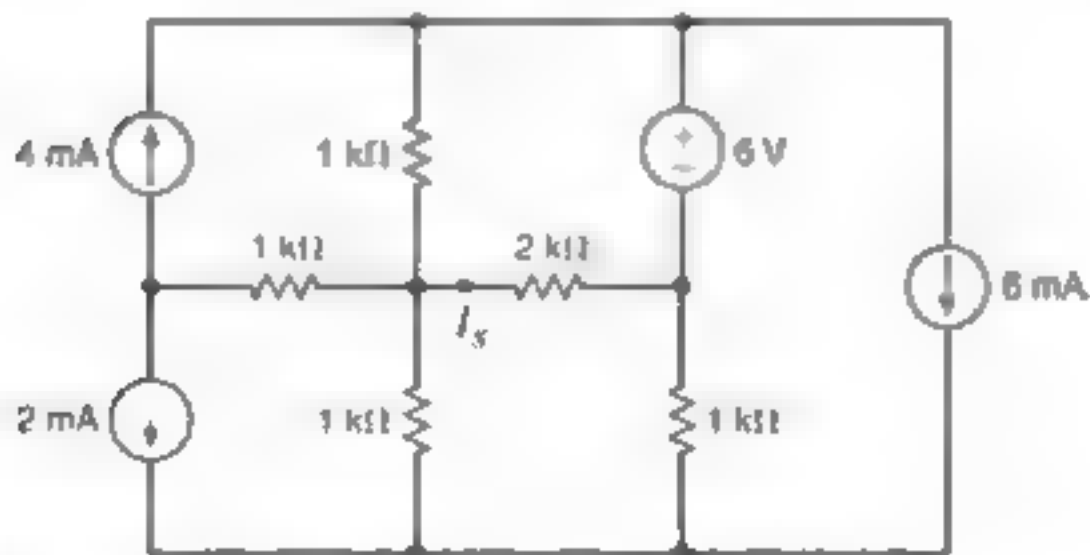


Figura P3.73

3.74 Determine a corrente I_s da rede mostrada na Fig. P3.74 utilizando a análise dos laços.

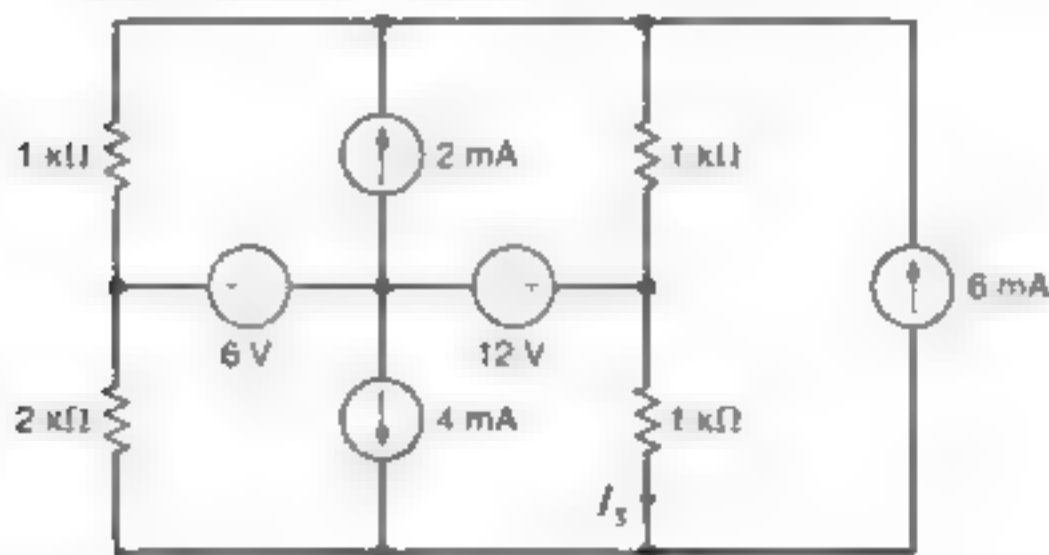


Figura P3.74

3.75 Determine a tensão V_s do circuito mostrado na Fig. P3.75 utilizando a análise dos laços.

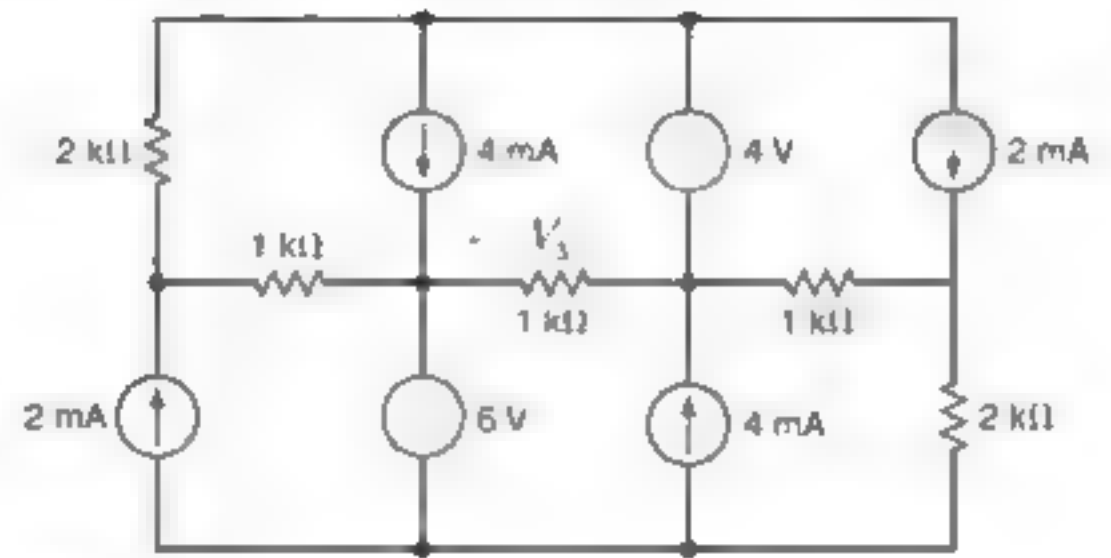


Figura P3.75

3.76 Utilizando a análise dos laços, determine a corrente I_s do circuito mostrado na Fig. P3.76.

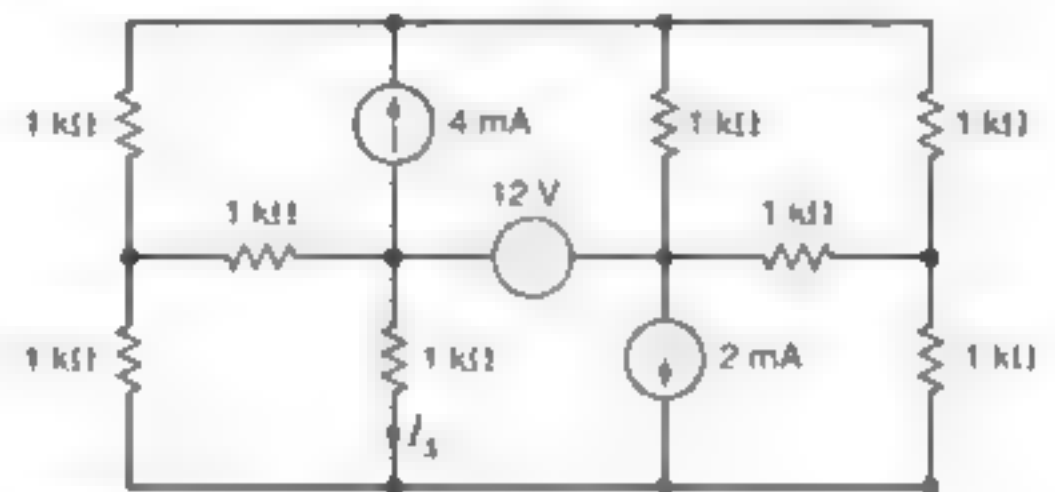


Figura P3.76

3.77 Determine as correntes das malhas da rede mostrada na Fig. P3.77.

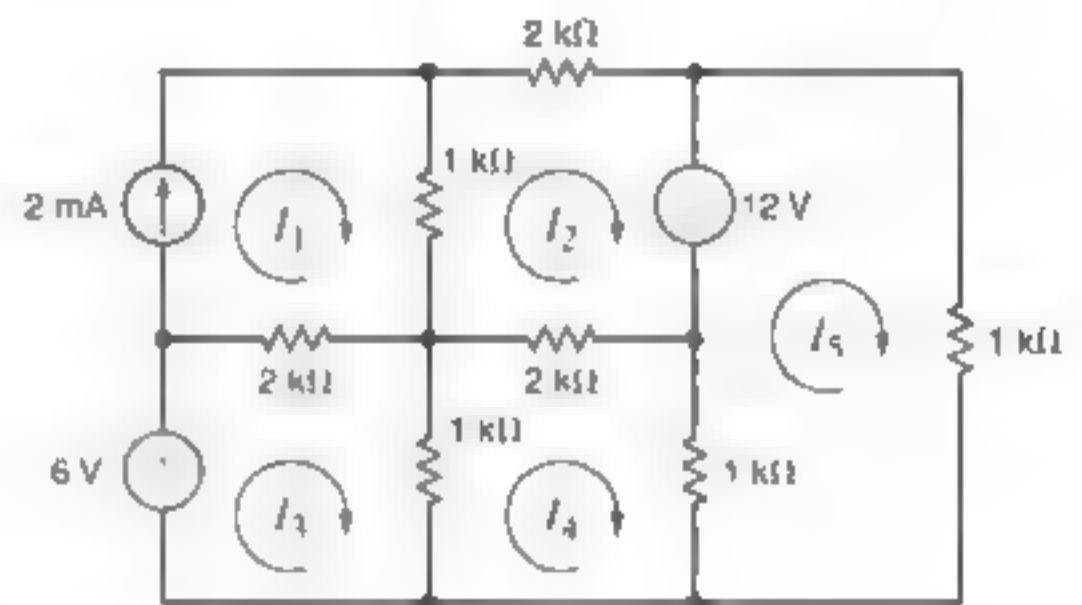


Figura P3.77

3.78 Utilize a análise dos laços para determinar a tensão V_s da rede mostrada na Fig. P3.78

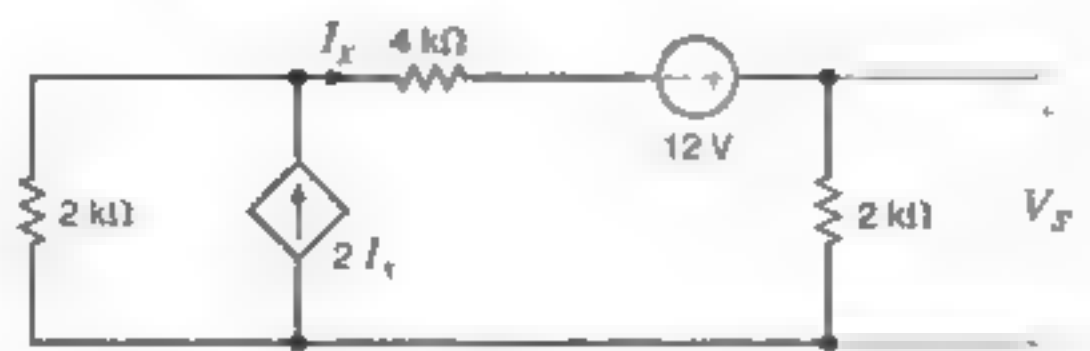


Figura P3.78

- 3.79 Determine a tensão V_s do circuito mostrado na Fig. P3.79 utilizando a análise nodal.

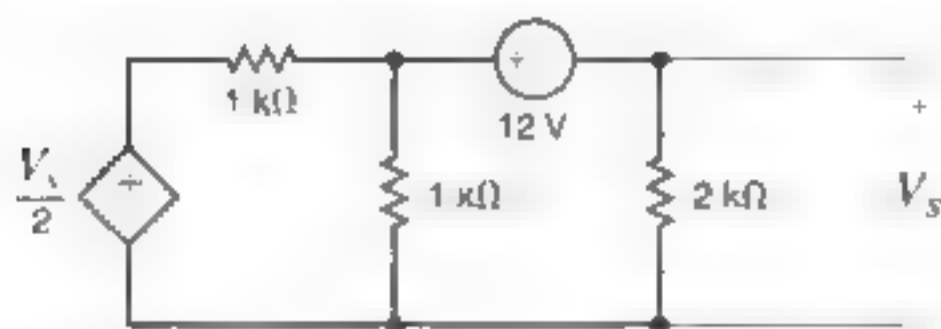


Figura P3.79

- 3.80 Utilize a análise nodal para determinar a tensão V_s do circuito mostrado na Fig. P3.80.

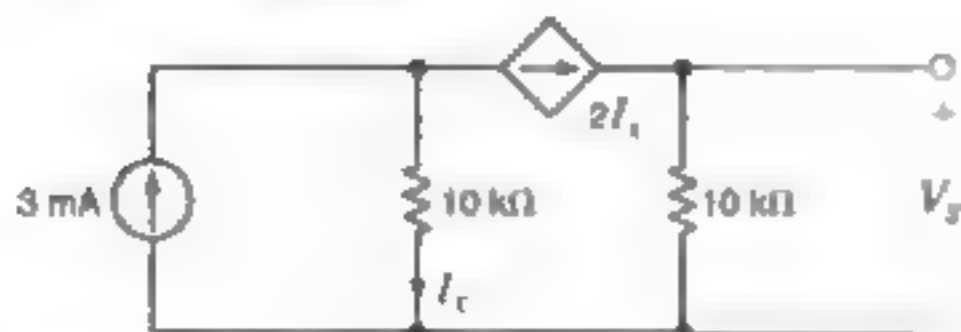


Figura P3.80

- 3.81 Determine a potência fornecida pela fonte de corrente de 2 A da rede mostrada na Fig. P3.81 utilizando a análise dos laços.

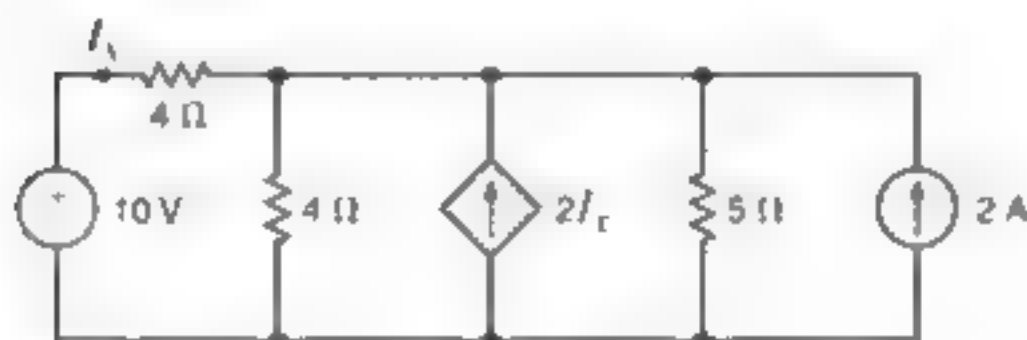


Figura P3.81

- 3.82 Determine a corrente I_s da rede mostrada na Fig. P3.82.

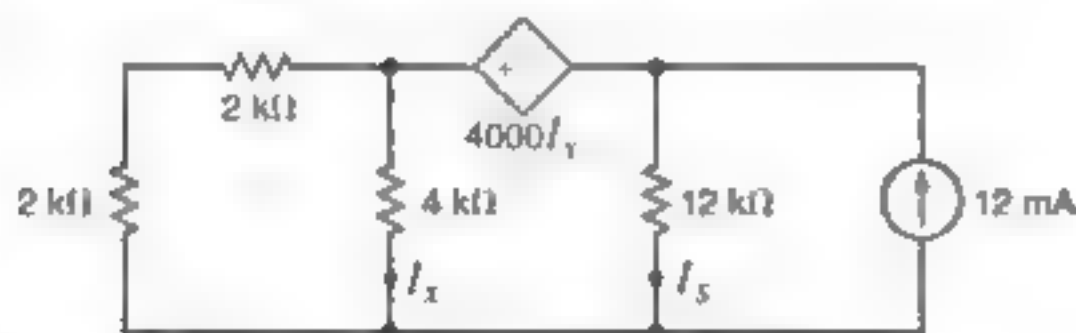


Figura P3.82

- 3.83 Determine a tensão V_s do circuito mostrado na Fig. P3.83 utilizando a análise dos laços.

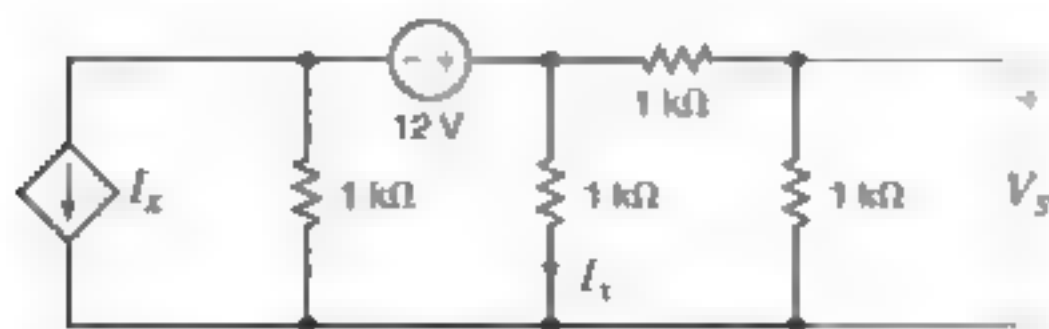


Figura P3.83

- 3.84 Determine a tensão V_s da rede mostrada na Fig. P3.84 utilizando a análise nodal.

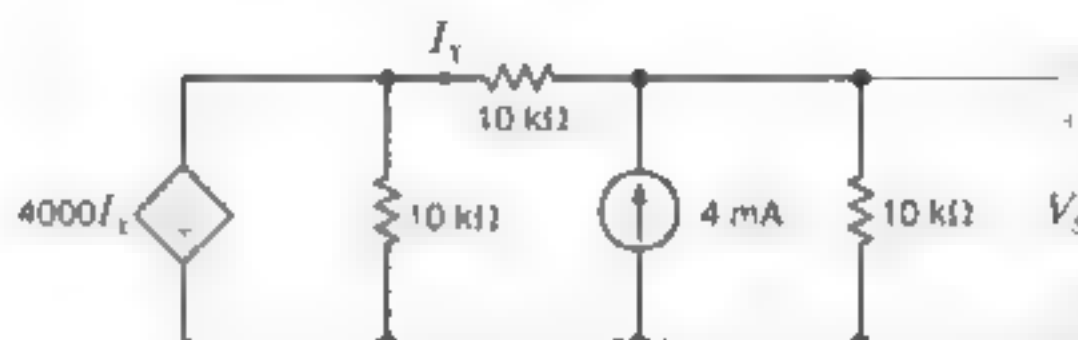


Figura P3.84

- 3.85 Determine a corrente I_x do circuito mostrado na Fig. P3.85 utilizando a análise dos laços.

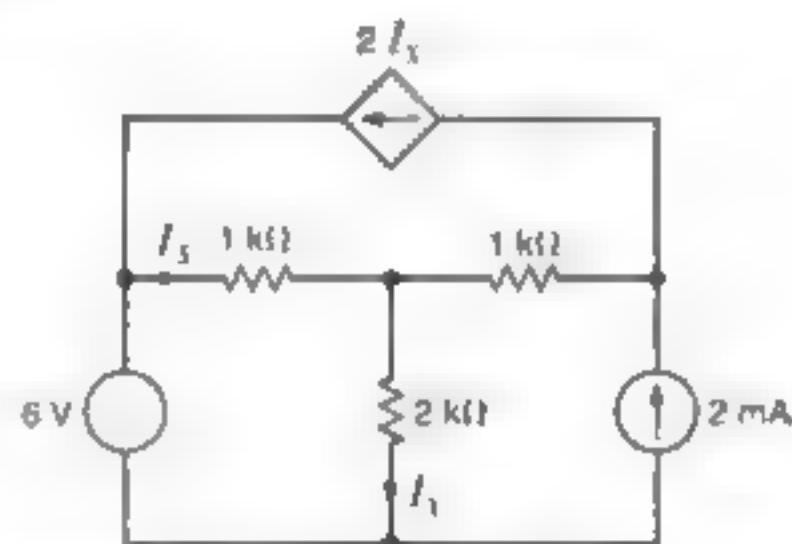


Figura P3.85

- 3.86 Utilize a análise das malhas para determinar a tensão V_s do circuito mostrado na Fig. P3.86.

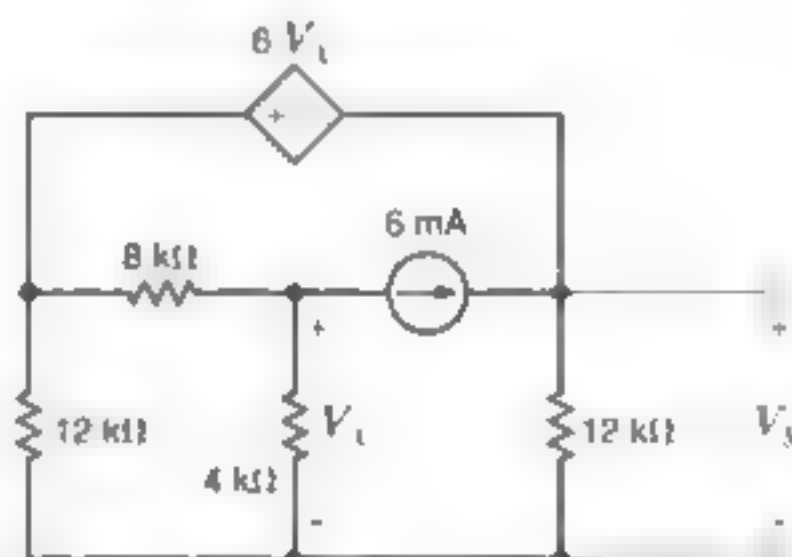


Figura P3.86

- 3.87 Utilizando a análise das malhas, determine a tensão V_s do circuito mostrado na Fig. P3.87.

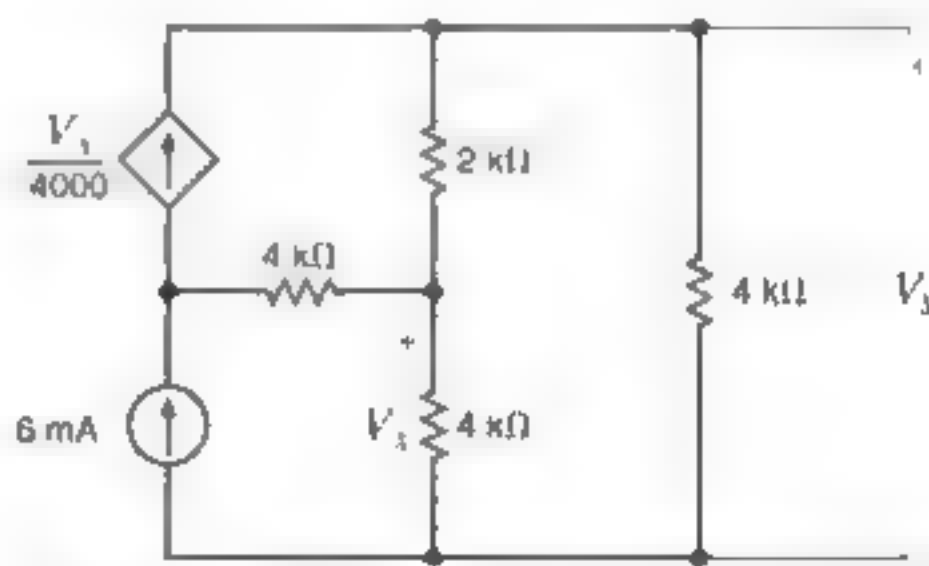


Figura P3.87

- 3.88 Determine a tensão V_s da rede mostrada na Fig. P3.88.

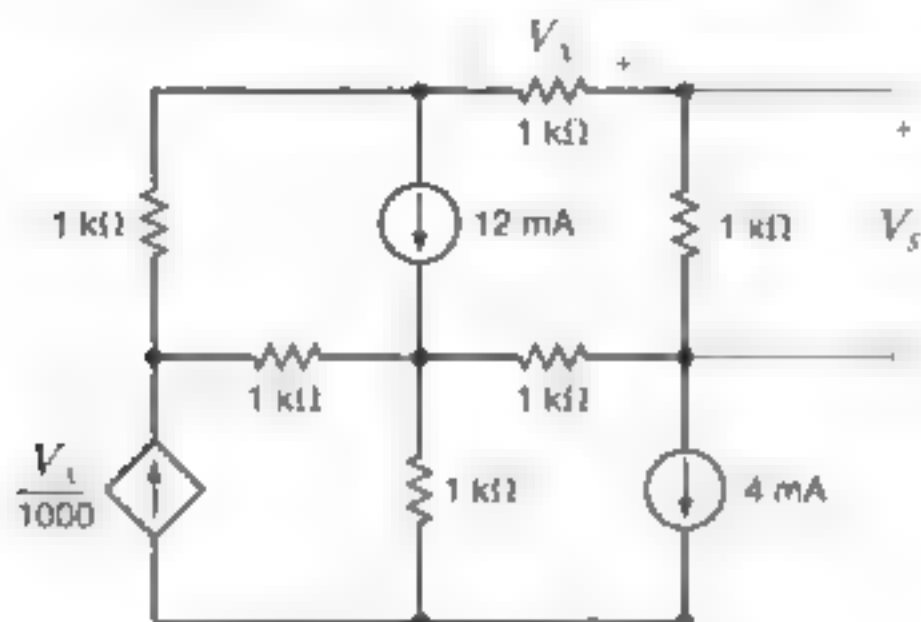


Figura P3.88

- 3.89 Utilizando a análise dos laços, determine a tensão V_s do circuito mostrado na Fig. P3.89.

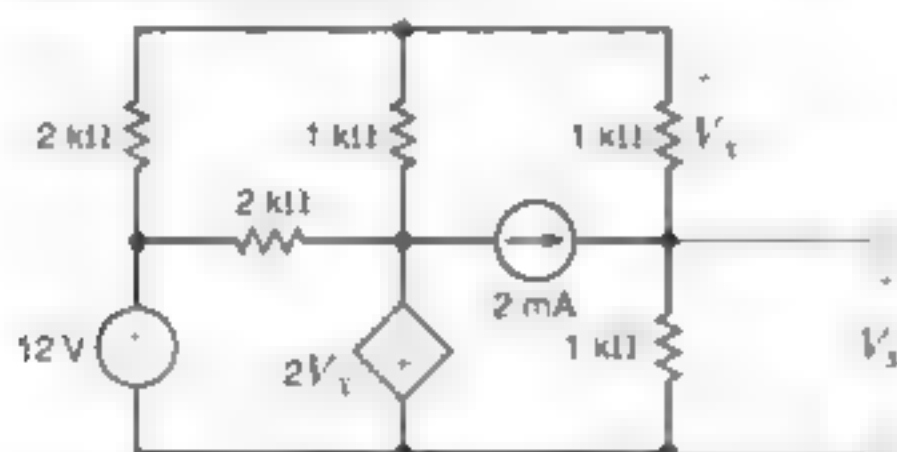


Figura P3.89

- 3.90 Utilizando a análise dos laços, determine a tensão V_s do circuito mostrado na Fig. P3.90.

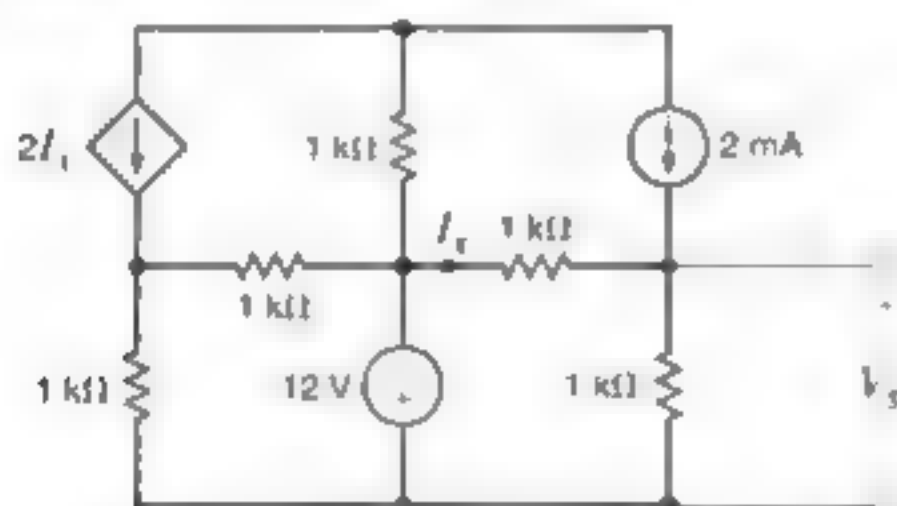


Figura P3.90

- 3.91 Utilizando a análise dos laços, determine a tensão V_s da rede mostrada na Fig. P3.91.

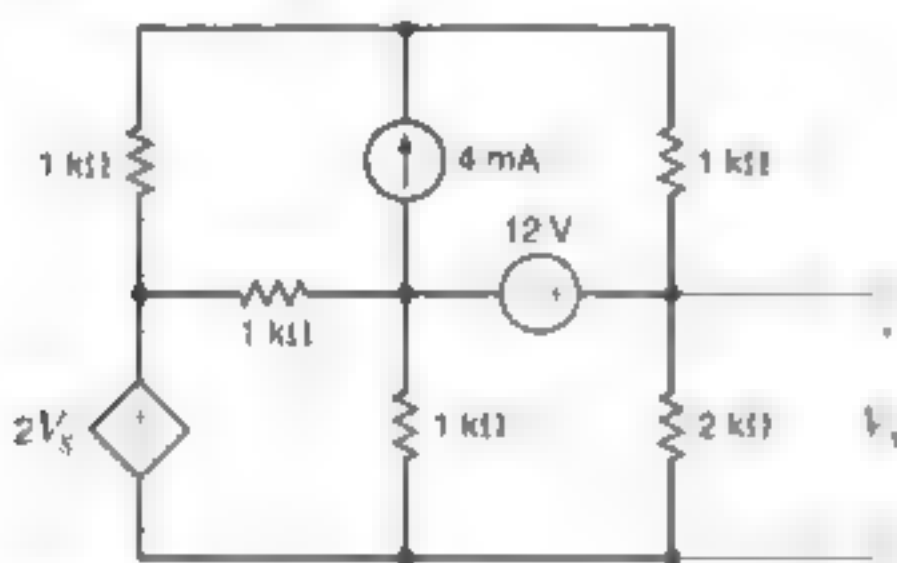


Figura P3.91

- 3.92 Utilizando a análise dos laços, determine a tensão V_s do circuito mostrado na Fig. P3.92.

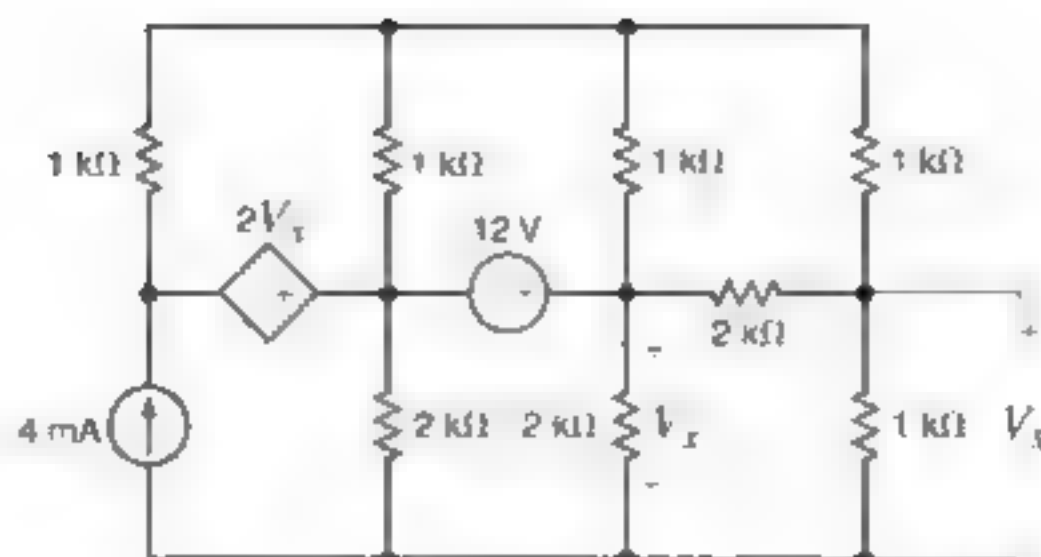


Figura P3.92

- 3.93 Utilizando a análise dos laços, determine a corrente I_s da rede mostrada na Fig. P3.93.

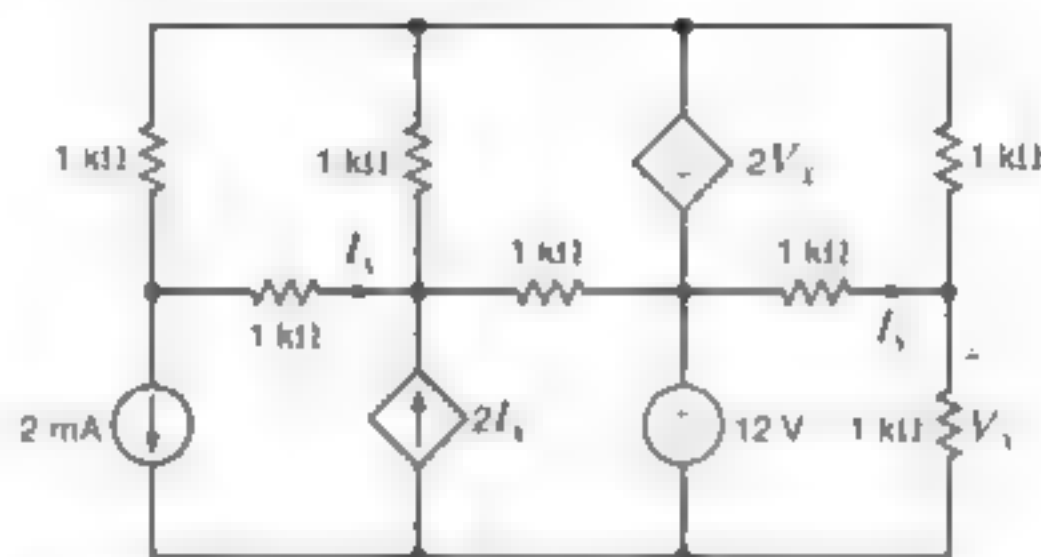


Figura P3.93

- 3.94 Utilize a análise dos laços para determinar a corrente I_s do circuito mostrado na Fig. P3.94.

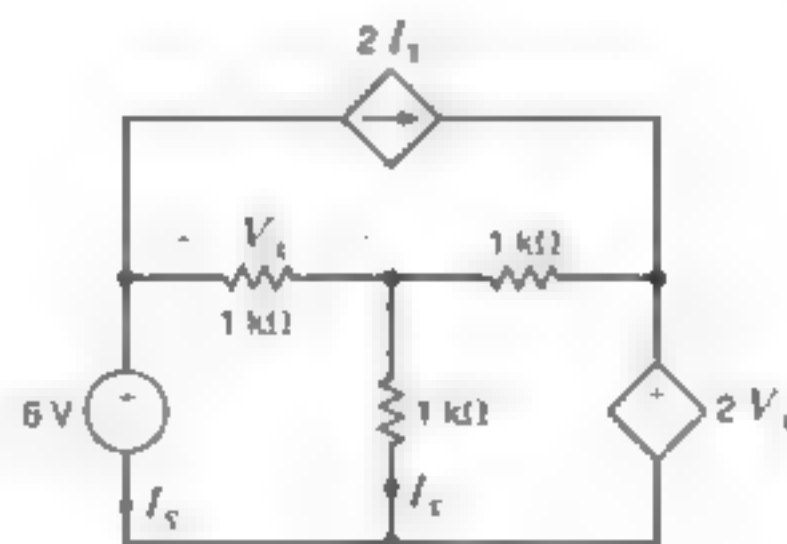


Figura P3.94

- 3.95 Determine a corrente I_s do circuito mostrado na Fig. P3.95 utilizando a análise dos laços.

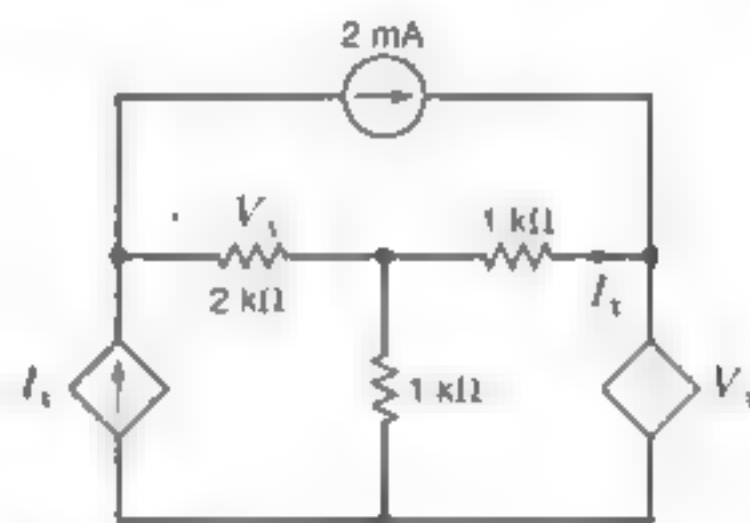


Figura P3.95

- 3.96** Determine a corrente I_x do circuito mostrado na Fig. P3.96 utilizando a análise dos laços.

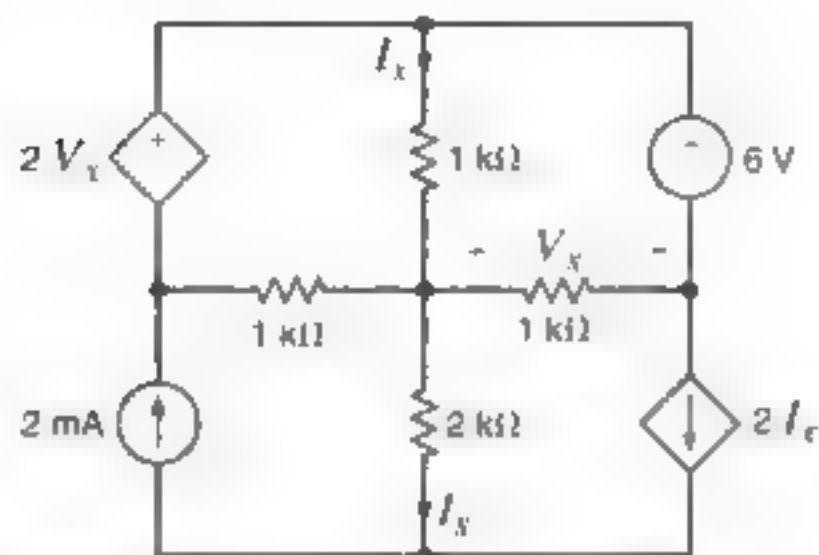


Figura P3.96

- 3.97** Determine a tensão V_x do circuito mostrado na Fig. P3.97 utilizando a análise dos laços.

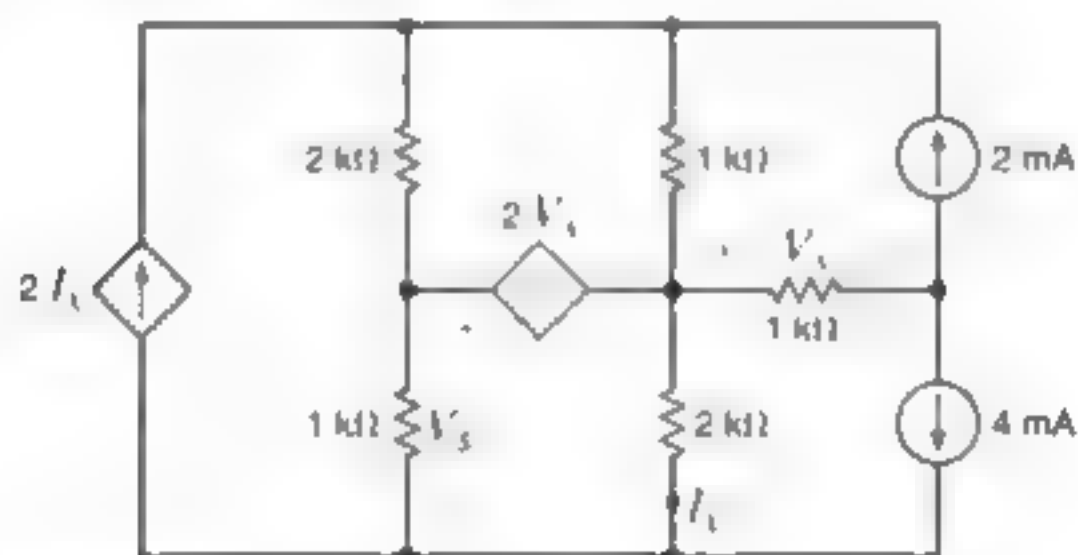


Figura P3.97

- 3.98** Determine as correntes das malhas definidas no circuito mostrado na Fig. P3.98.

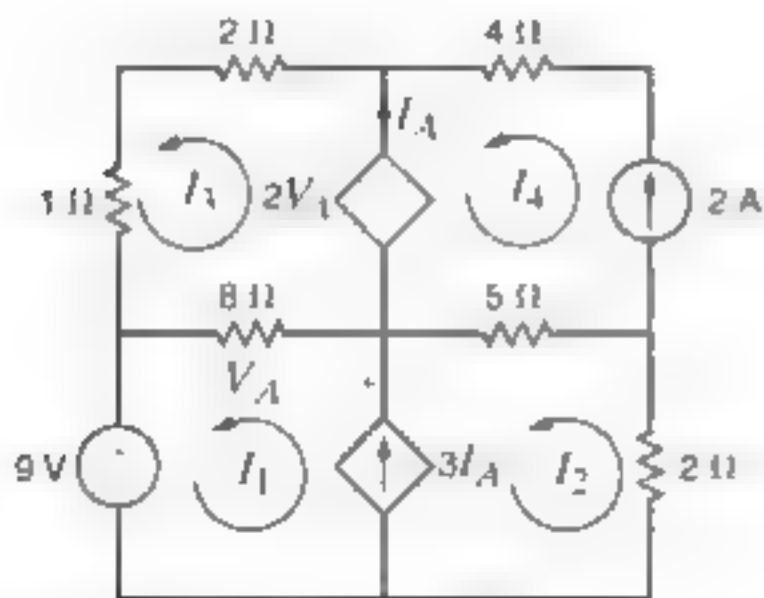


Figura P3.98

- 3.99** Determine as correntes das malhas definidas no circuito mostrado na Fig. P3.99

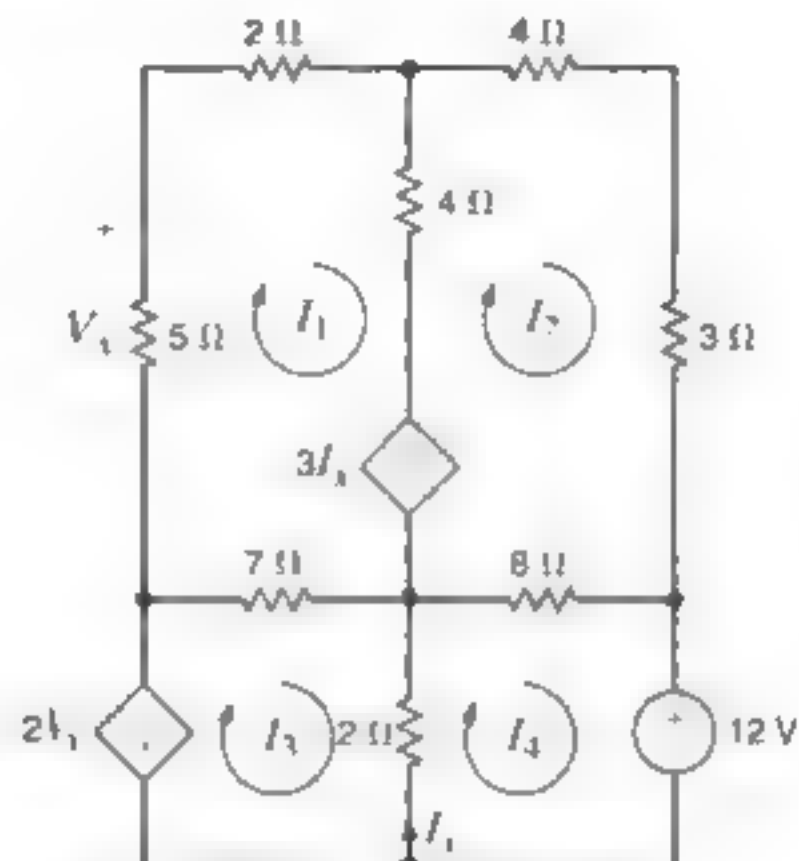


Figura P3.99

- 3.100** Determine as correntes das malhas definidas no circuito mostrado na Fig. P3.100.

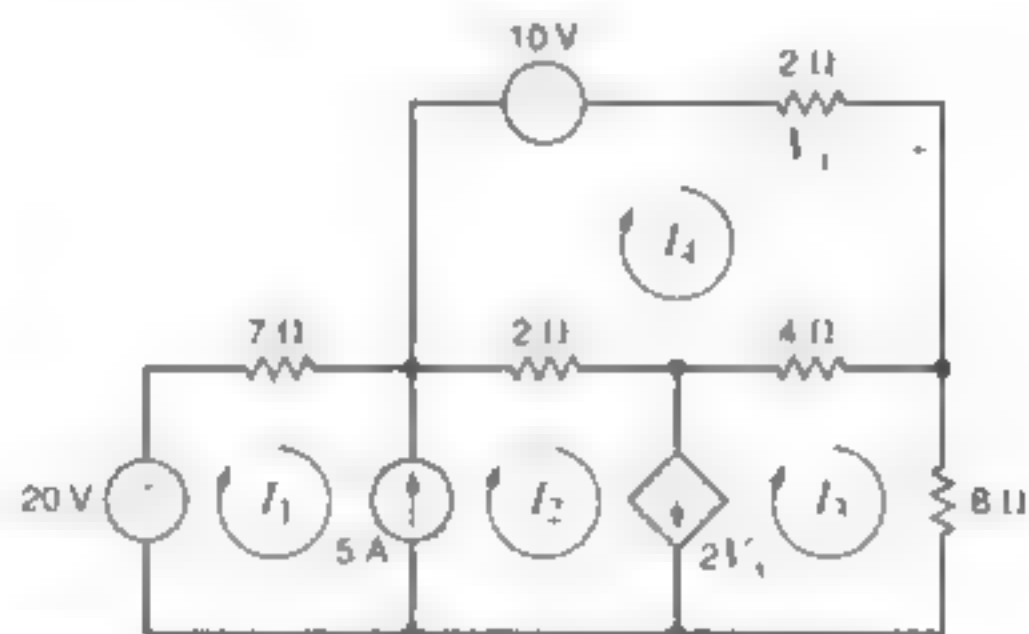


Figura P3.100

- 3.101** Utilizando a análise dos laços, determine a corrente I_x do circuito mostrado na Fig. P3.101.

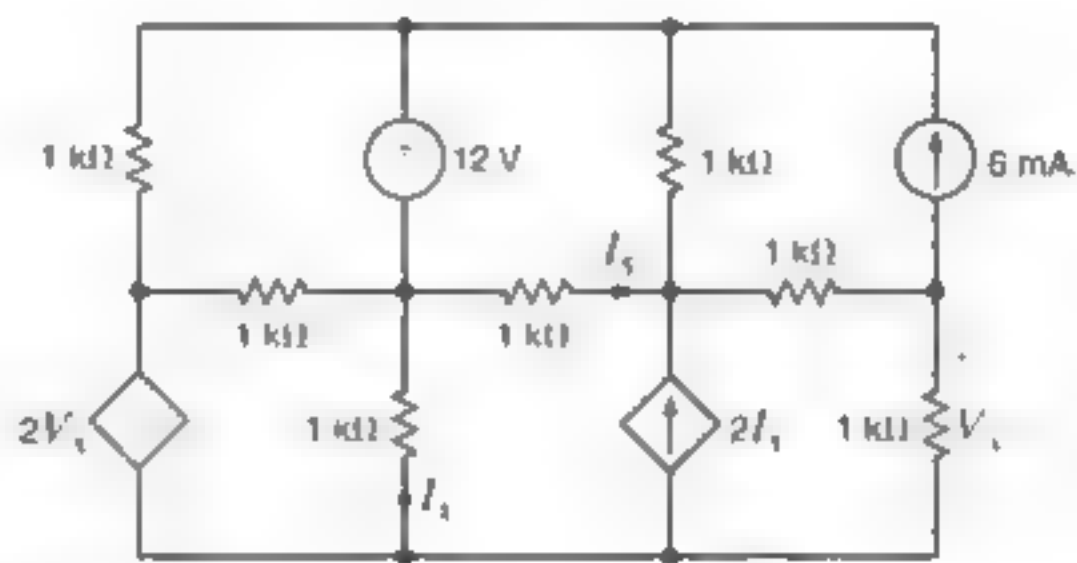


Figura P3.101

- 3.102** Utilize a análise das malhas para determinar a potência fornecida pela fonte independente de 3 V da rede mostrada na Fig. P3.102.

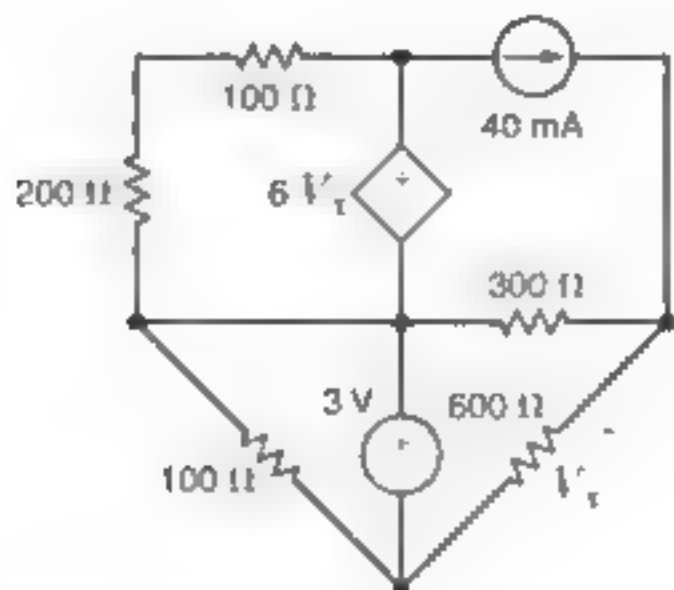


Figura P3.102

- 3.103** Utilize a análise das malhas para determinar a potência fornecida pela fonte de tensão controlada por corrente do circuito mostrado na Fig. P3.103.

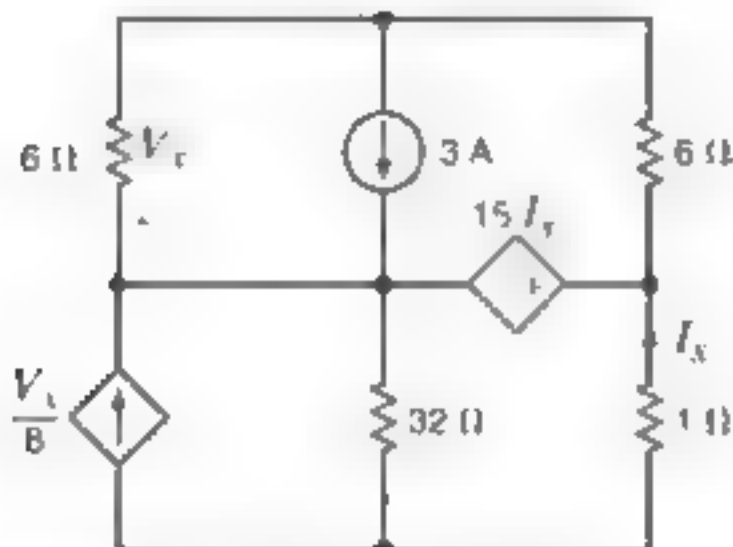


Figura P3.103

- 3.104** Utilize as análises nodal e dos laços para determinar a corrente I_x do circuito mostrado na Fig. P3.104.

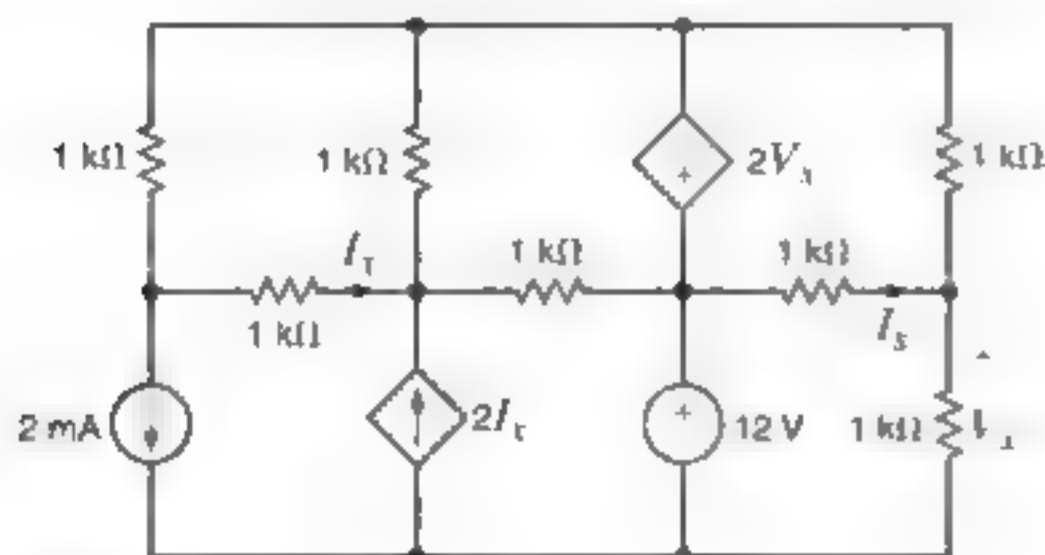


Figura P3.104

- 3.105** Utilize as análises nodal e dos laços para determinar a tensão V_x do circuito mostrado na Fig. P3.105.

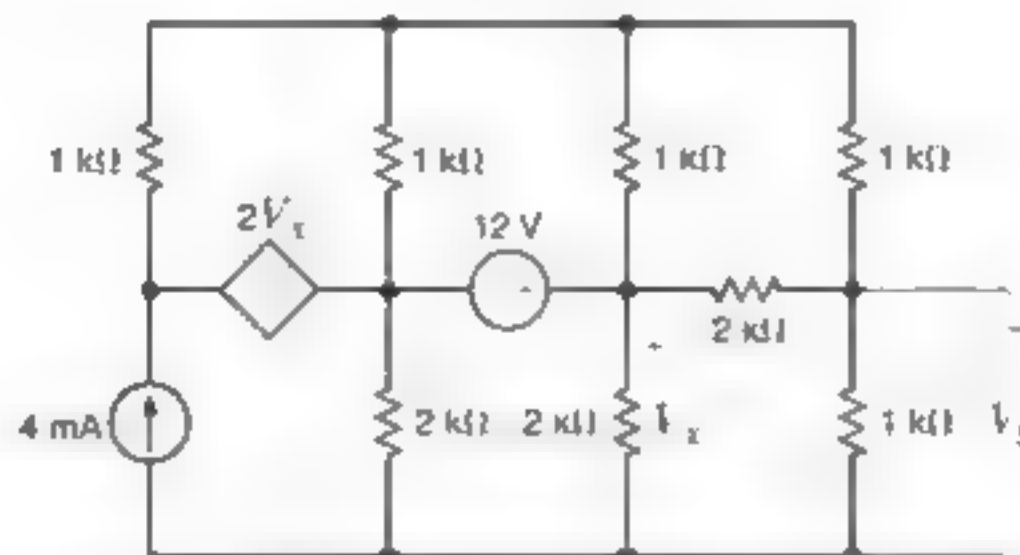


Figura P3.105

- 3.106** Determine a corrente I_x da rede mostrada na Fig. P3.106 utilizando a análise nodal.

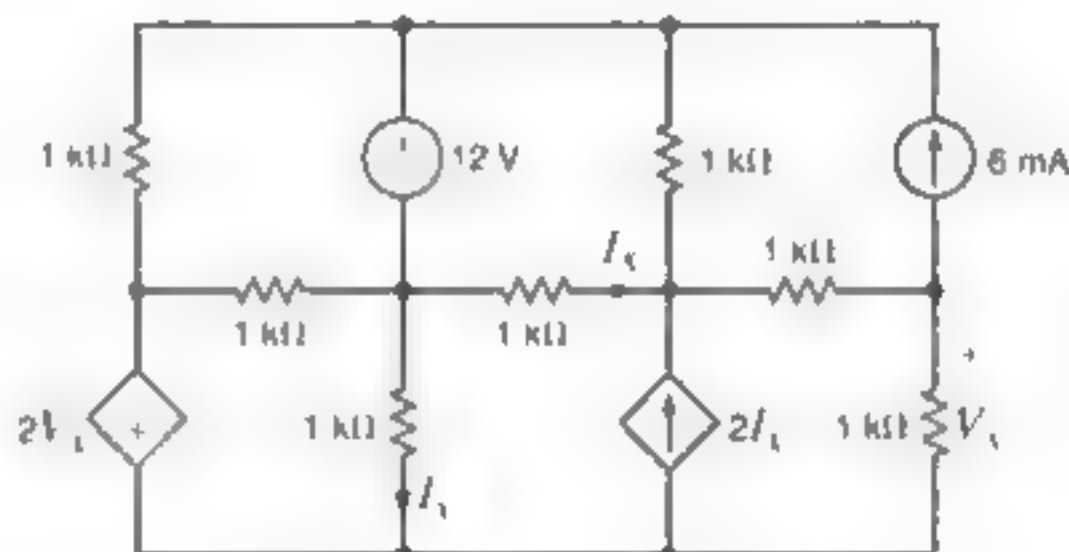


Figura P3.106

Problemas Típicos de Exames Profissionais de Engenharia

3PEP-1 Determine o valor da tensão V_s do circuito mostrado na Fig. 3PEP-1.

- a. 3,33 V c. 9,33 V
b. 8,25 V d. 2,25 V

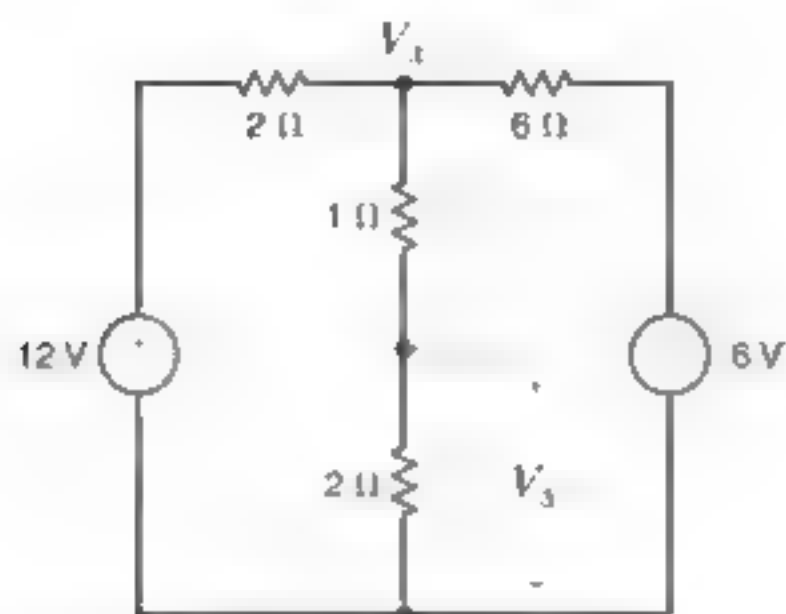


Figura 3PEP-1

3PEP-2 Determine a potência dissipada pelo resistor de 6 ohms da rede mostrada na Fig. 3PEP-2.

- a. 8,2 W c. 4,4 W
b. 15,3 W d. 13,5 W

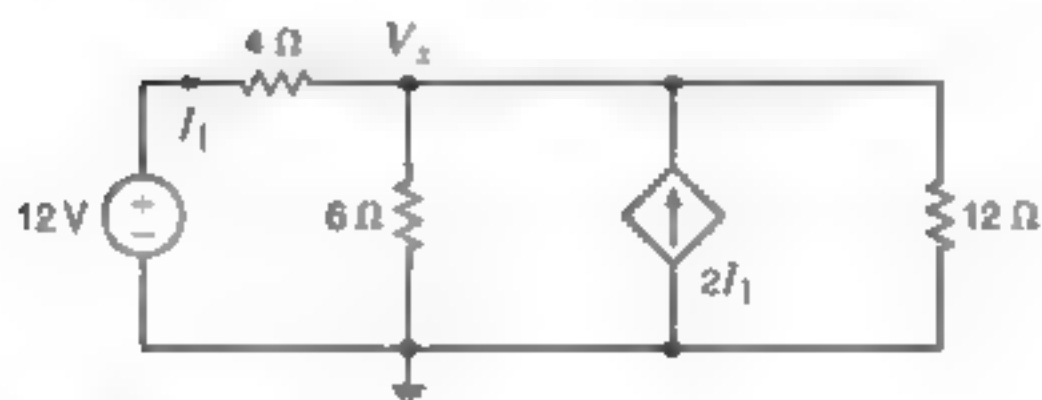


Figura 3PEP-2

3PEP-3 Determine o valor da corrente I_x que passa pelo resistor de 4 ohms do circuito mostrado na Fig. 3PEP-3.

- a. 20 A c. 7 A
b. 12 A d. 14 A

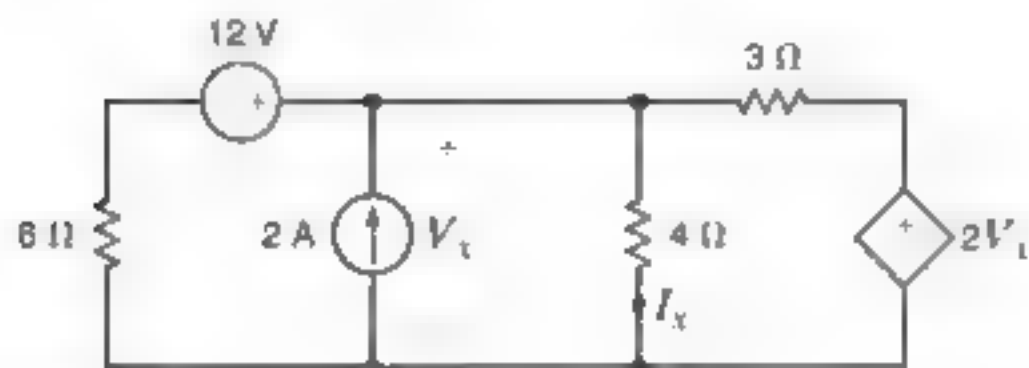


Figura 3PEP-3

3PEP-4 Determine a tensão V_s do circuito mostrado na Fig. 3PEP-4.

- a. -3,28 V c. -6,43 V
b. 4,14 V d. 2,25 V

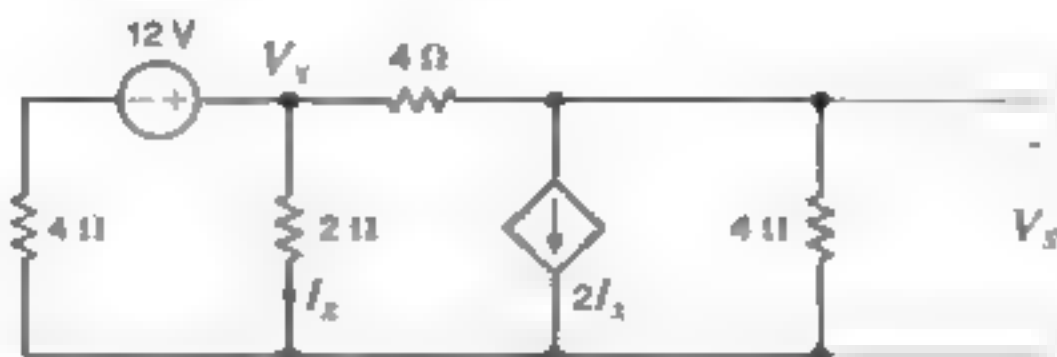


Figura 3PEP-4

3PEP-5 Qual é o valor da tensão V_1 indicada no circuito da Fig. 3PEP-5?

- a. -7 V c. -2 V
b. 5 V d. 4 V

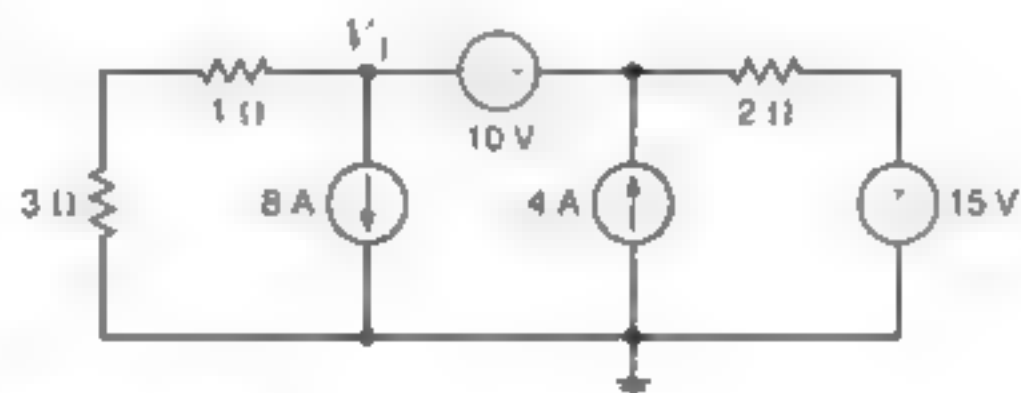


Figura 3PEP-5

AMPLIFICADORES OPERACIONAIS



Cortesia da NewsCom

AS METAS DE APRENDIZAGEM DESTE CAPÍTULO SÃO:

- Saber como modelar um amplificador operacional (op-amp)
- Saber como analisar diversas configurações de circuitos que empregam op-amps
- Compreender a utilização dos op-amps em diversas aplicações práticas

Cirurgia Robótica A cirurgia assistida por robôs pode ter sido o fato mais relevante da área médica desde a época em que o coração artificial de Jarvik se tornou manchete, há alguns anos. Utilizando pequenos cortes cirúrgicos, esse procedimento minimamente invasivo conduz a uma recuperação mais rápida, um menor sofrimento do paciente e a menos risco de hemorragias e infecções. Você passa a ter a expectativa de deixar o hospital após uma noite de repouso e caminhar no dia seguinte ou após a remoção de sondas nos casos das cirurgias de maior porte. As técnicas assistidas pela robótica têm se estendido até a algumas cirurgias do coração.

A robótica permite ao cirurgião trabalhar em um console a uma pequena distância da mesa de operação, manipulando remotamente os braços robóticos nas laterais da cama. A principal vantagem é a redução do impacto dos tremores das mãos nos ins-

trumentos cirúrgicos. A combinação de computadores e robótica também permite aos cirurgiões a realização prévia de seções práticas por meio de simulações computacionais.

Neste capítulo, você estudará os amplificadores operacionais, ou op-amps, um componente-chave da robótica. A análise nodal e a lei de Ohm representam as ferramentas necessárias para se analisar esse componente eletrônico básico. Um componente ativo que recebe energia externa, o op-amp está presente nas configurações comuns utilizadas para inverter, amplificar e somar sinais de tensão. O op-amp também pode ser utilizado nos projetos de separação de estágios em cascata. Os cirurgiões na vanguarda dos cuidados com a saúde dependem dos projetistas de dispositivos eletrônicos para uso em ferramentas pioneiras. Com os op-amps à sua disposição, você pode começar a criar projetos que venham a se tornar verdadeiros salvadores de vidas.

4.1 Introdução

Pode-se afirmar que o amplificador operacional, ou op-amp como é normalmente conhecido, é o mais simples e importante circuito integrado utilizado no projeto de circuitos analógicos. Ele constitui-se de uma interconexão versátil de transistores e resistores que amplia a capacidade dos projetos de circuitos, desde os sistemas de controle utilizados em motores até os telefones celulares. Inicialmente os op-amps foram construídos com tubos a vácuo, o que os tornou grandes e de pouca potência. A invenção do transistor pela Bell Labs, em 1947, permitiu que os engenheiros produzissem op-amps muito menores e mais eficientes. Ainda assim, o op-amp em si consistia em transistores e resistores individuais interconectados em uma placa de circuito impresso (PCI). Quando o processo da fabricação de circuitos integrados (CI) foi desenvolvido, por volta de 1970, os engenheiros puderam finalmente colocar todos os transistores e resistores dos op-amps em um único CI, o chip. Atualmente, é comum encontrar até quatro op-amps de alta qualidade em um único CI por aproximadamente US\$ 0,40. Alguns exemplos de op-amps comerciais são mostrados na Fig. 4.1.

Por que eles são denominados amplificadores operacionais? Originalmente, o op-amp foi projetado para realizar operações matemáticas tais como adição, subtração, derivação e integração. Incorporando-se redes simples ao op-amp, podem ser construídos "blocos de operações", tais como um ganho em tensão, uma conversão de corrente para tensão e um vasto conjunto de aplicações mais complexas.

4.2 Modelos de Op-Amps

Como pode ser possível compreender o desempenho de um op-amp entendendo-se apenas as fontes e os resistores? A resposta

é: modelando. Ao se remover todas as possíveis interferências, um op-amp é simplesmente um amplificador de tensão de ótima qualidade. Em outras palavras, a tensão de saída é uma reprodução amplificada ou atenuada da tensão de entrada. Os op-amps modernos são amplificadores tão bons que tornam muito fácil a construção de um modelo de primeira ordem preciso. Conforme mencionado anteriormente, o op-amp é muito popular e é utilizado extensivamente no projeto de circuitos de todos os níveis. Não se deve ficar surpreso ao encontrar op-amps disponíveis para todas as aplicações — baixa tensão, alta tensão, micropotência, alta velocidade, alta corrente, e assim por diante. Felizmente, a topologia dos modelos aqui apresentados é independente dessas características.

Inicia-se a discussão com o op-amp de aplicação geral modelo LM324 quad (quatro em um único dispositivo) fabricado pela National Semiconductor, mostrado no canto superior direito da Fig. 4.1a. A configuração dos pinos de saída para o LM324 é mostrada na Fig. 4.2 para um DIP (*Dual Inline Pack*) com as dimensões especificadas em polegadas. Observando-se que existem quatro op-amps idênticos no conjunto, pode-se analisar o amplificador 1. Os pinos 3 e 2 são os pinos de entrada, E_+ e E_- , e são chamados de entradas não inversora e inversora, respectivamente. A saída ocorre no pino 1. A relação entre a tensão de saída e a tensão de entrada é

$$V_o = A_o(E_+ - E_-) \quad 4.1$$

em que todas as tensões são medidas relativamente ao terra e A_o é o ganho do op-amp. (A localização do terminal terra será discutida brevemente.) Pela Eq. (4.1), percebe-se que quando E_+ aumenta, V_o também aumenta. Entretanto, se E_- aumenta, então, V_o diminui — daí os nomes entrada não inversora e inversora. Mencionou-se anteriormente que os op-amps são excelentes amplificadores de tensão. Como quantificar? Valores típicos de A_o estão entre 10.000 e 1.000.000!

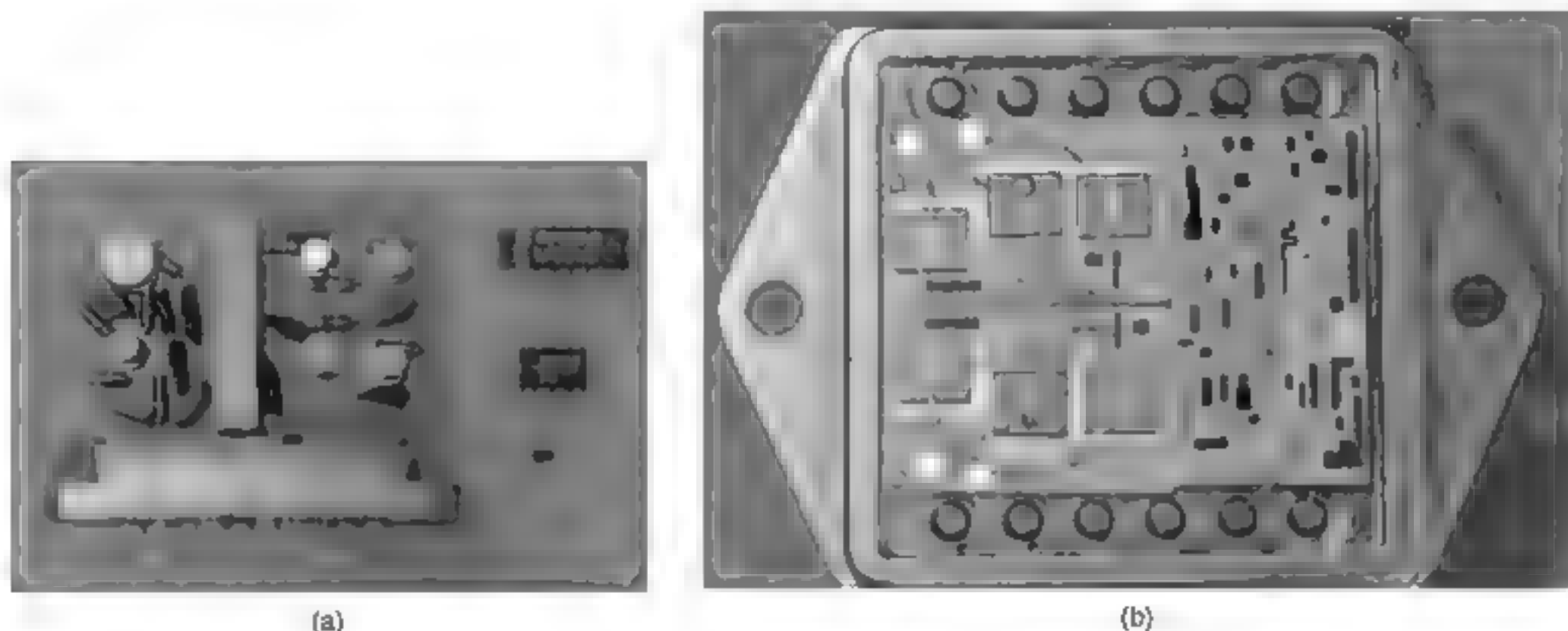


Figura 4.1 Exemplos de op-amps. À esquerda em (a) é mostrado um op-amp constituído por um conjunto de componentes formando um circuito montado sobre uma placa de circuito integrado (PCI). À direita, de cima para baixo, são mostrados os op-amps modelos LM324 DIP, LMC6492 DIP e MAX4240 na configuração SO-5 (*small outline/5 pins*). O modelo APEX PA03 com sua tampa removida (b) mostrando os resistores e transistores individuais. (Esquerda, cortesia de Mark Nelms e Jo Ann Loden; direita, cortesia de Milt Perrin, Apex Microtechnology Corp.)

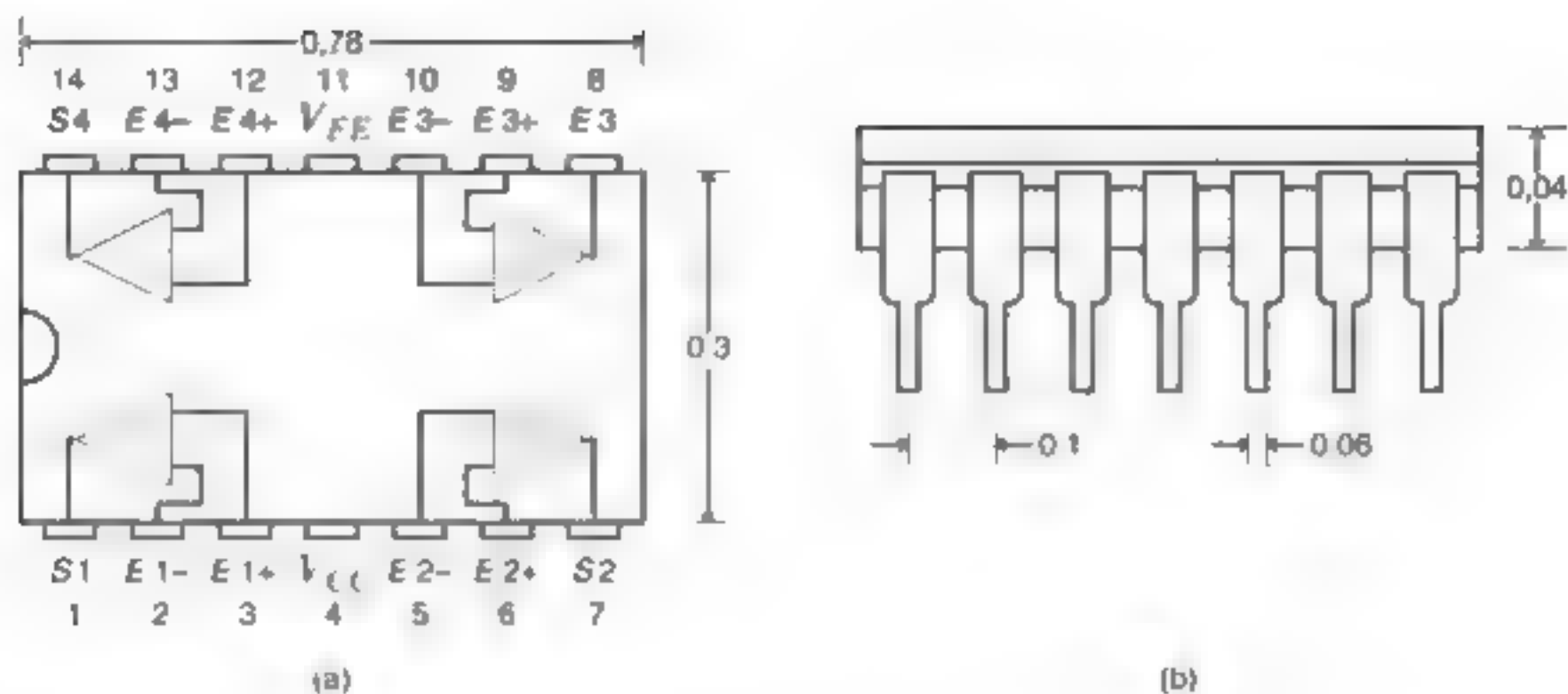


Figura 4.2 (a) Terminais de saída e (b) diagrama dimensional de um op-amp LM324 quad. Note que a distância nominal entre os pinos é de 0,1 polegada, uma distância padronizada da configuração DIP.

Para que se consiga uma amplificação, necessita-se de energia. Essa energia é obtida de fontes de tensão CC conectadas aos pinos 4 e 11, cujas tensões são designadas por V_{CC} e V_{EE} respectivamente. A Fig. 4.3 mostra como as fontes de potência são conectadas nas aplicações que utilizam uma ou duas fontes, e define o nó terra em relação ao qual todas as tensões de entrada e de saída são referenciadas. Normalmente, V_{CC} é uma tensão CC positiva em relação ao terra e V_{EE} pode ser ou uma tensão negativa ou o próprio terra. Os valores reais dessas fontes de potência podem variar, dependendo da aplicação, desde um volt até centenas de volts.

Como um modelo para o op-amp pode ser definido? Uma fonte de tensão dependente pode produzir V_o ! O que pode ser afirmado sobre as correntes que entram e que saem dos terminais do op-amp (pinos 3, 2 e 1)? Felizmente, as correntes são, em geral, proporcionais às tensões nos pinos, portanto, seu comportamento pode ser estabelecido pela lei de Ohm. Assim, modela-se a relação I - V do op-amp com dois resistores: um entre os terminais de entrada (R_i) e outro na saída (R_o). A Fig. 4.4 mostra todos esses componentes reunidos no circuito.

Quais são os valores esperados de A_o , R_i e R_o ? Pode-se estabelecer os valores dessas grandezas com o auxílio da Fig. 4.5, em que é representada uma equivalência para o circuito que

aciona o nó de entrada, e tem-se modelado o circuito conectado na saída a um único resistor, R_L . Uma vez que se admite que o op-amp seja um excelente amplificador de tensão, escreve-se uma equação referente ao ganho total do circuito V_o/V_i . Utilizando a divisão de tensão na entrada e, novamente, na saída, rapidamente chega-se à expressão

$$\frac{V_o}{V_i} = \left[\frac{R_o}{R_i + R_{thi}} \right] A_o \left[\frac{R_L}{R_L + R_o} \right]$$

Para que o ganho seja máximo, independentemente dos valores das resistências R_{thi} e R_o , faz-se a relação de divisão de tensão tão próxima da unidade quanto possível. O cenário ideal requer que A_o seja infinito, R_i seja infinita e R_o seja nula, fornecendo um alto ganho global de A_o . A Tabela 4.1 mostra os valores reais de A_o , R_i e R_o para alguns modelos comerciais de op-amps indicados para aplicações bem distintas. Embora A_o , R_i e R_o não sejam componentes ideais, eles se aproximam bastante das condições ideais.

A potência fornecida ao op-amp afeta o desempenho de duas formas. Primeiro, cada op-amp possui uma faixa de operação em relação à fonte de alimentação (valores mínimo e máximo

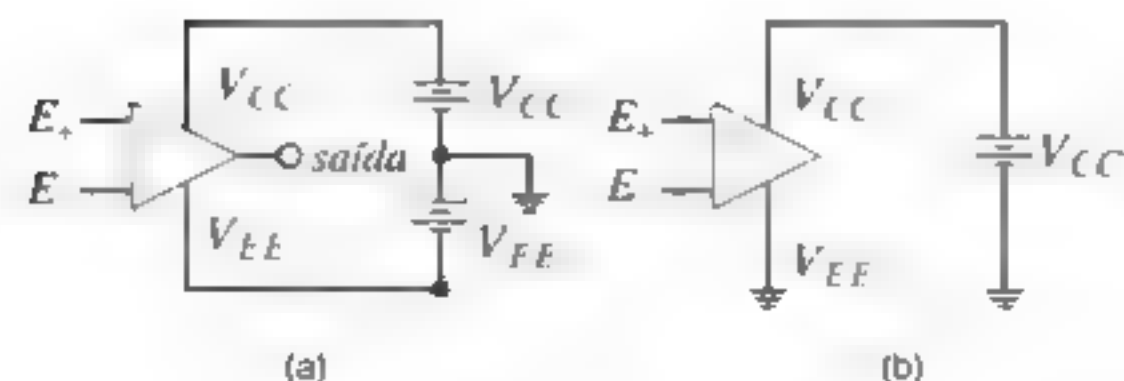


Figura 4.3 Esquema mostrando as conexões das fontes de potência e a localização do terra para uma implementação com (a) duas fontes e (b) uma única fonte.

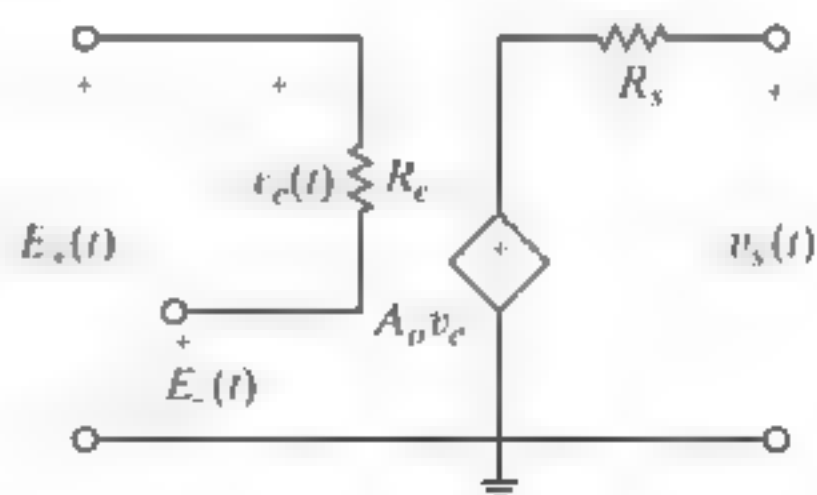


Figura 4.4 Modelo simples para caracterizar o ganho de um op-amp.

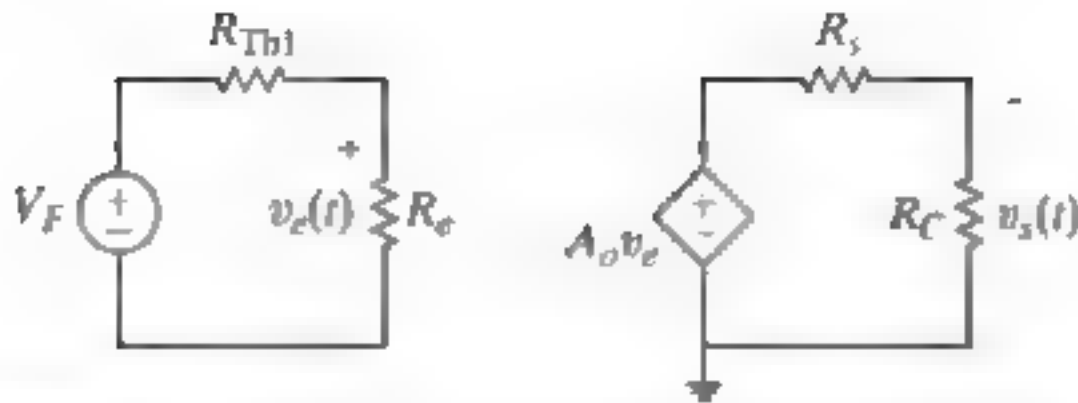


Figura 4.5 Rede que ilustra o circuito de um op-amp. A fonte de tensão V_F e a resistência R_{Th1} modelam o circuito de alimentação, enquanto a carga é modelada pelo resistor R_C . O circuito da Fig. 4.4 representa o modelo físico do op-amp.

da fonte), para a qual seu funcionamento é assegurado. Segundo, para uma operação adequada, as tensões de entrada e de saída são limitadas aos valores das fontes de tensão.* Caso as

entradas e as saídas possam alcançar uns poucos milivolts das fontes, então as entradas e as saídas são chamadas de *rail-to-rail*. De outra forma, os limites de entrada e de saída serão mais severos — usualmente um volt ou mais acima dos valores das fontes. Combinando-se o modelo apresentado na Fig. 4.4 com os valores mostrados na Tabela 4.1 e considerando-se essas limitações de E/S, pode-se traçar as curvas mostradas nos gráficos da Fig. 4.6, que mostram a relação saída-entrada para cada op-amp definido na Tabela 4.1. Observando-se os gráficos, percebe-se que os op-amps LMC6492 e MAX4240 possuem saídas *rail-to-rail* e os op-amps LM324 e PA03 não.

Mesmo imaginando-se que os op-amps possam operar com tensões de alimentação máxima e mínima, em decorrência da configuração do circuito, um aumento na tensão de entrada pode não fornecer um correspondente aumento na tensão de saída. Nesse caso, diz-se que o op-amp está operando na região de saturação. O exemplo a seguir aborda essa situação.

TABELA 4.1 Relação de op-amps comerciais com os valores de seus parâmetros

FABRICANTE	CÓDIGO DO COMPONENTE	QNTD. POR FAIXA	FAIXA DE TENSÃO DE ALIMENTAÇÃO (V)	FAIXA DE TENSÃO DE SAÍDA (V)	COMENTÁRIOS
National	LM324	100.000	1,0	20	Uso geral, fonte de ± 16 V, muito barato
National	LMC6492	50.000	10^7	150	Baixa tensão, entradas e saídas na configuração <i>rail-to-rail</i> [*]
Maxim	MAX4240	20.000	45	160	Micropotência (fonte de 1,8 V @ 10 μ A), entradas e saídas com a característica <i>rail-to-rail</i>
Apex	PA03	125.000	10^5	2	Alta tensão, ± 75 V, e capacidade de alta corrente de saída, 30 A. Potência aproximada de 2 kW!

*A configuração *rail-to-rail* é uma marca registrada da Motorola Corporation. Essa característica é discutida mais adiante nos próximos parágrafos.

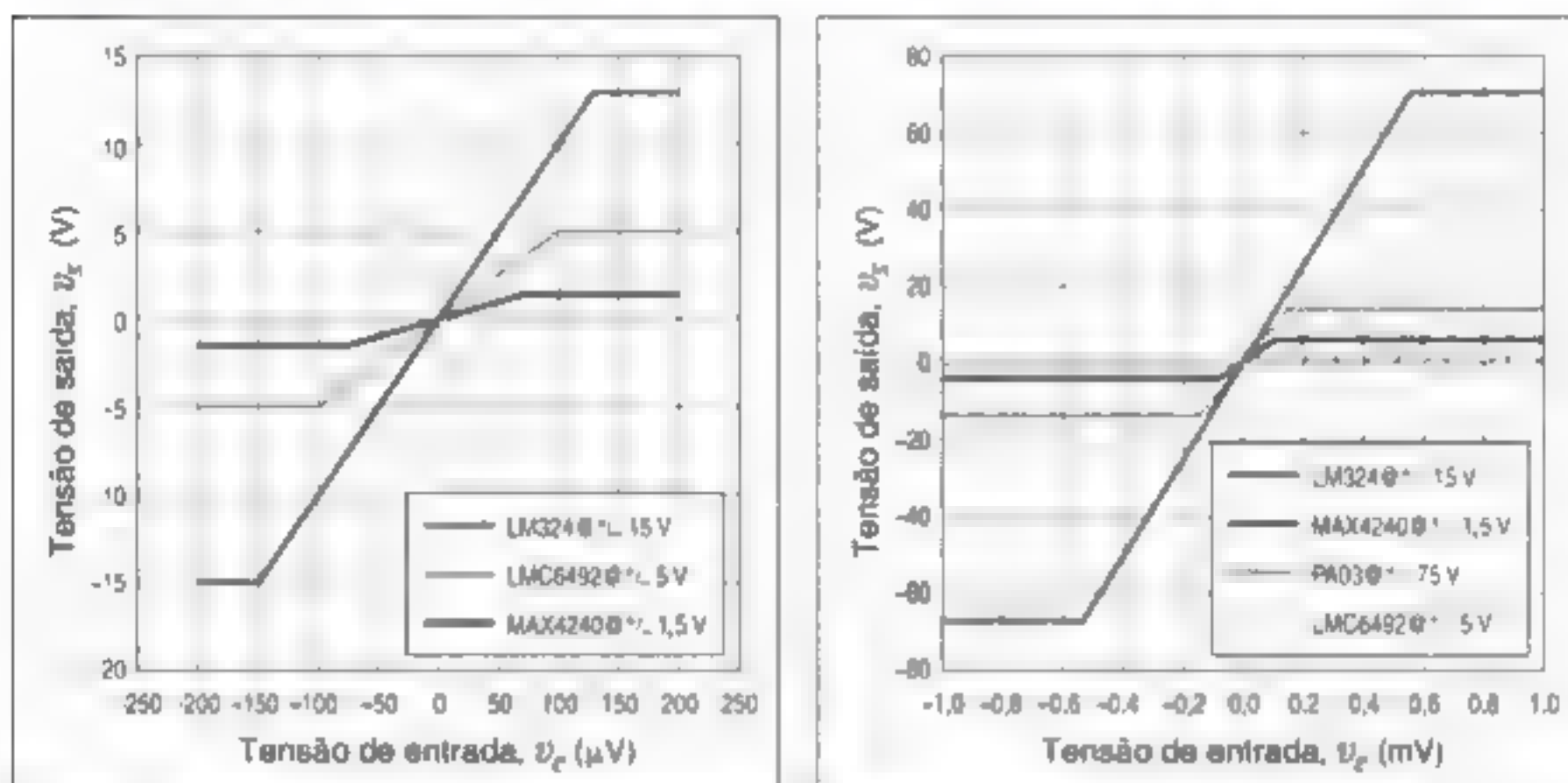


Figura 4.6 Curvas características dos op-amps listados na Tabela 4.1. As características das fontes de alimentação são listadas nas legendas do gráfico. Note que os op-amps LMC6492 e MAX4240 possuem tensões de saída do tipo *rail-to-rail* (a faixa de valores das tensões de saída ultrapassam os valores das fontes de potência), o que não ocorre com os op-amps LM324 e PA03.

* Alguns op-amps estão disponíveis com faixas de tensões de entrada e/ou saída além dos limites das fontes. Entretanto, esses dispositivos constituem um percentual muito pequeno de op-amps comercializados e não serão discutidos neste texto.

EXEMPLO 4.1

Os sinais de entrada e de saída de um circuito com op-amp são mostrados na Fig. 4.7. Deseja-se determinar (a) se o circuito com op-amp é linear e (b) o ganho do circuito.

SOLUÇÃO

- a. Sabe-se que, se o circuito for linear, a saída deve estar linearmente relacionada, isto é, proporcional à entrada. Uma análise das curvas de entrada e saída apresentadas na Fig. 4.7 indica claramente que na região de t entre 1,25 e 2,5 ms e entre 4 e 6 ms, a saída é constante, enquanto a entrada sofre variações. Nesse caso, o circuito com op-amp está operando na região de saturação e, portanto, apresenta um comportamento não linear.
- b. Na região onde a saída é proporcional à entrada, isto é, t entre 0 e 1 ms, a entrada varia de 1 V e a saída varia de 3,3 V. Portanto, o ganho do circuito é de 3,3.

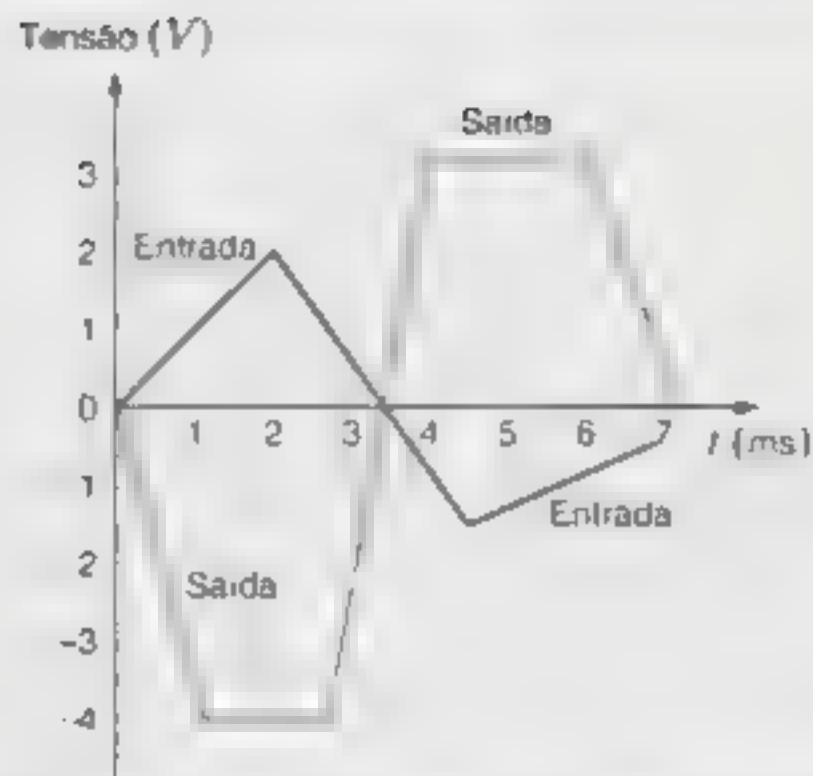


Figura 4.7 Características de entrada e de saída de um op-amp.

Para se discutir o desempenho de um op-amp utilizado em um circuito comercial, considere a rede mostrada na Fig. 4.8a. Esse circuito é chamado de *buffer** de ganho unitário. Note que o símbolo esquemático do op-amp inclui a fonte de potência. Substituindo-se o modelo apresentado na Fig. 4.4, chega-se ao circuito mostrado na Fig. 4.8b, que contém apenas resistores e fontes dependentes, os quais podem ser analisados facilmente. As equações dos laços da rede podem ser expressas por

$$V_i = IR_s + IR_i + A_o V_i$$

$$V_i = IR_s + A_o V_i$$

$$V_i = IR_s$$

Resolvendo essas equações para o ganho, V_o/V_i , obtém-se

$$\frac{V_o}{V_i} = \frac{1}{1 + \frac{R_i}{R_s + A_o R_i}}$$

Para $R_i \ll R_s$, tem-se

$$\frac{V_o}{V_i} = \frac{1}{1 + \frac{1}{A_o}}$$

E, se A_o for de fato bem maior que 1,

$$\frac{V_o}{V_i} \approx 1$$

A origem do nome *buffer de ganho unitário* é justificada. A Tabela 4.2 mostra os valores dos ganhos reais para $V_i = 1$ V utilizando os op-amps listados na Tabela 4.1. Note a proximidade do ganho à unidade e os baixos valores da tensão e da corrente de entrada. Esses resultados conduzem a uma considerável simplificação do op-amp mostrado na Fig. 4.4. Assim, introduz-se o *modelo ideal de um op-amp*, em que os valores

* O termo "buffer" já é utilizado com frequência nos países de língua portuguesa para designar um elemento armazenador ou acumulador (N. I.)

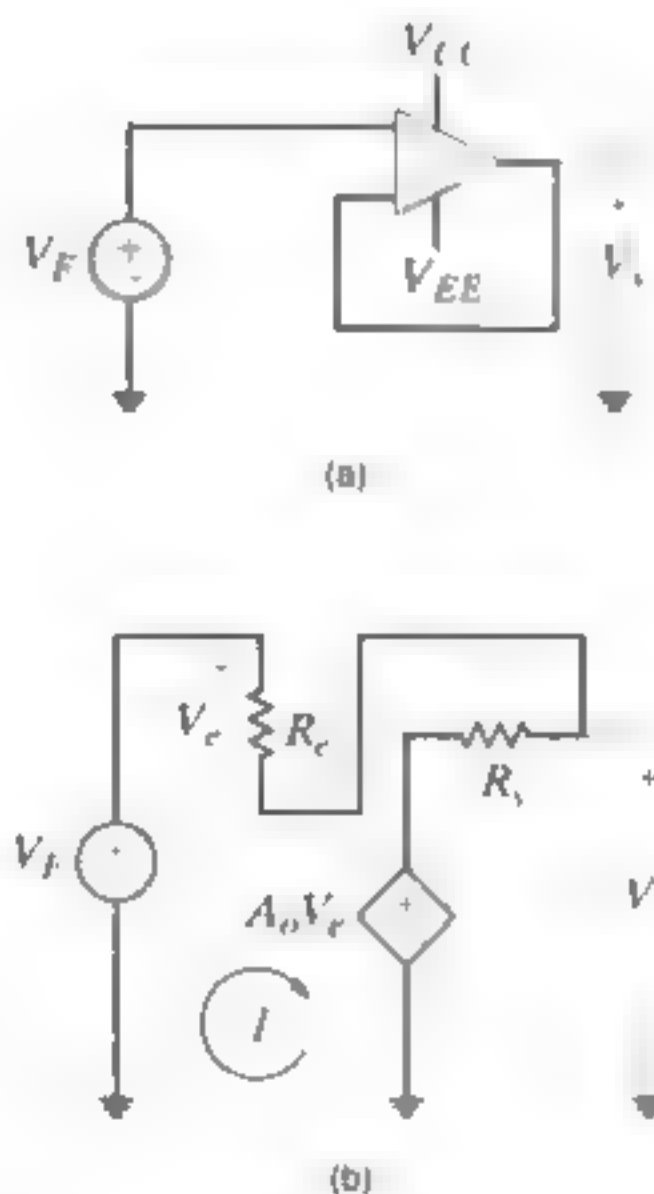


Figura 4.8 Circuito (a) e modelo (b) do *buffer* de ganho unitário.

TABELA 4.2 Desempenho dos *buffers* de ganho unitário que utilizam os op-amps listados na Tabela 4.1

OP-AMP	GANHO DE BUFFER	V_i (mV)	I_i (nA)
LM324	0,999990	9,9999	9,9998
LMC6492	0,999980	19,999	$1,9999 \times 10^{-6}$
MAX4240	0,999950	49,998	1,1111
PA03	0,999992	7,9999	$7,9999 \times 10^{-3}$

de A_o e R_i tendem a infinito e o valor de R_o é igual a zero. Esses valores de parâmetros produzem os dois importantes resultados listados na Tabela 4.3 e utilizados na análise dos circuitos que contenham op-amps.

Os resultados apresentados na Tabela 4.3 indicam que o modelo ideal para o op-amp é reduzido àquele mostrado na Fig. 4.9. As características importantes desse modelo são as seguintes: (1) uma vez que a resistência R_i é extremamente alta, as correntes de entrada no op-amp são aproximadamente zero (isto é, $i_+ = i_- = 0$); e (2) se a tensão de saída deve ser limitada, então, quando o ganho for muito alto, tendendo a infinito, a tensão entre os terminais de entrada devem tender simultaneamente a valores infinitamente pequenos, de forma que, quando $A_o \rightarrow \infty$, $v_+ - v_- \rightarrow 0$ (isto é, $v_+ - v_- = 0$ ou $v_+ = v_-$). A diferença entre essas tensões de entrada é frequentemente chamada de *sinal de erro* do op-amp (isto é, $v_+ - v_- = v_{err}$).

O terminal terra \downarrow mostrado no op-amp é necessário para o retorno do sinal da corrente e garante que a lei de Kirchhoff para as correntes seja atendida tanto para o op-amp quanto para o nó terra do circuito.

Assim, o modelo ideal para o op-amp pode ser definido simplesmente pelas seguintes condições:

$$\begin{aligned} i_+ &= i_- = 0 \\ v_+ &= v_- \end{aligned} \quad 4.2$$

Essas condições, embora simples, são extremamente importantes uma vez que formam a base para a análise dos circuitos que contenham op-amps.

Pode-se agora utilizar o modelo ideal para reexaminar o *buffer* de ganho unitário, redesenhado na Fig. 4.10, em que a tensão de entrada e a corrente de entrada são indicadas como nulas. Dado que V_i é igual a zero, a tensão em ambas as entradas do op-amp será V_F . Como a entrada inversora está fisicamente conectada à saída, V_i será também igual a V_F , portanto, o ganho será unitário.

TABELA 4.3 Consequências do uso do modelo ideal de um op-amp nos valores de corrente/tensão dos terminais de entrada

HIPÓTESE DO MODELO	RESULTADO NOS TERMINAIS
$A_o \rightarrow \infty$	tensão de entrada $\rightarrow 0$ V
$R_i \rightarrow \infty$	corrente de entrada $\rightarrow 0$ A

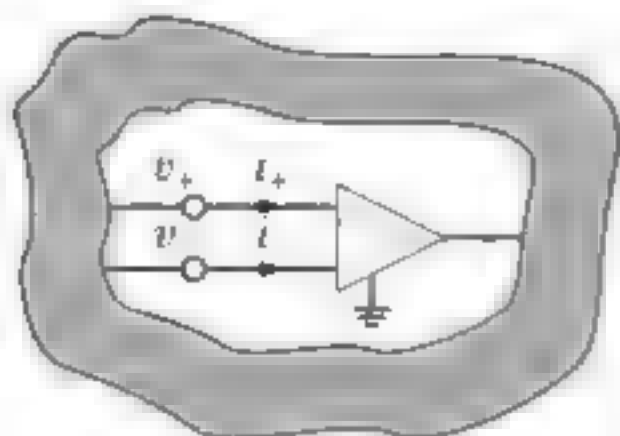


Figura 4.9 Modelo ideal de um amplificador operacional. Parâmetros do modelo: $i_+ = i_- = 0$ e $v_+ = v_-$.

De posse do modelo do op-amp ideal, pode-se alterar ligeiramente o circuito mostrado na Fig. 4.10, conforme mostrado na Fig. 4.11, em que V_F e R_F são os equivalentes para o circuito de acionamento do *buffer* e a resistência de carga, R_C , modela o circuito conectado à saída. Essa situação apresenta três pontos principais. Primeiro, o ganho ainda se mantém unitário. Segundo, o op-amp não requer corrente do circuito de acionamento. Terceiro, a corrente de saída ($I_s = V_F/R_C$) vem da fonte de potência, passa pelo op-amp e sai pelo pino de saída. Em outras palavras, a corrente da carga vem da fonte de potência, a qual possui uma grande capacidade de corrente na saída, e não do circuito de acionamento, que pode disponibilizar uma corrente muito pequena. Este isolamento da corrente é chamado de *buffering*.

Uma questão que naturalmente se impõe neste momento é: se $V_i = V_F$, por que V_F não é conectada diretamente a V_i através de condutores em paralelo; por que se necessita colocar um op-amp entre elas? A resposta a essa questão é de fundamental importância e fornecerá um sentimento que auxiliará na análise e no projeto de circuitos.

Considere o circuito mostrado na Fig. 4.12a. Nesse caso, V_i não é igual a V_F , uma vez que a tensão diminui devido ao resistor R_F , isto é,

$$V_i = V_F - IR_F$$

Todavia, na Fig. 4.12b, a corrente de entrada no op-amp é nula e, portanto, a tensão na entrada do op-amp é V_F . Uma vez que o ganho da configuração do op-amp é igual a 1, $V_i = V_F$. Na Fig. 4.12a a interação da rede resistiva com a fonte faz com que a tensão V_i seja menor que V_F . Em outras palavras, a rede

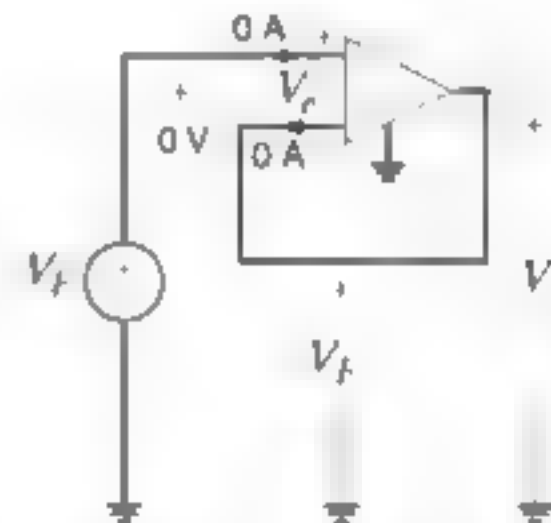


Figura 4.10 Op-amp ideal configurado como um *buffer* de ganho unitário.

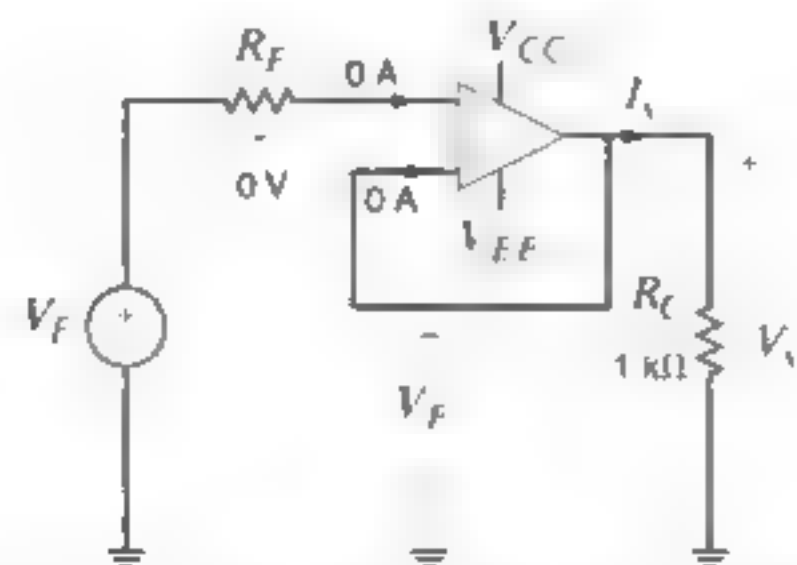


Figura 4.11 Buffer de ganho unitário com um resistor de carga.

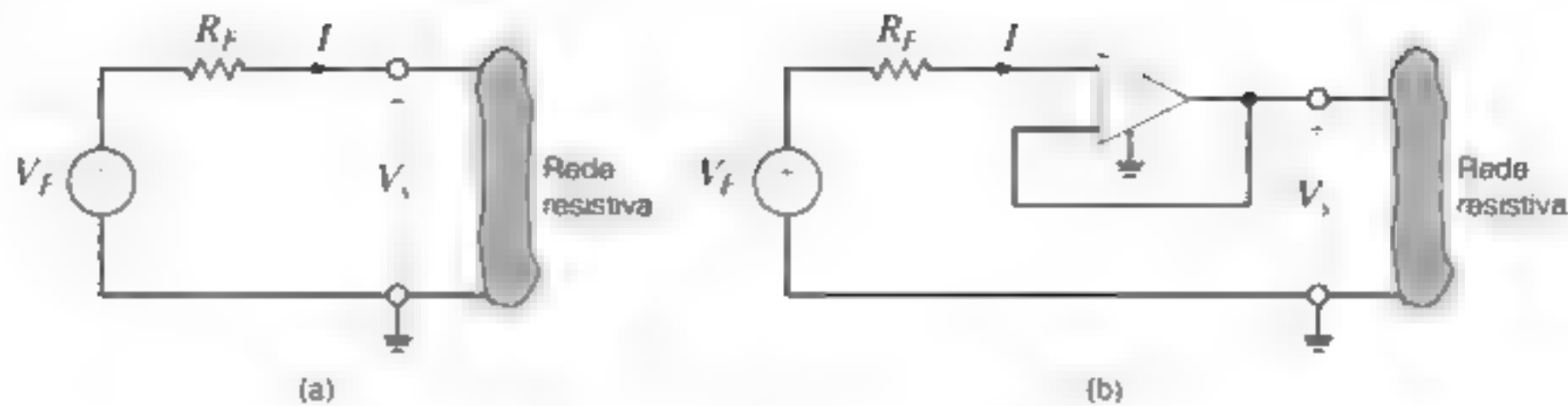


Figura 4.12 Ilustração da capacidade de isolamento de um seguidor de tensão.

resistiva é uma carga para a fonte de tensão. Entretanto, na Fig. 4.12b, o op-amp isola a fonte da rede resistiva e, por essa razão, o seguidor de tensão é referido como um *amplificador buffer*, uma vez que ele pode ser utilizado para isolar um circuito do outro. A energia fornecida à rede resistiva no primeiro caso é oriunda da fonte V_f , enquanto que no segundo caso ela é oriunda da fonte de potência que alimenta o amplificador e pouca ou nenhuma energia é retirada da fonte V_f .

4.3 Circuitos Básicos que Utilizam Op-Amps

Como regra geral, ao se analisar circuitos com op-amps, as equações nodais são escritas nos terminais de entrada do op-amp, utilizando as condições do modelo ideal de op-amp. Dessa forma, o procedimento de análise é direto e de simples implementação.

EXEMPLO 4.2

Determine o ganho da configuração básica do circuito inversor com op-amp mostrado na Fig. 4.13a utilizando os modelos ideal e não ideal para o op-amp.

SOLUÇÃO

O modelo do op-amp é mostrado genericamente na Fig. 4.13b e, especificamente, em termos dos parâmetros R_i , A e R_o , na Fig. 4.13c. Se esse modelo for inserido na malha da Fig. 4.13a, será obtido o circuito mostrado na Fig. 4.13d, o qual pode ser redesenhado conforme mostrado na Fig. 4.13e.

As equações dos nós para a rede são

$$\begin{aligned} \frac{v_i}{R} + \frac{v_i}{R_i} + \frac{v_i}{R_o} &= 0 \\ \frac{v_i}{R_2} + \frac{v_i}{R_1} &= A v_i \end{aligned}$$

em que $v_i \approx -v_1$. As equações podem ser escritas na forma matricial como

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{R} + \frac{1}{R_i} + \frac{1}{R_o} & \left(\frac{1}{R_o} \right) \\ \left(\frac{1}{R_2} \right) & \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_i \\ v_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Resolvendo para as tensões nodais, obtém-se

$$\begin{bmatrix} v_i \\ v_i \end{bmatrix} = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} \frac{1}{R_o} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_1} & \frac{1}{R_o} \\ \frac{1}{R_2} & \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

em que

$$\Delta = \left(\frac{1}{R_i} + \frac{1}{R} + \frac{1}{R_o} \right) \left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_1} \right) - \left(\frac{1}{R_o} \right) \left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_1} \right)$$

Portanto,

$$v_i = \frac{\left(\frac{1}{R_o} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_1} \right) \left(\frac{v_i}{R} \right)}{\left(\frac{1}{R_i} + \frac{1}{R} + \frac{1}{R_o} \right) \left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_1} \right) - \left(\frac{1}{R_o} \right) \left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_1} \right)}$$

que pode ser escrita como

$$v_i = \frac{\left(\frac{1}{R_o} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_1} \right)}{\left(\frac{1}{R_i} + \frac{1}{R} + \frac{1}{R_o} \right) \left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_1} \right) - \left(\frac{1}{R_o} \right) \left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_1} \right)}$$

Substituindo-se agora os valores típicos para os parâmetros do circuito (por exemplo, $A = 10^5$, $R_i = 10^6 \Omega$, $R_o = 10 \Omega$, $R_1 = 1 \text{ k}\Omega$ e $R_2 = 5 \text{ k}\Omega$), o ganho em tensão da rede será

$$\frac{v_o}{v_f} = -4.9996994 \approx -5.000$$

Entretanto, o op-amp ideal possui ganho infinito. Assim, levando-se ao limite a equação do ganho, quando $A \rightarrow \infty$, obtém-se

$$\lim_{A \rightarrow \infty} \left(\frac{v_o}{v_f} \right) = -\frac{R_2}{R_1} = -5.0000$$

Observe que o op-amp ideal forneceu um resultado que apresenta precisão em até quatro algarismos significativos do resultado obtido a partir da solução exata do modelo de um op-amp típico. Esses resultados são facilmente repetidos para

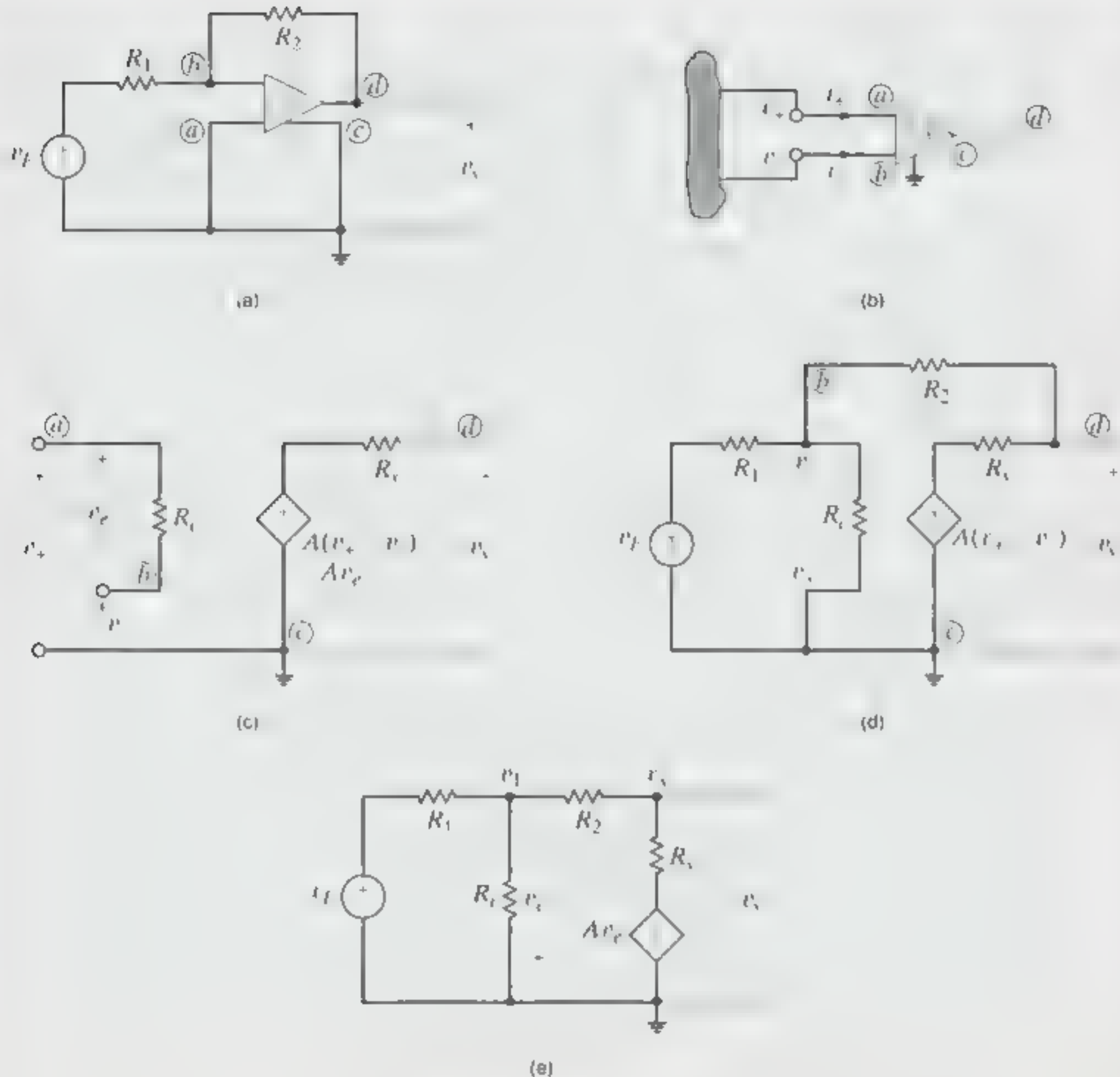


Figura 4.13 Circuito do op-amp.

uma ampla gama de circuitos com op-amps utilizados na prática.

Analisa-se agora a rede mostrada na Fig. 4.13a, utilizando o modelo de um op-amp ideal. Nesse modelo

$$i_+ = i_- = 0$$

$$v_+ = v_-$$

Conforme mostrado na Fig. 4.13a, $v_+ = 0$ e, portanto, $v_- = 0$. Escrevendo agora uma equação nodal para o terminal negativo do op-amp, obtém-se

$$\frac{v_-}{R} + \frac{v_-}{R} = 0$$

ou

$$\frac{v_o}{v_i} = \frac{R}{R_1}$$

e reproduz-se imediatamente os resultados encontrados anteriormente.

Note que o ganho é simplesmente uma razão entre as resistências dos resistores. Esse fato torna o amplificador muito versátil, uma vez que é possível controlar o ganho precisamente e alterar seu valor mudando-se apenas um dos resistores. Observe também que o ganho é basicamente independente dos parâmetros do op-amp. Uma vez que os valores precisos de A , R_i e R_o são sensíveis a fatores como temperatura, radiação e tempo de operação, sua não interferência resulta em um ganho estável independentemente do ambiente em seu entorno. Como é muito mais fácil empregar o modelo de op-amp ideal, em vez do modelo não ideal, a menos que seja estabelecido de forma diferente, serão utilizadas as hipóteses de op-amp ideal para se analisar os circuitos que contenham amplificadores operacionais.

Estratégia para Solução de Problemas

Circuitos com Op-Amps

Etapa 1. Utilize o modelo ideal de op-amp: $A_o = \infty$, $R_o = \infty$, $R_i = 0$.

$$\bullet i_+ = i_- = 0$$

$$\bullet v_+ = v_-$$

Etapa 2. Aplique a análise nodal ao circuito resultante.

Etapa 3. Resolva as equações nodais para expressar a tensão de saída em termos dos sinais de entrada do op-amp.

EXEMPLO 4.3

Determine o ganho da configuração básica do circuito não inversor com op-amp mostrado na Fig. 4.14.

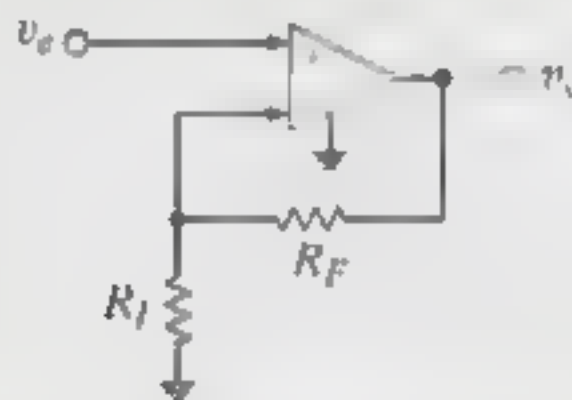


Figura 4.14 Configuração do op-amp não inversor.

SOLUÇÃO

Novamente, as condições do modelo de op-amp ideal são empregadas, isto é, $v_- = v_+$ e $i_- = i_+$. Utilizando o fato de que $i_- = 0$

e $v_- = v_o$, a equação da LKC aplicada ao terminal negativo do op-amp fornece

$$\frac{v_-}{R_1} = -\frac{v_o}{R_F}$$

ou

$$v_o \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_F} \right) = \frac{v_i}{R_1}$$

Assim,

$$\frac{v_o}{v_i} = 1 + \frac{R_F}{R_1}$$

Observe a similaridade deste caso com a configuração do op-amp inversor do exemplo anterior. Verificou-se, assim, que o ganho dessa configuração também é controlado simplesmente por uma razão de resistências, porém, não é invertido; isto é, o ganho é positivo.

Os próximos exemplos são ligeiramente mais complexos, e são analisados exatamente da mesma forma que os precedentes.

EXEMPLO 4.4

O erro no ganho de um amplificador é definido como

$$EG = \left[\frac{\text{ganho real} - \text{ganho ideal}}{\text{ganho ideal}} \right] \times 100\%$$

Deseja-se mostrar que para uma configuração não inversora padronizada com ganho finito A_o , o erro no ganho é

$$EG = \frac{-100\%}{1 + A_o \beta}$$

em que $\beta = R_1/(R_1 + R_2)$.

SOLUÇÃO

A configuração não inversora padronizada e seu circuito equivalente são mostrados nas Figs. 4.15a e b, respectivamente. As equações do circuito para a rede mostrada na Fig. 4.15b são

$$v_F = v_o + v_e, \quad i_+ = i_- = 0 \quad \text{e} \quad v_e = \frac{R}{R_1 + R_2} v_o = \beta v_o,$$

A expressão que relaciona a entrada à saída é

$$v_o = v_i \left[\frac{1}{A} + \beta \right] = v_i \left[\frac{1 + A\beta}{A} \right]$$

e, assim, o ganho real é

$$\frac{v_o}{v_i} = \frac{A}{1 + A\beta}$$

Lembre-se de que o ganho ideal para esse circuito é $(R_1 + R_2)/R_1 = 1/\beta$. Portanto, o erro no ganho será

$$EG = \left[\frac{\frac{A}{1 + A\beta} - \frac{1}{\beta}}{\frac{1}{\beta}} \right] 100\%$$

o qual, quando simplificado, fornece

$$EG = \frac{100\%}{1 + A\beta}$$

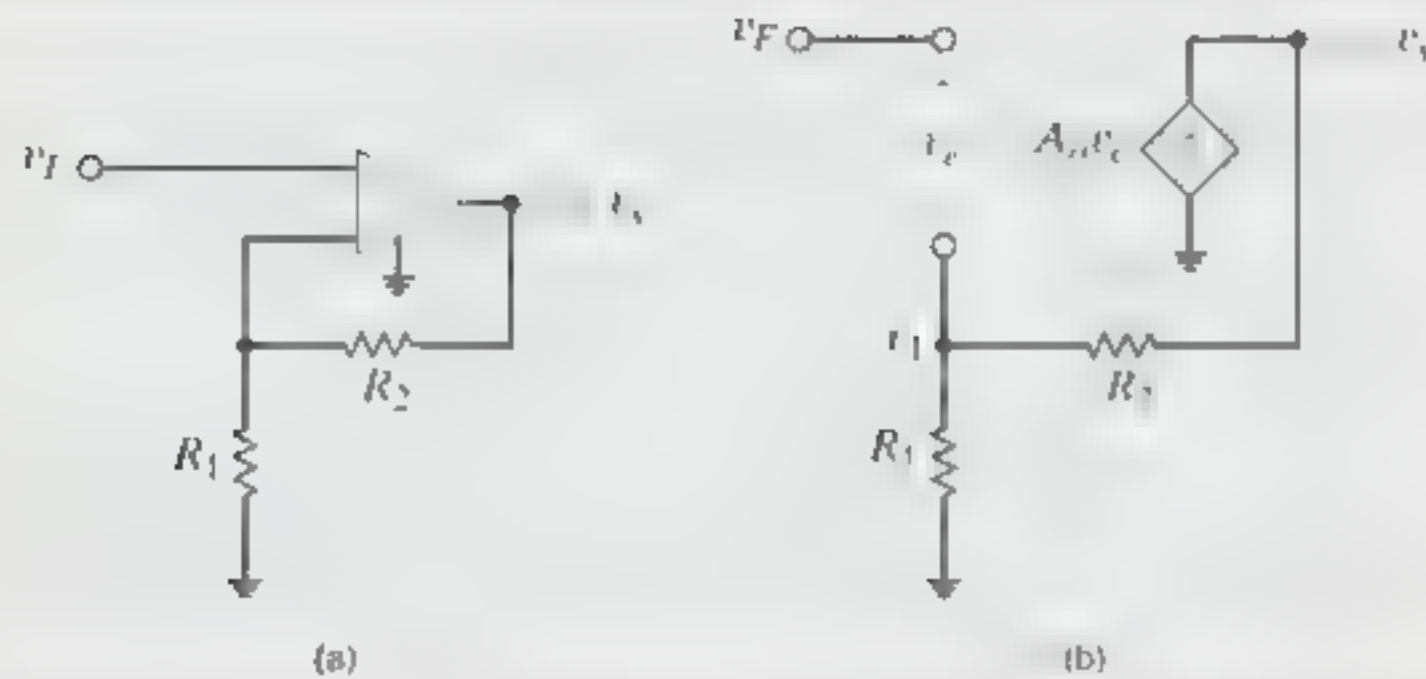


Figura 4.15 Circuitos utilizados no Exemplo 4.4.

EXEMPLO 4.5

Considere o circuito com op-amp mostrado na Fig. 4.16. Seja a determinação de uma expressão para a tensão de saída. A equação nodal no terminal inversor é

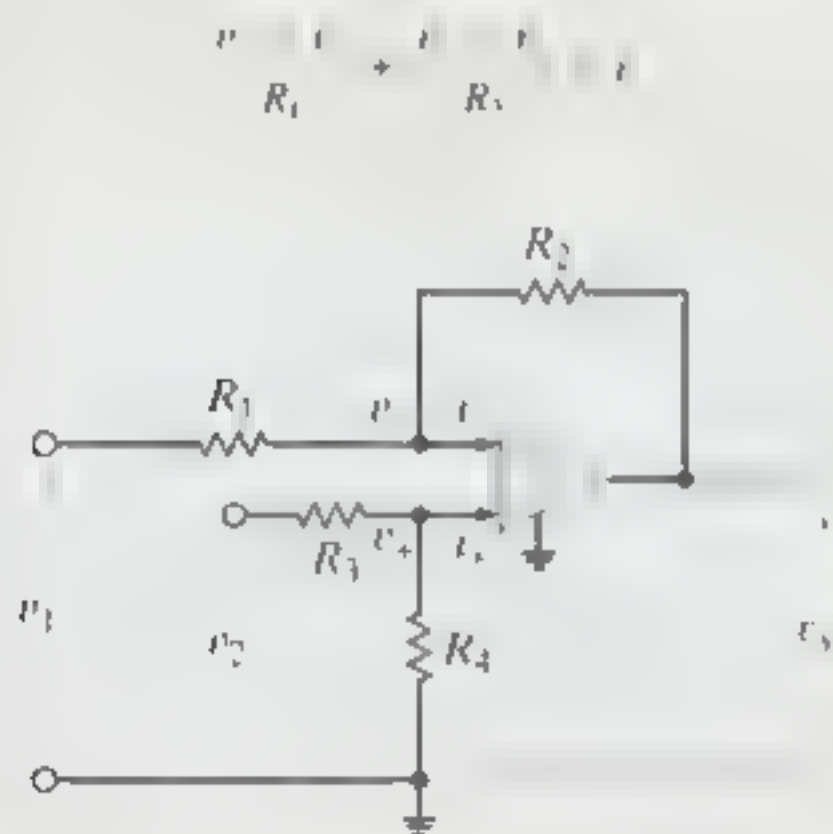


Figura 4.16 Circuito amplificador diferencial com op-amp.

EXEMPLO 4.6

O circuito mostrado na Fig. 4.17a corresponde a um dispositivo de ganho de tensão diferencial de precisão. Ele é utilizado de modo a fornecer uma única entrada para um conversor analógico-digital. Deseja-se obter uma expressão para a tensão de saída do circuito em função das duas entradas.

SOLUÇÃO

Para se obter a expressão desejada, desenha-se o circuito equivalente mostrado na Fig. 4.17b. Lembre-se de que a tensão entre os terminais de entrada do op-amp é aproximadamente nula e que as correntes que entram nos terminais de entrada do op-amp são aproximadamente nulas. Note que as equações

SOLUÇÃO

No terminal não inversor a LKC fornece

$$\frac{v_2 - v_+}{R_1} = \frac{v_+ - v_-}{R_2} + i_+$$

Entretanto, $i_+ = i_- = 0$ e $v_+ = v_-$. Substituindo esses valores nas duas equações precedentes, obtém-se

$$\frac{v_2 - v_+}{R_1} = \frac{v_+ - v_-}{R_2} = 0$$

e

$$\frac{v_2 - v_+}{R_1} = \frac{v_+ - v_-}{R_2}$$

Resolvendo essas duas equações para v_+ , tem-se a expressão

$$v_+ = \frac{R_2}{R_1} \left(1 + \frac{R_1}{R_2} \right) \frac{R_4}{R_3 + R_4} v_2 = \frac{R_2}{R_1} v_2$$

Note que se $R_4 = R_2$ e $R_3 = R_1$, a expressão reduz-se a

$$v_+ = v_2$$

Portanto, esse op-amp pode ser empregado na subtração de duas tensões de entrada.

para as tensões nodais v_1 e v_2 podem ser escritas em função de v_+ e v_- . Como se deseja uma expressão para a tensão v_o em função das tensões v_1 e v_2 , basta eliminar a tensão v_+ das duas equações nodais. As equações nodais são

$$\frac{v_1 - v_+}{R_1} + \frac{v_1 - v_-}{R_2} - \frac{v_- - v_o}{R_G} = 0$$

$$\frac{v_2 - v_+}{R_1} + \frac{v_2 - v_-}{R_G} + \frac{v_2}{R_2} = 0$$

A combinação das duas equações para eliminar v_+ e, em seguida, escrever v_o em função de v_1 e v_2 fornece

$$v_o = (v_1 - v_2) \left(1 + \frac{R_2}{R_1} + \frac{2R_2}{R_G} \right)$$

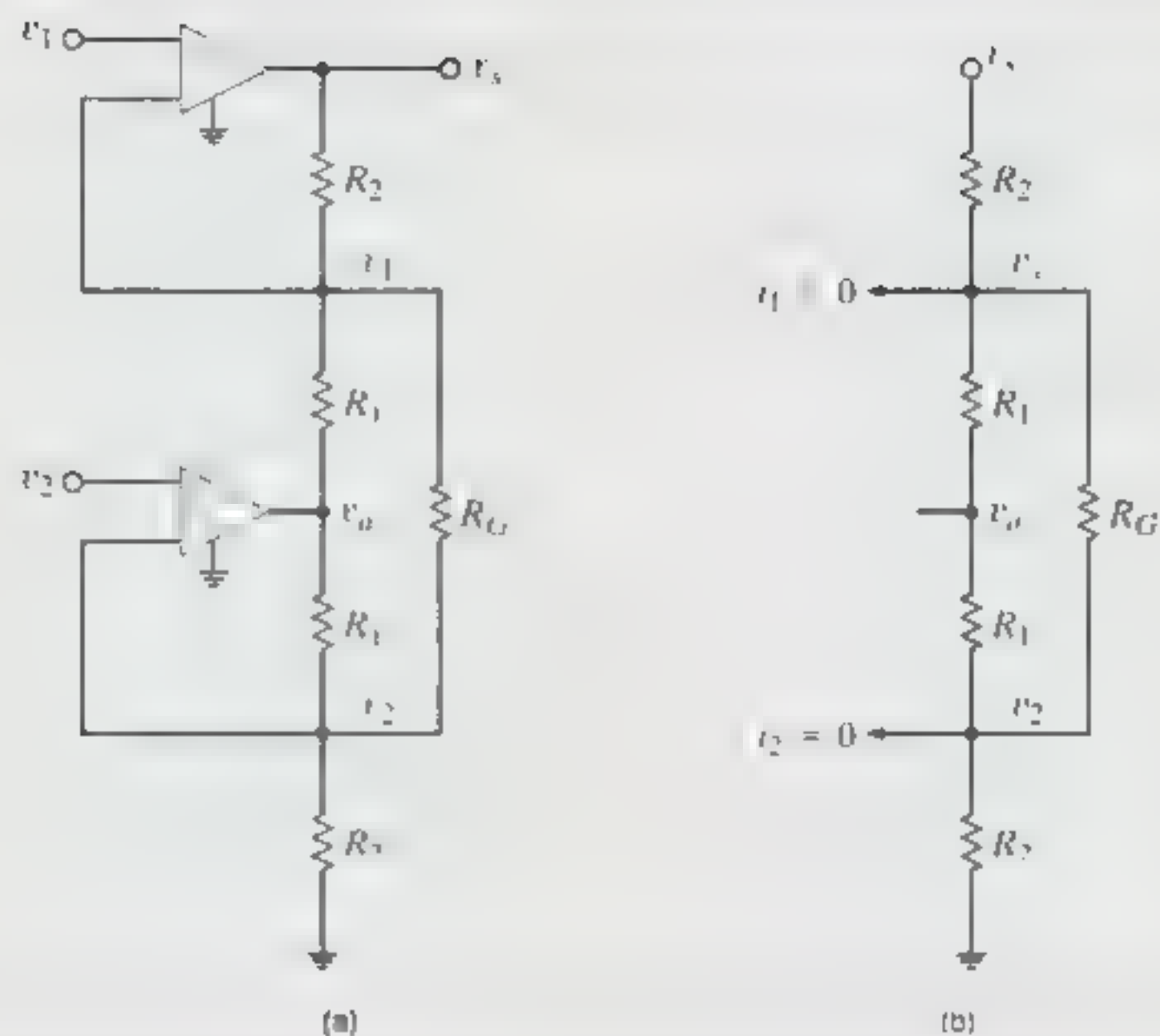
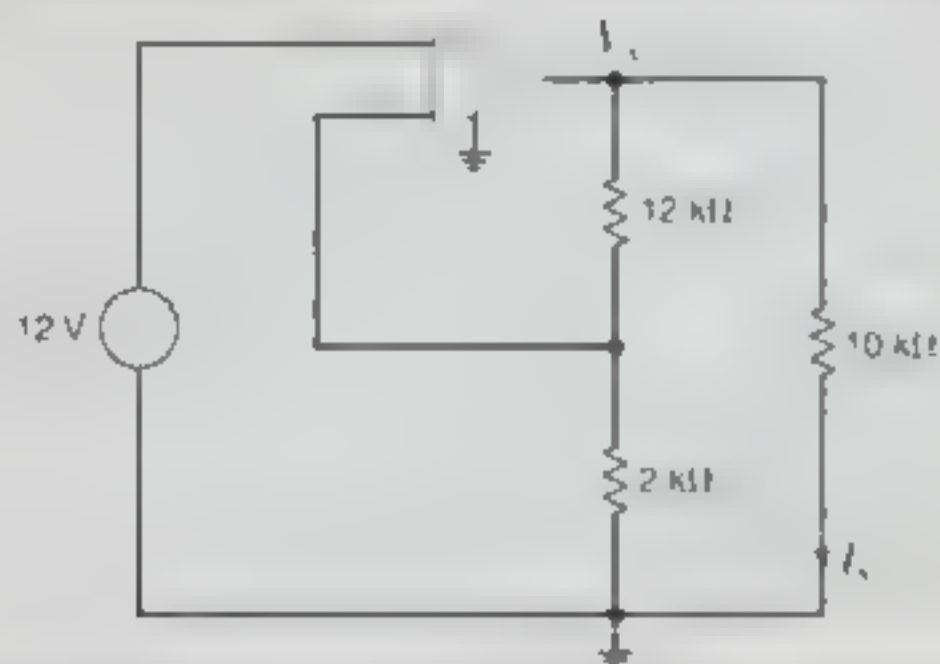


Figura 4.17 Circuito amplificador utilizado em instrumentação.

Avaliação do Aprendizado

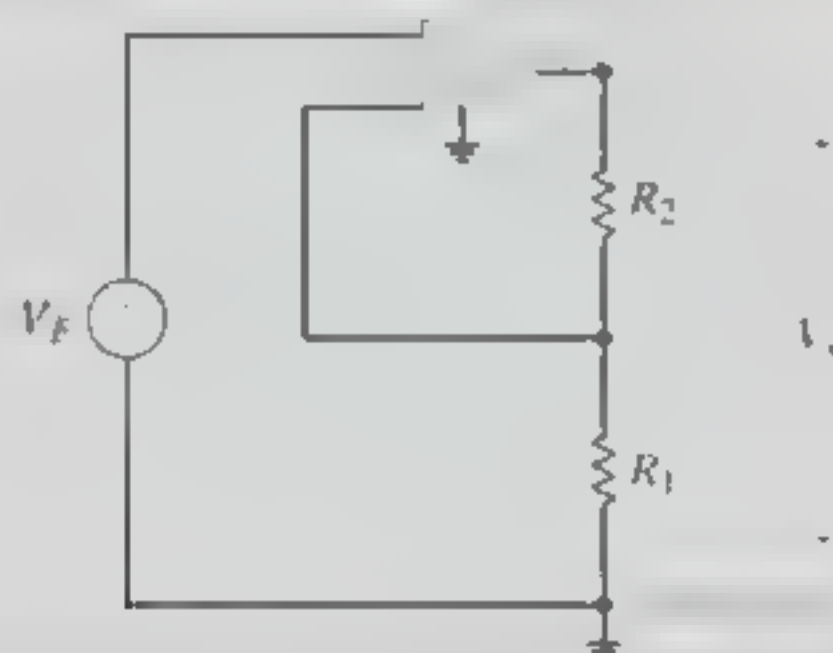
E4.1 Determine a corrente I_x da rede mostrada na Fig. E4.1.



RESPOSTA: $I_x = 8,4 \text{ mA}$.

Figura E4.1

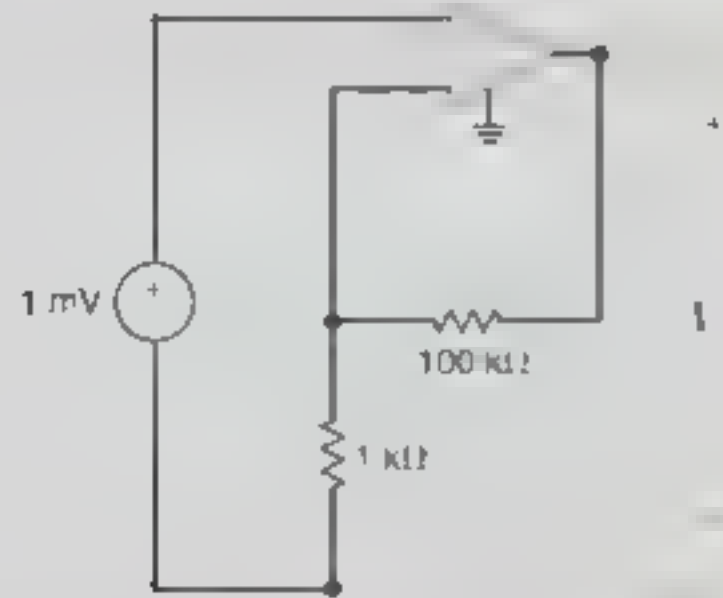
E4.2 Determine o ganho de circuito do op-amp mostrado na Fig. E4.2.



RESPOSTA: $\frac{v_o}{V_F} = 1 + \frac{R_2}{R_1}$

Figura E4.2

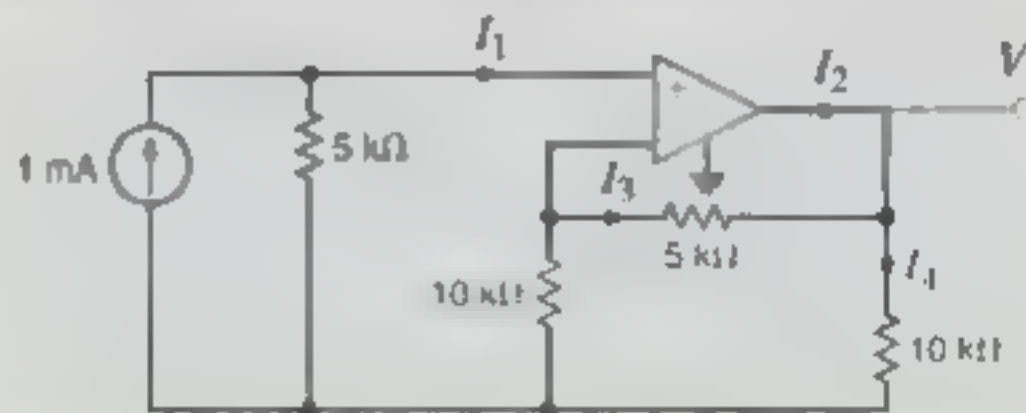
E4.3 Determine o ganho e a tensão de saída da configuração com op-amp mostrada na Fig. E4.3.



RESPOSTAS: $V_o \approx 0,101 \text{ V}$
e o ganho é igual a 101.

Figura E4.3

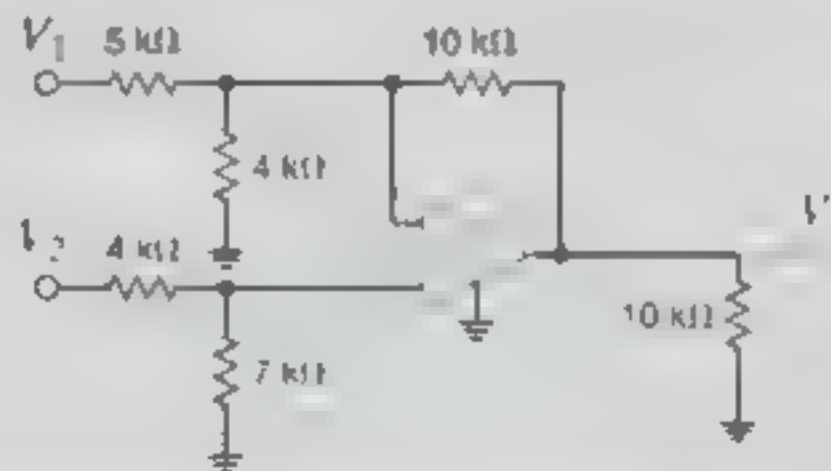
E4.4 Determine as correntes I_1 , I_2 , I_3 e I_4 da rede mostrada na Fig. E4.4.



RESPOSTAS:
 $I_1 = 0$, $I_2 = 1,25 \text{ mA}$,
 $I_3 = -0,5 \text{ mA}$, $I_4 = 0,75 \text{ mA}$.

Figura E4.4

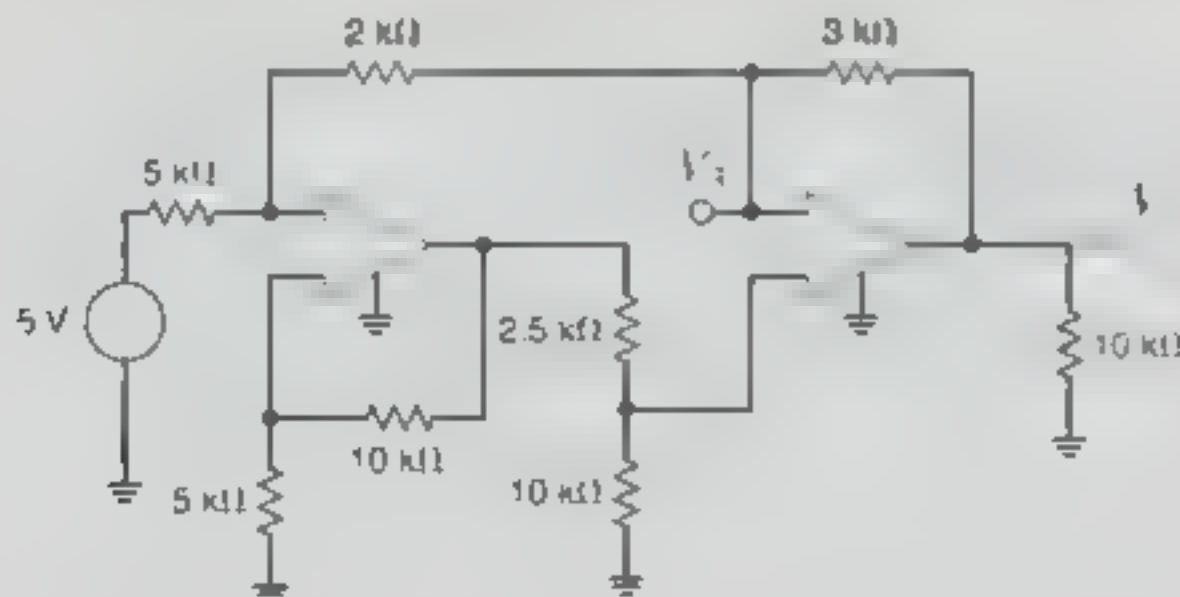
E4.5 Determine a tensão V_1 em termos de V e V_2 no circuito mostrado na Fig. E4.5. Se $V = V_2 = 4 \text{ V}$, determine o valor de V_1 . Se as fontes de potência do op-amp são de $\pm 15 \text{ V}$ e $V_2 = 2 \text{ V}$, qual é a faixa admissível de valores para V_1 ?



RESPOSTAS: $V_1 = -2 V_1 + 3,5 V_2$, 6 V , $-4 \text{ V} \leq V_1 \leq 11 \text{ V}$.

Figura E4.5

E4.6 Determine as tensões V_1 e V_2 do circuito mostrado na Fig. E4.6.



RESPOSTAS: $V_1 = -9 \text{ V}$ e $V_2 = -4,8 \text{ V}$.

Figura E4.6

E4.7 Determine a tensão V_x do circuito mostrado na Fig. E4.7.

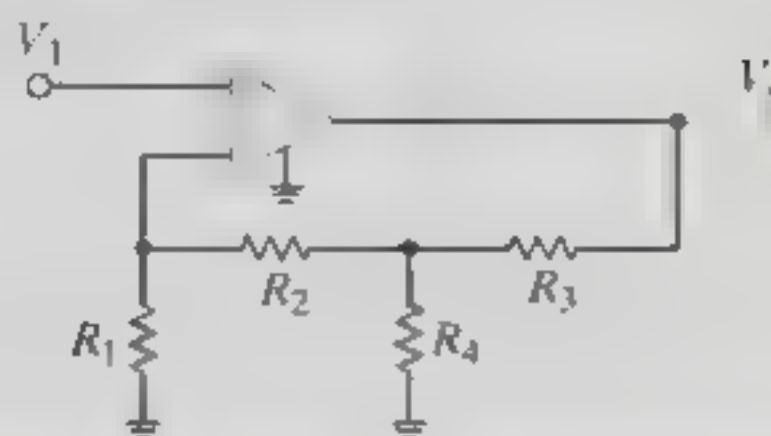


Figura E4.7

RESPOSTA:

$$V_x = \left[\left(\frac{R_3}{R_1} + \frac{R_3}{R_2} + 1 \right) \left(1 + \frac{R_1}{R_2} \right) - \frac{R_1}{R_2} \right] V_1$$

EXEMPLO 4.7

Os dois circuitos com op-amp mostrados na Fig. 4.18 produzem uma saída que pode ser expressa por

$$V_x = 8V_1 - 4V_2$$

em que

$$1 \text{ V} \leq V_1 \leq 2 \text{ V} \quad \text{e} \quad 2 \text{ V} \leq V_2 \leq 3 \text{ V}$$

Deseja-se determinar (a) a faixa de valores de V_x e (b) se ambos os circuitos produzirão a faixa plena de V_x , dado que as fontes CC são de $\pm 10 \text{ V}$.

SOLUÇÃO

a. Dado que $V_x = 8V_1 - 4V_2$ e as faixas de V_1 e V_2 são, respectivamente, $1 \text{ V} \leq V_1 \leq 2 \text{ V}$ e $2 \text{ V} \leq V_2 \leq 3 \text{ V}$, tem-se que

$$V_{x \text{ máx}} = 8(2) - 4(2) = 8 \text{ V}$$

e

$$V_{x \text{ mín}} = 8(1) - 4(3) = -4 \text{ V}$$

Portanto, a faixa de V_x é de -4 V a $+8 \text{ V}$.

b. Considere, inicialmente, a rede mostrada na Fig. 4.18a. O sinal em V_x , que pode ser obtido utilizando a rede do Exemplo 4.5, é dado pela equação $V_x = 2V_1 - V_2$. A tensão V_x será máxima quando $V_1 = 2 \text{ V}$ e $V_2 = 2 \text{ V}$, isto é, $V_{x \text{ máx}} = 2(2) - 2 = 2 \text{ V}$. O valor mínimo de V_x ocorre quando $V_1 = 1 \text{ V}$ e $V_2 = 3 \text{ V}$, isto é, $V_{x \text{ mín}} = 2(1) - 3 = -1 \text{ V}$. Como ambos os valores (máximo e mínimo) estão na faixa da fonte, que é de $\pm 10 \text{ V}$, o primeiro op-amp na Fig. 4.18 não irá saturar. A saída do segundo op-amp nesse circuito é dada pela expressão $V_x = 4V_x$. Portanto, a faixa de V_x é $-4 \text{ V} \leq V_x \leq 8 \text{ V}$. Como essa faixa também está dentro da faixa de tensões da fonte de potência, o se-

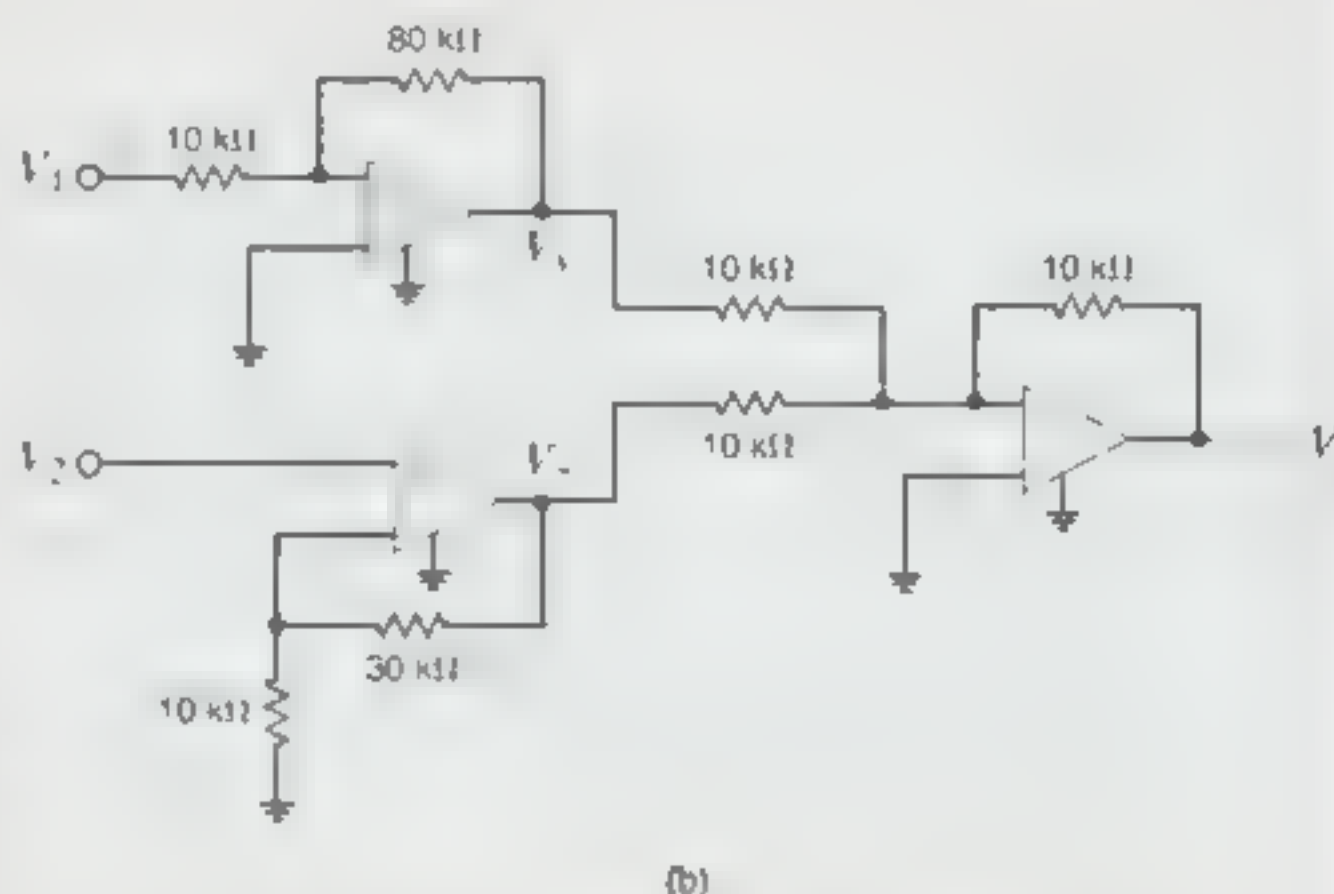
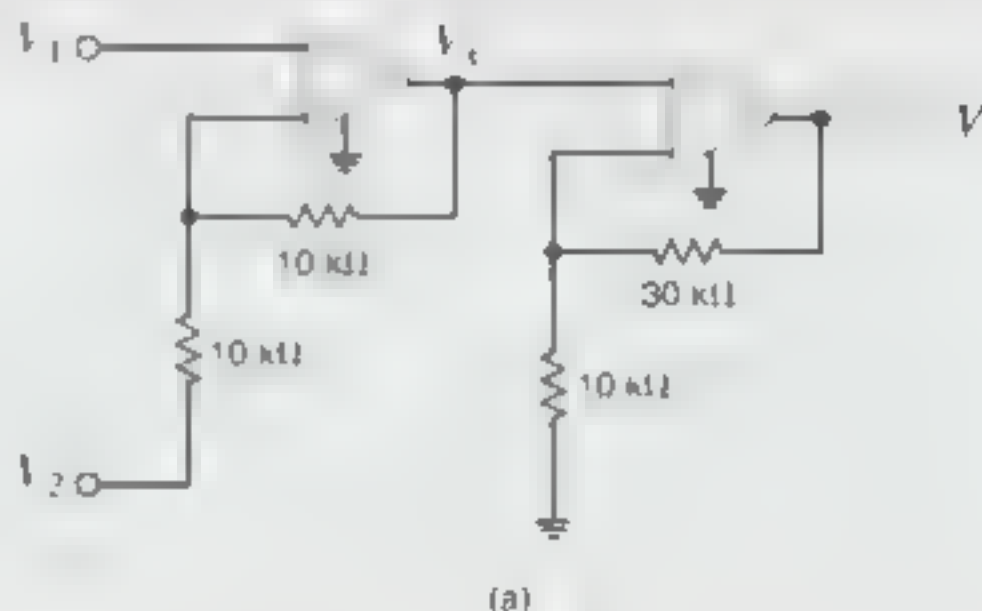


Figura 4.18 Circuitos utilizados no Exemplo 4.7.

gundo op-amp também não irá saturar, e esse circuito poderá operar na faixa plena de V_x .

Considere, agora, a rede mostrada na Fig. 4.18b. O sinal $V_x = -8V_1$, e, portanto, a faixa de V_x é $-16 \text{ V} \leq V_x \leq -8 \text{ V}$. Assim, a faixa de V_x está fora dos limites das fontes de potência. Esse circuito irá saturar e falhará na produção de tensões na faixa plena de V_x .

Se você proceder a uma revisão dos circuitos com op-amps apresentados neste capítulo até agora, irá notar uma característica comum em todos os circuitos. A saída está conectada à entrada inversora do op-amp por uma rede resistiva. Essa conexão, em que uma parte da tensão de saída é realimentada para a entrada inversora, é referenciada como realimentação negativa. Lembre-se de que no modelo de um op-amp ideal a tensão de saída é proporcional à diferença entre as tensões nos terminais de entrada. A realimentação da tensão de saída no terminal negativo da entrada mantém essa diferença de tensão próxima a zero de modo a permitir a operação linear do op-amp. Como resultado, a realimentação negativa é necessária para a operação adequada de praticamente todos os circuitos com op-amps. As análises dos circuitos com op-amps aqui apresentadas são baseadas na hipótese de que a diferença de tensão nos terminais de entrada é nula.

Quase todos os circuitos com op-amps utilizam uma realimentação negativa. Entretanto, a realimentação positiva é utilizada nos circuitos de osciladores, de disparadores Schmitt (*Schmitt trigger*) e de comparadores, os quais serão discutidos na próxima seção. Considera-se agora o circuito mostrado na Fig. 4.19. Esse circuito é muito similar ao circuito da Fig. 4.13a. Entretanto, existe uma diferença muito importante. Na Fig. 4.19, o resistor R_2 é conectado ao terminal de entrada positivo do op-amp, e não ao terminal de entrada negativo. A conexão do terminal de saída ao terminal de entrada positivo resulta na realimentação positiva. Como resultado da realimentação positiva, a saída desse circuito com op-amp apresenta dois valores possíveis, V_{CC} e V_{EE} . A análise desse circuito utilizando o modelo de op-amp ideal apresentada nesse capítulo não prevê este resultado. É importante lembrar que o modelo de op-amp ideal somente pode ser utilizado quan-

do a realimentação negativa está presente no circuito com op-amps.

4.4 Comparadores

Um comparador, uma variante do op-amp, é projetado para comparar as tensões de entrada não inversora e inversora. Conforme mostrado na Fig. 4.20, quando a tensão de entrada não inversora é maior, a saída se torna tão alta quanto possível, até ou próxima de V_{CC} . Por outro lado, se a tensão de entrada inversora é maior, a saída fica tão baixa quanto possível, até ou próxima de V_{EE} . Naturalmente, com um op-amp ideal pode ocorrer a mesma situação, isto é, variar sua tensão de saída tanto quanto for possível. Entretanto, os op-amps não são projetados para operar com as saídas saturadas, enquanto os comparadores o são. Como resultado, os comparadores são mais rápidos e mais baratos do que os op-amps.

Serão apresentados dois comparadores quad bem distintos neste texto, o LM339 da National Semiconductor e o MAX917 da Maxim. Note que o LM339 requer um resistor, chamado de resistor de parada, conectado entre o pino de saída e o V_{CC} . As características mais importantes desses produtos são listadas na Tabela 4.4. Desta tabela, verifica-se facilmente que o LM339 é um comparador de utilização geral, enquanto o MAX917 é indicado para aplicações a baixa potência, como, por exemplo, dispositivos manuais.

Uma aplicação comum de comparador é o detector de cruzamento do zero, mostrado na Fig. 4.21a, que utiliza um LM339 com fontes de ± 5 V. Conforme pode ser visto na Fig. 4.21b, quando V_F é positiva, V_i deve estar próxima a $+5$ V e quando V_F é negativa, V_i estará próxima a -5 V. O valor da saída varia cada vez que a tensão passa pelo zero!

Figura 4.19 Circuito com op-amp e realimentação positiva.

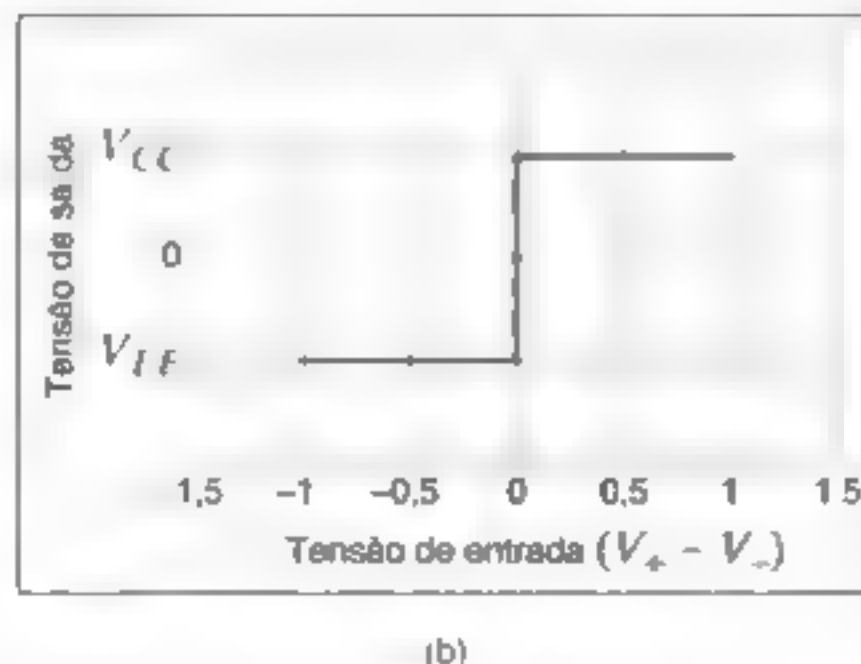
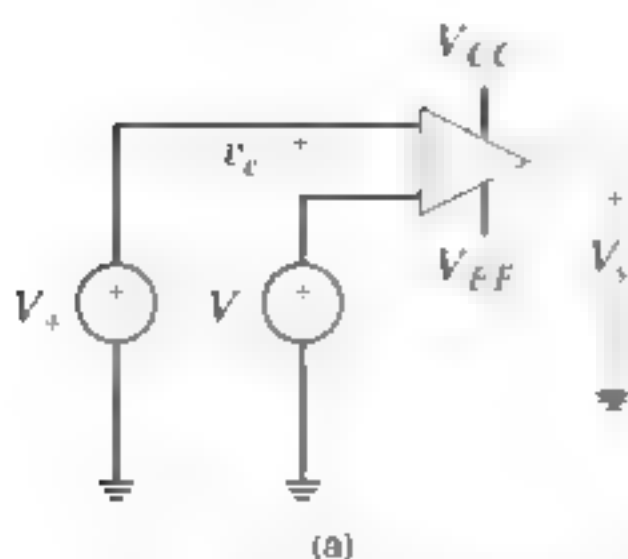
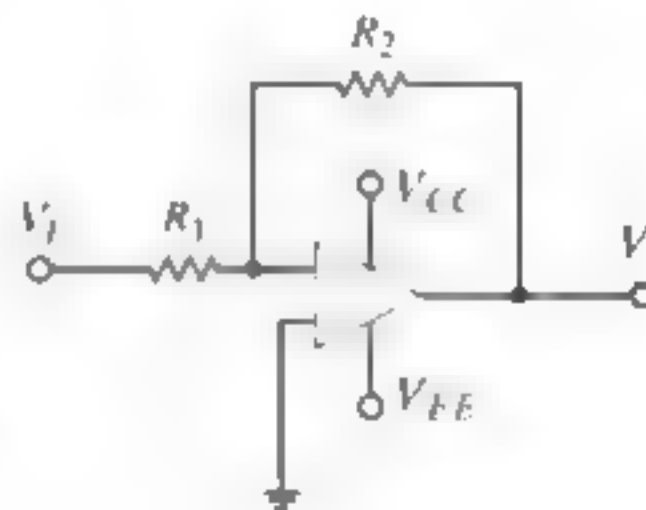
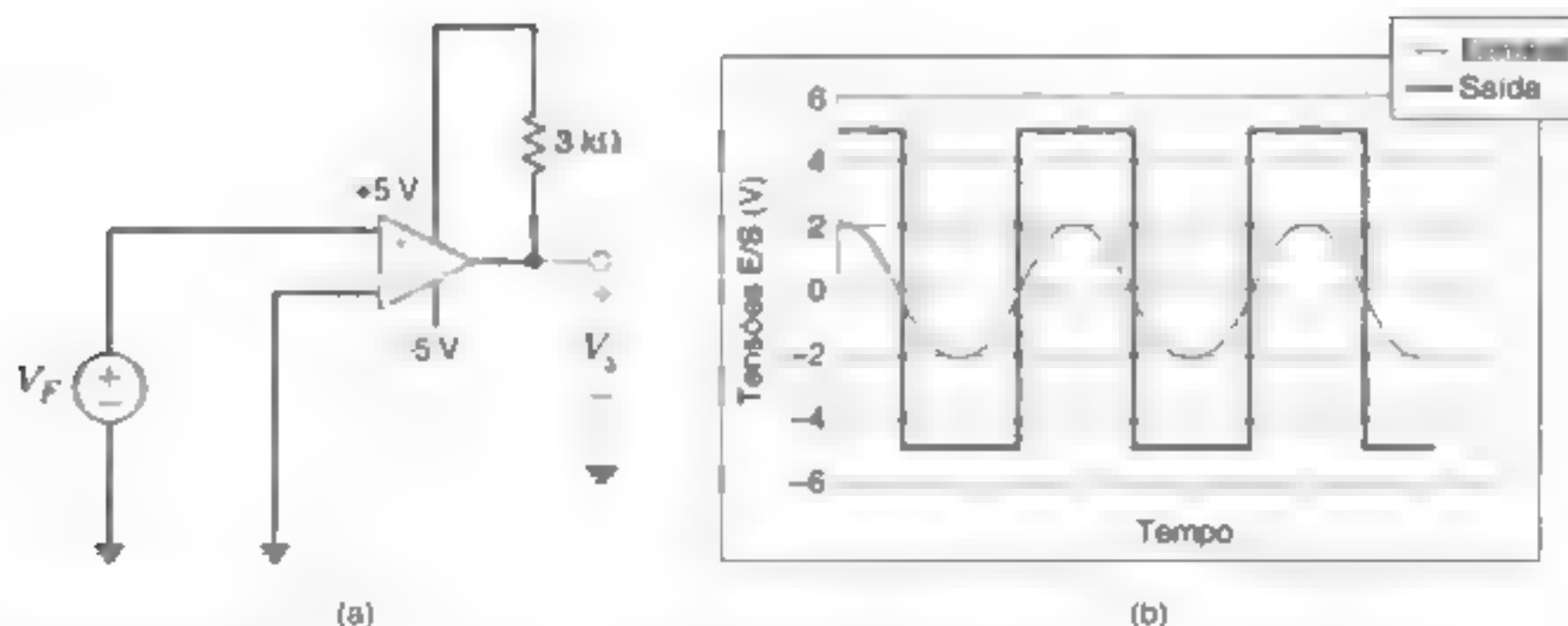


Figura 4.20 (a) Um comparador ideal e (b) sua curva característica.

TABELA 4.4 Lista de algumas das características dos comparadores LM339 e MAX917

Modelo	Alimentação mínima	Alimentação máxima	Corrente de alimentação	Corrente de saída máxima	Valor típico de $R_{pull-up}$
LM339	2 V	36 V	3 mA	50 mA	3 kΩ
MAX917	2,8 V	5,5 V	0,8 μA	8 mA	NA

**Figura 4.21** (a) Detector de cruzamento do zero e (b) os sinais de entrada e saída correspondentes.

4.5 Exemplos de Aplicação

A partir deste ponto, tem-se um novo componente disponível, o op-amp, que pode ser efetivamente empregado tanto nas aplicações práticas quanto nos projetos de circuitos. Esse componen-

te é um elemento extremamente útil que aumenta significativamente a capacidade de realizações nesta área do conhecimento. Devido à sua natureza ubíqua, a incorporação do op-amp ao repertório dos componentes utilizados em circuitos permite tratar-se de um vasto espectro de circuitos práticos. Assim, o op-amp será empregado aqui e também utilizado ao longo deste texto.

EXEMPLO DE APLICAÇÃO 4.8

Em um medidor de intensidade luminosa, um sensor produz uma corrente proporcional à intensidade da radiação incidente. Deseja-se obter uma tensão proporcional à intensidade luminosa utilizando o circuito mostrado na Fig. 4.22. Assim, seleciona-se um valor de R que produzirá uma tensão de saída de 1 V para cada 10 μA de corrente do sensor. Admita que o sensor tenha resistência nula.

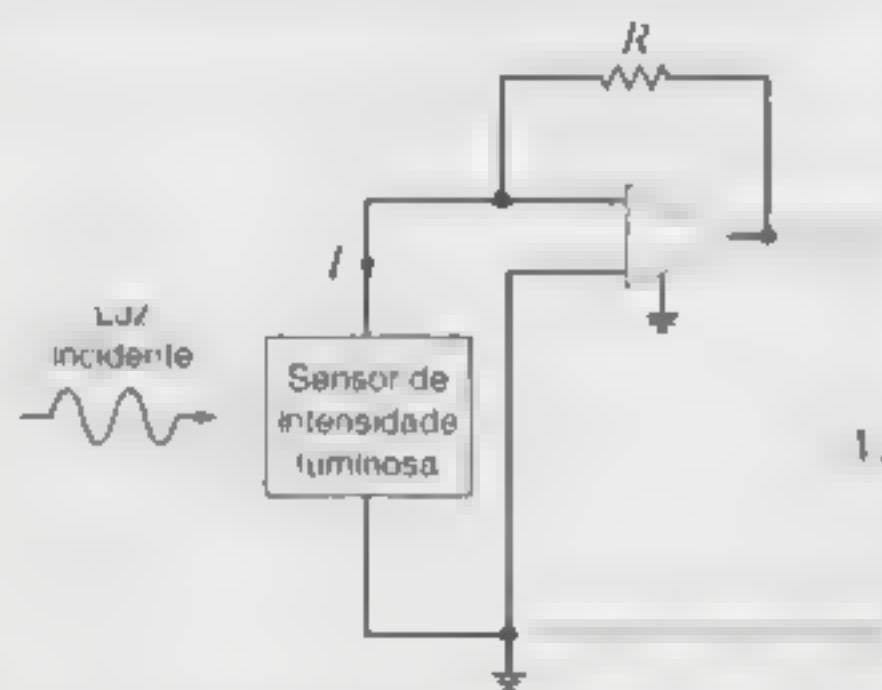
SOLUÇÃO

Aplicando-se a LKC à entrada do op-amp, tem-se

$$I = V_i / R$$

Como V_i/I vale 10^5 ,

$$R = 100 \text{ k}\Omega$$

**Figura 4.22** Conversor de intensidade luminosa em tensão.

EXEMPLO DE APLICAÇÃO 4.9

O circuito mostrado na Fig. 4.23 é o de um amperímetro eletrônico. Ele opera da seguinte maneira: a corrente incógnita, I , que passa através do resistor R_i , produz uma tensão V_i . A tensão V_i é amplificada pelo op-amp que gera a tensão V_o , que

é proporcional à corrente I . A tensão de saída é medida com um simples voltímetro. Deseja-se obter o valor de R_2 de forma que cada miliampère da corrente incógnita seja indicado por 10 V da tensão V_o .

SOLUÇÃO

Uma vez que a corrente que entra no terminal positivo (+) do op-amp é nula, a relação entre V_i e I será

$$V_i = IR_1$$

A relação entre as tensões de entrada e de saída é

$$V_o = V_i \left(1 + \frac{R_2}{R_1} \right)$$

ou, resolvendo-se a equação para V_o/I , obtém-se

$$\frac{V_o}{I} = R_1 \left(1 + \frac{R_2}{R_1} \right)$$

Utilizando-se a relação desejada $V_o/I = 10^4$ e os valores dos resistores fornecidos na Fig. 4.23, obtém-se

$$R_2 = 9 \text{ k}\Omega$$

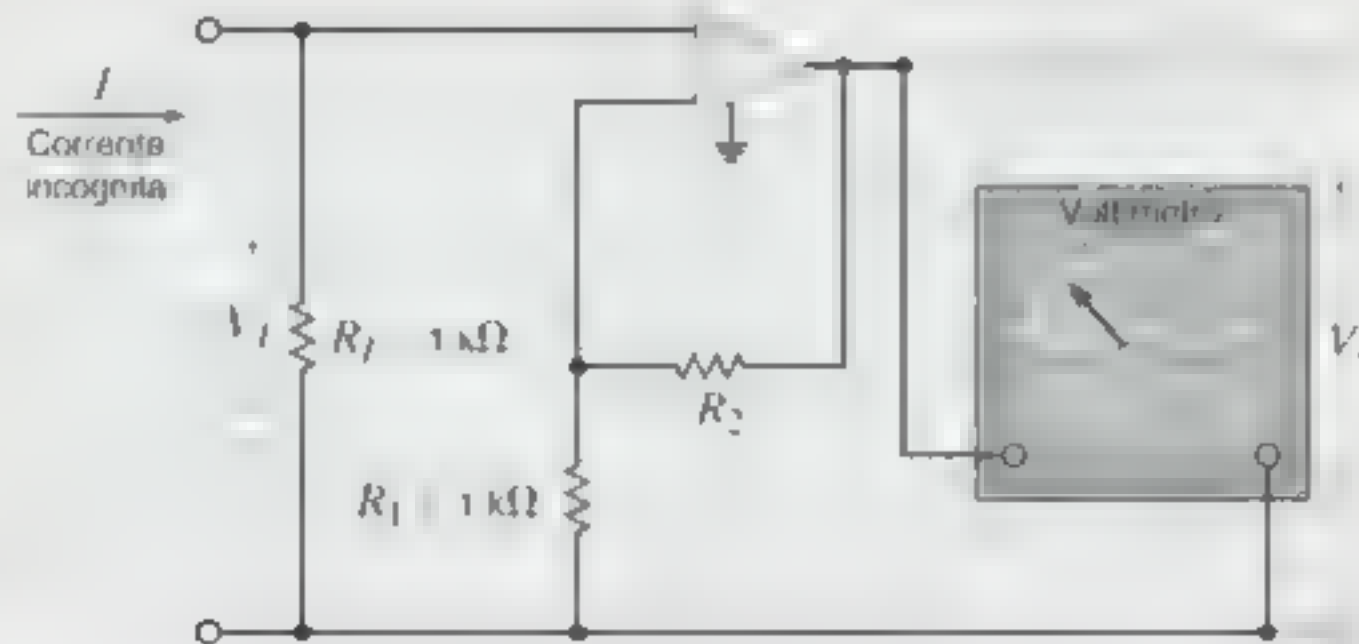


Figura 4.23 Amperímetro eletrônico.

EXEMPLO DE APLICAÇÃO 4.10

Retorna-se agora ao controle do motor CC apresentado no Capítulo 3 (Exemplo 3.22). Deseja-se definir a estrutura do amplificador de potência que permitirá a leitura do sinal de controle da velocidade, V_{veloc} , e fornecerá como saída a tensão para o motor CC com corrente suficiente para acionar o motor, conforme mostrado na Fig. 4.24. A seleção é realizada na condição de que a dissipação de potência total no amplificador não seja superior a 100 mW.

SOLUÇÃO

A Tabela 4.1 mostra que apenas o op-amp PA03 da APEX apresenta tensão de saída suficiente — isto é, uma tensão de

saída máxima de $(4)(5) = 20 \text{ V}$ — para essa aplicação. Como o ganho requerido é de +4, pode-se empregar a configuração padronizada do amplificador não inversor mostrado na Fig. 4.25. Admitindo que o PA03 seja ideal, tem-se que

$$V_M = V_{\text{veloc}} \left[1 + \frac{R_B}{R_A} \right] = 4V_{\text{veloc}}$$

Certamente, existe uma infinidade de soluções que atendem a essa equação.

Para que valores razoáveis sejam selecionados, considere-se a possibilidade de correntes altas associadas aos resistores R_A e R_B quando a tensão V_M estiver com seu valor de pico de 20 V. Admitindo que a resistência R_i do PA03 seja muito

Figura 4.24 Exemplo do motor CC do Capítulo 3.

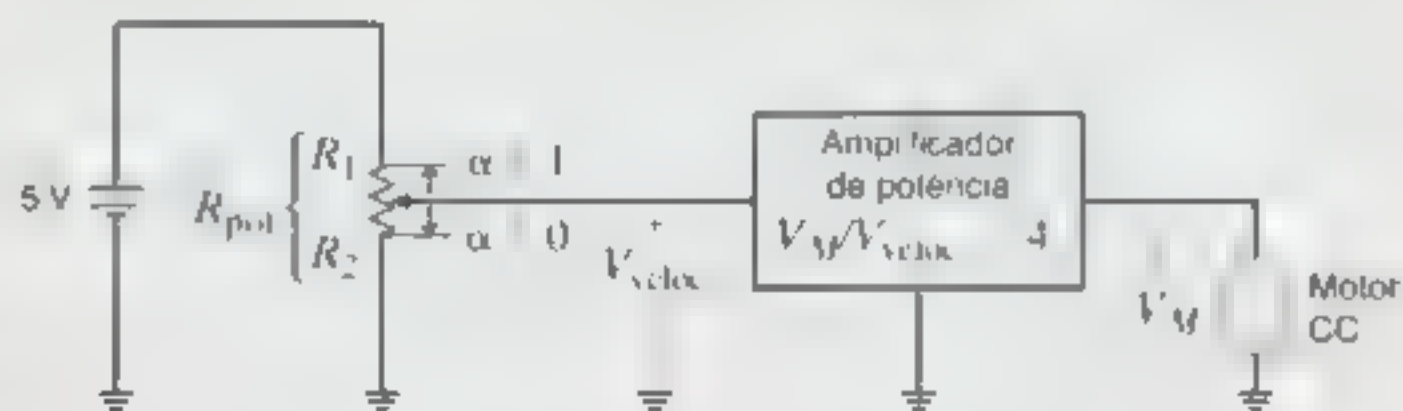
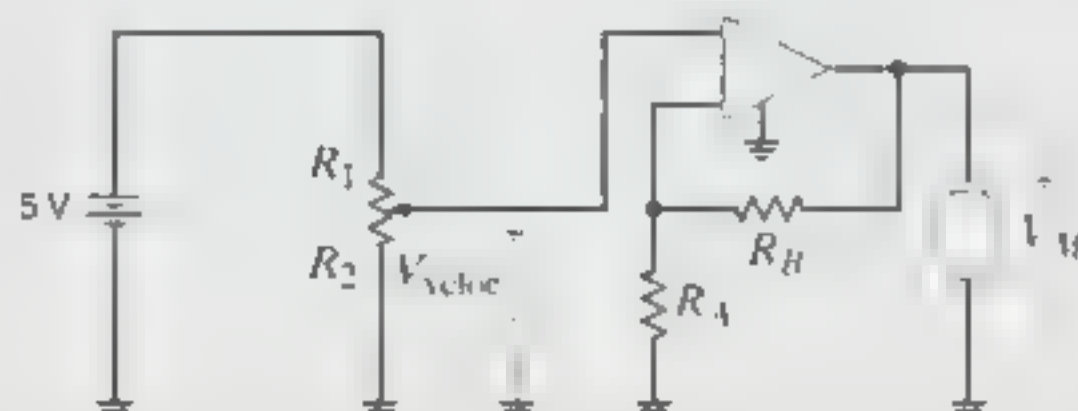


Figura 4.25 Configuração do amplificador de potência utilizando o op-amp PA03.



maior que R_A , a potência total dissipada será praticamente definida pelas correntes em R_B e R_A . Essa potência dissipada em R_A e R_B pode ser determinada pela expressão

$$P_{\text{total}} = \frac{V_u^2}{R_A + R_B} \leq \frac{(40)^2}{R_A + R_B} = \frac{400}{R_A + R_B}$$

Como a potência total não deve ser superior a 100 mW, pode-se utilizar resistores de 1/4 W — um resistor padrão industrial de baixo custo — com reserva. Com esta especificação de potência, obtém-se

$$R_A + R_B = \frac{V_u^2}{P_{\text{total}}} = \frac{400}{0,1} = 4000$$

E, também, como

$$1 = \frac{R_B}{R_A} = 4$$

então, $R_B = 3 R_A$. A combinação desse resultado com a especificação de potência fornece $R_A = 1 \text{ k}\Omega$ e $R_B = 3 \text{ k}\Omega$. Ambos são valores padronizados com tolerância de 5%.

EXEMPLO DE APLICAÇÃO 4.11

Um amplificador, com a estrutura mostrada na Fig. 4.26, foi sugerido para um projeto de instrumentação. Esse amplificador deve apresentar alta resistência de entrada, um ganho em tensão $V_o/(V_1 - V_2)$ de 10, empregar o op-amp MAX4240 listado na Tabela 4.1 e operar a partir de duas baterias de 1,5 V AA em série. Analise este circuito, selecione os valores dos resistores e explore a validade desta configuração.

SOLUÇÃO

Conforme indicado, o op-amp do lado direito do circuito está conectado na configuração tradicional do amplificador diferencial. O Exemplo 4.5 indica que o ganho em tensão para essa parte da rede é

$$V_o = (V_1 - V_2) \left[\frac{R_B}{R_1} \right]$$

E, se $R_A = R_B$, a equação reduz-se a

$$V_o = V_1 - V_2$$

Sendo possível encontrar uma relação entre V_1 , V_2 , V_x e V_y , pode-se escrever uma expressão envolvendo todas as tensões. Aplicando a LKC ao nó A, tem-se

$$\frac{V_1 - V_x}{R} = \frac{V_x - V_y}{R}$$

ou

$$V_1 = V_x \left[1 + \frac{R}{R} \right] = V_x \left[\frac{R}{R} \right]$$

Analogamente, para o nó B, obtém-se

$$\frac{V_2 - V_y}{R} = \frac{V_y - V_x}{R}$$

ou

$$V_2 = -V_x \left[\frac{R}{R} \right] + V_y \left[1 + \frac{R}{R} \right]$$

Combinando-se essas equações, a tensão de saída pode ser expressa como

$$V_o = V_x - V_y = V_x \left[1 + \frac{R_1}{R} \right] - V_y \left[\frac{R_1}{R} \right] + V_y \left[\frac{R_1}{R} \right] = V_x \left[1 + \frac{R}{R} \right]$$

Se os resistores forem seleccionados de modo que $R_1 = R_2$, então o ganho em tensão será

$$\frac{V_o}{V_1 - V_2} = 1 + \frac{2R}{R}$$

Para um ganho de +10, estabelece-se $R_1 = 4,5 R$. Para manter a baixa potência, serão utilizados valores bem altos para esses

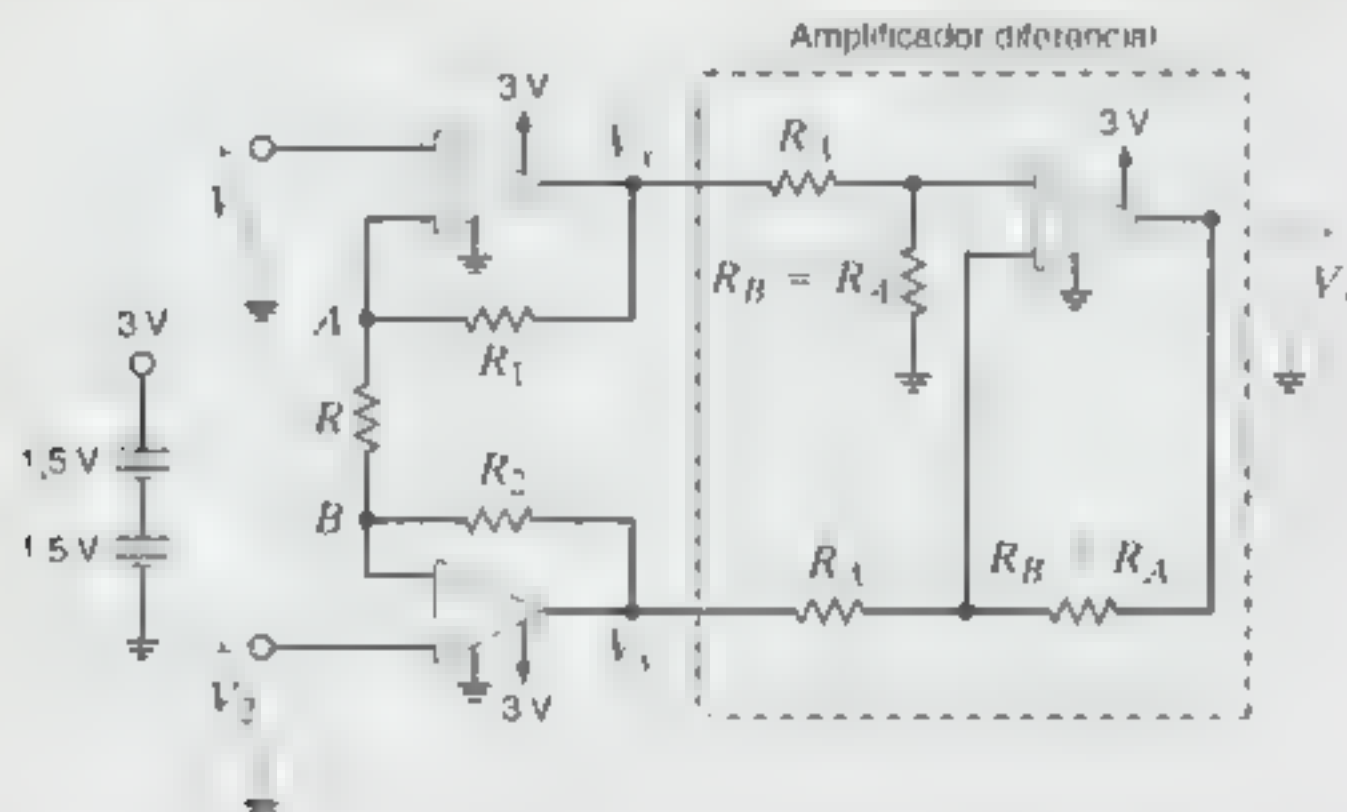


Figura 4.26 Amplificador de instrumentação utilizando o op-amp MAX4240.

resistores. Escolhe-se arbitrariamente, $R = 100 \text{ k}\Omega$ e $R_1 = R_2 = 450 \text{ k}\Omega$. Pode-se ainda utilizar resistores de $100 \text{ k}\Omega$ no estágio do amplificador diferencial.

Observe que o ganho em tensão do amplificador de instrumentação é basicamente o mesmo de um amplificador diferencial genérico. Assim, por que pagar o custo de mais dois op-amps? Nesta configuração as entradas V_1 e V_2 estão

diretamente conectadas aos terminais de entrada do op-amp, portanto, a resistência de entrada do amplificador de instrumentação é extremamente alta. Pela Tabela 4.1, verifica-se que a resistência R_i do MAX4240 é de $45 \text{ M}\Omega$. Esse não é o caso do amplificador diferencial tradicional, em que o resistor externo pode diminuir significativamente a resistência de entrada.

4.6 Exemplos de Projeto

EXEMPLO DE PROJETO 4.12

Você foi consultado sobre o projeto de um amplificador que deve reduzir uma tensão de entrada muito alta (V_e na faixa de $\pm 680 \text{ V}$) para uma baixa tensão de saída na faixa de $\pm 5 \text{ V}$. Utilizando apenas dois resistores, projete o melhor amplificador possível.

SOLUÇÃO

Como a redução deve ser de $+680 \text{ V}$ para -5 V , o uso de um amplificador inversor parece ser adequado. A relação saída/entrada do circuito mostrado na Fig. 4.27 é

$$\frac{V_o}{V_e} = -\frac{R_2}{R_1}$$

Como o circuito deve reduzir a tensão, R_1 deve ser muito maior que R_2 . Pelo processo de tentativa e erro, uma excelente

escolha para o par de resistores padronizados, selecionados da Tabela 2.1, é $R_1 = 27 \text{ k}\Omega$ e $R_2 = 200 \Omega$. Para $V_e = 680 \text{ V}$, a tensão de saída resultante é de $5,037 \text{ V}$, o que representa um erro percentual de apenas $0,74\%$.

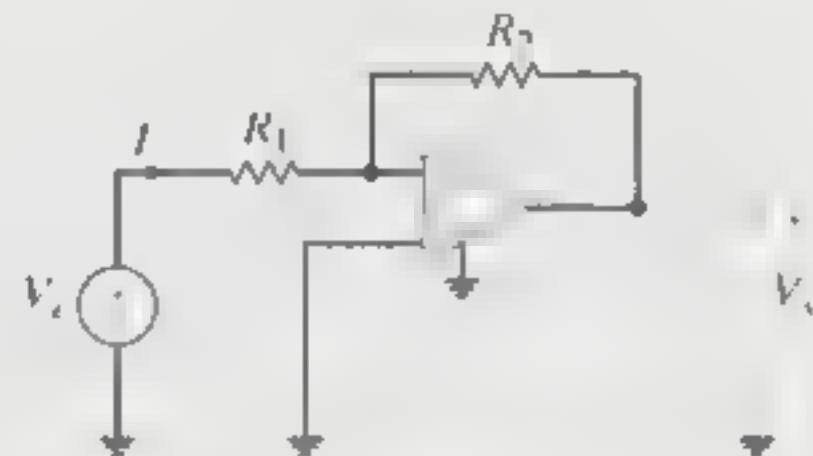


Figura 4.27 Estágio do amplificador inversor padronizado.

EXEMPLO DE PROJETO 4.13

A um engenheiro é solicitado o projeto de uma configuração de op-amp não inversor com dois resistores sujeitos às seguintes condições: o ganho deve ser de $+10$, a faixa de tensões de entrada deve ser de $\pm 2 \text{ V}$ e a potência total consumida pelos resistores deve ser inferior a 100 mW .

SOLUÇÃO

Para a configuração não inversora padronizada mostrada na Fig. 4.28a, o ganho é expresso por

$$\frac{V_o}{V_e} = 1 + \frac{R_2}{R_1}$$

Para um ganho de 10 , chega-se a $R_2/R_1 = 9$. Se $R_1 = 3 \text{ k}\Omega$ e $R_2 = 27 \text{ k}\Omega$, o requisito do ganho será atendido exatamente. Naturalmente, com base na Tabela 2.1 de resistores padronizados, podem ser realizadas outras escolhas com uma razão de $3/27$. A limitação de potência pode ser formalizada referindo-se à Fig. 4.28b, em que a tensão máxima de entrada (2 V) é aplicada. A potência total dissipada pelos resistores é

$$P_R = \frac{2^2}{R_1} + \frac{(20 - 2)^2}{R_2} = \frac{4}{R_1} + \frac{324}{9R_1} < 0,1$$

O valor mínimo para R_1 é de 400Ω .

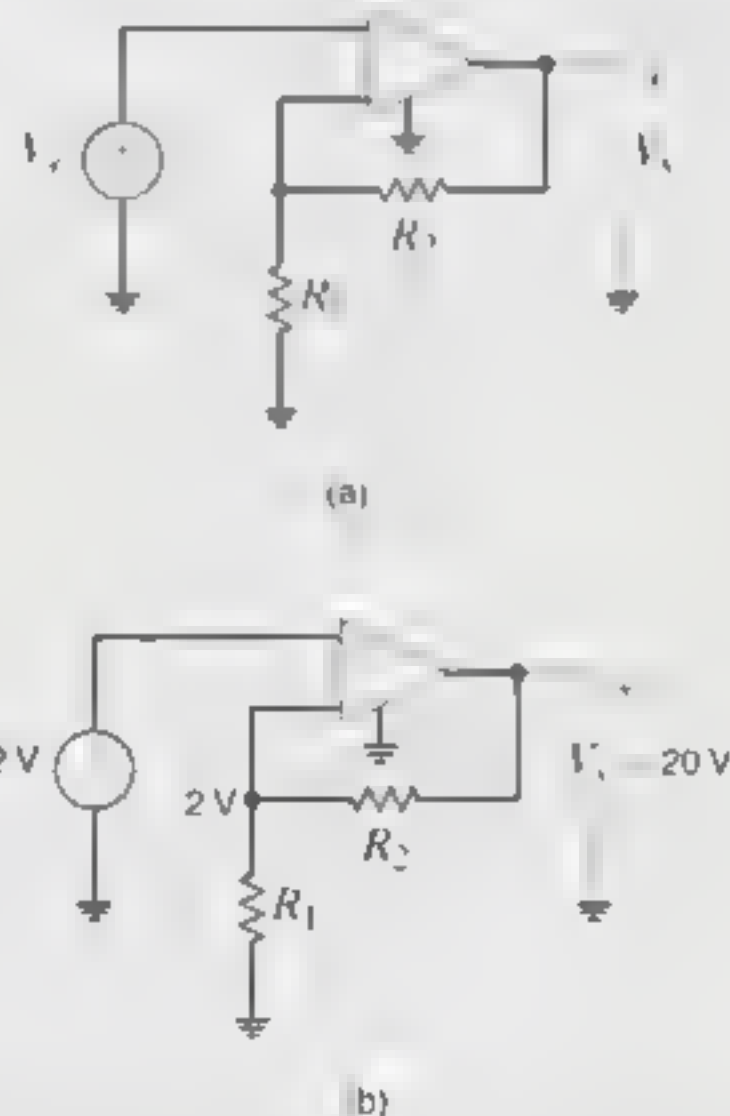


Figura 4.28 Configuração do op-amp não inversor empregado no Exemplo 4.13.

EXEMPLO DE PROJETO 4.14

Deseja-se projetar um circuito somador ponderado que produza a saída

$$V_s = -0,9V_1 - 0,1V_2$$

As especificações de projeto solicitam a utilização de um op-amp e não mais que três resistores. Além disso, deseja-se minimizar a potência ao utilizar resistores cujas resistências não sejam superiores a 10 kΩ.

SOLUÇÃO

Uma configuração para o somador ponderado padronizado é mostrada na Fig. 4.29. O problema fica reduzido à determinação dos valores para os três resistores da rede.

Utilizando a LKC, pode-se escrever

$$I_1 + I_2 = -\frac{V_s}{R}$$

em que

$$I_1 = \frac{V_1}{R_1} \quad \text{e} \quad I_2 = \frac{V_2}{R_2}$$

A combinação dessas relações fornece

$$V_s = \left[\frac{R}{R_1} \right] V_1 + \left[\frac{R}{R_2} \right] V_2$$

Portanto, é necessário que

$$\frac{R}{R_1} = 0,9 \quad \text{e} \quad \frac{R}{R_2} = 0,1$$

A partir desses requisitos, percebe-se que o maior resistor é R_2 e que R é o menor. Observe também que a razão R/R_1 pode ser expressa como 27/30. Finalmente, para minimizar a potência, seriam utilizados os maiores valores possíveis para os resistores. Com base nessa informação, os melhores valores para as resistências são $R = 270 \, \Omega$, $R_1 = 300 \, \Omega$ e $R_2 = 2,7 \, \text{k}\Omega$, as quais fornecem precisamente o desempenho desejado.

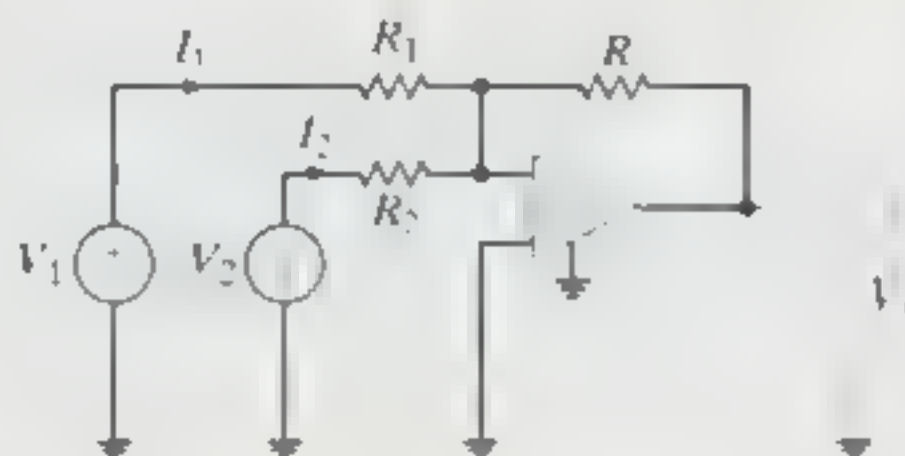


Figura 4.29 Configuração do somador ponderado padronizado.

EXEMPLO DE PROJETO 4.15

No Exemplo 2.36, foi utilizado um resistor de 250 Ω para converter uma corrente na faixa de 4 a 20 mA em uma tensão, de modo que uma entrada de 20 mA produziu uma saída de 5 V. Neste caso, a corrente mínima (4 mA) produziu uma tensão de 1 V no resistor. Infelizmente, muitos sistemas de controle operam na faixa de 0 a 5 V, e não na faixa de 1 a 5 V. Projeta-se agora um novo conversor que fornecerá uma saída de 0 V para uma corrente de 4 mA e 5 V para uma corrente de 20 mA.

SOLUÇÃO

O simples circuito resistivo projetado no Exemplo 2.36 é um bom ponto de partida. Entretanto, naquele circuito, a faixa de tensão é de apenas 4 V, e não a agora requerida de 5 V, e o valor da tensão mínima não é zero. Esses fatos impõem a necessidade de um novo valor para o resistor e que a tensão de saída seja deslocada para baixo, de modo que seu valor mínimo seja zero. Inicia-se o projeto calculando o valor necessário ao resistor.

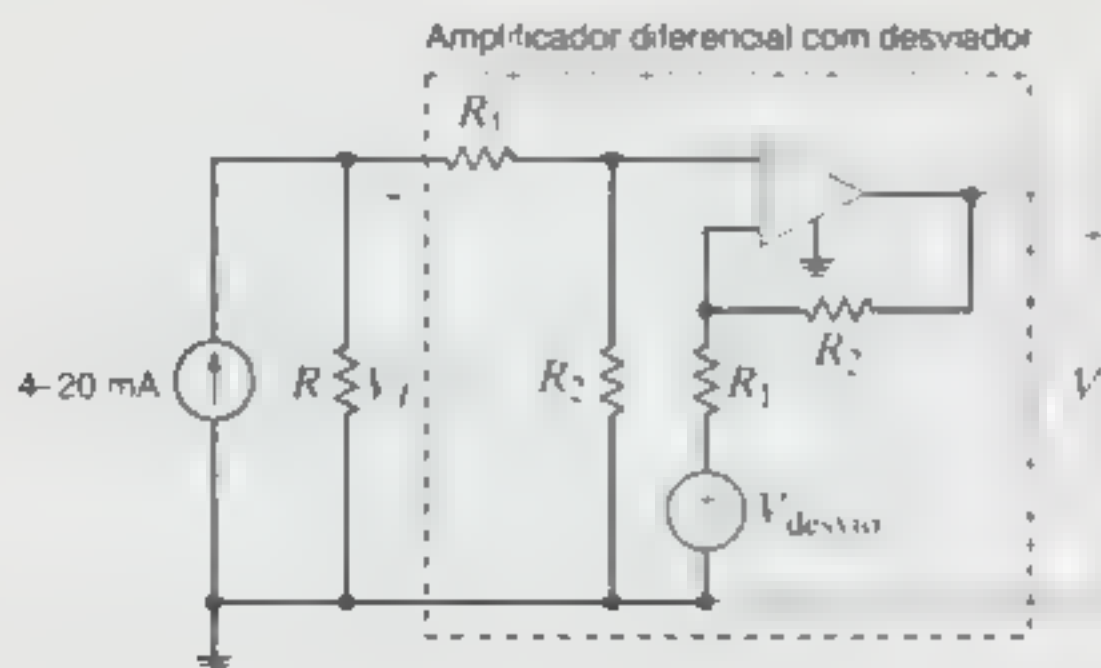


Figura 4.30 Circuito conversor de 4 - 20 mA para 0 - 5 V.

$$R = \frac{V_{\max} - V_{\min}}{I_{\max} - I_{\min}} = \frac{5 - 0}{0,02 - 0,004} = 312,5 \, \Omega$$

A tensão no resistor agora estará na faixa de $(0,004)(312,5)$ a $(0,02)(312,5)$, ou seja, de 1,25 a 6,25 V. Projeta-se agora um circuito que produz um desvio desses níveis de tensão de modo que a faixa seja de 0 a 5 V. Uma opção possível para o circuito que realiza um desvio de nível é o amplificador diferencial mostrado na Fig. 4.30. Lembre-se de que a tensão de saída desse dispositivo é

$$V_A = (V_I - V_{\text{desvio}}) \frac{R_2}{R}$$

Como o resistor R , para uma faixa de tensão de 5 V, já foi escolhido, o ganho do amplificador deve ser igual a 1 (isto é, $R_1 = R_2$). Naturalmente, o valor do desvio de tensão requerido

é de 1,25 V. Entretanto, pode-se verificar esse valor inserindo os valores mínimos nessa última equação.

$$0 = [(312,5)(0,004) - V_{\text{desvio}}] \frac{R_2}{R_1}$$

e obter

$$V_{\text{desvio}} = (312,5)(0,004) = 1,25 \, \text{V}$$

Existe uma questão a ser resolvida neste projeto. Não se deseja que o resistor conversor, R , afete o amplificador diferencial, ou vice-versa. Isso significa que grande parte da corrente na faixa de 4 a 20 mA deve fluir totalmente através de R e não através dos resistores do amplificador diferencial. Ao se escolher $R_1 = R_2 \gg R$, esse requisito será atendido. Portanto, pode-se selecionar $R_1 = R_2 = 100 \, \text{k}\Omega$ de modo que este valor seja superior a 300 vezes o valor da resistência R .

RESUMO

- Os amplificadores operacionais (op-amps) são caracterizados por
 - Alta resistência na entrada
 - Baixa resistência na saída
 - Ganho muito alto
- O op-amp ideal é modelado utilizando

$$i_+ = i_- = 0$$

$$v_+ = v_-$$

- Os problemas envolvendo op-amps são tipicamente analisados escrevendo-se as equações dos nós nos terminais de entrada dos op-amps
- A saída de um comparador é dependente da diferença entre as tensões nos terminais de entrada

PROBLEMAS

4.1 Um amplificador possui um ganho de 15 e o sinal de entrada mostrado na Fig. P4.1. Desenhe o sinal de saída.

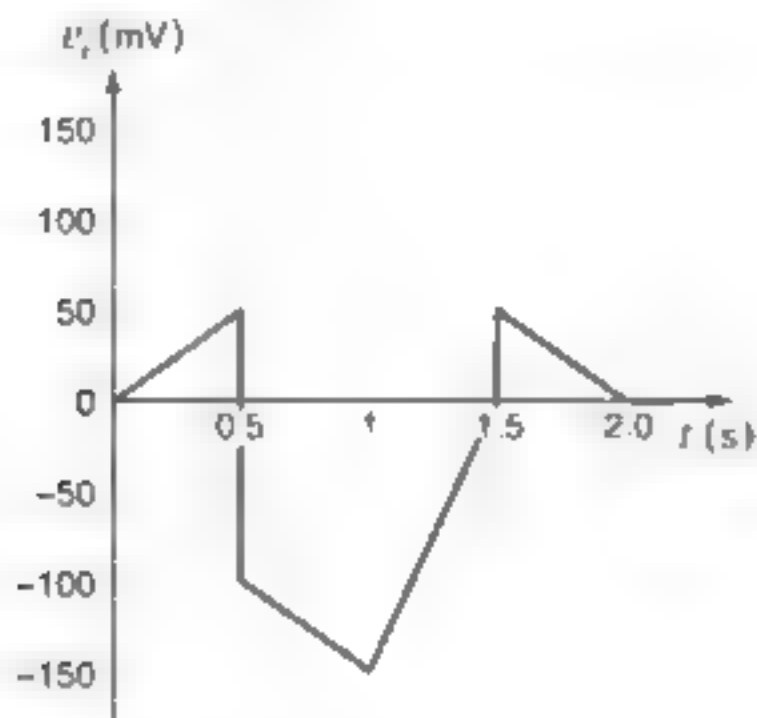


Figura P4.1

4.2 Um amplificador possui um ganho de -5 e o sinal de saída mostrado na Fig. P4.2. Esquematize o sinal de entrada.

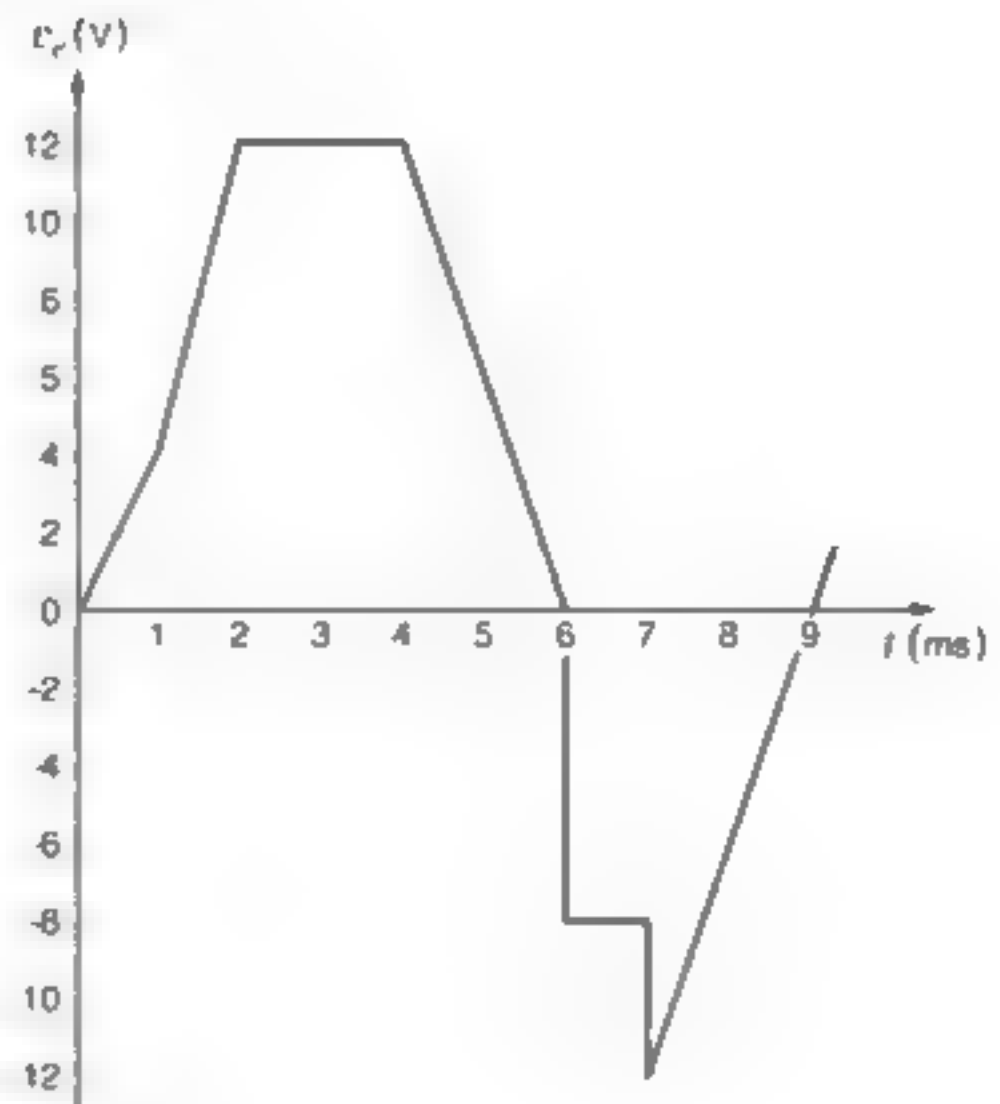


Figura P4.2

4.3 Um amplificador baseado em op-amps possui uma tensão de alimentação de $\pm 5\text{ V}$ e um ganho de 20.

- (a) Esboce o sinal de entrada a partir do sinal de saída mostrado na Fig. P4.3.
 (b) Duplique a amplitude de seus resultados para o item (a) e esboce o novo sinal de saída.

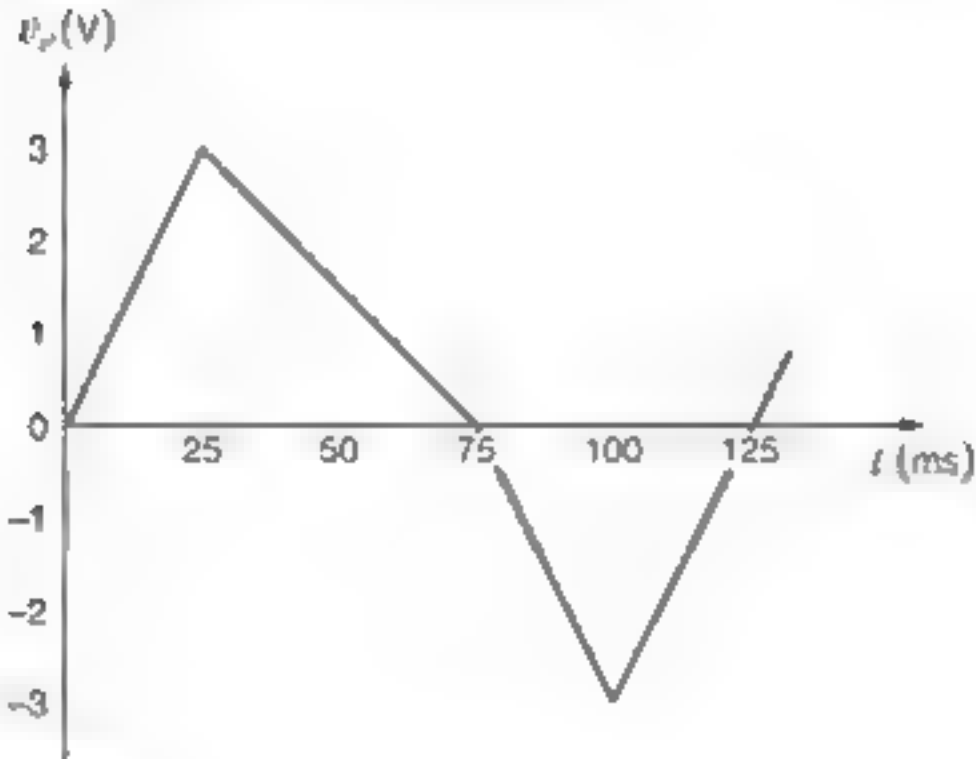


Figura P4.3

4.4 Para um op-amp ideal, o ganho em tensão e a resistência de entrada são infinitos enquanto a resistência de saída é nula. Quais são as consequências para

- (a) a tensão de entrada do op-amp?
 (b) as correntes de entrada do op-amp?
 (c) a corrente de saída do op-amp?

4.5 Reveja suas respostas para o Problema 4.4 considerando os seguintes cenários não ideais:

- (a) $R_e = \infty$, $R_i = 0$ e $A_o \neq \infty$.
 (b) $R_e = \infty$, $R_i > 0$ e $A_o = \infty$.
 (c) $R_e \neq \infty$, $R_i = 0$ e $A_o = \infty$.

4.6 Reveja a análise exata da configuração do circuito inversor da Seção 4.3.

- (a) Obtenha uma expressão para o ganho considerando $R_e = \infty$, $R_i = 0$ e $A_o \neq \infty$.
 (b) Represente graficamente a relação entre o ganho obtido no item (a) e o ganho ideal em função de A_o , para $1 \leq A_o \leq 1000$, considerando um ganho ideal de -10 .
 (c) Com base no traçado de seu gráfico, pode-se afirmar que o ganho real se aproxima do valor ideal quando A_o aumenta ou diminui?
 (d) Com base no traçado de seu gráfico, qual é o valor mínimo de A_o se o ganho real apresentar uma diferença máxima de 5% do caso ideal?

4.7 Reveja a análise exata do amplificador inversor da Seção 4.3.

- (a) Obtenha uma expressão para o ganho em tensão, considerando $R_e \neq \infty$, $R_i = 0$ e $A_o \neq \infty$.
 (b) Para $R_2 = 27\text{ k}\Omega$ e $R_1 = 3\text{ k}\Omega$, represente graficamente a razão entre o ganho real e o ganho ideal para $A_o = 1000$ e $1\text{ k}\Omega \leq R_e \leq 100\text{ k}\Omega$.
 (c) Com base no traçado de seu gráfico, pode-se afirmar que a razão se aproxima da unidade quando R_e aumenta ou diminui?

(d) Com base no traçado de seu gráfico no item (b), qual é o valor mínimo de R_e se a razão de ganhos deve ser de no mínimo 0,98?

4.8 Um amplificador baseado em op-amps tem uma fonte de $\pm 18\text{ V}$ e um ganho de -80 . Para que faixa de entradas esse amplificador é linear?

4.9 Admitindo que o op-amp seja ideal, determine o ganho em tensão do circuito mostrado na Fig. P4.9

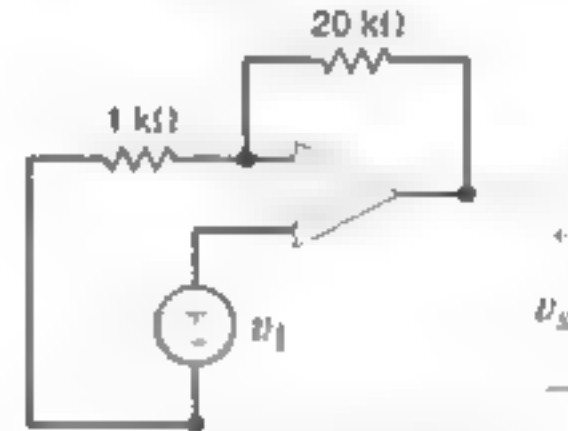


Figura P4.9

4.10 Admitindo que o op-amp seja ideal, determine o ganho em tensão do circuito mostrado na Fig. P4.10.

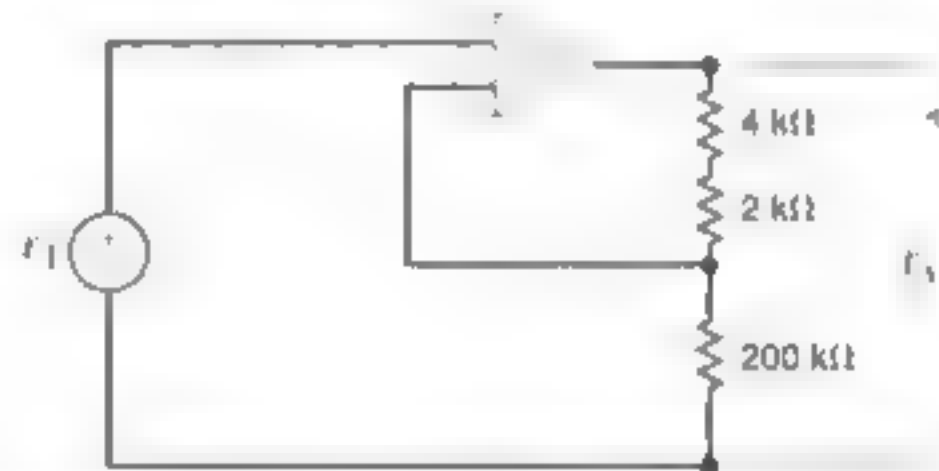


Figura P4.10

4.11 Admitindo que o op-amp seja ideal no circuito mostrado na Fig. P4.11, determine o valor de R_1 que produzirá um ganho em tensão de 26.

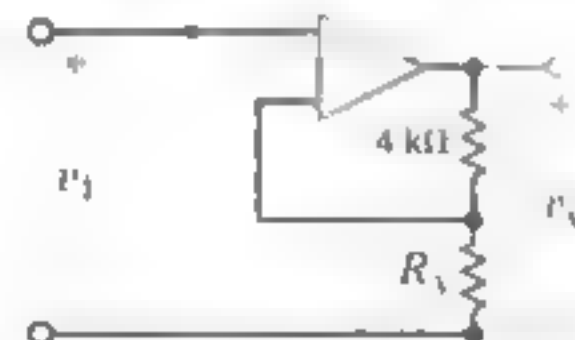


Figura P4.11

4.12 Admitindo que o op-amp seja ideal, determine o ganho em tensão da rede mostrada na Fig. P4.12.

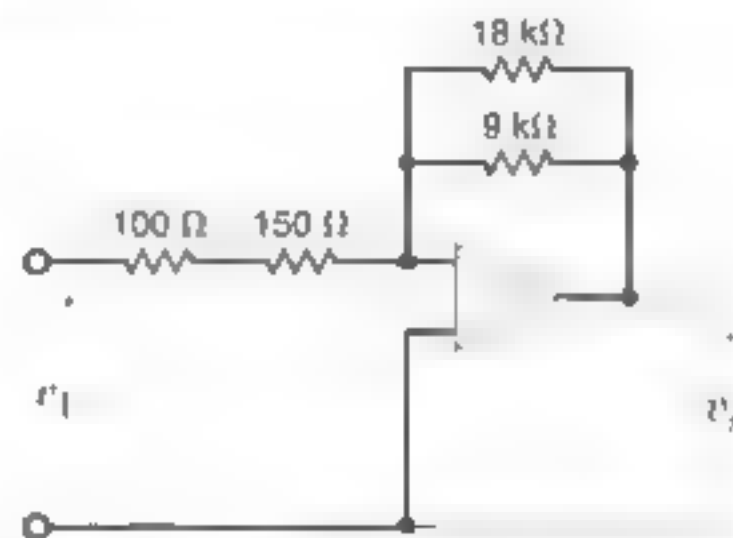


Figura P4.12

- 4.13** Admitindo que o op-amp do circuito mostrado na Fig. P4.13 seja ideal, determine a tensão de saída V_s .

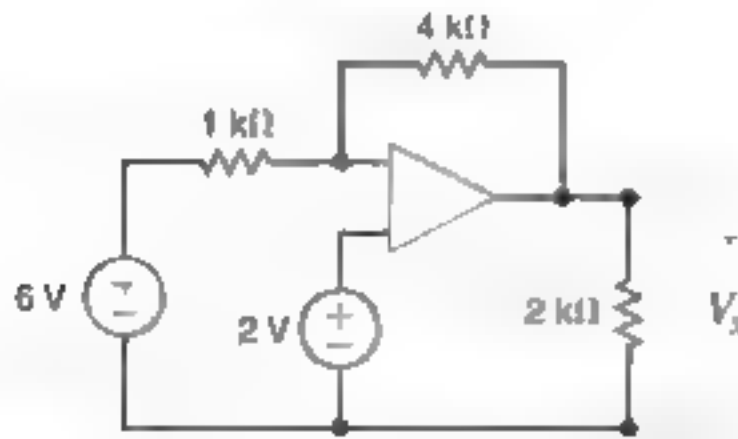


Figura P4.13

- 4.14** Determine o ganho do amplificador mostrado na Fig. P4.14. Qual é o valor da corrente I_s ?

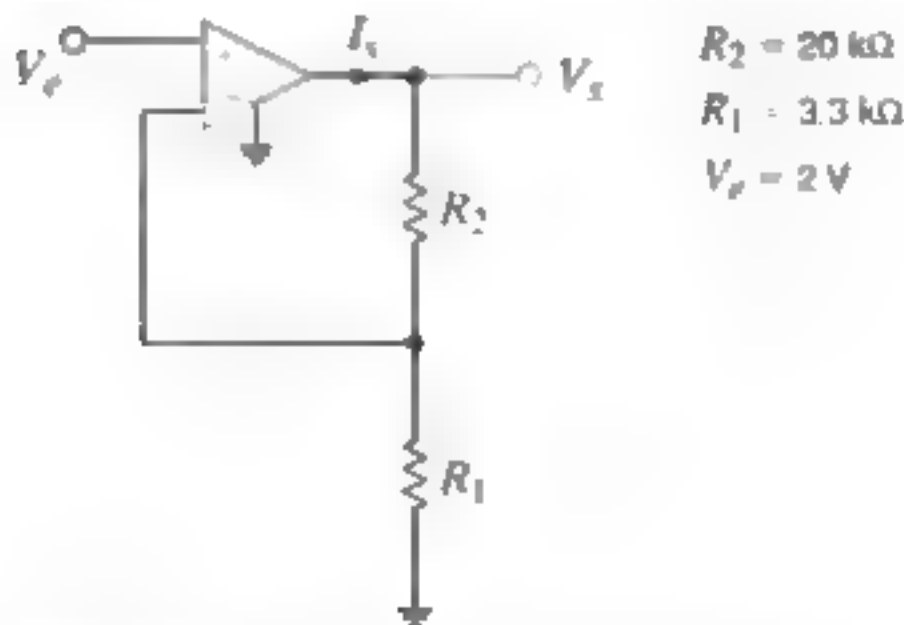


Figura P4.14

- 4.15** Determine o ganho e a corrente I_s do amplificador mostrado na Fig. P4.15.

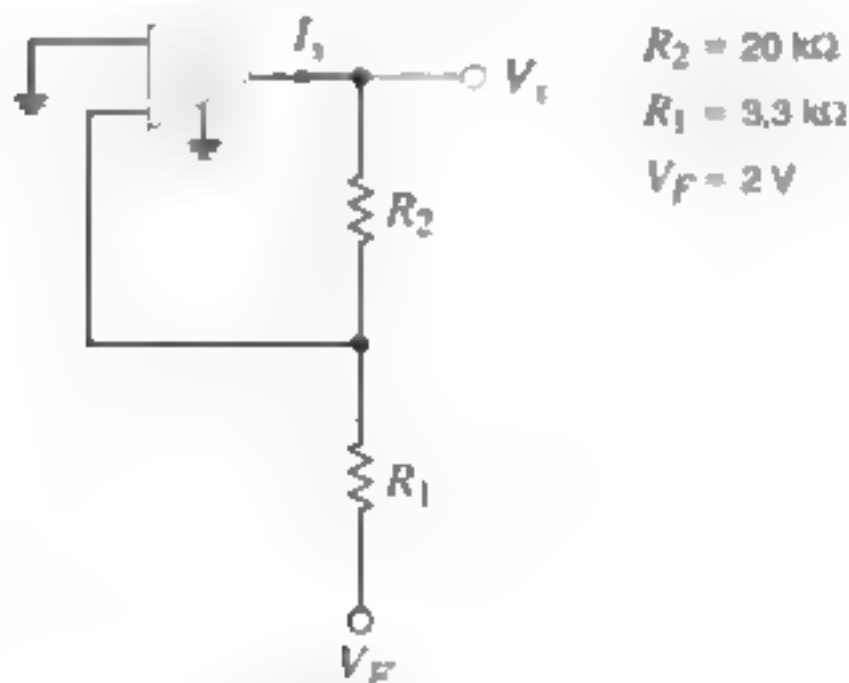


Figura P4.15

- 4.16** Utilizando a hipótese de op-amp ideal, determine os valores de V_s e I_s do circuito mostrado na Fig. P4.16.

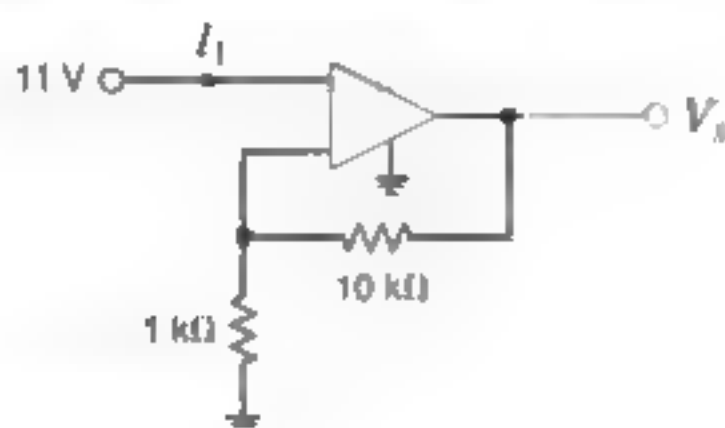


Figura P4.16

- 4.17** Utilizando a hipótese de op-amp ideal, determine os valores das correntes I_1 , I_2 e I_3 do circuito mostrado na Fig. P4.17.

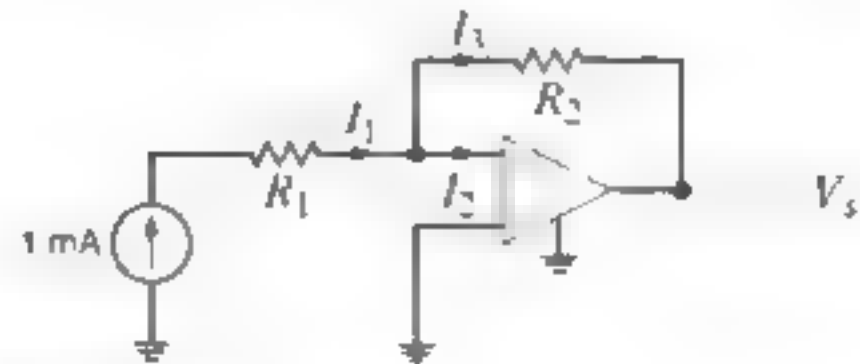


Figura P4.17

- 4.18** Em uma aplicação prática, o amplificador alimenta uma carga R_C . O circuito mostrado na Fig. P4.18 representa fisicamente esse cenário.

- Esboce o ganho V_s/V_F para $10 \Omega \leq R_C \leq \infty$.
- Esboce a corrente I_s para $10 \Omega \leq R_C \leq \infty$ considerando $V_F = 0,1 \text{ V}$.
- Repita o item (b) considerando $V_F = 1,0 \text{ V}$.
- Qual é o valor mínimo de R_C se I_s deve ser menor que 100 mA para $|V_F| < 0,5 \text{ V}$?
- Qual é o valor da corrente I_s para $R_C = 100 \Omega$? Repita considerando $R_C = 10 \text{ k}\Omega$.

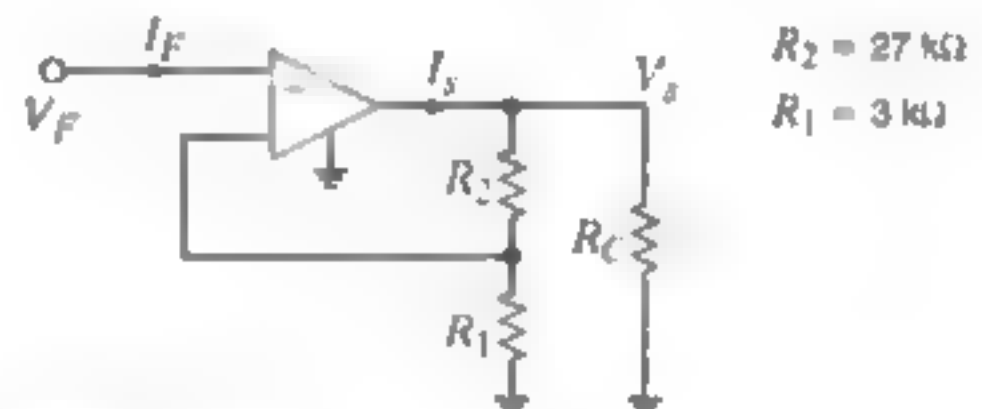


Figura P4.18

- 4.19** O op-amp do amplificador mostrado na Fig. P4.19 opera com uma fonte de $\pm 15 \text{ V}$ e apresenta uma saída não superior a 200 mA. Qual é o ganho máximo admissível para o amplificador se o valor máximo de V_s é 1 V?

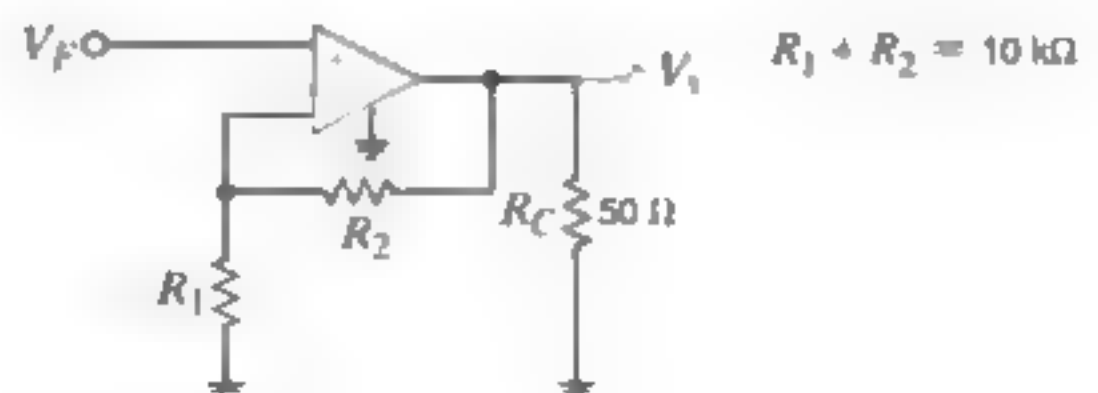


Figura P4.19

4.20 Para o amplificador mostrado na Fig. P4.20, o valor máximo de V_F é 2 V e o op-amp pode desenvolver uma corrente não superior a 100 mA.

- Se forem utilizadas fontes de ± 10 V, qual será o valor máximo admissível de R_2 ?
- Repita o item (a) para fontes de ± 3 V.
- Discuta o impacto das fontes no ganho máximo admissível.

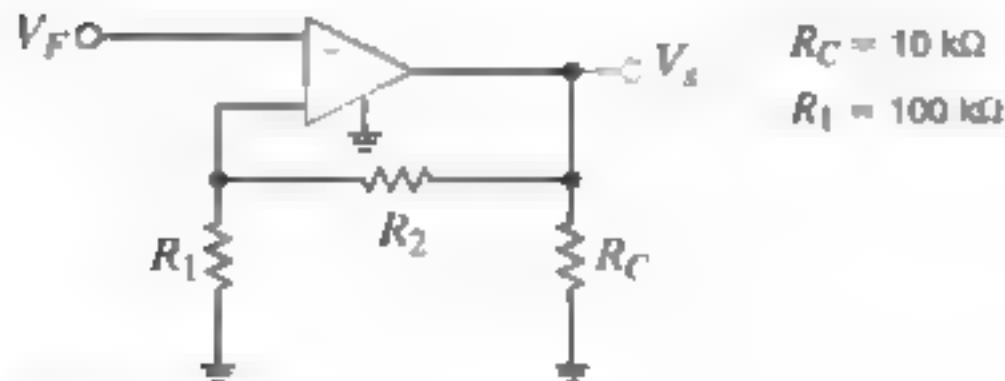


Figura P4.20

4.21 Para o circuito mostrado na Fig. P4.21,

- determine V_s em função de V_1 e V_2 .
- se $V_1 = 2$ V e $V_2 = 6$ V, obtenha V_s .
- se as fontes do op-amp são de ± 12 V e $V_1 = 4$ V, qual é a faixa admissível de operação de V_2 ?

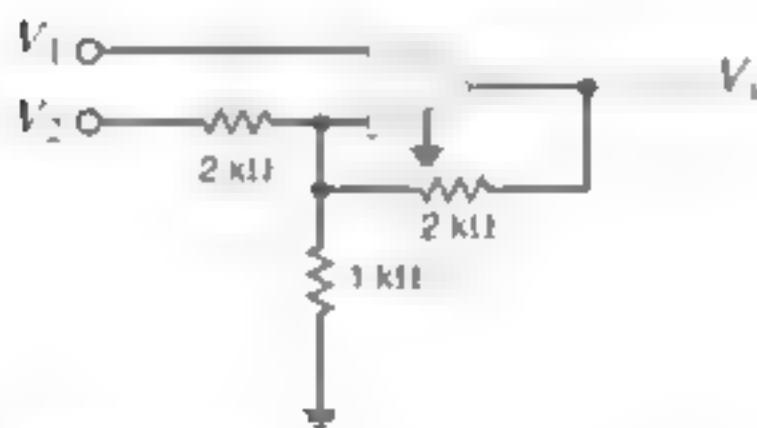


Figura P4.21

4.22 Determine a tensão V_s do circuito mostrado na Fig. P4.22 admitindo que o op-amp seja ideal.

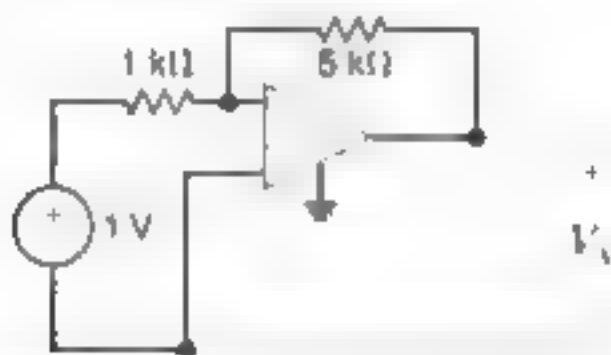


Figura P4.22

4.23 A rede mostrada na Fig. P4.23 é um conversor de corrente para tensão ou amplificador de transcondutância. Determine a relação v_s/i_f desta rede.

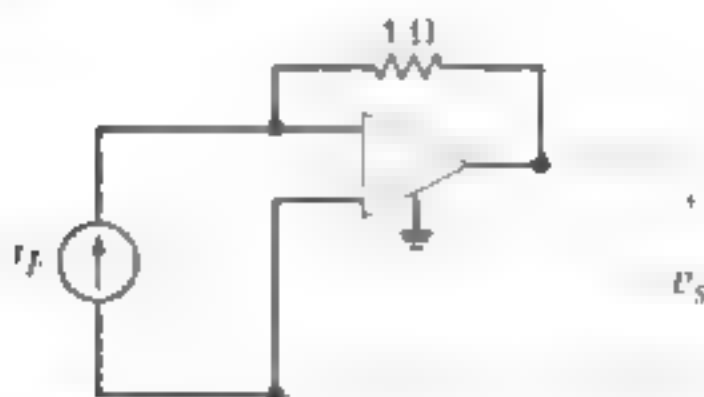


Figura P4.23

4.24 Calcule a função de transferência i_s/v_1 para a rede mostrada na Fig. P4.24.

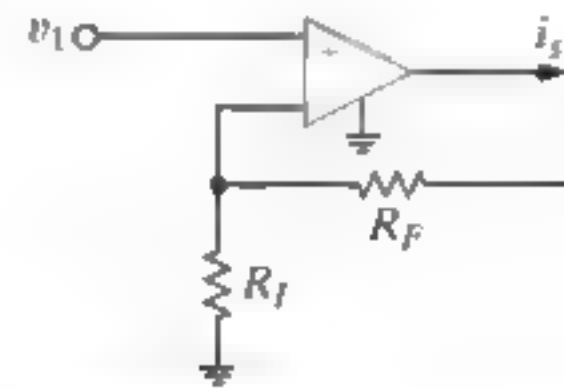


Figura P4.24

4.25 Determine a relação entre v_1 e i_s no circuito mostrado na Fig. P4.25.

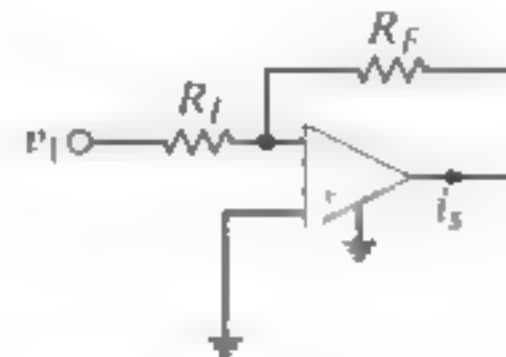


Figura P4.25

4.26 Determine a tensão V_s da rede mostrada na Fig. P4.26 e explique o efeito produzido por R_1 na saída.

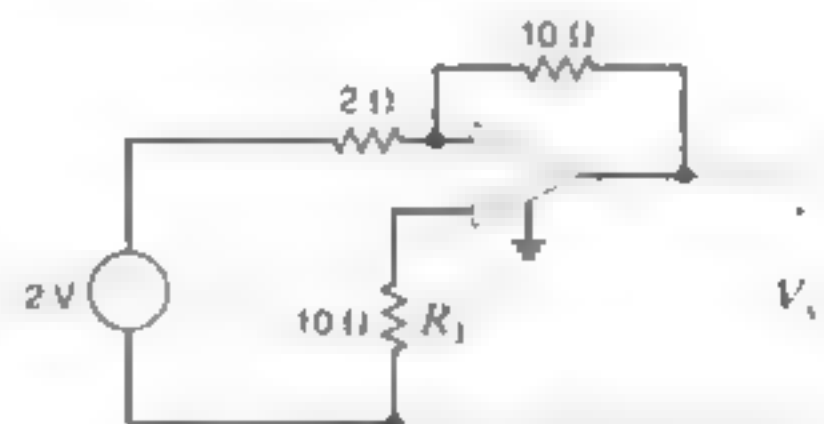


Figura P4.26

4.27 Determine uma expressão para a tensão v_s da rede mostrada na Fig. P4.27.

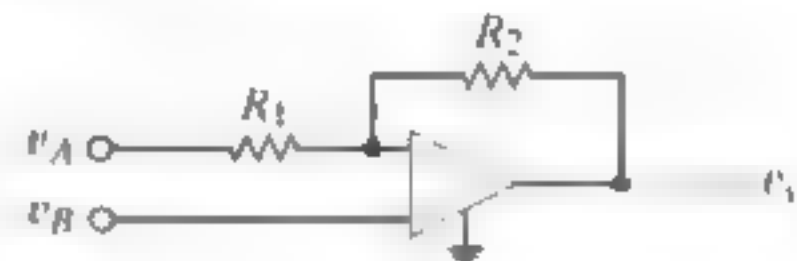


Figura P4.27

4.28 Mostre que a saída do circuito mostrado na Fig. P4.28 é

$$v_s = \left[1 + \frac{R_2}{R} \right] \frac{R}{R} v_1$$

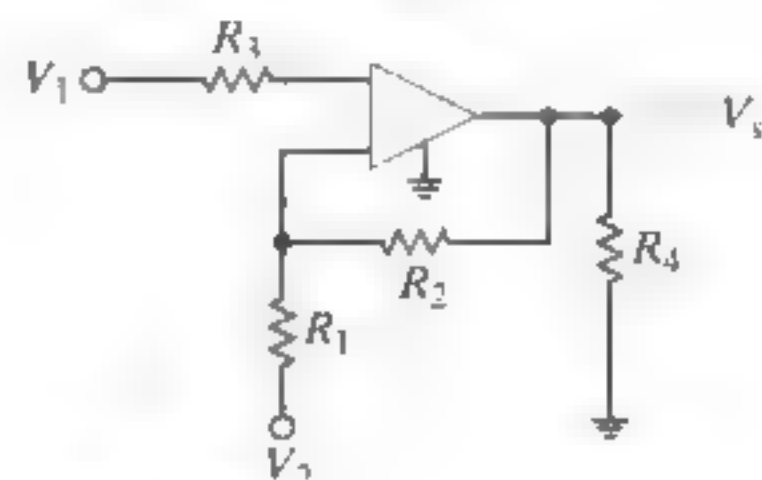


Figura P4.28

4.29 Determine a tensão V_o da rede mostrada na Fig. P4.29.

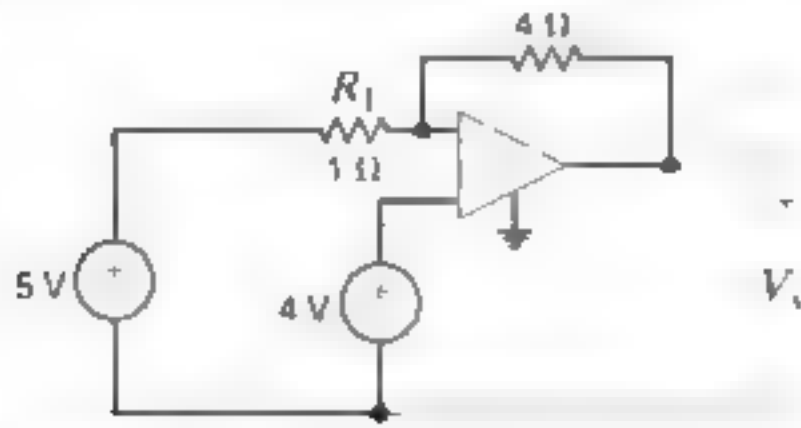


Figura P4.29

4.33 Para o circuito mostrado na Fig. P4.33, determine o valor de R_1 que produz um ganho em tensão de 10.

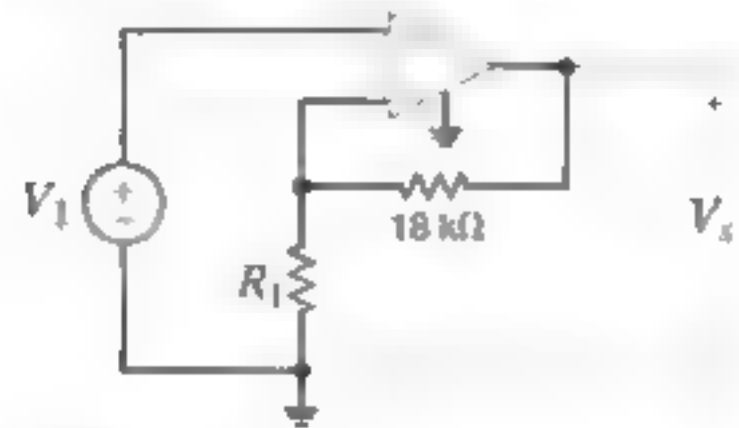


Figura P4.33

4.30 Determine o ganho em tensão do circuito com op-amp mostrado na Fig. P4.30.

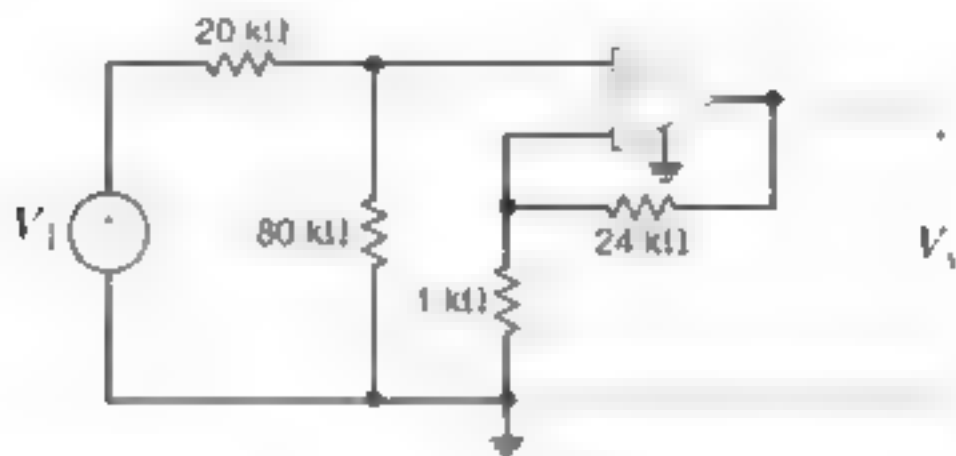


Figura P4.30

4.34 Determine a tensão V_o do circuito mostrado na Fig. P4.34.

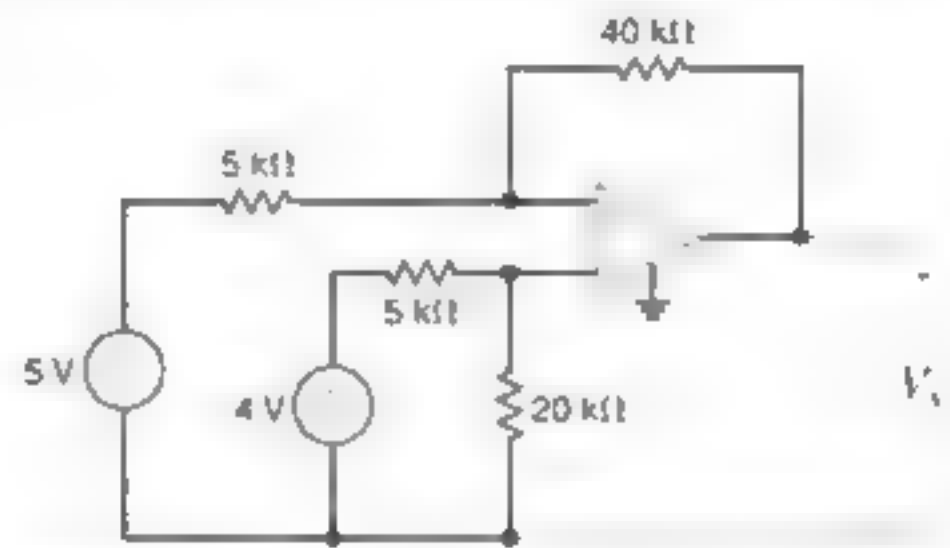


Figura P4.34

4.31 Determine a relação entre v_i e v_o para o circuito mostrado na Fig. P4.31.

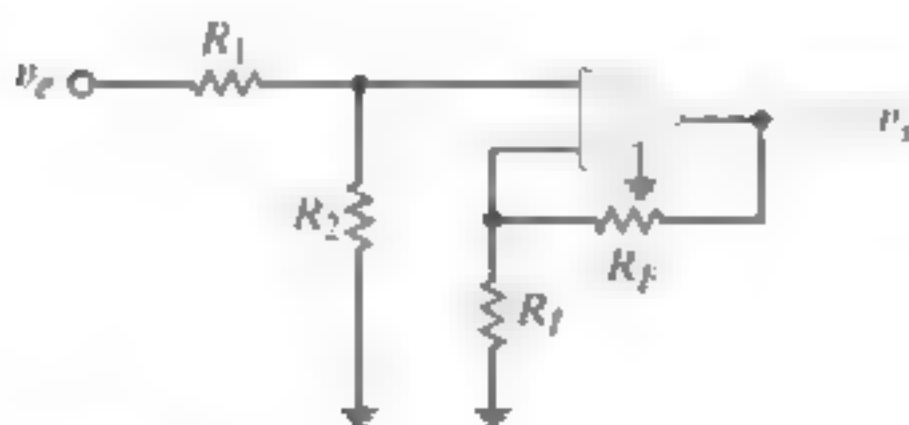


Figura P4.31

4.35 Determine a tensão V_o do circuito mostrado na Fig. P4.35.

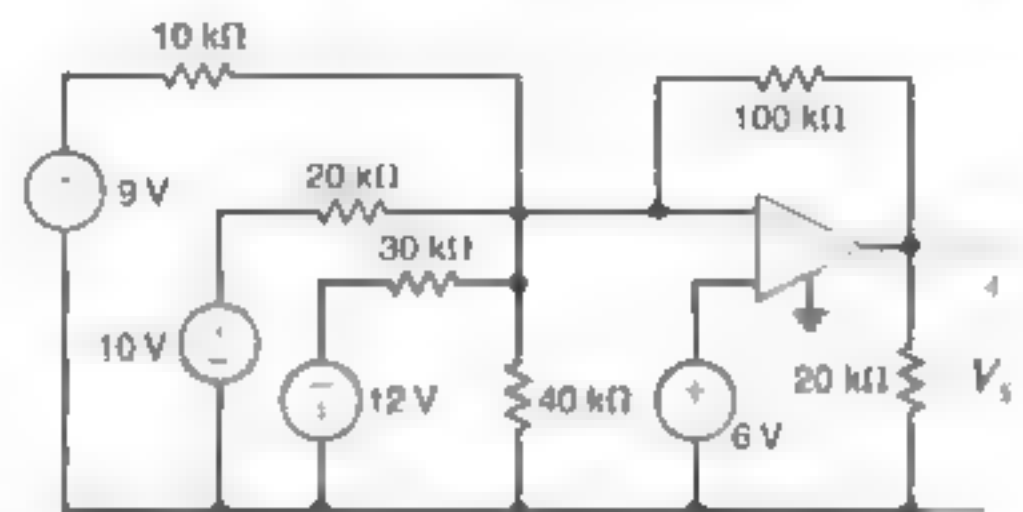


Figura P4.35

4.32 Deduza a expressão de v_o em função das entradas v_1 e v_2 para a rede mostrada na Fig. P4.32.

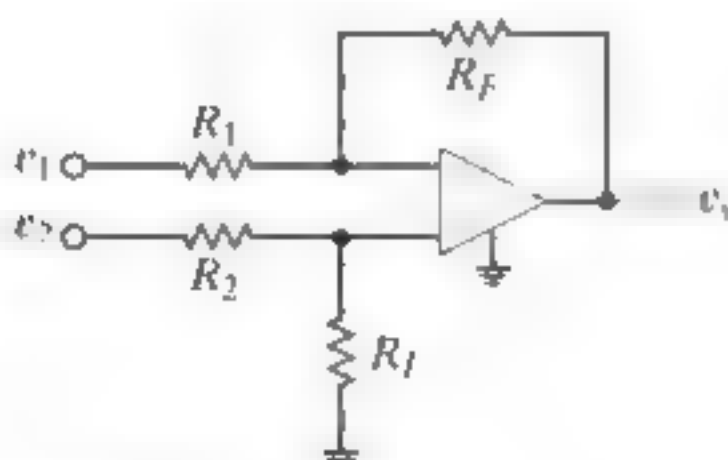


Figura P4.32

4.36 Determine a expressão da tensão de saída, v_o , do circuito somador inversor mostrado na Fig. P4.36.

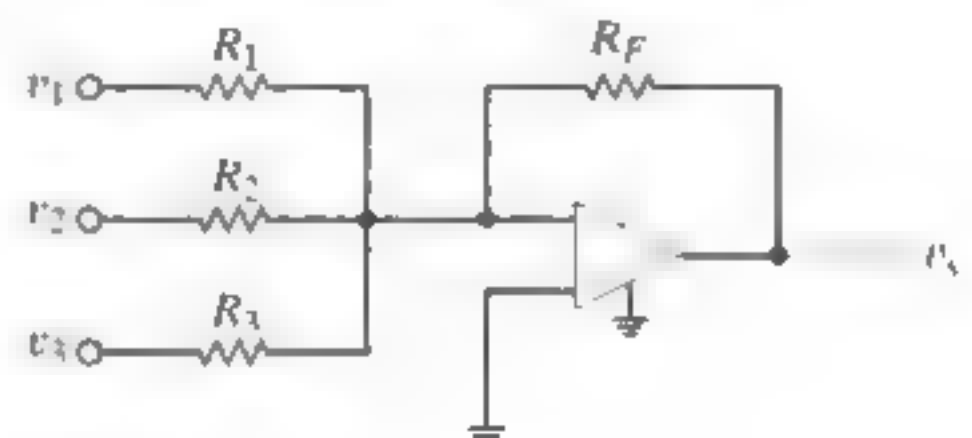


Figura P4.36

- 4.37 Determine a tensão de saída, v_o , do circuito não inversor de cálculo de médias mostrado na Fig. P4.37.

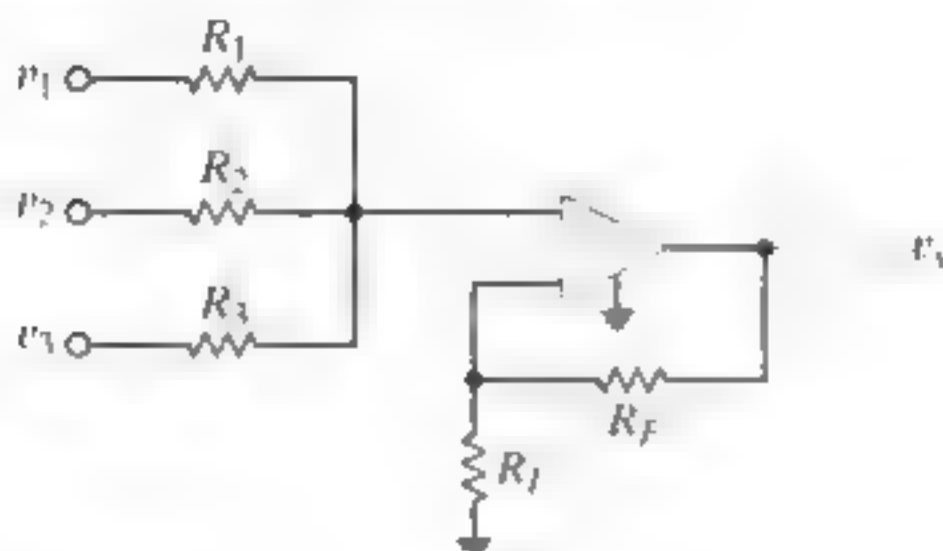


Figura P4.37

- 4.38 Determine a razão saída/entrada do amplificador de corrente mostrado na Fig. P4.38.

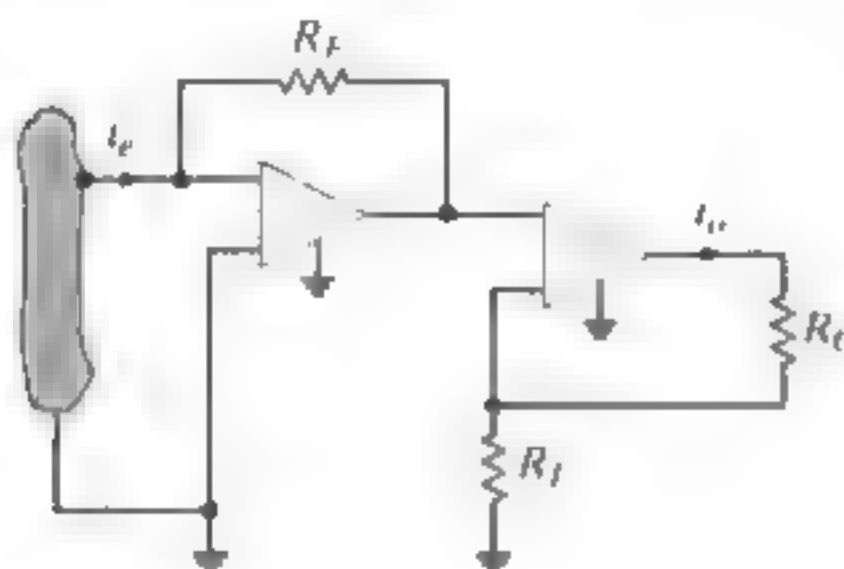


Figura P4.38

- 4.39 Determine a tensão V_o do circuito mostrado na Fig. P4.39.

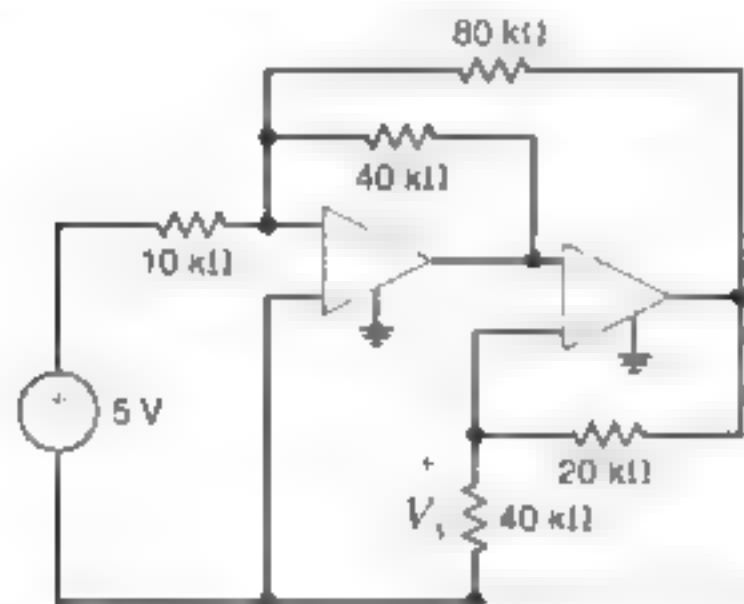


Figura P4.39

- 4.40 Determine a tensão v_o do circuito mostrado na Fig. P4.40.

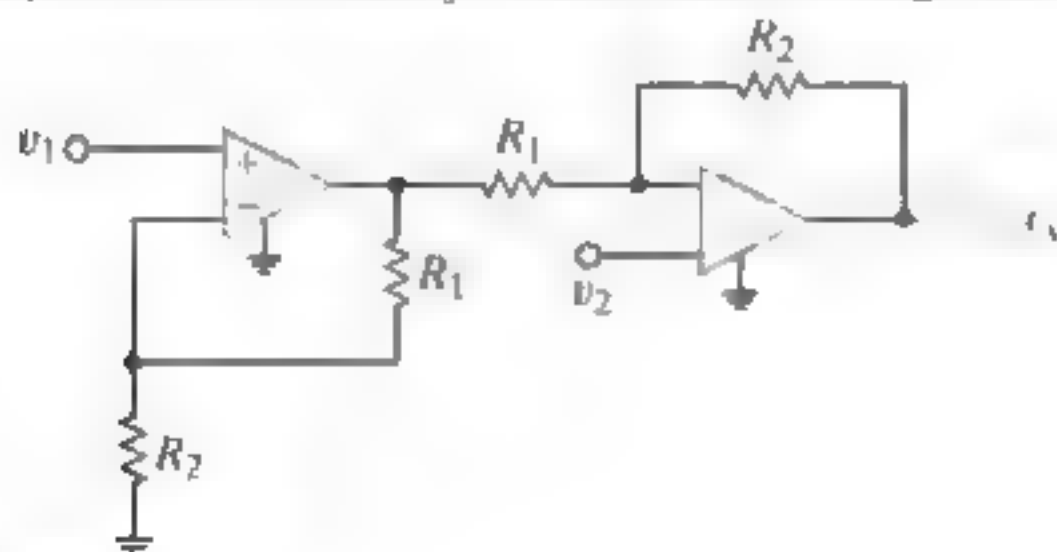


Figura P4.40

- 4.41 Determine uma expressão para a tensão v_o do circuito amplificador diferencial mostrado na Fig. P4.41.

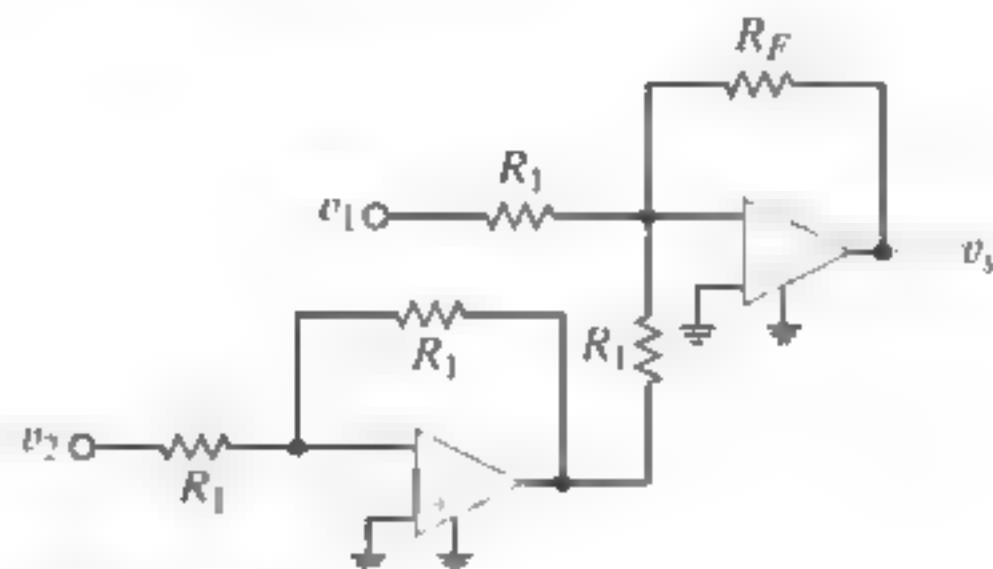


Figura P4.41

- 4.42 Determine a tensão v_o do circuito mostrado na Fig. P4.42.

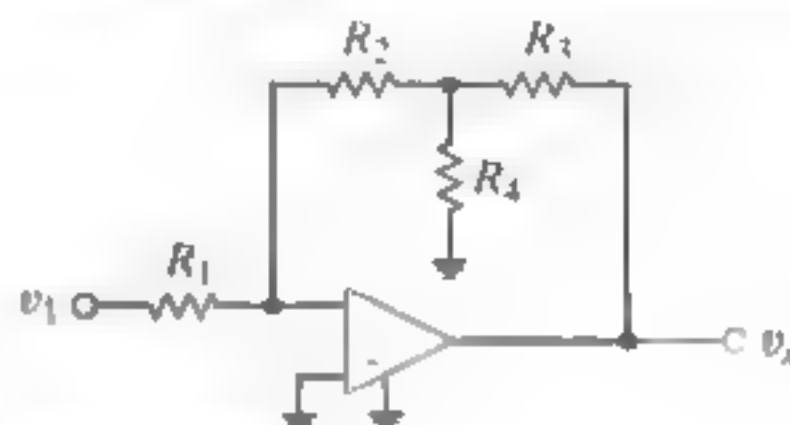


Figura P4.42

- 4.43 Determine a tensão de saída, v_o , do circuito mostrado na Fig. P4.43.

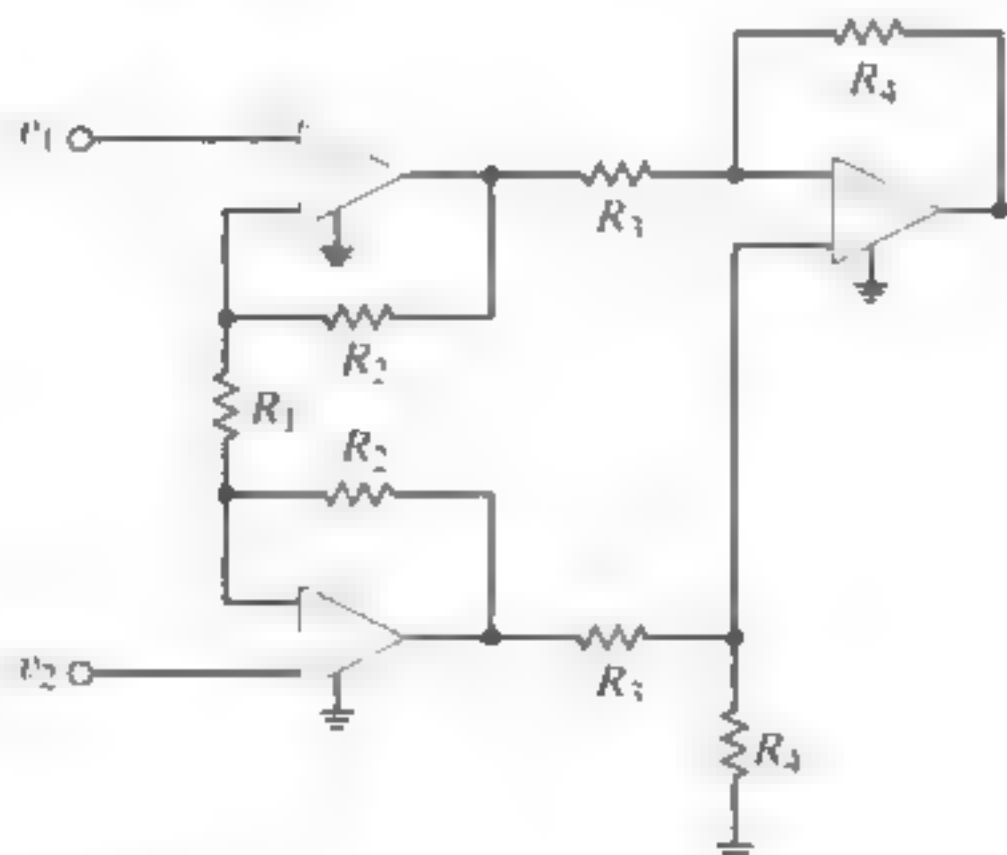


Figura P4.43

- 4.44** O amperímetro eletrônico do Exemplo 4.9 foi modificado e é mostrado na Fig. P4.44. A chave seletora permite ao usuário alterar a faixa do indicador de tensão. Utilizando os valores de R_1 e R_2 do Exemplo 4.9, determine os valores de R_A e R_B que fornecerão uma saída de 10 V quando a corrente medida é de 100 mA e 10 mA, respectivamente.

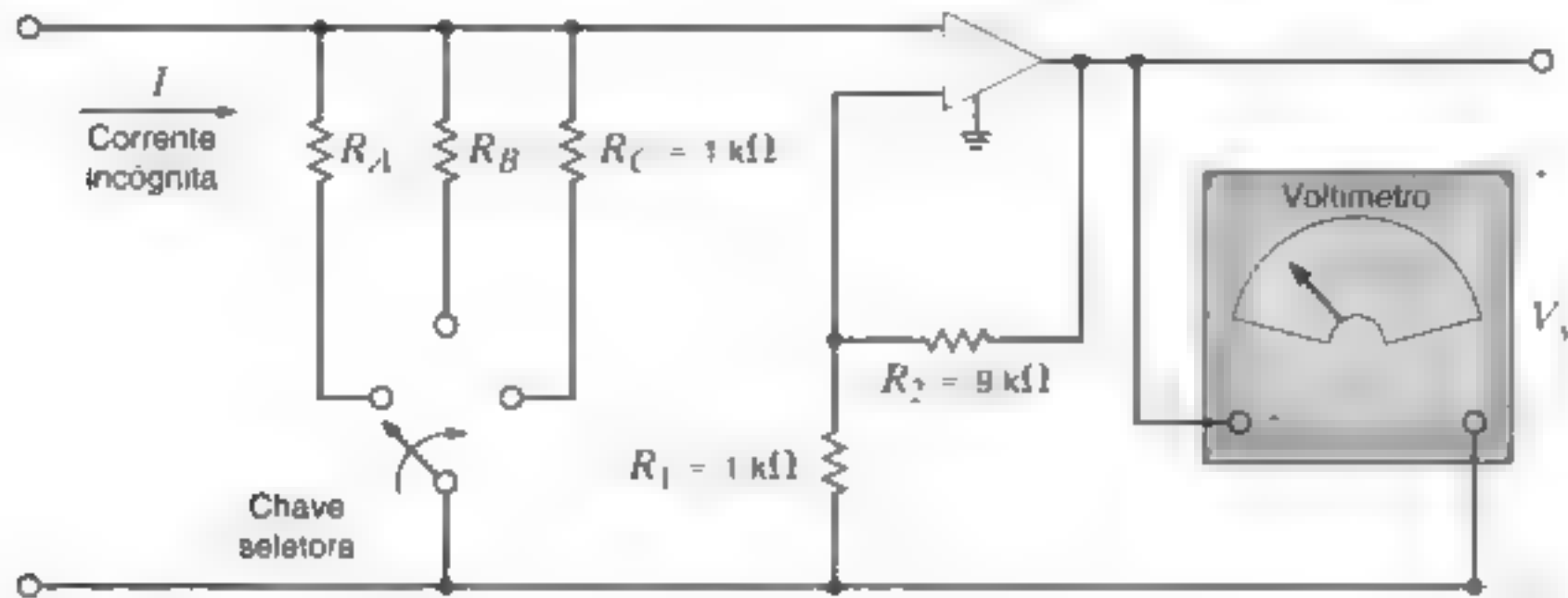


Figura P4.44

- 4.45** Dada uma caixa de resistores de 10 kΩ e um op-amp, projete um circuito que possua uma tensão de saída de
- $$V_o = -2 V_1 - 4 V_2$$
- 4.46** Projete um circuito com op-amp que possua um ganho de -50 utilizando resistores não inferiores a 1 kΩ.
- 4.47** Projete uma rede de op-amps de dois estágios que possua um ganho de -50.000 enquanto não flui qualquer corrente em seus terminais de entrada. Não utilize resistores inferiores a 1 kΩ.
- 4.48** Projete um circuito com op-amp que possua a seguinte relação saída/entrada.
- $$V_o = -5 V_1 - 0,5 V_2$$
- 4.49** Um sinal de tensão com valor máximo de 200 mV deve ser amplificado até um máximo de 10 V e invertido. Todavia, o circuito que produz o sinal não pode gerar uma corrente superior a 100 μA. Projete um amplificador com essas características.
- 4.50** Necessita-se de um amplificador com ganho de $\pi \pm 1\%$. Utilizando os valores dos resistores da Tabela 4.1, projete o amplificador. Utilize a menor quantidade de resistores possível.
- 4.51** Projete um circuito com op-amp para produzir a função
- $$V_o = 5 V_1 - 4 V_2$$
- 4.52** Projete um circuito com op-amp para produzir a função
- $$V_o = 5 V_1 - 7 V_2$$
- 4.53** Mostre que o circuito mostrado na Fig. P4.53 somente poderá produzir a saída
- $$V_o = K_1 V_1 - K_2 V_2$$
- se $0 \leq K_1 \leq K_2 + 1$.

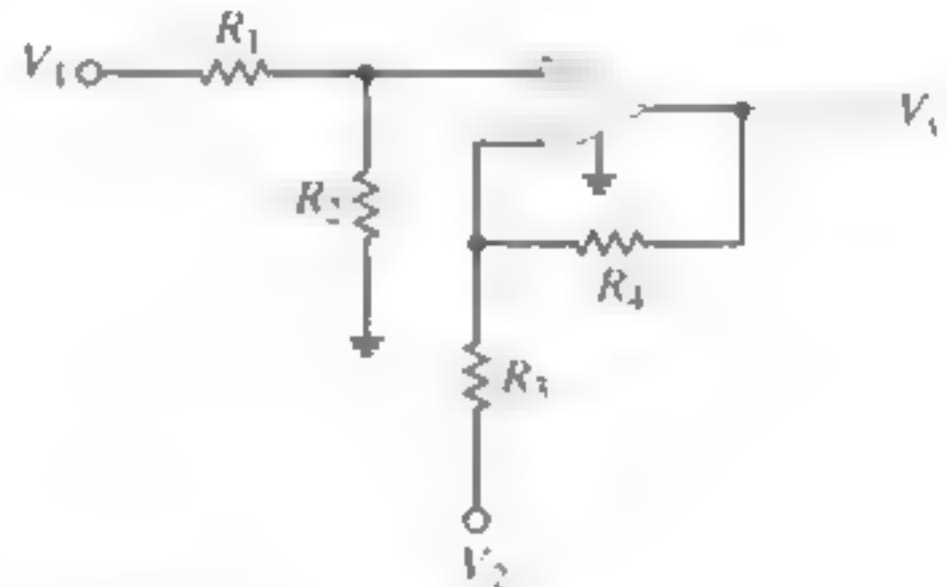


Figura P4.53

PROBLEMAS TÍPICOS DE EXAMES PROFISSIONAIS DE ENGENHARIA

- 4PEP-1** Dado o amplificador somador mostrado na Fig. 4PEP-1, selecione os valores de R_2 que produzirão uma tensão de saída de -3 V
- 4,42 kΩ
 - 6,33 kΩ
 - 3,6 kΩ
 - 5,14 kΩ

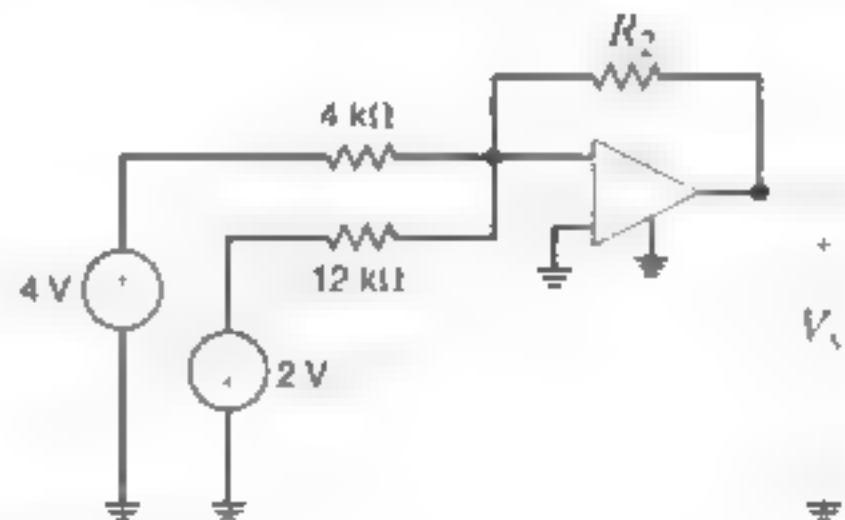


Figura P4PEP-1

4PEP-2 Determine a tensão de saída V_s do circuito somador com op-amp mostrado na Fig. 4PEP-2.

- a. 6 V b. 18 V
c. 9 V d. 10 V

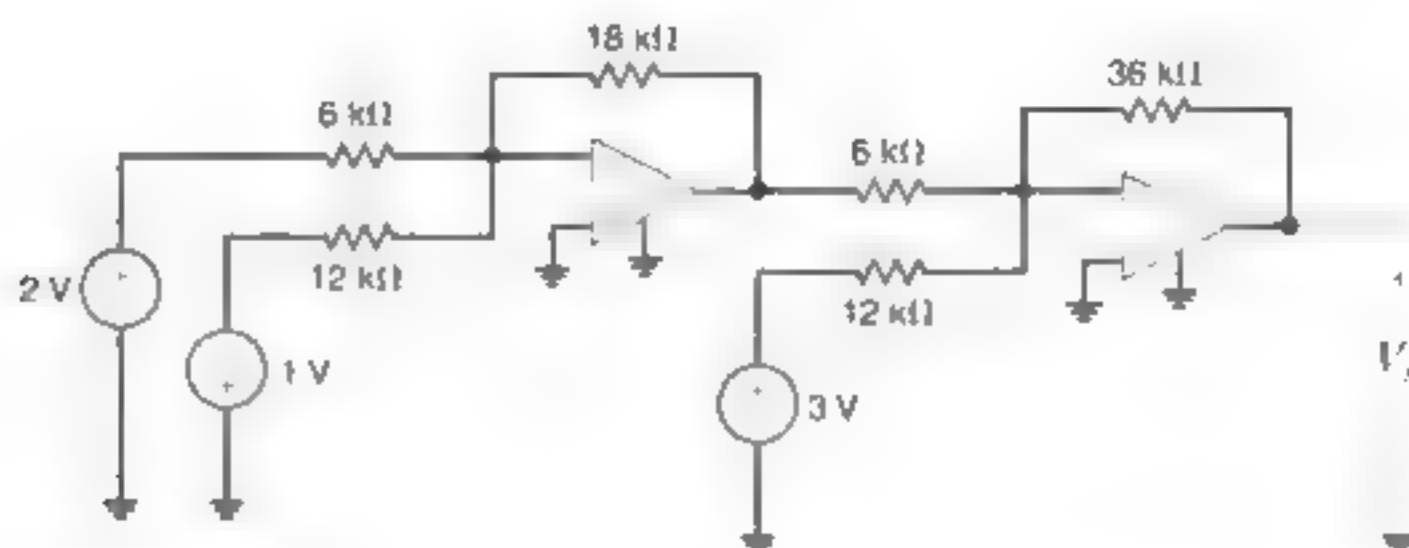


Figura P4PEP-2

4PEP-3 Qual é o valor da tensão de saída V_s do circuito mostrado na Fig. 4PEP-3?

- a. -5 V b. 6 V
c. 4 V d. -7 V

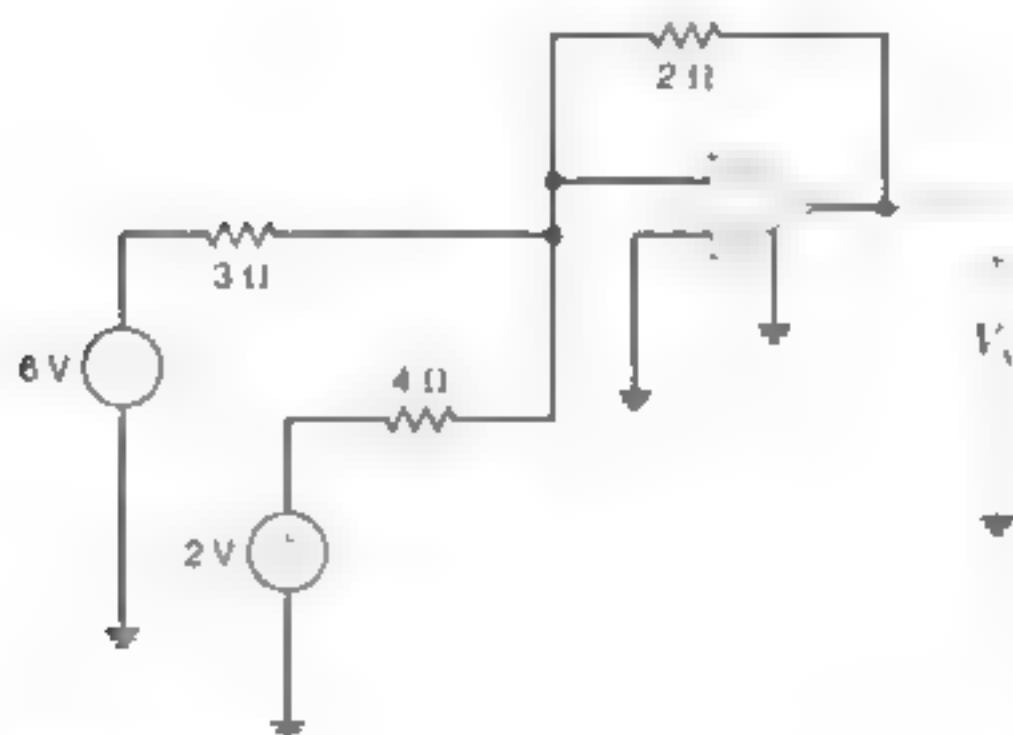


Figura P4PEP-3

4PEP-4 Qual é o valor necessário para o resistor R_f do circuito com op-amp mostrado na Fig. 4PEP-4, de modo que este produza um ganho em tensão de 50?

- a. 135 kΩ b. 210 kΩ
c. 180 kΩ d. 245 kΩ

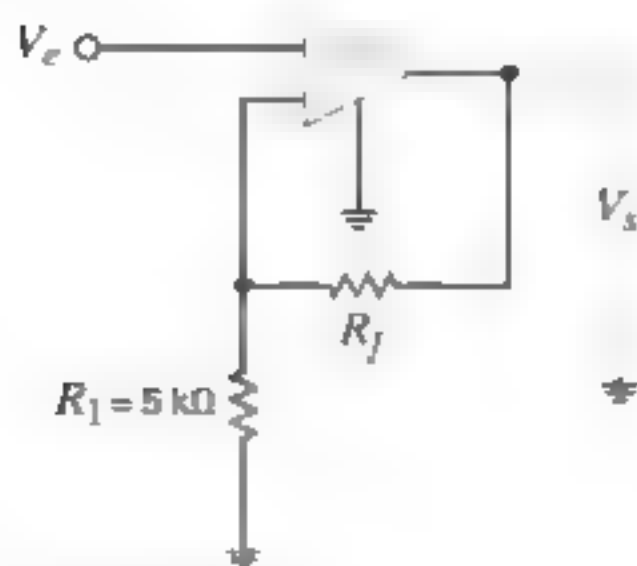


Figura P4PEP-4

4PEP-5 Qual é o valor da tensão V_s do circuito mostrado na Fig. 4PEP-5?

- a. 3 V b. 6 V
c. 8 V d. 5 V

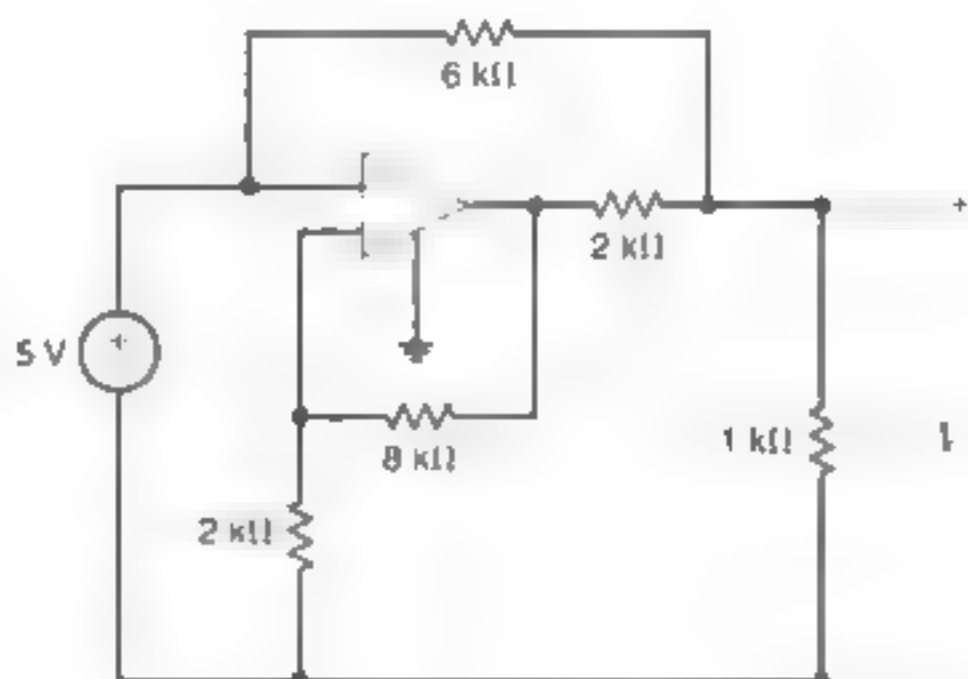


Figura P4PEP-5

TÉCNICAS ADICIONAIS DE ANÁLISE



Cortesia da egdigital/iStockphoto

AS METAS DE APRENDIZAGEM DESTE CAPÍTULO SÃO:

- Compreender os conceitos de linearidade e equivalência
- Saber como analisar os circuitos elétricos utilizando o princípio da superposição
- Ser capaz de calcular o circuito equivalente de Thévenin para um circuito linear
- Ser capaz de calcular o circuito equivalente de Norton para um circuito linear
- Compreender quando e como utilizar uma transformação de fonte
- Ser capaz de utilizar o teorema da transferência de potência máxima

Dispositivo de Monitoração Os dispositivos que monitoram o fluxo do tráfego nas rodovias interestaduais ajudam a reduzir o congestionamento nas proximidades das cidades. Com o objetivo de melhorar o controle do tráfego, os dispositivos de monitoração capturam a velocidade de seu veículo durante sua aproximação, avisam a você quando trafega acima do limite permitido e o convencem a diminuir a velocidade. Esses dispositivos são úteis nas regiões de construção onde são requeridas velocidades reduzidas para proteger os operários.

Os circuitos elétricos possuem ferramentas similares: dispositivos de monitoração de corrente detectam correntes excessivas e desconectam componentes que serão danificados se os limites de potência forem excedidos. Esses interruptores de circuito uti-

lizados em residências ou prédios de escritórios possuem características de corte que podem ser restabelecidas para recompor as operações.

A medição e a regulação do fluxo de corrente em um circuito são tão importantes quanto se assegurar de que o tráfego flua livremente. Neste capítulo, será utilizado o conceito de superposição no cálculo das correntes que fluem em um circuito elétrico devido a múltiplas fontes. Um circuito equivalente simples será formado com as partes do circuito que permanecem fixas, permitindo uma concentração apenas nos componentes a serem alterados para diferentes condições de operação. Uma vez dominados esses conceitos, você estará melhor preparado para projetar circuitos que mantêm a corrente fluindo sob limites permitidos.

5.1 Introdução

Antes de as técnicas adicionais de análise serem apresentadas, faz-se uma revisão de alguns dos tópicos que foram utilizados explícita ou implicitamente nos procedimentos anteriores.

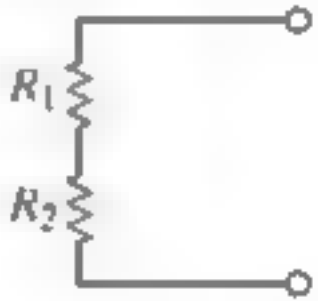
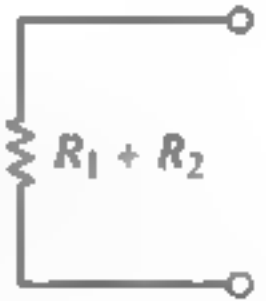
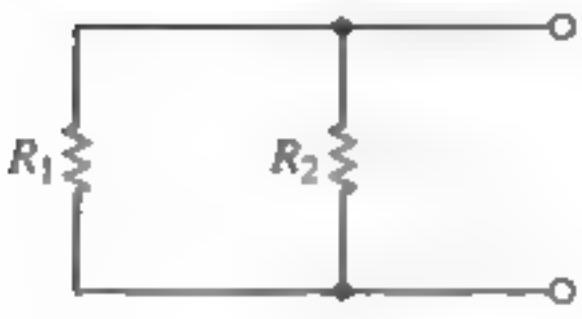
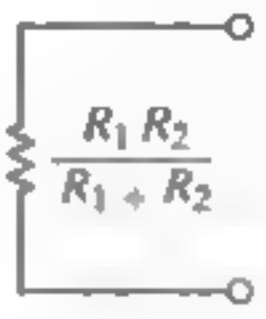
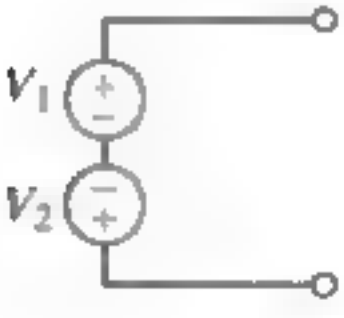
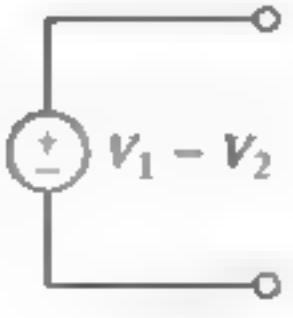
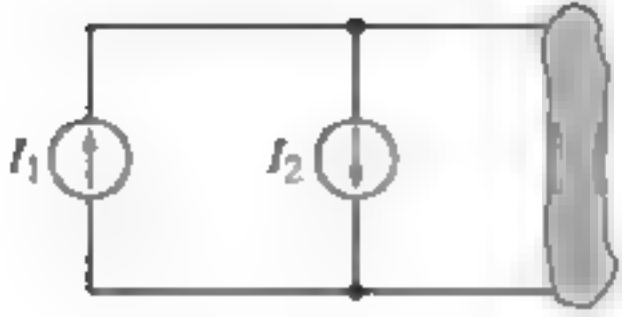
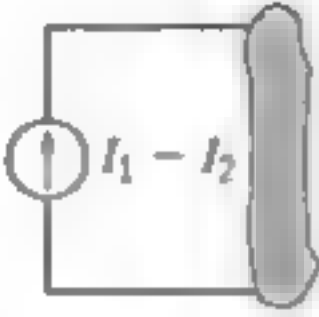
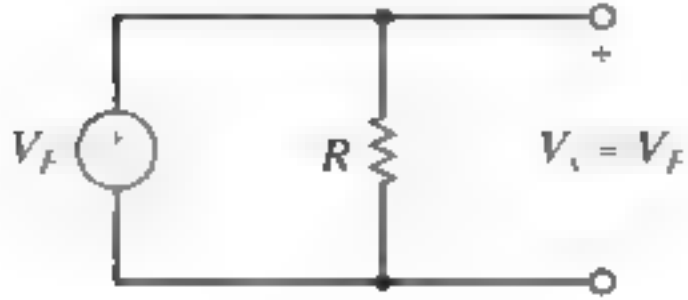
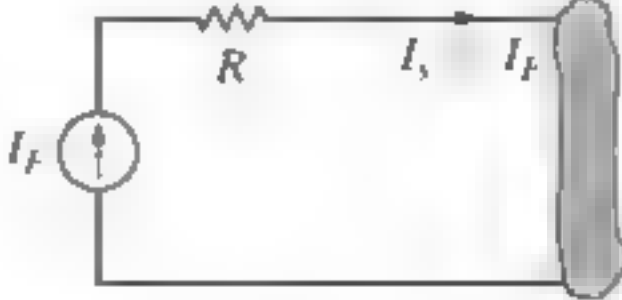
EQUIVALÊNCIA A Tabela 5.1 apresenta um breve resumo de alguns dos circuitos equivalentes que têm sido empregados nas análises aqui apresentadas. Esse conjunto de circuitos constitui-se em uma rápida revisão e serve como fonte de consulta ao iniciar-se a discussão sobre outras técnicas que podem ser utilizadas para se obter uma tensão ou uma corrente específica em algum ponto de uma rede, além de oferecer uma melhor compreensão do funcionamento da rede. De forma complementar às configurações mostradas na tabela, é importante notar que uma

conexão em série de fontes de corrente ou uma conexão em paralelo de fontes de tensão são proibitivas, a menos que as fontes estejam orientadas no mesmo sentido e possuam exatamente os mesmos valores.

LINEARIDADE Todos os circuitos analisados até agora foram circuitos lineares, os quais são descritos por um conjunto de equações algébricas lineares. Muitos dos circuitos que serão analisados no restante deste livro também serão lineares e, em qualquer caso em que o circuito não seja linear, ele será identificado especificamente como tal.

A linearidade requer o atendimento às propriedades de adição e homogeneidade. Pode-se mostrar que os circuitos que estão sendo analisados satisfazem a essa importante propriedade. O exemplo a seguir ilustra uma das formas pela qual essa propriedade pode ser utilizada.

TABELA 5.1 Formas de circuitos equivalentes

	\rightarrow	
	\rightarrow	
	\rightarrow	
	\rightarrow	
		

EXEMPLO 5.1

Deseja-se determinar a tensão de saída $V_{\text{saída}}$ do circuito mostrado na Fig. 5.1. Todavia, em vez de se abordar o problema de forma direta e calcular as correntes I_0, I_1, I_2 , e assim por diante, utilizar-se-á a linearidade e simplesmente será admitido que a tensão de saída seja $V_{\text{saída}} = 1 \text{ V}$. Essa hipótese fornecerá um valor para a fonte de tensão. Em seguida, será utilizado o valor real da fonte de tensão e a propriedade de linearidade para se calcular o valor real da tensão $V_{\text{saída}}$.

SOLUÇÃO

Admitindo que $V_{\text{saída}} = V_2 = 1 \text{ V}$, tem-se

$$I_2 = \frac{V_2}{2 \text{ k}\Omega} = 0,5 \text{ mA}$$

A tensão V_1 pode então ser calculada como

$$\begin{aligned} V_1 &= 4 \text{ k}\Omega I_2 + V_2 \\ &= 3 \text{ V} \end{aligned}$$

Logo,

$$I_1 = \frac{V_1}{3 \text{ k}\Omega} = 1 \text{ mA}$$

Aplicando, agora, a LKC, obtém-se

$$I_0 = I_1 + I_2 = 1,5 \text{ mA}$$

Assim,

$$V_0 = 2 \text{ k}\Omega I_0 + V_1 = 6 \text{ V}$$

Portanto, a hipótese de $V_{\text{saída}} = 1 \text{ V}$ gerou uma fonte de tensão 6 V. Entretanto, uma vez que a fonte de tensão real é de 12 V, a tensão de saída real será igual a $1 \text{ V} (12/6) = 2 \text{ V}$.

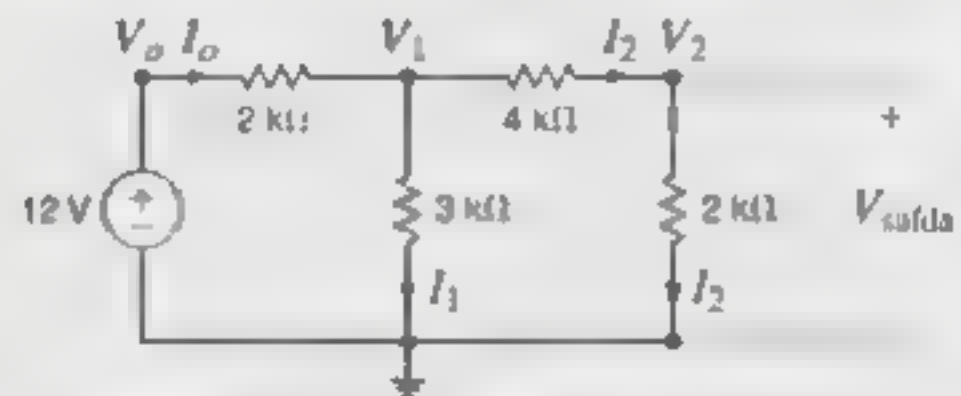


Figura 5.1 Circuito utilizado no Exemplo 5.1.

Avaliação do Aprendizado

E5.1 Utilize a propriedade de linearidade e a hipótese de que $I_1 = 1 \text{ mA}$ para calcular o valor real da corrente I_1 do circuito mostrado na Fig. E5.1, considerando que a corrente da fonte seja $I = 6 \text{ mA}$.

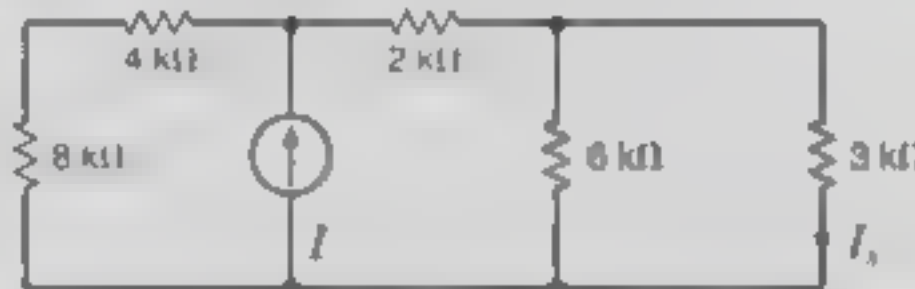


Figura E5.1

RESPOSTA: $I_1 = 3 \text{ mA}$.

E5.2 Determine a tensão V_1 do circuito mostrado na Fig. E5.2 utilizando a linearidade e a hipótese de que $V_1 = 1 \text{ V}$.

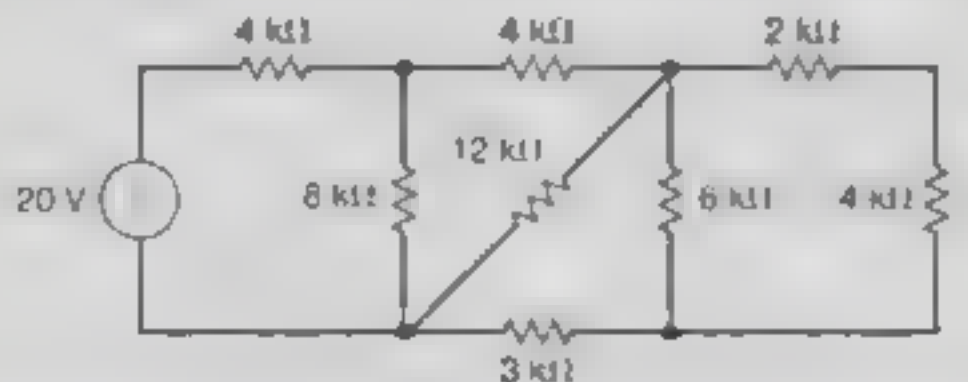


Figura E5.2

RESPOSTA: $V_1 = 5/3 \text{ V}$.

5.2 Superposição

EXEMPLO 5.2

De modo a propiciar uma motivação ao estudo desse assunto, considere o circuito simples mostrado na Fig. 5.2a no qual duas fontes contribuem para a corrente que passa pela rede. Os valores reais das fontes não são especificados, de modo a permitir a análise do conceito de superposição.

SOLUÇÃO

As equações das malhas para essa rede podem ser escritas como

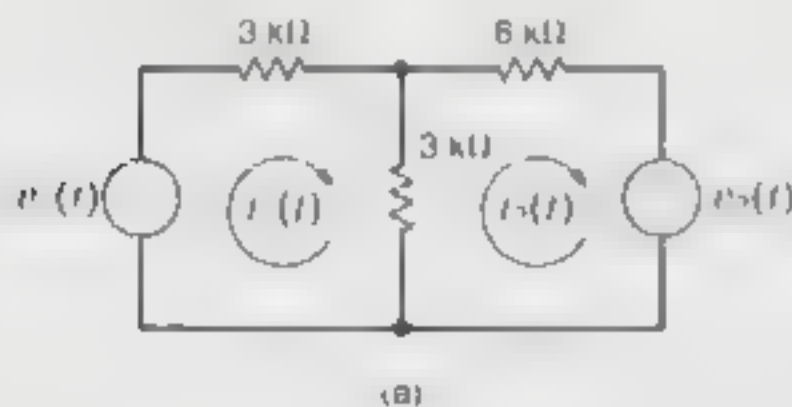
$$\begin{aligned} 6k_1(r) - 3k_2(r) &= v_1(r) \\ -3k_1(r) + 9k_2(r) &= -v_2(r) \end{aligned}$$

A solução dessas equações para $i_1(t)$ fornece

$$i_1(t) = \frac{v_1(t)}{5k} - \frac{v_2(t)}{15k}$$

Em outras palavras, a corrente $i_1(t)$ possui uma componente devida a $v_1(t)$ e uma componente devida a $v_2(t)$. Tendo em vista que $i_1(t)$ possui duas componentes, uma devida a cada fonte independente, seria interessante examinar como cada fonte, atuando isoladamente, contribuiria para $i_1(t)$. Para a fonte $v_1(t)$ atuando isoladamente, $v_2(t)$ deve ser nula. Conforme destacado no Capítulo 2, $v_2(t) = 0$ significa que a fonte $v_2(t)$ é substituída por um curto-circuito. Portanto, para se determinar o valor da corrente $i_1(t)$ devido apenas a $v_1(t)$, utiliza-se o circuito mostrado na Fig. 5.2b e representa-se esse valor de $i_1(t)$ como $i_1'(t)$.

$$i_1'(t) = \frac{v_1(t)}{3k + \frac{(3k)(6k)}{3k + 6k}} = \frac{v_1(t)}{5k}$$



Pode-se agora determinar o valor de $i_1(t)$ devido a $v_2(t)$ atuando isoladamente e representar esse valor como $i_1''(t)$. Utilizando a rede mostrada na Fig. 5.2c, tem-se

$$i_1''(t) = \frac{v_1(t)}{6k + \frac{(3k)(3k)}{3k + 3k}} - \frac{2v_2(t)}{15k}$$

Em seguida, utilizando a divisão de corrente, obtém-se

$$i_1''(t) = \frac{-2v_2(t)}{15k} \left(\frac{3k}{3k + 3k} \right) = -\frac{v_2(t)}{15k}$$

Agora, ao se somar os valores de $i_1'(t)$ e $i_1''(t)$ obtém-se o valor calculado diretamente; isto é,

$$i_1(t) = i_1'(t) + i_1''(t) = \frac{v_1(t)}{5k} - \frac{v_2(t)}{15k}$$

Note que o valor de $i_1'(t)$ foi *superposto* ao valor de $i_1''(t)$ ou vice-versa, para se determinar a corrente incógnita.

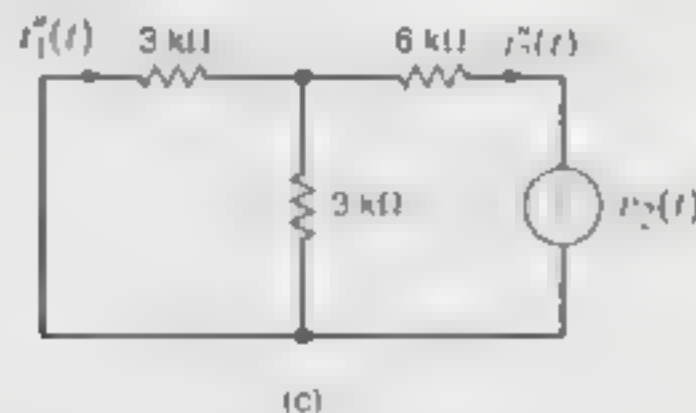
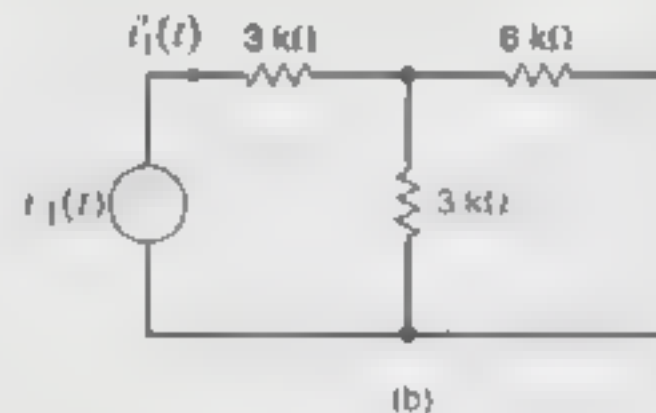


Figura 5.2 Circuito utilizado para ilustrar o princípio da superposição.

O que foi demonstrado no Exemplo 5.2 é verdadeiro em geral para circuitos lineares e é um resultado direto da propriedade de linearidade. O *princípio da superposição*, que permite a redução de um problema complexo a diversos problemas mais simples — cada um contendo apenas uma única fonte independente — estabelece que

Em qualquer circuito linear que contenha múltiplas fontes independentes, a corrente ou a tensão em qualquer ponto da rede pode ser calculada como a soma algébrica das contribuições individuais de cada fonte atuando isoladamente.

Ao se determinar a contribuição devida a uma fonte independente, quaisquer fontes de tensão remanescentes são consideradas nulas, sendo substituídas por curtos-circuitos, e quaisquer fontes de corrente remanescentes são consideradas nulas, sendo substituídas por circuitos abertos.

Embora a superposição possa ser utilizada em redes lineares que contenham fontes dependentes, ela não será útil nesse caso, uma vez que as fontes dependentes nunca podem ser consideradas nulas.

Conforme verificado no exemplo anterior, ao se utilizar a superposição na determinação da contribuição de cada fonte na variável sob investigação tem-se uma melhor compreensão do funcionamento do circuito.

A superposição será demonstrada agora por meio de dois exemplos e, em seguida, apresenta-se uma estratégia para solução de problemas utilizando-se essa técnica. Para efeito de comparação, a rede será também resolvida utilizando-se a análise nodal e dos laços. Além disso, essas mesmas redes serão utilizadas como exemplo para ilustrar o emprego de outras técnicas a serem apresentadas posteriormente.

EXEMPLO 5.3

Seja o emprego do método da superposição na obtenção da tensão V_x do circuito mostrado na Fig. 5.3a.

SOLUÇÃO

A contribuição da fonte de 2 mA na tensão de saída é obtida a partir da rede mostrada na Fig. 5.3b, utilizando a divisão de corrente, isto é,

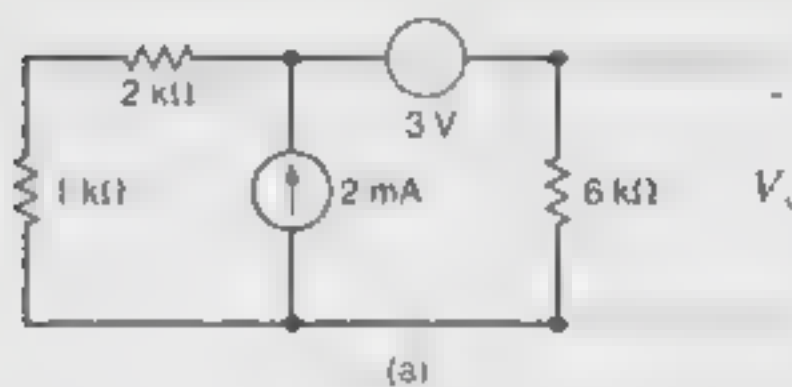
$$I_1 = (2 \times 10^{-3}) \left(\frac{1\text{k} + 2\text{k}}{1\text{k} + 2\text{k} + 6\text{k}} \right) = \frac{2}{3} \text{ mA}$$

e

$$V_1 = I_1(6\text{k}) = 4 \text{ V}$$

A contribuição da fonte de 3 V na tensão de saída é obtida a partir do circuito mostrado na Fig. 5.3c. Utilizando a divisão de tensão, tem-se

$$V_2 = 3 \left(\frac{6\text{k}}{1\text{k} + 2\text{k} + 6\text{k}} \right) = 2 \text{ V}$$



Portanto,

$$V_x = V_1 + V_2 = 6 \text{ V}$$

Embora se tenha utilizado dois circuitos em separado para resolver o problema, pode-se perceber que ambos são muito simples.

A utilização da análise nodal e do circuito original mostrado na Fig. 5.3a para a obtenção da tensão V_x , e reconhecendo que a fonte de 3 V e seus nós de conexão formam um supernó, a tensão V_x pode ser determinada pela equação nodal

$$\frac{V_x - 3}{1\text{k} + 2\text{k}} + 2 \times 10^{-3} + \frac{V_x}{6\text{k}} = 0$$

a qual fornece $V_x = 6 \text{ V}$. A análise dos laços aplicada conforme mostrado na Fig. 5.3d também conduz às equações

$$I_1 = -2 \times 10^{-3}$$

e

$$3\text{k}I_1 + I_2 - 3 = 6\text{k}I_2 = 0$$

as quais fornecem $I_2 = 1 \text{ mA}$ e, portanto, $V_x = 6 \text{ V}$.

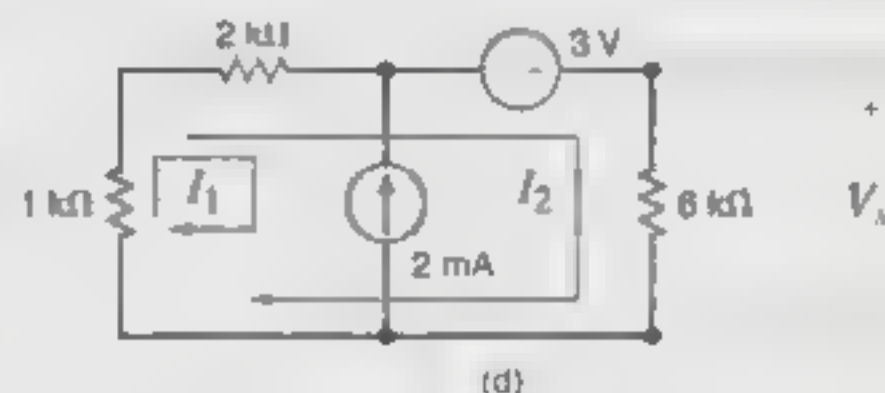
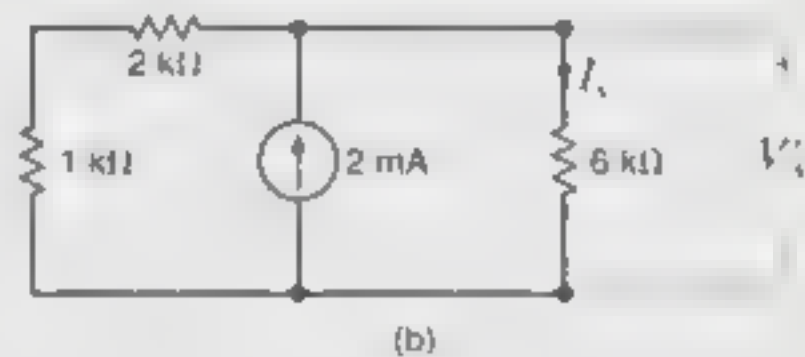
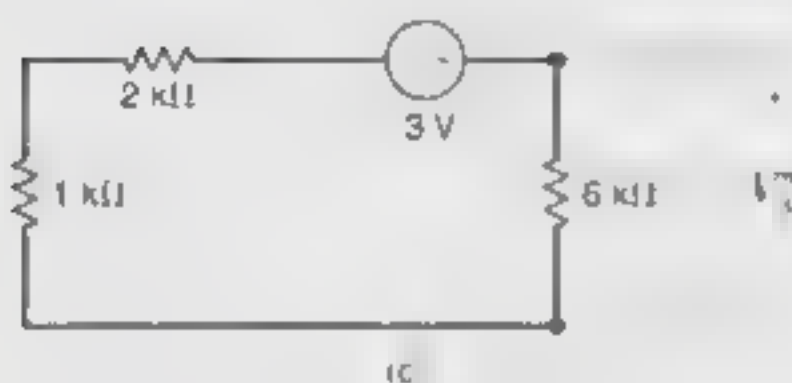


Figura 5.3 Circuito utilizado no Exemplo 5.3.

EXEMPLO 5.4

Considere agora a rede mostrada na Fig. 5.4a. Seja o uso do conceito de superposição na obtenção da tensão V_x .

SOLUÇÃO

A contribuição da fonte de 6 V na tensão V_x é obtida pela rede mostrada na Fig. 5.4b, que é redesenhada na Fig. 5.4c. O resis-

tor de $2\text{k}\Omega + 6\text{k}\Omega = 8\text{k}\Omega$ e o resistor de $4\text{k}\Omega$ estão em paralelo, portanto, sua combinação fornece um resistor equivalente de $8/3\text{k}\Omega$. Assim, utilizando a divisão de tensão, tem-se

$$V_1 = 6 \left(\frac{8/3\text{k}}{8/3\text{k} + 2\text{k}} \right) = \frac{24}{7} \text{ V}$$

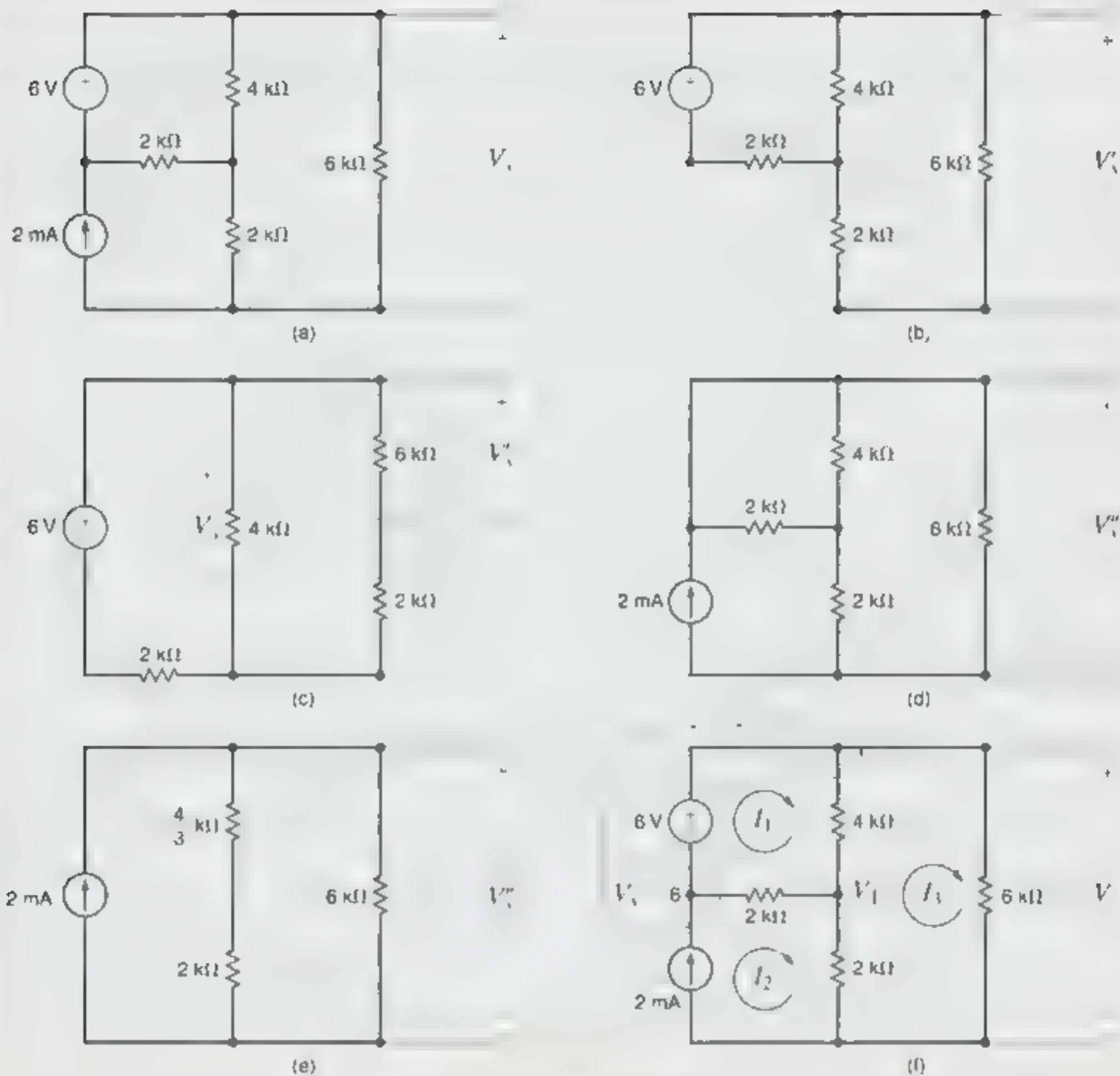


Figura 5.4 Circuito utilizado no Exemplo 5.4.

Aplicando novamente a divisão de tensão, obtém-se

$$V'_s = V_1 \left(\frac{6k}{6k + 2k} \right) = \frac{18}{7} \text{ V}$$

A contribuição da fonte de 2 mA é obtida pela análise do circuito mostrado na Fig. 5.4d, que é redesenhado na Fig. 5.4e. A tensão V''_s é simplesmente igual ao produto da corrente da fonte pela combinação em paralelo dos resistores; isto é,

$$V''_s = (2 \times 10^{-3}) \left(\frac{10}{3} k / 6k \right) = \frac{30}{7} \text{ V}$$

Portanto,

$$V_s = V'_s + V''_s = \frac{48}{7} \text{ V}$$

Pode-se realizar uma análise nodal da rede utilizando a Fig. 5.4f. A equação para o supernó fica

$$-2 \times 10^{-3} + \frac{(V_s - 6) - V_1}{2k} + \frac{V_1 - V_2}{4k} + \frac{V_2}{6k} = 0$$

A equação para o nó cuja tensão é V_1 pode ser expressa por

$$\frac{V_1 - V_s}{4k} + \frac{V_1 - (V_2 - 6)}{2k} + \frac{V_1}{2k} = 0$$

A solução dessas duas equações, que já incorporam a equação de restrição do supernó, fornece $V_s = 48/7 \text{ V}$.

Novamente, em relação à rede mostrada na Fig. 5.4f, as equações das malhas dessa rede são

$$\begin{aligned} -6 + 4k(I_1 - I_2) + 2k(I_1 - I_3) &= 0 \\ I_1 &= 2 \times 10^{-3} \\ 2k(I_2 - I_1) + 4k(I_2 - I_1) + 6kI_2 &= 0 \end{aligned}$$

Resolvendo-se essas equações, obtém-se $I_3 = 8/7 \text{ mA}$ e, assim, $V_s = 48/7 \text{ V}$.

EXEMPLO 5.5

Demonstra-se, agora, a importância da técnica de superposição na análise de circuitos com op-amps, determinando a relação saída/entrada da configuração de op-amps mostrada na Fig. 5.5a.

SOLUÇÃO

A contribuição de V_1 à saída V_o é deduzida com base na rede mostrada na Fig. 5.5b, em que V_2 é tomada nula. Esse circuito representa uma configuração básica de ganho invertido e

$$\frac{V_o}{V_1} = -\frac{R_2}{R}$$

A contribuição devida a V_2 é mostrada na Fig. 5.5c, em que V_1 é tornada nula. Esse circuito representa uma configuração básica não invertida e

$$\frac{V_o}{V_2} = 1 + \frac{R_2}{R_1}$$

Portanto, utilizando a superposição, tem-se

$$V_o = \left[1 + \frac{R_2}{R_1} \right] V_2 - \left[\frac{R_2}{R} \right] V_1$$

Assim, nesse caso, foi empregado o que se aprendeu no Capítulo 4, via superposição, para deduzir rapidamente a relação saída/entrada para o circuito mostrado na Fig. 5.5a.

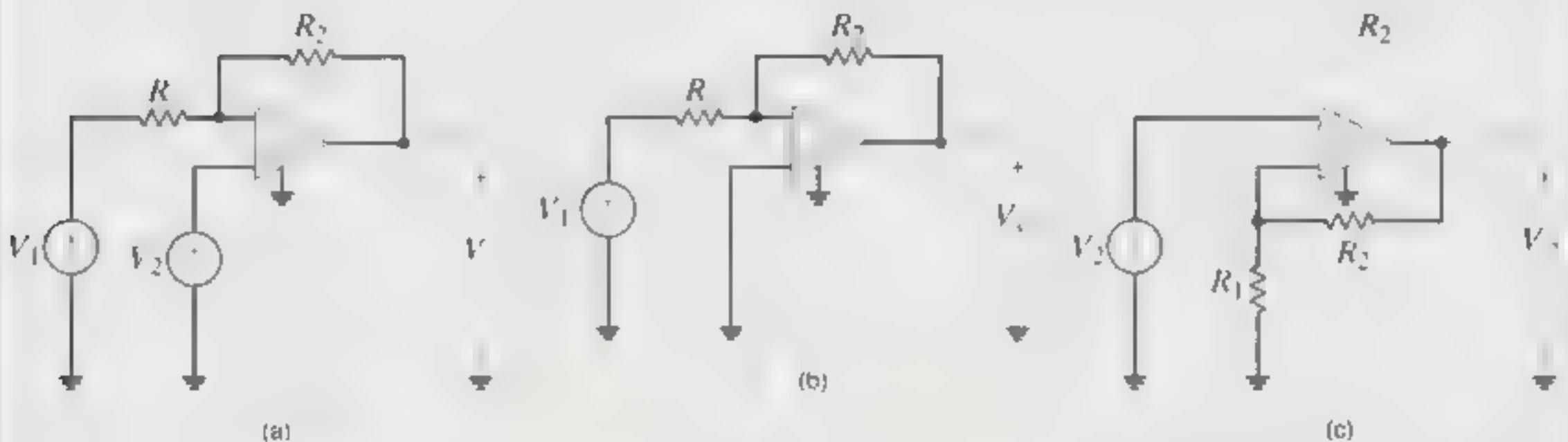


Figura 5.5 (a) Circuito utilizado no exemplo de aplicação da superposição; (b) circuito com a tensão V_2 estabelecida como zero; (c) circuito com a tensão V_1 estabelecida como zero.

Estratégia para Solução de Problemas

Aplicação da Técnica de Superposição

- Etapas 1.** Em uma rede que contenha múltiplas fontes independentes, cada fonte pode ser aplicada independentemente, mantendo-se as fontes remanescentes desativadas.
- Etapas 2.** Ao se desativar uma fonte de tensão, esta deve ser substituída por um curto-circuito e, para se desativar uma fonte de corrente, deve-se substituí-la por um circuito aberto.

- Etapas 3.** Ao se considerar as fontes atuando individualmente no circuito, todas as leis relacionadas ao circuito e às técnicas até então aprendidas, ou que serão aprendidas posteriormente, podem ser aplicadas para se obter a solução do problema.
- Etapas 4.** Os resultados obtidos pela consideração de cada fonte atuante independentemente são somados algebricamente para se obter a solução final.

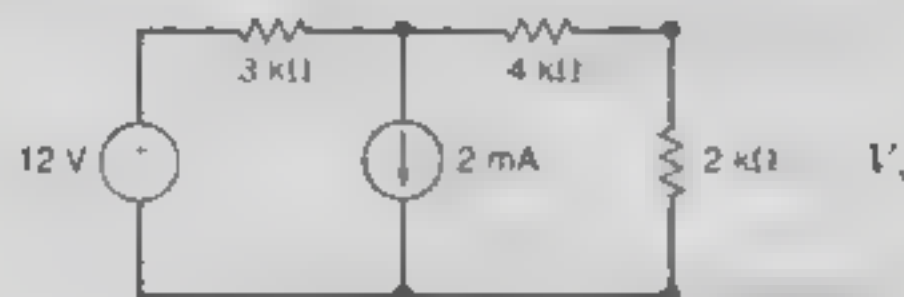
A superposição pode ser aplicada a circuitos com qualquer número de fontes dependentes e independentes. Na realidade, a superposição pode ser aplicada a uma rede das mais variadas formas. Por exemplo, um circuito com três fontes independentes pode ser resolvido utilizando-se cada fonte atuante isoladamente, conforme foi mostrado, ou poderiam ser utilizadas inicialmente duas fontes e o resultado somado com o obtido pela terceira fonte atuante isoladamente. Além disso, as fontes independentes não precisam assumir seus valores reais ou o va-

lor nulo. Entretanto, é imprescindível que a soma dos diferentes valores escolhidos seja adicionada ao valor total da fonte.

A superposição é uma propriedade fundamental das equações lineares e, portanto, pode ser aplicada a qualquer efeito que seja linearmente relacionado à sua causa. Desse ponto de vista, é importante ressaltar que, embora a superposição se aplique à corrente e à tensão em um circuito linear, ela não pode ser utilizada na determinação da potência, uma vez que essa é representada por uma função não linear.

Avaliação do Aprendizado

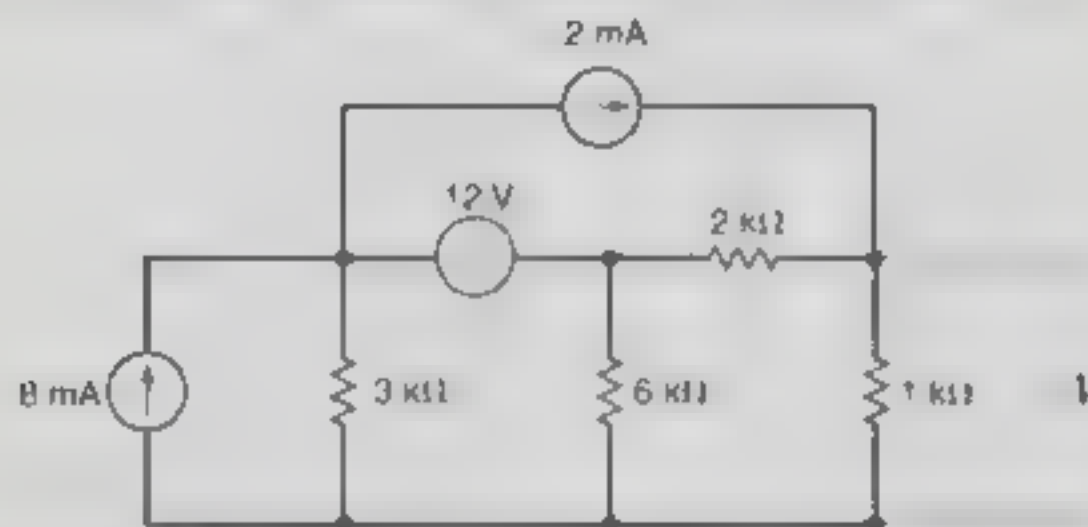
E5.3 Calcule a tensão V_x do circuito mostrado na Fig. E5.3 utilizando o conceito de superposição.



RESPOSTA: $V_x = \frac{4}{3} \text{ V}$

Figura E5.3

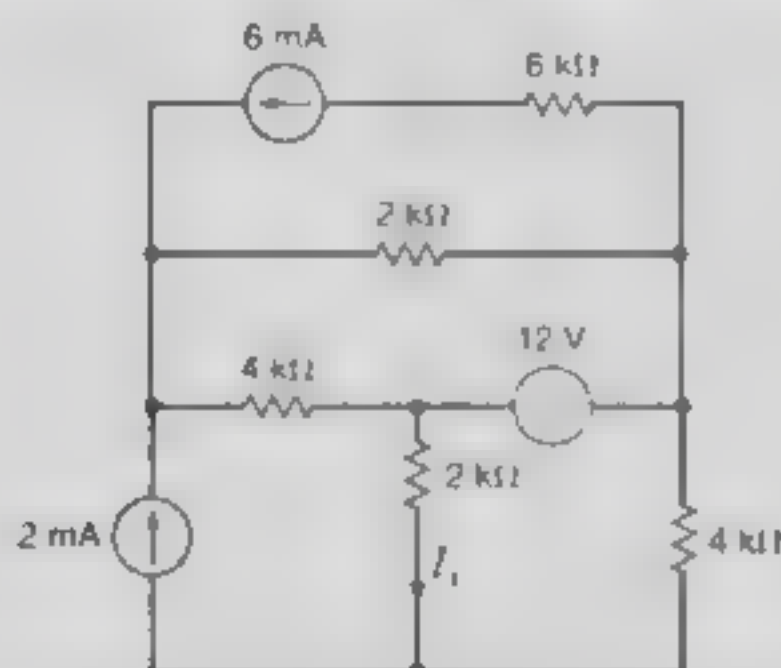
E5.4 Determine a tensão V_x do circuito mostrado na Fig. E5.4 utilizando o conceito de superposição.



RESPOSTA: $V_x = 5,6 \text{ V}$.

Figura E5.4

E5.5 Determine a corrente I_x do circuito mostrado na Fig. E5.5 utilizando o conceito de superposição.



RESPOSTA: $I_x = -\frac{2}{3} \text{ mA}$.

Figura E5.5

5.3 Teoremas de Thévenin e de Norton

Apresentamos até agora algumas técnicas para a análise de circuitos. A seguir serão acrescentados às ferramentas de análise dois teoremas, os quais, conforme será mostrado, são extremamente úteis. Os teoremas recebem o nome de seus autores M. L. Thévenin, um engenheiro francês, e E. L. Norton, um cientista que trabalhou na empresa Bell Telephone Laboratories.

Suponha que, para um dado circuito, deseja-se determinar a corrente, a tensão ou a potência fornecida a algum resistor da rede, o qual será chamado de carga. O *teorema de Thévenin* afirma que é possível substituir toda a rede, exceto a carga, por um circuito equivalente que contém apenas uma fonte de tensão independente em série com um resistor, de forma que a relação corrente-tensão na carga não seja alterada. O *teorema de Nor-*

ton é idêntico ao enunciado do teorema anterior, exceto pelo fato de o circuito equivalente ser constituído de uma fonte de corrente independente em paralelo com um resistor.

Note que esse é um resultado muito importante. Ele estabelece que, ao se examinar qualquer rede em relação a um par de terminais, é possível afirmar que, em relação àqueles terminais, a rede como um todo é equivalente a um simples circuito consistindo em uma fonte de tensão independente em série com um resistor, ou em uma fonte de corrente independente em paralelo com um resistor.

No decorrer do desenvolvimento dos teoremas, será admitido que o circuito mostrado na Fig. 5.6a possa ser dividido em duas partes, conforme mostrado na Fig. 5.6b. Em geral, o circuito *B* é a carga e pode ser linear ou não linear. O circuito *A* constitui-se da rede original exceto a carga e deve ser linear. Assim, o circuito *A* pode conter fontes independentes, fontes

dependentes e resistores, ou qualquer outro elemento linear. Todavia, é necessário que uma fonte dependente e sua variável de controle apareçam no mesmo circuito.

O circuito *A* alimenta o circuito *B* com uma corrente *i* e produz uma tensão *v_s* entre os terminais de entrada do circuito *B*. Do ponto de vista das relações nos terminais do circuito *A*, pode-se substituir o circuito *B* por uma fonte de tensão de *v_s* volts (com a polaridade apropriada), conforme mostrado na Fig. 5.6c. Como a tensão nos terminais não é alterada, e o circuito *A* permanece inalterado, a corrente *i* entre os terminais também não será alterada.

Aplicando-se agora o princípio da superposição à rede mostrada na Fig. 5.6c, a corrente total *i*, mostrada na figura, será a soma das correntes causadas por todas as fontes presentes no circuito *A* e pela fonte *v_s* que acaba de ser adicionada. Portanto, utilizando-se o conceito de superposição, a corrente *i* pode ser expressa como

$$i = i_n + i_{cc} \quad 5.1$$

em que *i_n* é a corrente devida a *v_s* com todas as fontes independentes no circuito *A* desativadas (isto é, fontes de tensão substituídas por curtos-circuitos e fontes de corrente substituídas por circuitos abertos), e *i_{cc}* é a corrente do curto-circuito devida a todas as fontes do circuito *A* com *v_s* substituída por um curto-circuito.

Os termos *i_n* e *v_s* estão relacionados pela equação

$$i_n = \frac{-v_s}{R_{Th}} \quad 5.2$$

em que *R_{Th}* é a resistência equivalente sentida pelo circuito *A* entre os terminais *A-B* com todas as fontes independentes no circuito *A* desativadas.

A substituição da Eq. (5.2) na Eq. (5.1) fornece

$$i = \frac{-v_s}{R_{Th}} + i_{cc} \quad 5.3$$

Esta é uma relação geral e, portanto, é válida para qualquer condição específica nos terminais *A-B*. Como caso particular, suponha que os terminais representem um circuito aberto. Para essa condição, *i* = 0 e *v_s* é igual à tensão *v_{ca}* do circuito aberto. Assim, a Eq. (5.3) fica

$$i = 0 = \frac{-v_{ca}}{R_{Th}} + i_{cc} \quad 5.4$$

Logo,

$$v_{ca} = R_{Th} i_{cc} \quad 5.5$$

Essa equação estabelece que a tensão do circuito aberto é igual à corrente do curto-circuito multiplicada pela resistência equivalente sentida pelo circuito *A*, com todas as fontes independentes desativadas. A resistência *R_{Th}* é chamada de resistência equivalente de Thévenin.

A substituição da Eq. (5.5) na Eq. (5.3) fornece

$$i = \frac{v_s}{R_{Th}} + \frac{v_{ca}}{R_{Th}} \quad 5.6$$

ou

$$v_s = v_{ca} - R_{Th} i \quad 5.6$$

Passamos agora a examinar os circuitos descritos por essas equações. O circuito representado pela Eq. (5.6) é mostrado na Fig. 5.7a. O fato de que esse circuito é equivalente, nos terminais *A-B*, ao circuito *A* mostrado na Fig. 5.6, é demonstrado pelo *teorema de Thévenin*. O circuito representado pela Eq. (5.3) é mostrado na Fig. 5.7b. O fato de que esse circuito é equivalente, nos terminais *A-B*, ao circuito *A* mostrado na Fig. 5.6, é demonstrado pelo *teorema de Norton*.

Uma vez demonstrado que existe uma relação entre o circuito equivalente de Thévenin e o circuito equivalente de Norton, passamos agora a aplicar esses dois importantes e úteis teoremas. A forma pela qual esses teoremas são aplicados depende da estrutura original da rede sob investigação. Por exemplo, se apenas fontes independentes estão presentes, pode-se calcular a tensão do circuito aberto ou a corrente do curto-circuito e a resistência equivalente de Thévenin. Entretanto, se fontes dependentes também estiverem presentes, a equivalência de Thévenin será determinada calculando-se a tensão *v_{ca}* e a corrente *i_{cc}*, uma vez que esse é normalmente o melhor procedimento para a determinação de *R_{Th}* em uma rede que contém fontes dependentes. Finalmente, se o circuito *A* não contém fontes independentes, então tanto a tensão *v_{ca}* quanto a corrente *i_{cc}* serão necessariamente nulas. (Por quê?) Assim, não se pode determinar *R_{Th}* como *v_{ca}/i_{cc}*, já que essa relação é indeterminada. Deve-se, portanto, procurar um outro procedimento. Note que, se *v_{ca}* = 0, então o circuito equivalente será meramente a resistência incógnita *R_{Th}*. Ao se aplicar uma fonte externa ao circuito *A* — uma fonte teste *v_s* — e determinar a corrente, *i_n*, que flui de *v_s* para o circuito *A*, então *R_{Th}* pode ser determinada a partir de

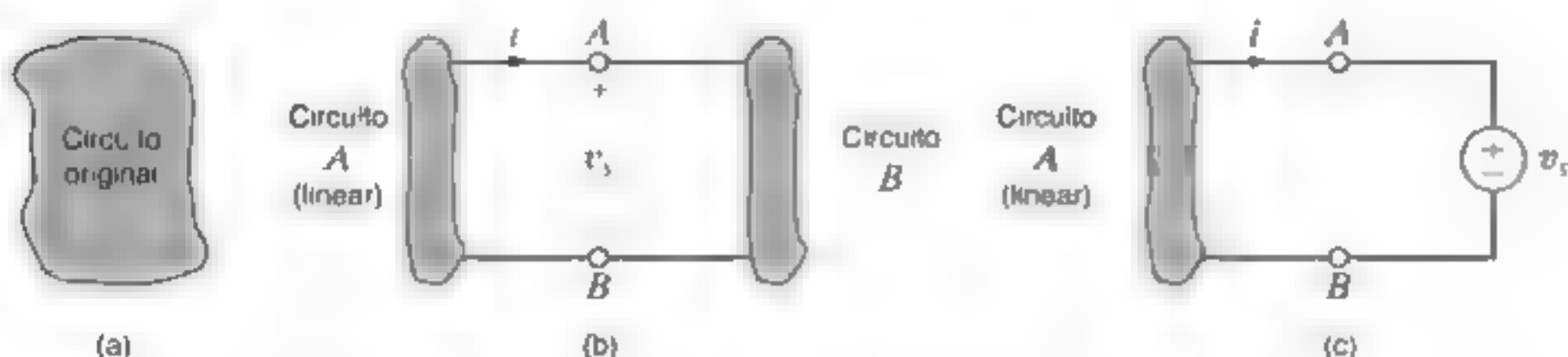


Figura 5.6 Circuito utilizado no desenvolvimento do teorema de Thévenin.

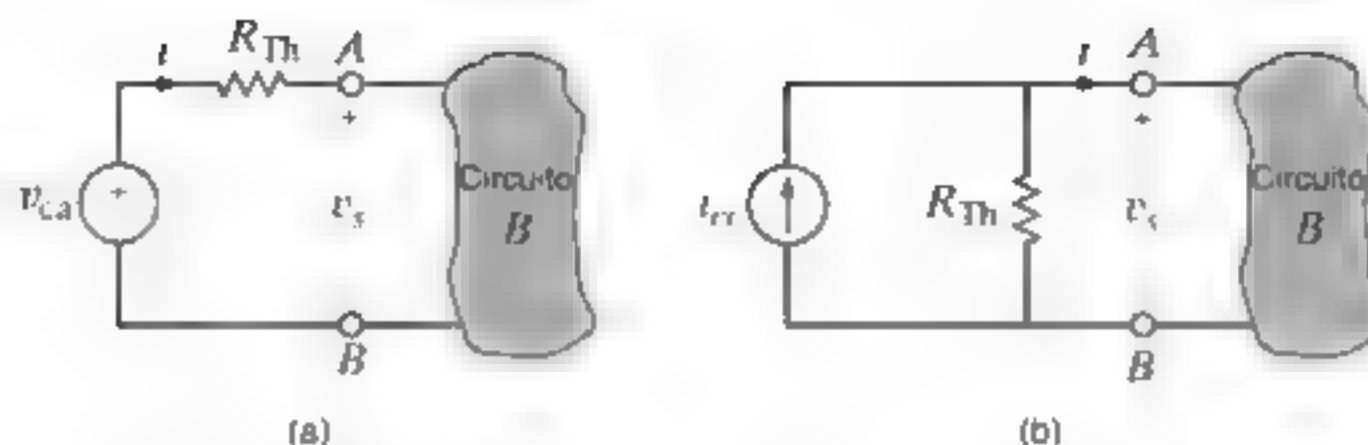


Figura 5.7 Circuitos equivalentes (a) de Thévenin e (b) de Norton.

$R_{Th} = v/i$. Embora o valor numérico de v , não necessite ser especificado, pode-se atribuir a essa tensão o valor unitário $v = 1$ V e, em seguida, $R_{Th} = 1/i$. De modo alternativo, poder-se-ia utilizar uma fonte de corrente como fonte teste e fazer $i = 1$ A; neste caso, $v = (1) R_{Th}$.

Antes de iniciar a análise de diversos exemplos que demonstrarão a utilidade desses teoremas, lembre-se de que esses teoremas, em conjunto com um método alternativo de abordagem, frequentemente permitem que se resolvam vários pequenos

problemas, em vez de um grande problema. Eles permitem que se substitua uma rede, não importando seu tamanho, a um par de terminais com um circuito equivalente de Thévenin ou de Norton. De fato, poder-se-ia representar toda a malha de potência dos Estados Unidos a um par de terminais com um dos circuitos equivalentes. Feito isso, seria possível analisar rapidamente o efeito de diferentes cargas sobre uma rede. Assim, esses teoremas propiciam uma sensibilidade adicional da operação de uma rede específica.

CIRCUITOS CONTENDO APENAS FONTES INDEPENDENTES

EXEMPLO 5.6

Seja a utilização dos teoremas de Thévenin e de Norton na determinação da tensão V_s da rede mostrada no Exemplo 5.3.

SOLUÇÃO

O circuito é redesenhado na Fig. 5.8a. Para se determinar a equivalência de Thévenin, abre-se a rede na carga de $6 \text{ k}\Omega$ conforme mostrado na Fig. 5.8b. A LKT indica que a tensão no circuito aberto, V_{oc} , é igual a 3 V mais a tensão V_1 , que é a tensão entre os terminais da fonte de corrente. Os 2 mA da fonte de corrente fluem por meio dos dois resistores (o único caminho possível para essa corrente!) e, portanto, $V_1 = (2 \times 10^{-3})(1\text{k} + 2\text{k}) = 6 \text{ V}$. Portanto, $V_{oc} = 9 \text{ V}$. Fazendo ambas as fontes nulas, pode-se obter a resistência equivalente de Thévenin, R_{Th} , utilizando o circuito mostrado na Fig. 5.8c. Obvia-

mente, $R_{Th} = 3 \text{ k}\Omega$. Agora o circuito equivalente de Thévenin, consistindo na tensão V_{oc} e na resistência R_{Th} , é conectado de volta aos terminais originais da carga, conforme mostrado na Fig. 5.8d. Utilizando um único divisor de tensão, pode-se verificar que $V_s = 6 \text{ V}$.

Para se determinar o circuito equivalente de Norton nos terminais da carga, deve-se obter a corrente do curto-circuito, conforme mostrado na Fig. 5.8e. Note que o curto-circuito faz com que a fonte de 3 V fique conectada diretamente entre os terminais dos resistores (em paralelo com a fonte) e da fonte de corrente. Portanto, $I_1 = 3/(1\text{k} + 2\text{k}) = 1 \text{ mA}$. Assim, utilizando a LKC, $I_{sc} = 3 \text{ mA}$. A resistência R_{Th} já foi determinada e, portanto, conectando-se o circuito equivalente de Norton à carga obtém-se como resultado o circuito mostrado na Fig. 5.8f. Assim, V_s é igual à fonte de corrente multiplicada pela combinação em paralelo dos resistores, o que fornece o valor de 6 V .

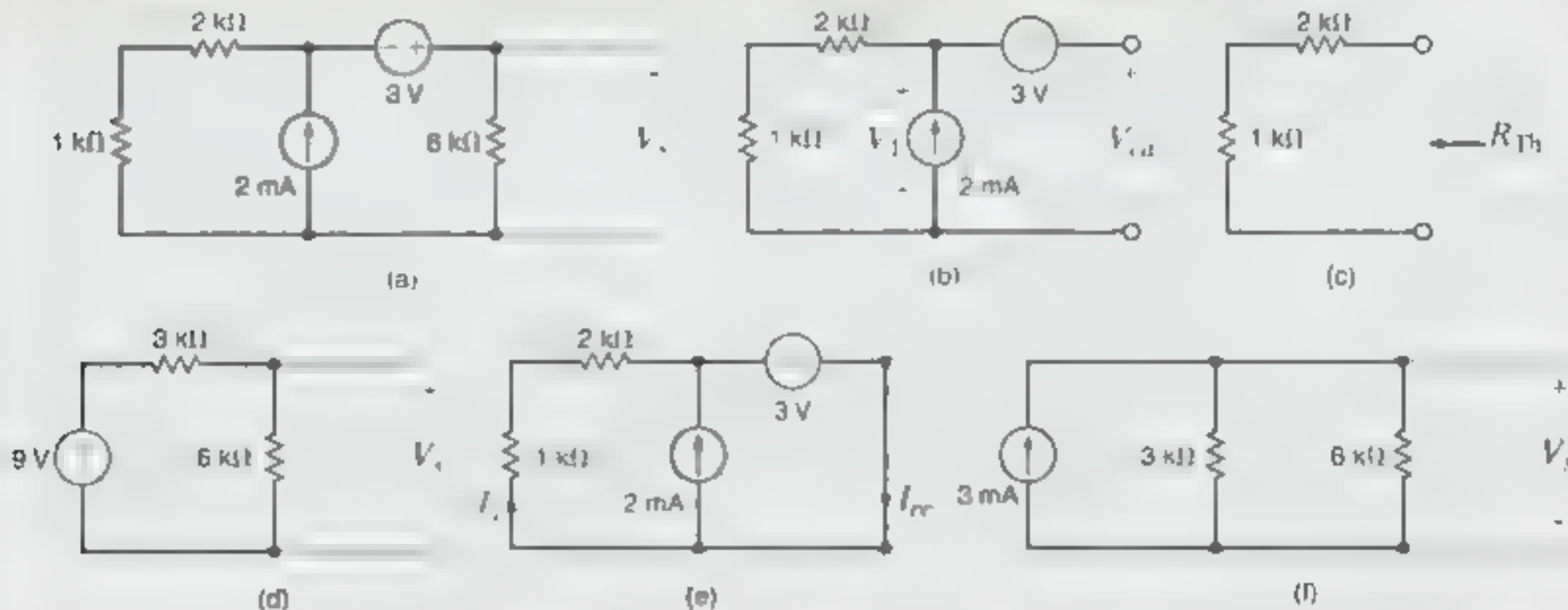


Figura 5.8 Circuitos utilizados no Exemplo 5.6.

Considere, por um instante, algumas características que se destacam nesse exemplo. Note que, ao se aplicar os teoremas, não houve qualquer ponto de quebra da rede à esquerda da fonte de 3 V, uma vez que os resistores em paralelo com a fonte de corrente já representavam o circuito equivalen-

te de Norton. Além disso, uma vez simplificada a rede pelos circuitos equivalentes de Thévenin ou de Norton, tem-se simplesmente uma nova rede para a qual é possível aplicar os teoremas novamente. O exemplo a seguir ilustra esse procedimento.

EXEMPLO 5.7

Seja a utilização do teorema de Thévenin na determinação da tensão V_s do circuito mostrado na Fig. 5.9a.

SOLUÇÃO

Ao se cortar a rede à esquerda da fonte de corrente, a tensão de circuito aberto V_{ca1} é a indicada na Fig. 5.9b. Uma vez que não há corrente passando pelo resistor de $2\text{ k}\Omega$ e, portanto, nenhuma diferença de tensões entre seus terminais, V_{ca1} será igual à tensão entre os terminais do resistor de $6\text{ k}\Omega$, a qual pode ser determinada pela divisão de tensão como

$$V_{ca1} = 12 \left(\frac{6\text{ k}}{6\text{ k} + 3\text{ k}} \right) = 8\text{ V}$$

A resistência equivalente de Thévenin, R_{Th1} , é obtida pela Fig. 5.9c como

$$R_{Th1} = 2\text{ k} + \frac{(3\text{ k} \parallel 6\text{ k})}{3\text{ k} \parallel 6\text{ k}} = 4\text{ k}\Omega$$

Conectando esse circuito equivalente de Thévenin de volta à rede original, tem-se o circuito mostrado na Fig. 5.9d. Pode-se agora aplicar o teorema de Thévenin novamente e, dessa vez, cortar a rede à direita da fonte de corrente, conforme mostra a Fig. 5.9e. Nesse caso, V_{ca2} vale

$$V_{ca2} = (2 \times 10^{-3})(4\text{ k}) + 8 = 16\text{ V}$$

e R_{Th2} , obtida pela Fig. 5.9f, é igual a $4\text{ k}\Omega$. A conexão desse circuito equivalente de Thévenin ao restante da rede resulta no circuito mostrado na Fig. 5.9g. A aplicação de uma simples divisão de tensão a essa rede final fornece $V_s = 8\text{ V}$. O teorema de Norton pode ser aplicado de forma similar na solução dessa rede; todavia, essa solução é deixada como exercício para o leitor.

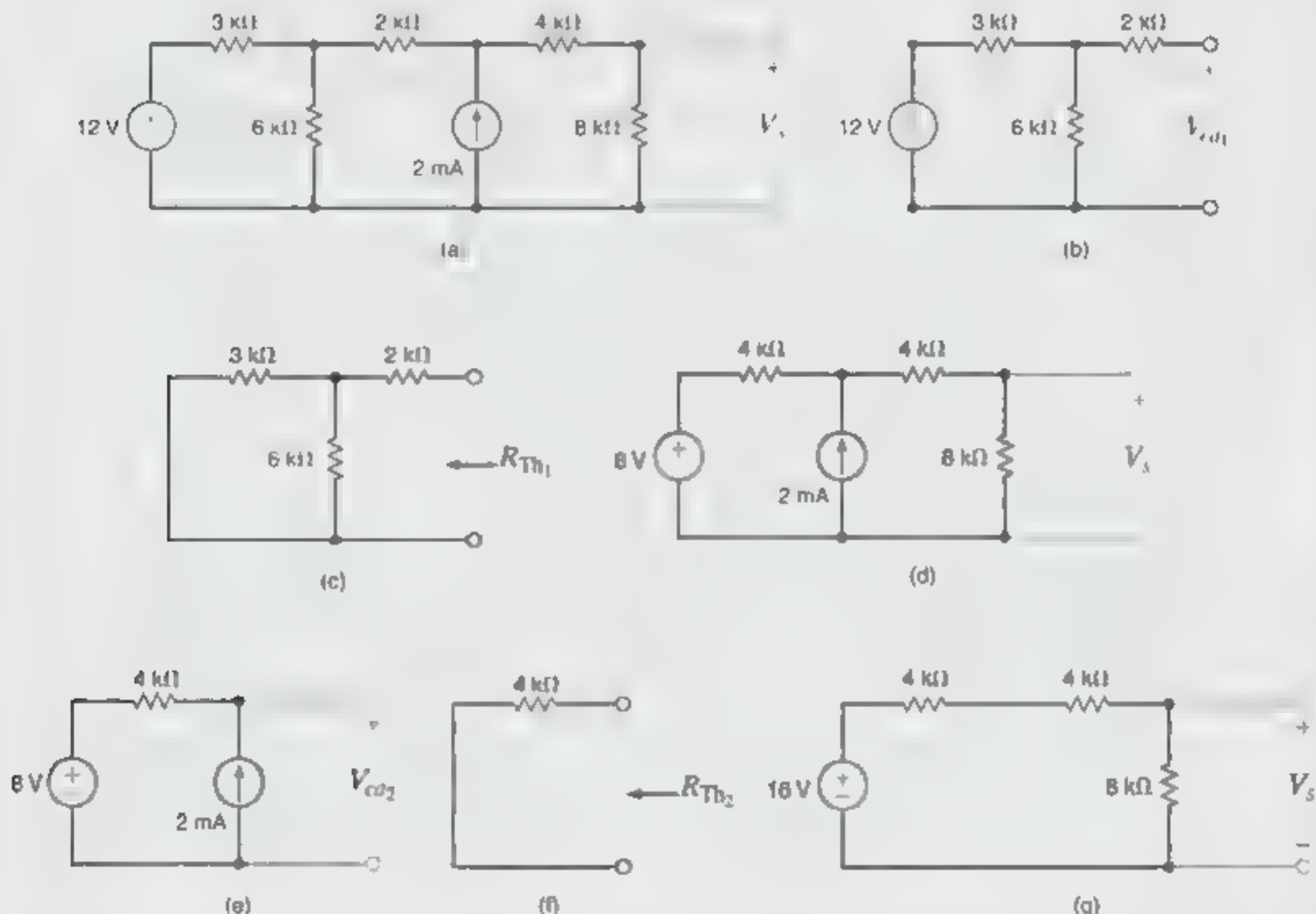


Figura 5.9 Circuitos utilizados no Exemplo 5.7.

EXEMPLO 5.8

Com o objetivo de sedimentar-se o procedimento de utilização dos teoremas de Thévenin e de Norton, analisa-se a rede mostrada na Fig. 5.4a, que é redesenhada na Fig. 5.10a.

SOLUÇÃO

Ao se cortar a rede no resistor carga de $6\text{ k}\Omega$, a tensão do circuito aberto pode ser obtida pelo circuito mostrado na Fig. 5.10b. As equações para as correntes das malhas são

$$6 + 4kI_1 + 2k(I_1 - I_2) = 0$$

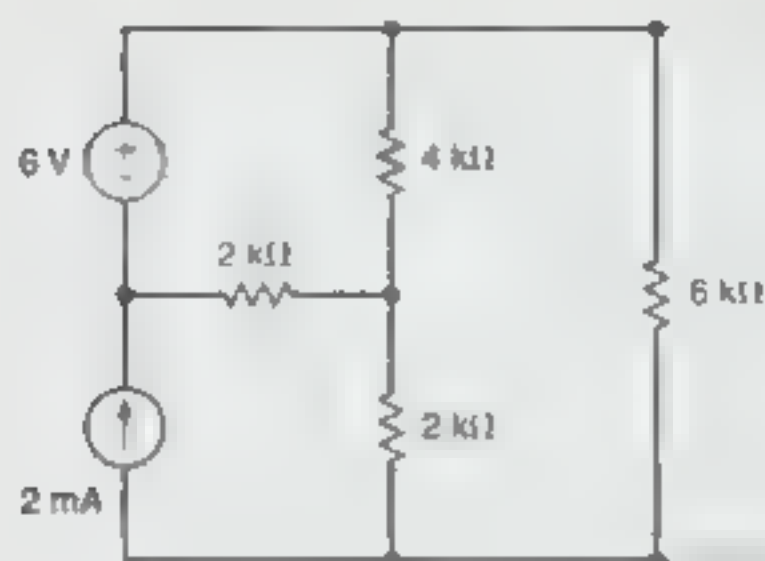
$$I_2 = 2 \times 10^{-3}$$

com as quais pode-se obter facilmente a corrente $I_1 = 5/3\text{ mA}$. Logo, utilizando a LKT, a tensão V_{ca} será

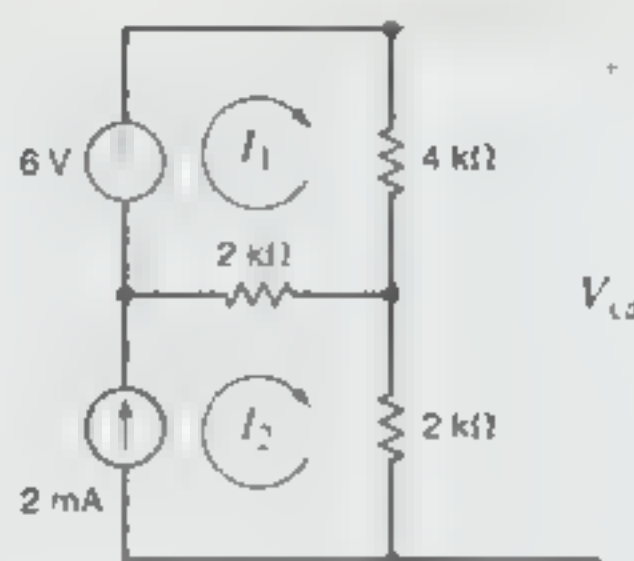
$$\begin{aligned} V_{ca} &= 4kI_1 + 2kI_2 \\ &= 4k\left(\frac{5}{3} \times 10^{-3}\right) + 2k(2 \times 10^{-3}) \\ &= \frac{32}{3}\text{ V} \end{aligned}$$

A resistência R_{Th} é obtida com base na Fig. 5.10c e vale

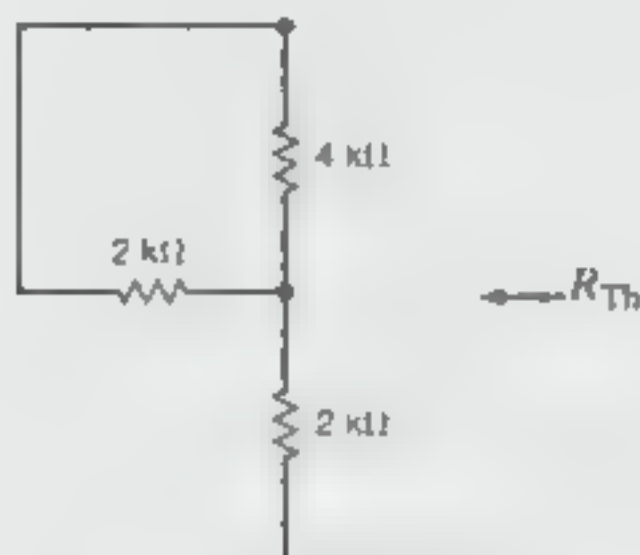
$$R_{Th} = (2k//4k) + 2k = \frac{10}{3}\text{ k}\Omega$$



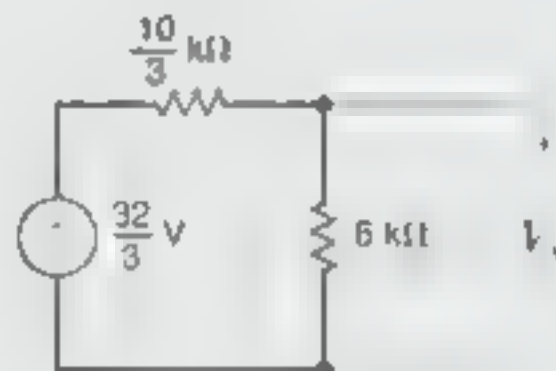
(a)



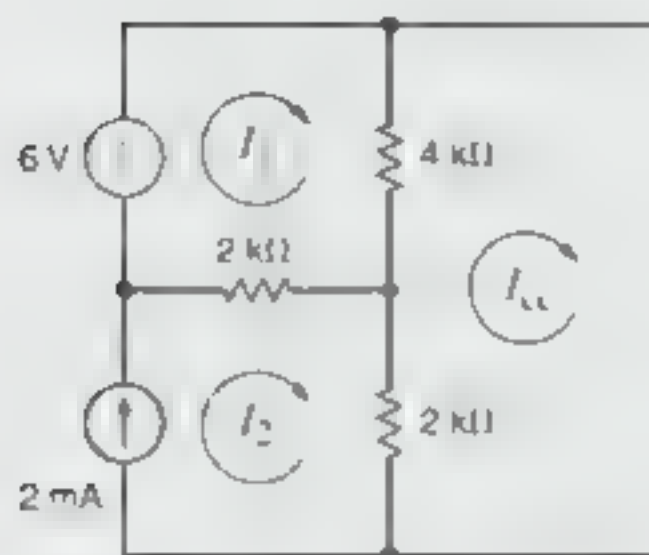
(b)



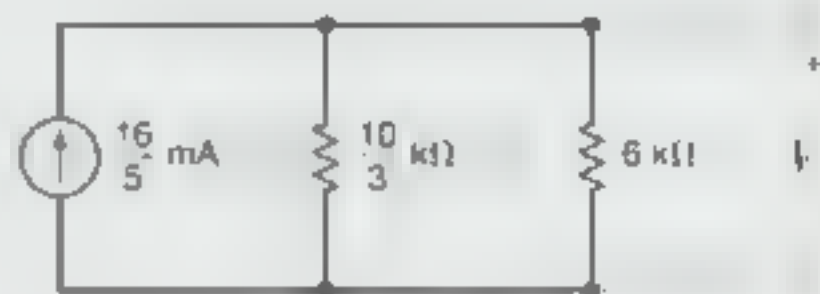
(c)



(d)



(e)



(f)

Figura 5.10 Circuitos utilizados no Exemplo 5.8.

Conectando o circuito equivalente de Thévenin à carga, tem-se a rede mostrada na Fig. 5.10d. Assim, utilizando a divisão de tensão, obtém-se

$$V_s = \frac{32}{3} \left(\frac{6k}{6k + \frac{10}{3}k} \right) = \frac{48}{7} \text{ V}$$

Ao se aplicar o teorema de Norton a esse problema, deve-se determinar a corrente do curto-circuito mostrado na Fig. 5.10e. Nesse instante, o leitor atento interrompe sua análise imediatamente! As três equações das malhas referentes ao circuito original conduzirão de imediato à solução, porém o conjunto de três equações das malhas referentes ao circuito mostrado na Fig. 5.10e fornecerá apenas parte da resposta; especificamente a corrente do curto-circuito. Algumas vezes, o uso dos teoremas é mais complexo ou trabalhoso que uma

abordagem direta utilizando-se a análise dos nós ou a análise dos laços. Esse exemplo parece se enquadrar nessa situação. Todavia, isto não é verdade. Pode-se determinar a corrente I_{cc} utilizando a rede mostrada na Fig. 5.10e, sem o uso das equações das malhas. A técnica é simples, porém um pouco traiçoeira ao ser aplicada, portanto, nesse momento, ela será ignorada. Após essa breve discussão, pode-se terminar a análise que foi iniciada. As equações das malhas para a rede da Fig. 5.10e são

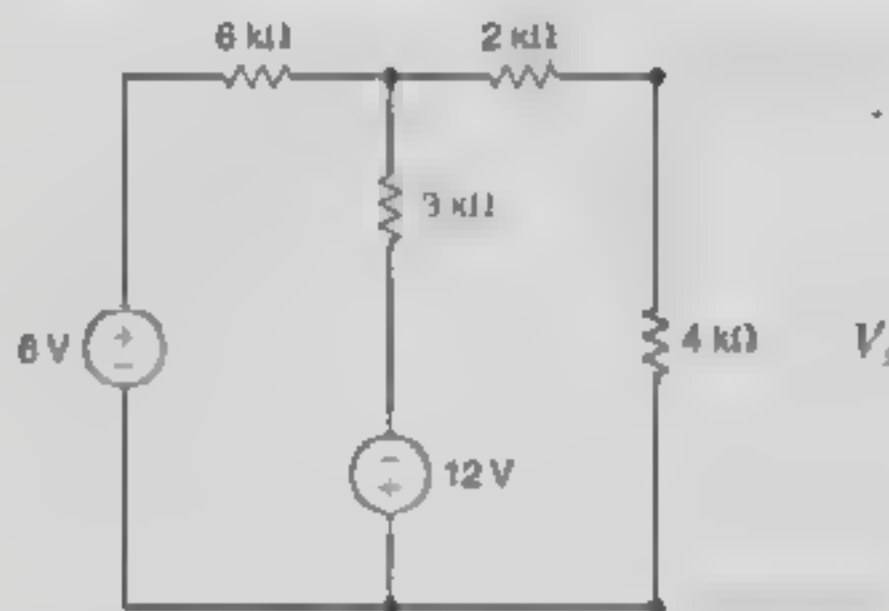
$$-6 + 4k(I_1 - I_{cc}) + 2k(I_1 - 2 \times 10^{-3}) = 0$$

$$2k(I_1 - 2 \times 10^{-3}) + 4k(I_{cc} - I_1) = 0$$

em que incorporou-se a informação de que $I_2 = 2 \times 10^{-3}$ A. A solução dessas equações fornece $I_{cc} = 16/5$ mA. A resistência R_{Th} já foi determinada pela análise de Thévenin. Conectando-se o circuito equivalente de Norton à carga, obtém-se como resultado o circuito mostrado na Fig. 5.10f. A solução desse circuito fornece $V_s = 48/7$ V.

Avaliação do Aprendizado

E5.6 Utilize o teorema de Thévenin na determinação da tensão V_s da rede mostrada na Fig. E5.6



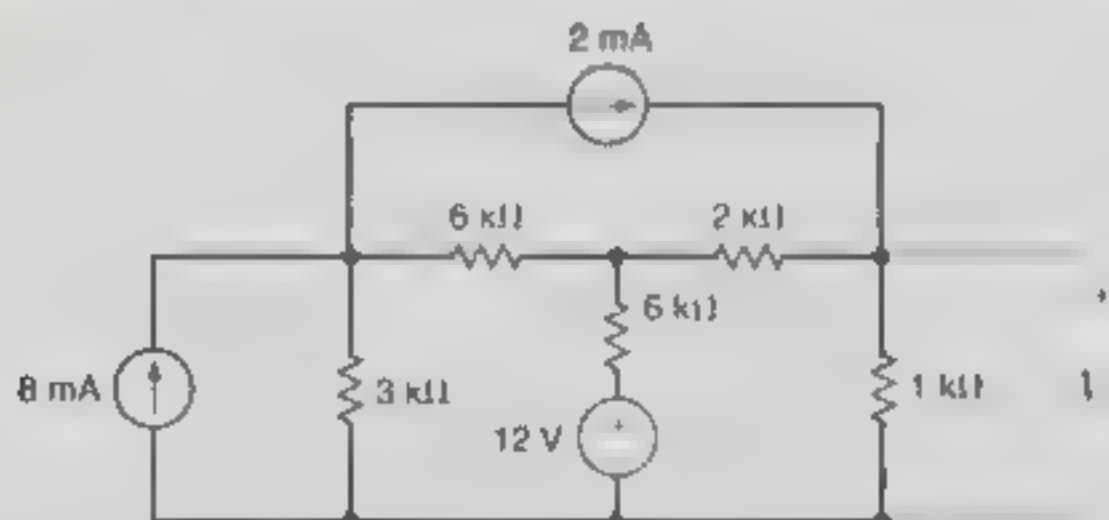
RESPOSTA: $V_s = -3$ V.

Figura E5.6

E5.7 Determine a tensão V_s do circuito mostrado na Fig. E5.6 utilizando ambos os teoremas, de Thévenin e de Norton. Para definir o circuito equivalente de Norton, corte a rede à esquerda do resistor de 4 kΩ. Por quê?

RESPOSTA: $V_s = \frac{1}{3}$ V.

E5.8 Determine a tensão V_s do circuito mostrado na Fig. E5.8 utilizando o teorema de Thévenin.



RESPOSTA: $V_s = 3,88$ V.

Figura E5.8

E5.9 Determine a corrente I_x da rede mostrada na Fig. E5.9 utilizando o teorema de Norton

RESPOSTA: $I_x = -0,857 \text{ mA}$

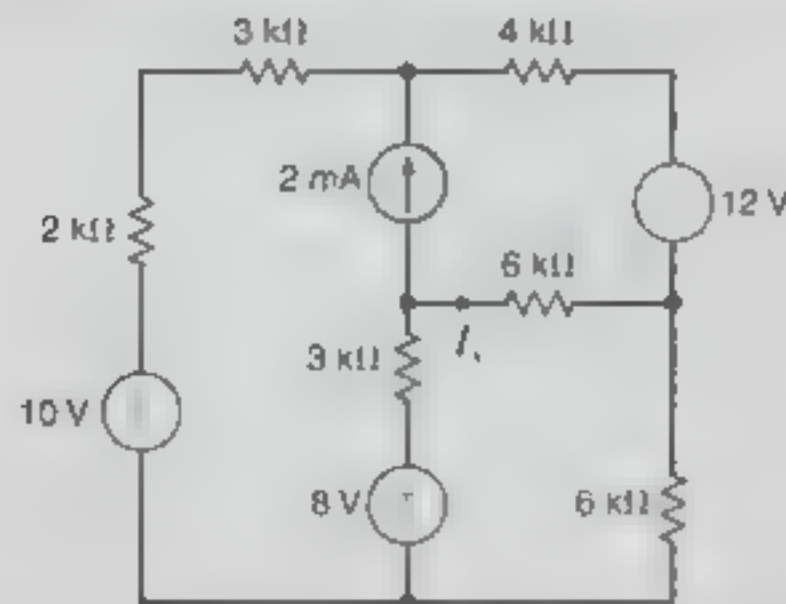


Figura E5.9

CIRCUITOS CONTENDO APENAS FONTES DEPENDENTES Conforme estabelecido anteriormente, a equivalência de Thévenin ou de Norton aplicada a uma rede contendo apenas fontes de-

pendentes resulta na determinação de R_{Th} . Os exemplos a seguir servirão para ilustrar como se determina essa resistência equivalente de Thévenin.

EXEMPLO 5.9

Deseja-se determinar a resistência equivalente de Thévenin associada aos terminais A-B da rede mostrada na Fig. 5.11a.

SOLUÇÃO

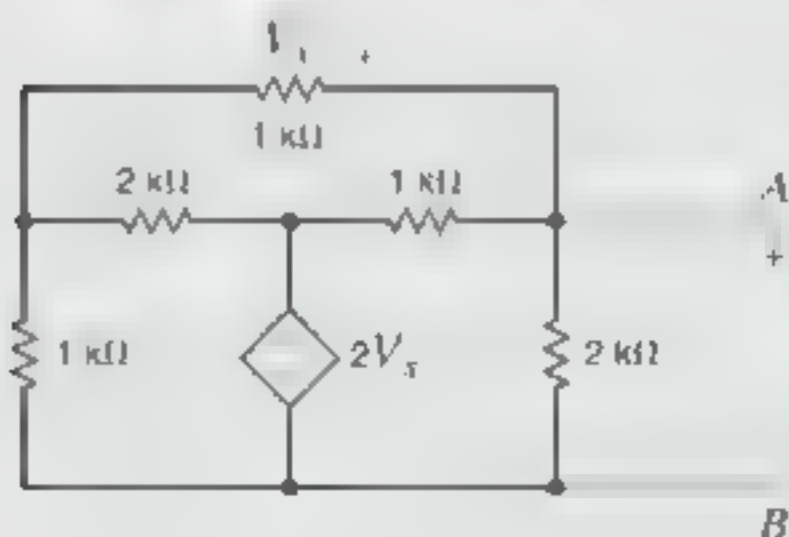
A estratégia a ser adotada na solução desse problema será a de se aplicar uma fonte de 1 V aos terminais, conforme mostrado na Fig. 5.11b e, em seguida, calcular a corrente I_x e a resistência $R_{Th} = 1/I_x$.

As equações da rede mostrada na Fig. 5.11b são apresentadas a seguir. A aplicação da LKT ao laço externo estabelece que

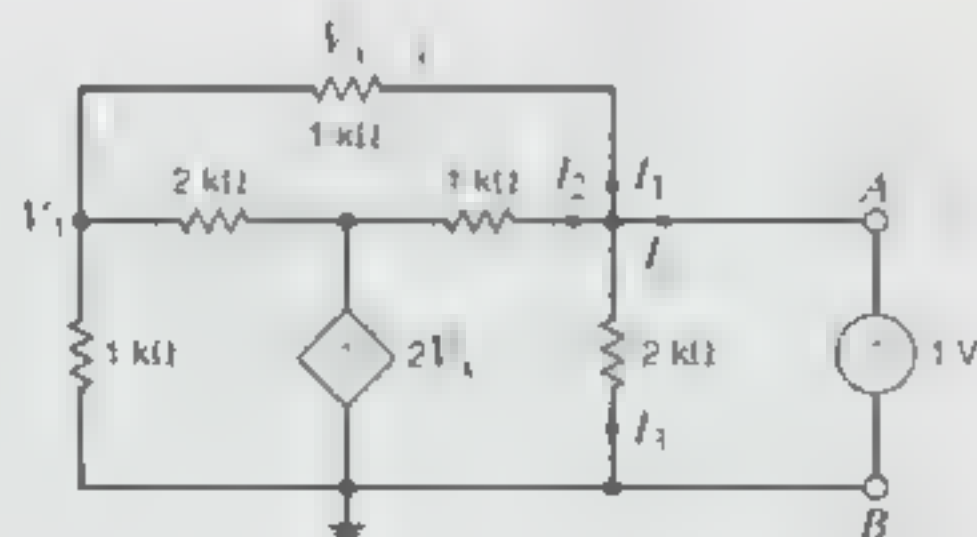
$$V_1 + V_2 = 1$$

A equação decorrente da LKC ao nó cuja tensão foi designada como V_1 é

$$\frac{V_1}{1k} + \frac{V_1 - 2V_2}{2k} + \frac{V_1 - 1}{1k} = 0$$



(a)



(b)

Figura 5.11 Redes empregadas no Exemplo 5.9.

A solução dessas equações para V_1 fornece $V_1 = 3/7 \text{ V}$. Conhecendo V_1 , pode-se calcular as correntes I_1 , I_2 e I_3 . Seus valores são

$$I_1 = \frac{V_1}{1k} = \frac{3}{7} \text{ mA}$$

$$I_2 = \frac{1 - 2V_1}{1k} = \frac{1}{7} \text{ mA}$$

$$I_3 = \frac{1}{2k} = \frac{1}{2} \text{ mA}$$

Portanto,

$$I_x = I_1 + I_2 + I_3$$

$$= \frac{15}{14} \text{ mA}$$

$$R_{Th} = \frac{1}{I_x} = \frac{14}{15} k\Omega$$

EXEMPLO 5.10

Seja a determinação da resistência R_{Th} associada aos terminais $A-B$ da rede mostrada na Fig. 5.12a

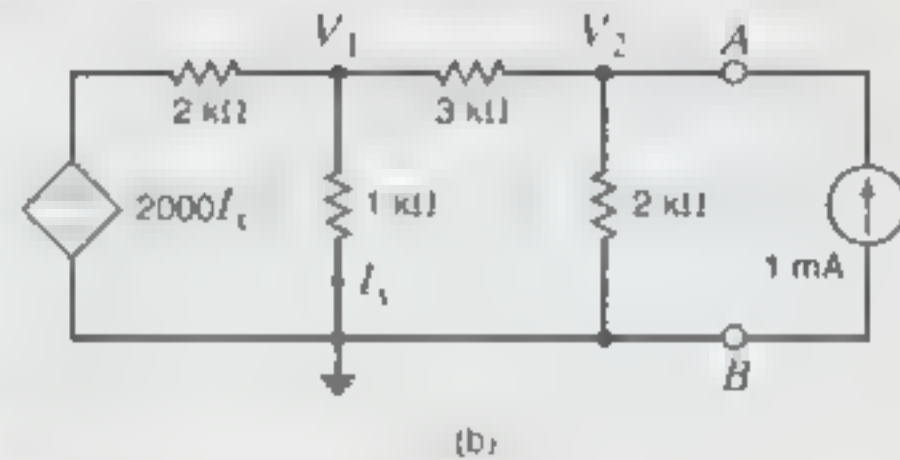
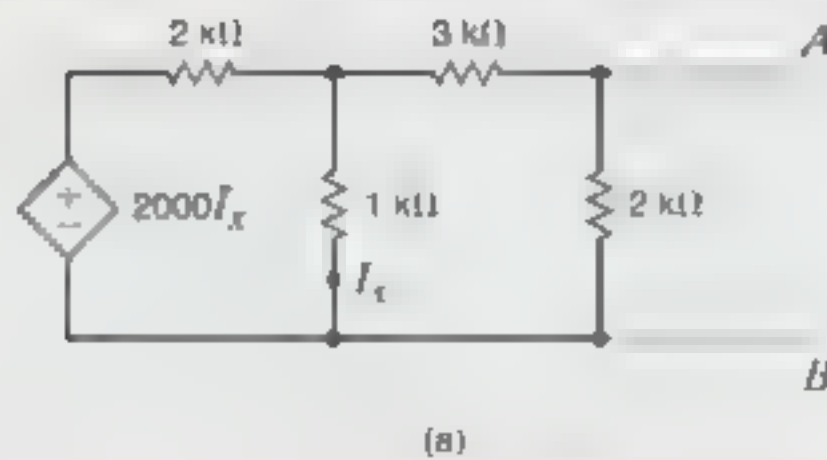


Figura 5.12 Redes utilizadas no Exemplo 5.10.

SOLUÇÃO

A estratégia a ser adotada na solução desse problema será aplicar uma fonte de corrente de 1 mA aos terminais $A-B$ e calcular a tensão V_2 entre os terminais, conforme mostrado na Fig. 5.12b. Em seguida, a resistência de Thévenin será calculada como $R_{Th} = V_2/0,001$.

As equações nodais da rede são

$$\begin{aligned} \frac{V_1 - 2000I_x}{2k} + \frac{V_1}{1k} - \frac{V_2}{3k} &= 0 \\ I_x = \frac{V_1}{1k} + \frac{V_2}{2k} &= 1 \times 10^{-3} \end{aligned}$$

e

$$I_x = \frac{V_1}{1k}$$

A solução dessas equações fornece

$$V_2 = \frac{10}{7} \text{ V}$$

e, portanto,

$$\begin{aligned} R_{Th} &= \frac{V_2}{1 \times 10^{-3}} \\ &= \frac{10}{7} \text{ k}\Omega \end{aligned}$$

CIRCUITOS CONTENDO FONTES DEPENDENTES E FONTES INDEPENDENTES Nesse tipo de circuito, tanto a tensão referente ao circuito aberto quanto a corrente do curto-circuito devem ser calculadas para que a resistência equivalente de Thévenin possa ser determinada. Além disso, deve-se lembrar que não é

possível separar a fonte dependente e sua variável de controle ao se cortar a rede para se obter o circuito equivalente de Thévenin ou de Norton.

Ilustra-se agora essa técnica com um circuito que contém uma fonte de tensão controlada por corrente.

EXEMPLO 5.11

Seja o emprego do teorema de Thévenin na determinação da tensão V_x da rede mostrada na Fig. 5.13a.

SOLUÇÃO

Inicialmente, corta-se a rede nos pontos A e B . Poder-se-ia fazer essa quebra imediatamente à direita da fonte de 12 V? Não! Por quê? A tensão referente ao circuito aberto é calculada a partir da rede mostrada na Fig. 5.13b. Note que, agora, é utilizada a fonte de $2000I_x$ porque esse circuito é diferente daquele mostrado na Fig. 5.13a. A equação decorrente da aplicação da LKC para o supernó que envolve a fonte de 12 V é

$$\frac{(V_{ca} + 12)}{1k} - (2000I_x) + \frac{V_{ca} + 12}{2k} + \frac{V_{ca}}{2k} = 0$$

em que

$$I_x = \frac{V_{ca}}{2k}$$

o que fornece $V_{ca} = -6 \text{ V}$.

A corrente I_{sc} pode ser calculada com base no circuito mostrado na Fig. 5.13c. Note que a presença do curto-circuito força a corrente I_x a ser nula e, portanto, a rede é reduzida àquela mostrada na Fig. 5.13d.

Portanto,

$$I_{sc} = \frac{12}{\frac{2}{3}k} = 18 \text{ mA}$$

Portanto,

$$R_{Th} = \frac{V_{ca}}{I_{sc}} = \frac{1}{3} \text{ k}\Omega$$

A conexão do circuito equivalente de Thévenin aos terminais $A-B$ da rede remanescente produz o circuito mostrado na Fig. 5.13e. Assim, a simples divisão de tensão fornece

$$V_x = (-6) \left(\frac{1k}{1k + 1k + \frac{1}{3}k} \right) = -\frac{18}{7} \text{ V}$$

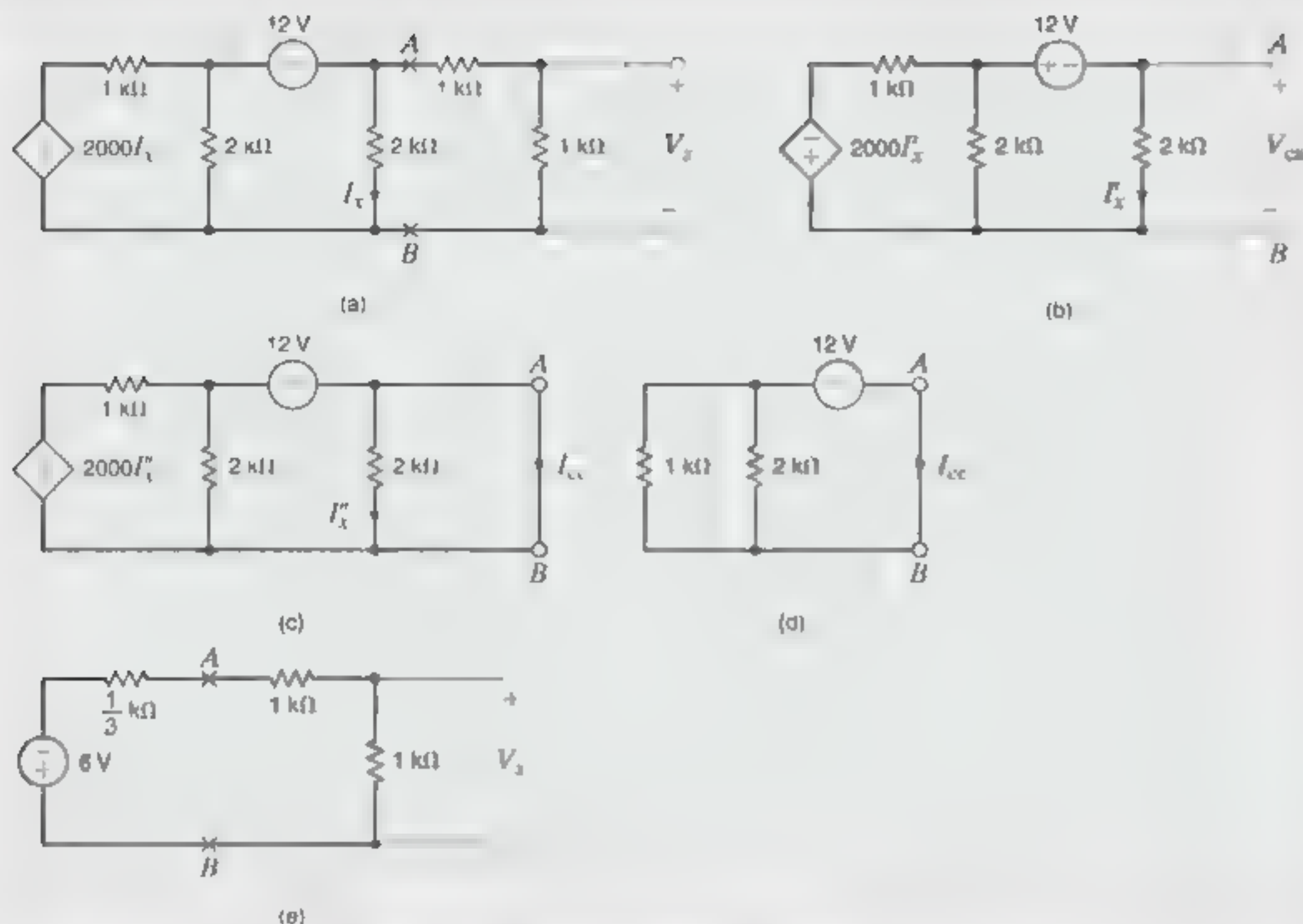


Figura 5.13 Circuitos utilizados no Exemplo 5.11.

EXEMPLO 5.12

Seja a determinação da tensão V_x da rede mostrada na Fig. 5.14a utilizando o teorema de Thévenin.

SOLUÇÃO

A tensão de circuito aberto, V_{oc} , é determinada pela rede mostrada na Fig. 5.14b. Note que

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{V_x}{2\text{ k}} \\ I_2 &= 2\text{ mA} \end{aligned}$$

e

$$V_x' = 4\text{ k} \left(\frac{V_x'}{2\text{ k}} - 2 \times 10^{-3} \right)$$

Resolvendo essas equações, tem-se $I_1 = 4\text{ mA}$ e, portanto,

$$V_{oc} = 2\text{ k} I_1 + 3 = 11\text{ V}$$

A corrente I_{sc} é obtida a partir do circuito mostrado na Fig. 5.14c. Note que, ao se eliminar o curto circuito, a rede fica reduzida àquela mostrada na Fig. 5.14d. Embora se tenha perdido temporariamente o sentido de I_{sc} , pode-se determinar facilmente as correntes dos ramos, e elas, por sua vez, fornecerão

I_{sc} . A LKC aplicada ao nó inferior à esquerda da rede, fornece

$$\frac{V_x'}{4\text{ k}} + \frac{V_x'}{2000} - 2 \times 10^{-3} = 0$$

ou

$$V_x' = 6\text{ V}$$

Então, como

$$I_3 = \frac{3}{2\text{ k}} = \frac{3}{2}\text{ mA}$$

conforme mostrado na Fig. 5.14c,

$$\begin{aligned} I_{sc} &= \frac{V_x'}{2000} + I_3 \\ &= \frac{11}{2}\text{ mA} \end{aligned}$$

Portanto,

$$R_{Th} = \frac{V_{oc}}{I_{sc}} = 2\text{ k}\Omega$$

Conectando-se o circuito equivalente de Thévenin ao restante da rede original, tem-se o circuito da Fig. 5.14e. A simples divisão de tensão fornece

$$\begin{aligned} V_x &= 11 \left(\frac{6\text{ k}}{2\text{ k} + 6\text{ k}} \right) \\ &= \frac{33}{4}\text{ V} \end{aligned}$$

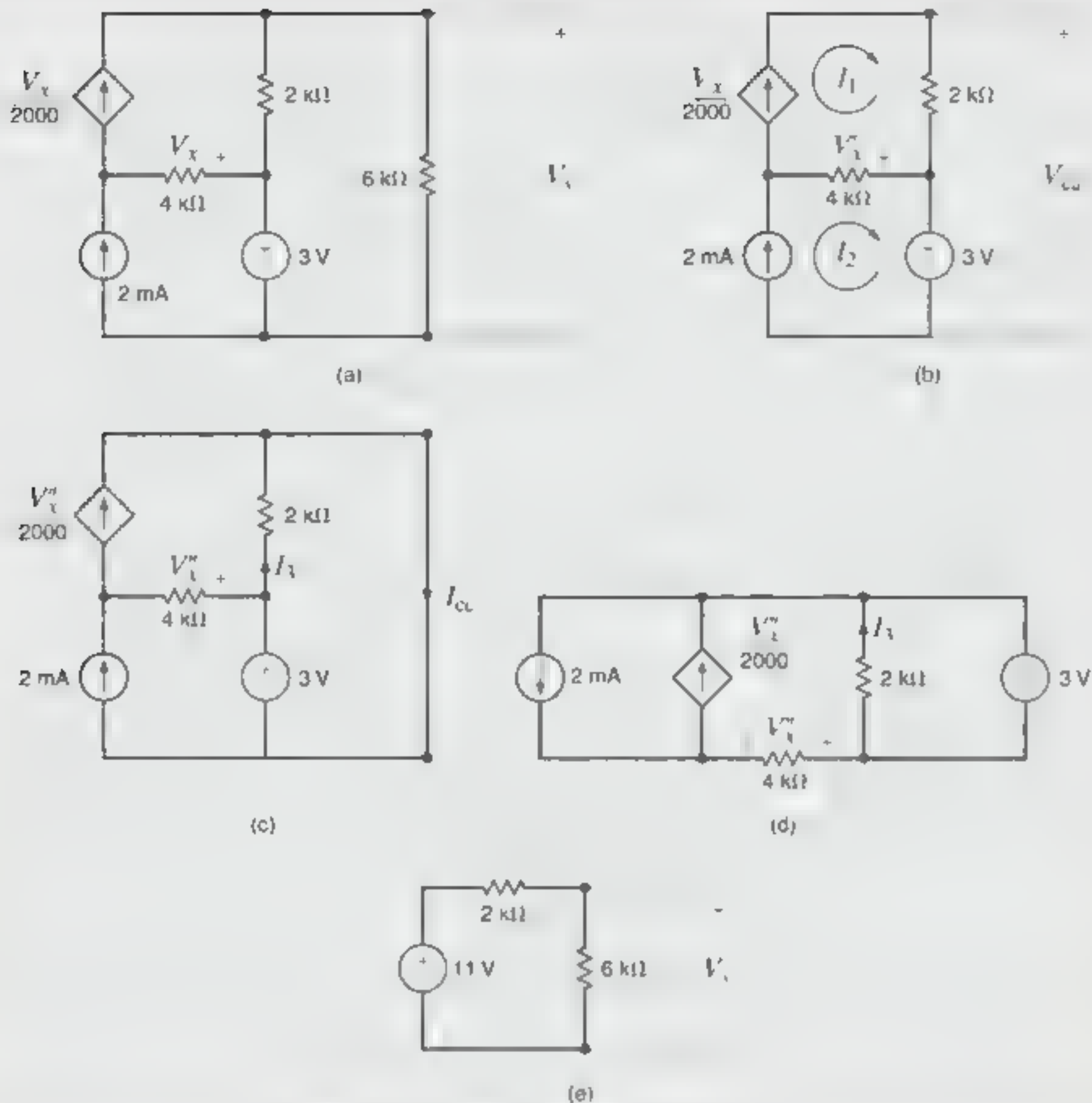


Figura 5.14 Circuitos utilizados no Exemplo 5.12.

EXEMPLO 5.13

Examina-se agora um problema que foi resolvido anteriormente pelas análise nodal e dos laços. O circuito utilizado nos Exemplos 3.10 e 3.20 é redesenhado na Fig. 5.15a. Como ele possui uma fonte dependente, deverão ser determinadas a tensão de circuito aberto e a corrente de curto-circuito para que se possa empregar o teorema de Thévenin na determinação da tensão de saída V_o .

SOLUÇÃO

Ao se iniciar a análise, nota-se que o circuito pode ser simplificado formando-se inicialmente um equivalente de Thévenin para os ramos mais à esquerda e mais à direita. Note também que esses dois ramos estão em paralelo e nenhum deles contém a variável de controle. Assim, pode-se simplificar a rede pela redução desses dois ramos a um único pelo equivalente

de Thévenin. Para o circuito mostrado na Fig. 5.15b, a tensão de circuito aberto vale

$$V_{ca1} = \frac{2}{k}(1k) + 4 = 6 \text{ V}$$

E a resistência equivalente de Thévenin entre os terminais, obtida observando-se os terminais com as fontes tornadas nulas, é

$$R_{Th1} = 1 \text{ k}\Omega$$

O circuito equivalente de Thévenin resultante é agora conectado ao trecho remanescente do circuito produzindo a rede mostrada na Fig. 5.15c.

A rede mostrada na Fig. 5.15c é agora cortada em seus terminais de saída para se determinar a tensão de circuito aberto V_{ca2} , conforme mostrado na Fig. 5.15d. Devido à presença das fontes de tensão, será utilizada a análise nodal com o auxílio

de um supernó para se determinar a tensão de circuito aberto. As equações nodais dessa rede são

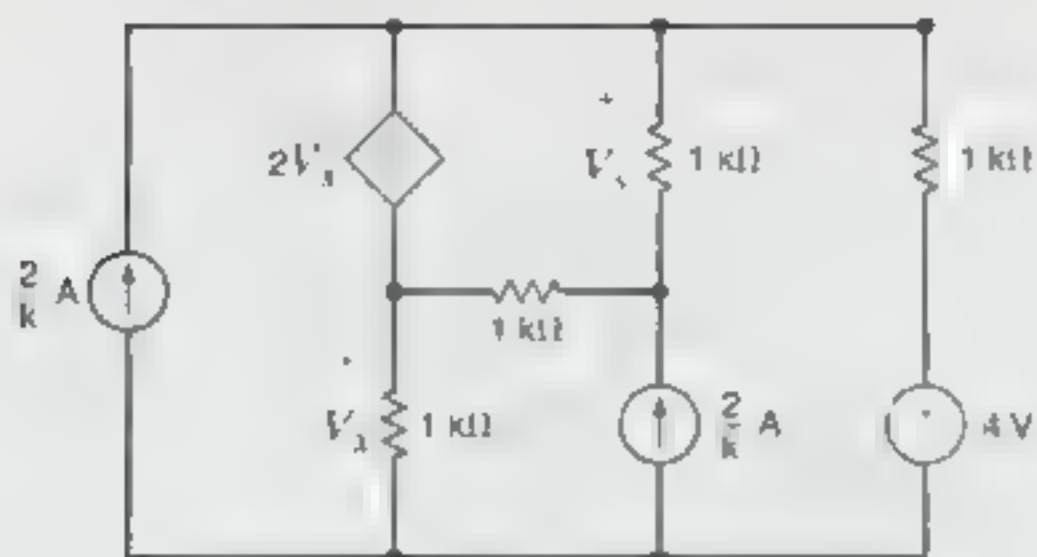
$$V_1 = 3V'_1$$

$$\frac{V_1 - 6}{1k} + \frac{V_1 - 2V'_1}{1k} = \frac{2}{k}$$

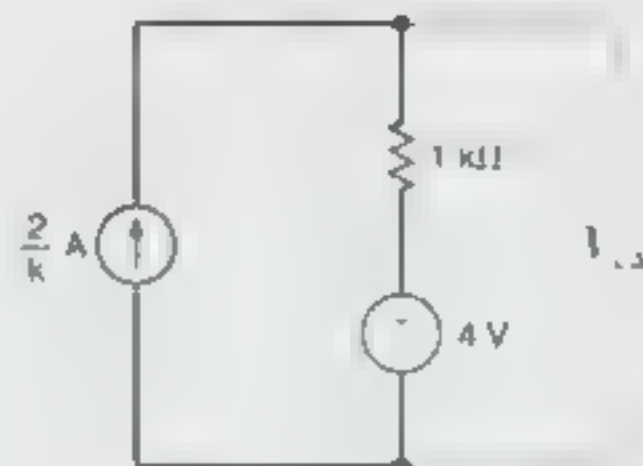
e, assim, $V'_1 = 2 \text{ V}$ e $V_1 = 6 \text{ V}$. Assim, a tensão de circuito aberto, utilizando a equação da LKT

$$2V'_1 + V_{\text{ca}} + \frac{2}{k}(1k) = 0$$

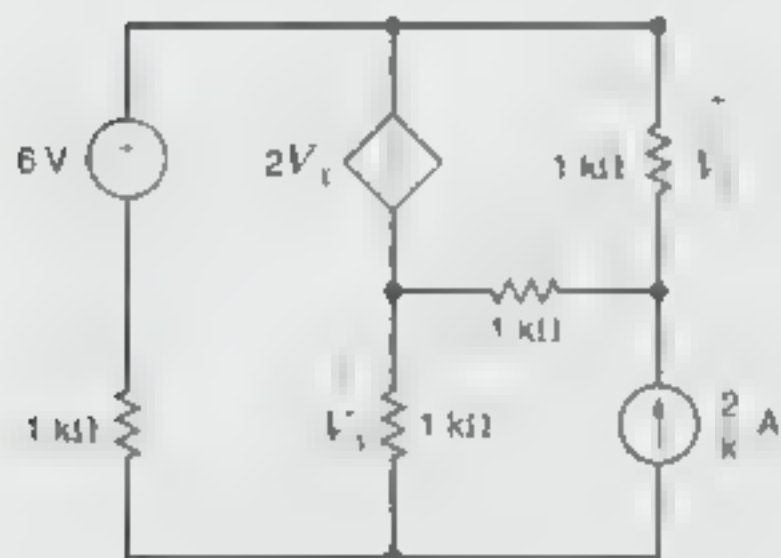
$$V_{\text{ca}} = 2 \text{ V}$$



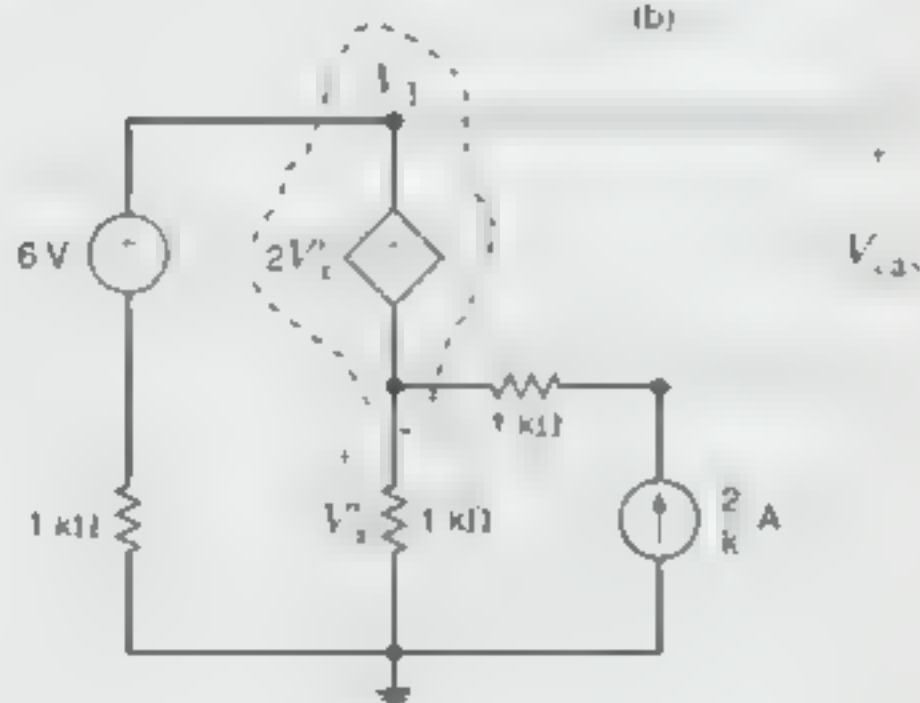
(a)



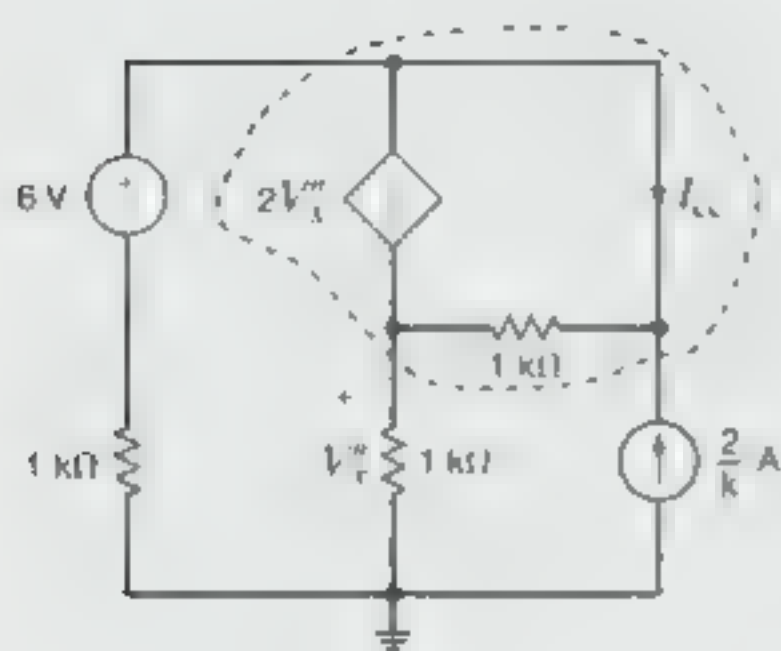
(b)



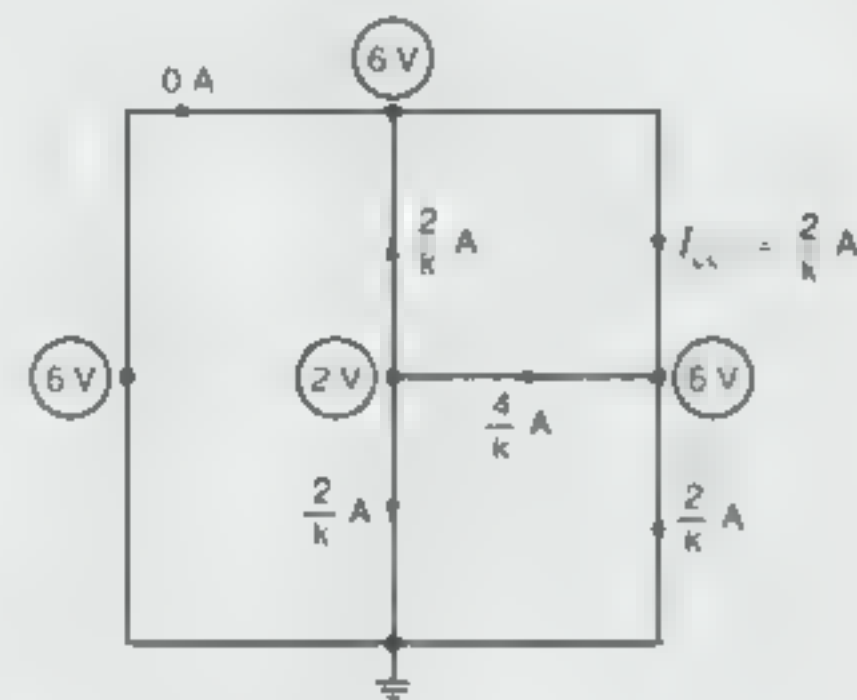
(c)



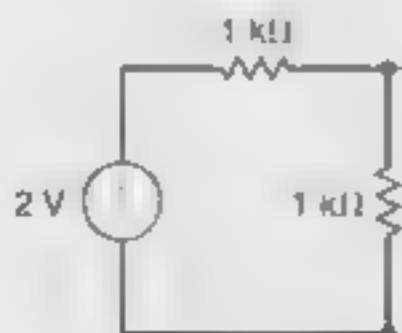
(d)



(e)



(f)



(g)

Figura 5.15 Circuitos utilizados no Exemplo 5.13.

A corrente de curto-circuito é obtida com base na rede mostrada na Fig. 5.15e. Novamente, é empregado o supernó, e as equações da rede são

$$\begin{aligned} V_1 &= 3V'' \\ V_2 &= 6 + \frac{V_2 - 2V''}{1k} \cdot 2 \end{aligned}$$

As tensões nos nós obtidas a partir dessas equações são $V'' = 2$ V e $V_2 = 6$ V. O diagrama de linhas mostrado na Fig. 5.15f indica as tensões nodais e as correntes resultantes para os ramos. (As tensões nodais são mostradas em círculos e as correntes nos ramos são identificadas por setas.) As tensões nodais e as resistências são utilizadas para se calcular as cor-

rentes nos resistores, enquanto as correntes remanescentes são obtidas a partir da LKC. Conforme indicado, a corrente de curto-circuito vale

$$I_{cc2} = 2 \text{ mA}$$

Assim, a resistência equivalente de Thévenin é

$$R_{Th} = \frac{V_{ca2}}{I_{cc2}} = 1 \text{ k}\Omega$$

O circuito equivalente de Thévenin consiste agora em uma fonte de 2 V em série com um resistor de 1 k Ω . Conectando-se esse circuito equivalente de Thévenin ao resistor carga, tem-se a rede mostrada na Fig. 5.15g. Um simples divisor de tensão indica que $V_1 = 1$ V.

Estratégia para Solução de Problemas

Aplicação do Teorema de Thévenin

Etapa 1. Remova a carga e determine a tensão entre os terminais do circuito aberto, V_{ca} . Todas as técnicas de análise de circuitos aqui apresentadas podem ser utilizadas no cálculo dessa tensão.

Etapa 2. Determine a resistência equivalente de Thévenin da rede nos terminais abertos com a carga removida. Três diferentes configurações de circuito podem ser encontradas na determinação da resistência, R_{Th} .

- (a) Se o circuito contém apenas fontes independentes, elas são desativadas (igualadas a zero) pela substituição das fontes de tensão por curtos-circuitos e das fontes de corrente por circuitos abertos. A resistência R_{Th} é então obtida calculando-se a resistência da rede puramente resistiva nos terminais abertos.
- (b) Se o circuito contém apenas fontes dependentes, uma fonte de tensão ou de corrente independente é colocada nos terminais abertos e a corrente ou tensão correspon-

dente nesses terminais é medida. A relação tensão/corrente nos terminais é a resistência equivalente de Thévenin. Uma vez que não há fonte de energia, a tensão no circuito aberto é nula neste caso.

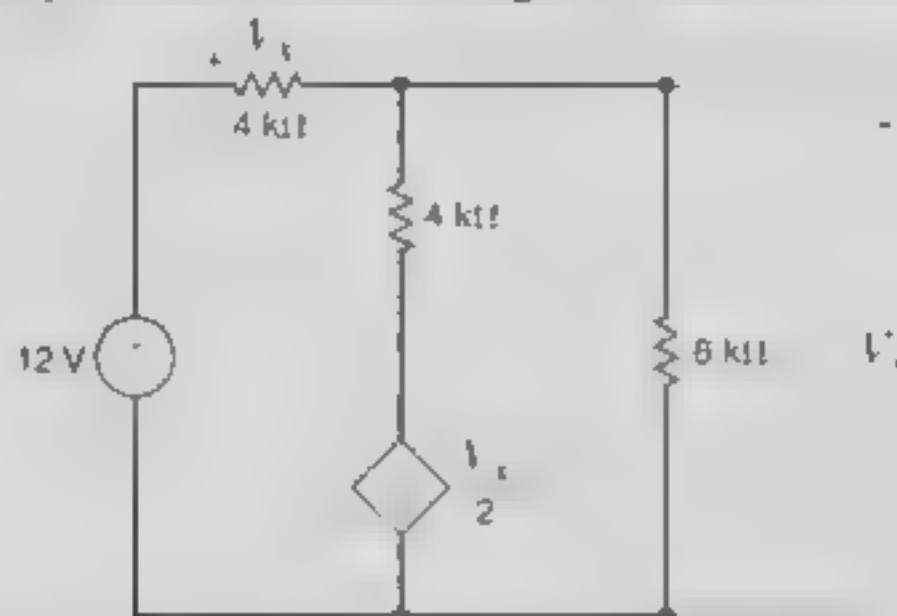
- (c) Se o circuito possui tanto fontes independentes quanto fontes dependentes, os terminais do circuito aberto são unidos e a corrente do curto-circuito entre esses terminais é determinada. A relação entre a tensão do circuito aberto e a corrente do circuito fechado (curto-circuito) é a resistência R_{Th} .

Etapa 3. Se, agora, a carga for conectada ao circuito equivalente de Thévenin consistindo na tensão V_{ca} em série com R_{Th} , a solução desejada poderá ser obtida.

A estratégia para solução de problemas relativa ao teorema de Norton é basicamente a mesma do teorema de Thévenin, com a exceção de que se trata da corrente do curto-circuito e não da tensão no circuito aberto.

Avaliação do Aprendizado

E5.10 Determine a tensão V_1 do circuito mostrado na Fig. E5.10 utilizando o teorema de Thévenin.



RESPOSTA: $V_1 = \frac{36}{13}$ V

Figura E5.10

E5.11 Determine a tensão V_s do circuito mostrado na Fig. E5.11 utilizando o teorema de Thévenin.

RESPOSTA: $V_s = 6,29 \text{ V}$.

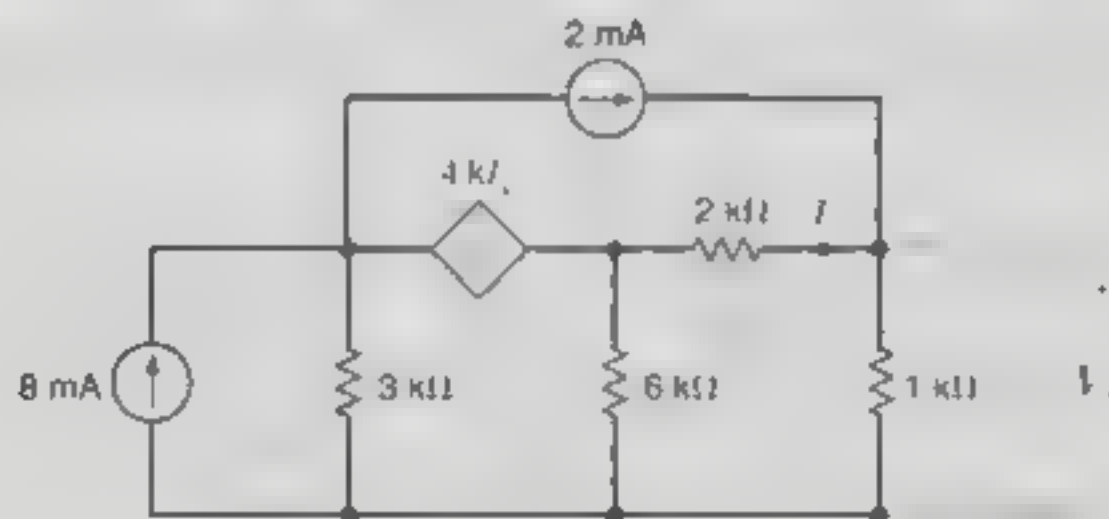


Figura E5.11

E5.12 Utilize o teorema de Thévenin para determinar a potência fornecida pela fonte de 12 V do circuito mostrado na Fig. E5.12

RESPOSTA: 8,73 mW.

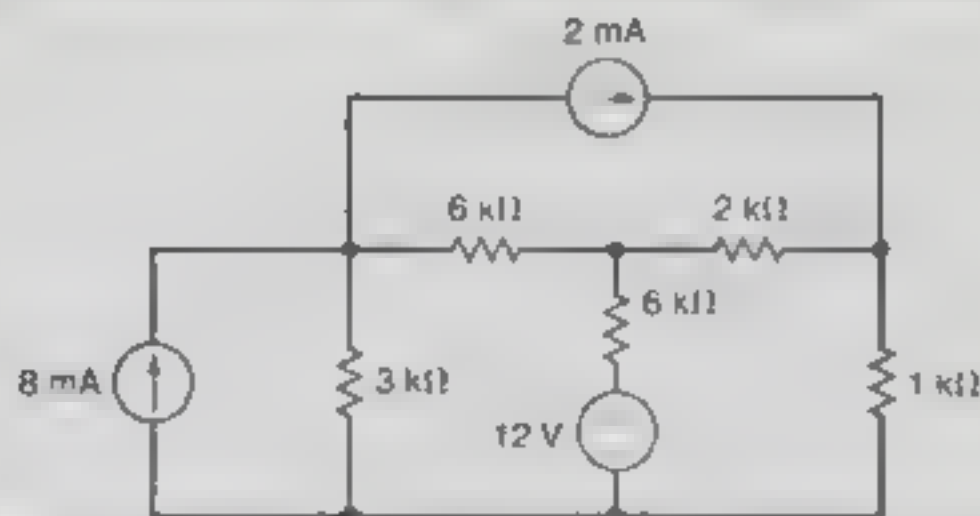


Figura E5.12

E5.13 Obtenha a resistência equivalente de Thévenin nos terminais $A - B$ da rede mostrada na Fig. E5.13.

RESPOSTA: $R_{Th} = 1619 \Omega$.

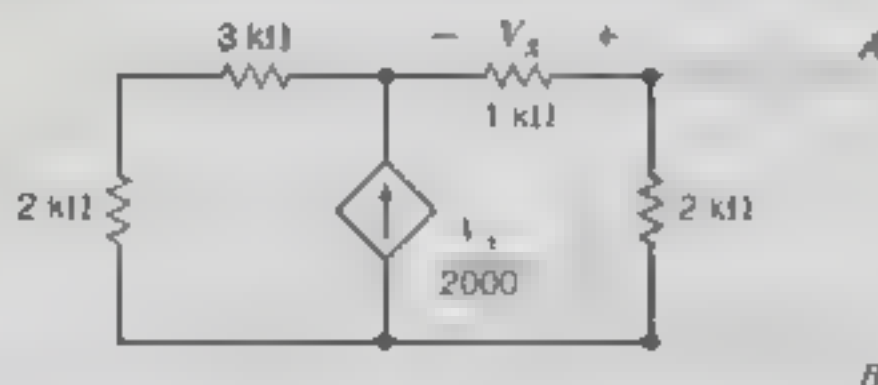


Figura E5.13

Uma vez examinada a utilização do teorema de Thévenin e do teorema de Norton em diferentes configurações de circuito, é ainda interessante observar um outro aspecto desses teoremas bastante útil na análise e no projeto de circuitos. Esse aspecto adicional pode ser extraído dos circuitos equivalentes de Thévenin e de Norton.

As relações especificadas na Fig. 5.7 e na Eq. (5.5) possuem um significado especial porque representam o que é chamado de *transformação de fonte* ou *troca de fonte*. O que essas relações estabelecem é que se uma fonte de corrente i estiver incluída em uma rede em paralelo com um resistor R , essa combinação pode

ser substituída por uma fonte de tensão de valor $v = iR$ em série com o resistor R . O inverso também é verdadeiro; isto é, uma fonte de tensão v em série com um resistor R pode ser substituída por uma fonte de corrente de valor $i = v/R$ em paralelo com o resistor R . As variáveis do circuito (por exemplo, uma tensão de saída) não são alteradas por essas transformações.

Deve-se enfatizar que os dois circuitos equivalentes mostrados na Fig. 5.7 são *equivalentes apenas nos dois nós externos*. Por exemplo, ao se desconectar o circuito B de ambas as redes apresentadas na Fig. 5.7, o circuito equivalente da Fig. 5.7b dissipa potência, porém, o da Fig. 5.7a não.

EXEMPLO 5.14

Será mostrado agora como determinar a tensão V_s do circuito da Fig. 5.16a utilizando a aplicação repetida da transformação de fontes.

SOLUÇÃO

Ao se iniciar pela extremidade esquerda da rede apresentada na Fig. 5.16a, a combinação em série da fonte de tensão de 12 V com o resistor de 3 kΩ é convertida para uma fonte de

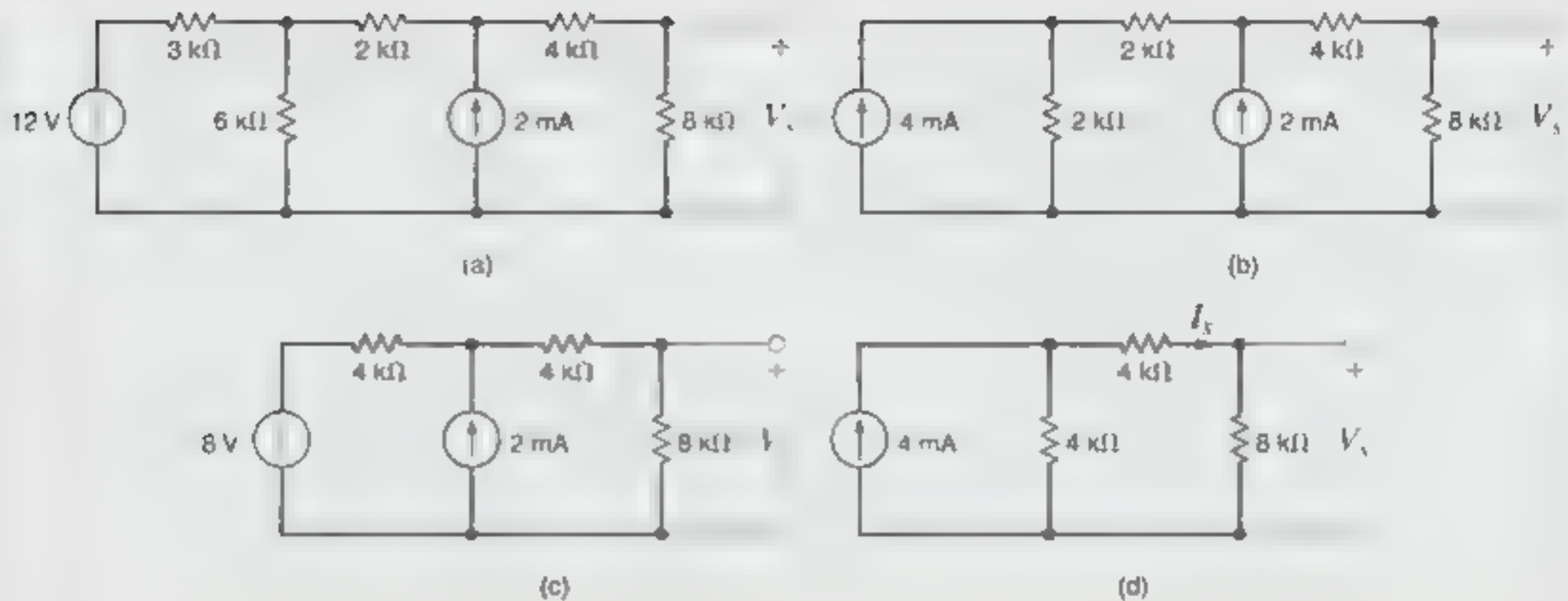


Figura 5.16 Circuitos utilizados no Exemplo 5.14.

corrente de 4 mA em paralelo com o resistor de 3 kΩ. Sendo o resistor de 3 kΩ combinado com o resistor de 6 kΩ, obtém-se o circuito mostrado na Fig. 5.16b. Note que, até esse ponto, eliminou-se um componente de circuito. Continuando a redução, converte-se a fonte de 4 mA e o resistor de 2 kΩ em uma fonte de 8 V em série com esse mesmo resistor de 2 kΩ. Os dois resistores de 2 kΩ que estão em série são agora combinados resultando na rede da Fig. 5.16c. Convertendo-se a combinação da fonte de 8 V e do resistor de 4 kΩ na fonte de 2 mA em paralelo com o resistor de 4 kΩ, e combinando a fonte de corrente resultante com a outra fonte de 2 mA, chega-se ao circuito mostrado na Fig. 5.16d. Nessa última configuração

pode-se simplesmente aplicar a divisão de corrente aos dois caminhos de resistências em paralelo e obter

$$I_x = (4 \times 10^{-3}) \left(\frac{4k}{4k + 4k + 8k} \right) = 1 \text{ mA}$$

e, portanto,

$$V_x = (1 \times 10^{-3})(8k) = 8 \text{ V}$$

Sugere-se ao leitor considerar as diversas possibilidades de abordagem desse problema utilizando qualquer outra técnica já apresentada.

Note que essa transformação sistemática, algumas vezes tediosa, permite a redução da rede, de modo metódico, a uma forma equivalente mais simples em relação a algum outro componente do circuito. Entretanto, deve-se constatar que essa técnica não se presta para circuitos da forma mostrada na Fig. 5.4.

Além disso, embora aplicável a redes que contenham fontes dependentes, ela não é tão útil quanto outras técnicas, e deve-se tomar cuidado para não transformar a parte do circuito que contenha a variável de controle.

Avaliação do Aprendizado

E5.14 Determine a tensão V_x do circuito mostrado na Fig. E5.3 utilizando a técnica de troca de fontes.

RESPOSTA: $V_x = \frac{4}{3} \text{ V}$

E5.15 Determine a corrente I_x do circuito mostrado na Fig. E5.15 utilizando a técnica de transformação de fontes.

RESPOSTA: $I_x = -1,94 \text{ mA}$.

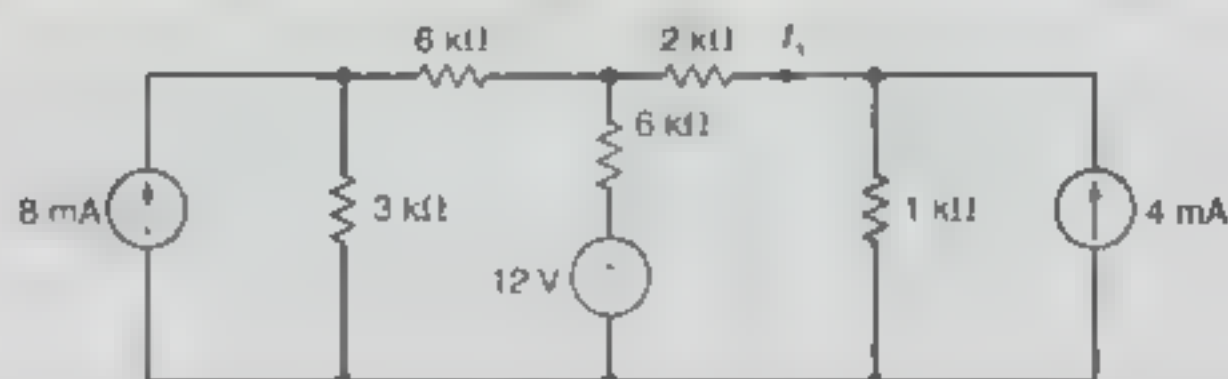


Figura E5.15

Nesse instante, é importante uma breve parada para uma reflexão sobre o que já foi aprendido; isto é, compara-se a técnica da análise nodal ou dos laços com a que utiliza os teoremas discutidos neste capítulo. Ao se deparar com uma rede a ser analisada, uma das primeiras providências a serem tomadas é a contagem do número de nós e de laços. Em seguida, considere o número de fontes. Por exemplo, a rede contém fontes de tensão ou fontes de corrente? Todos esses dados, juntamente com as informações a serem reunidas sobre a rede, fornecem uma base para a seleção do procedimento mais simples. Dependendo dos recursos computacionais disponíveis, pode-se resolver rapidamente as equações dos nós ou dos laços que definem a rede.

Com relação aos teoremas, percebeu-se que, em alguns casos, eles não necessariamente simplificam o problema, e uma abordagem direta utilizando a análise dos nós ou dos laços torna-se um excelente procedimento de análise. Essa é uma conclusão válida no caso de se estar procurando por alguma tensão ou corrente em particular. Entretanto, o verdadeiro valor dos teoremas está na compreensão que eles propiciam acerca da natureza física da rede. Por exemplo, a superposição permite que se determine a contribuição individual de cada fonte na grandeza a ser investigada. Por outro lado, com uma solução computacional das equações dos nós ou dos laços, não se consegue explicar o efeito no circuito decorrente da variação dos valores de certos parâmetros. Essa solução não ajuda na compreensão do conceito de carga sobre uma rede ou na análise das ramificações de redes interconectadas, ou ainda não esclarece a ideia de unir-se uma rede para a transferência da potência máxima. Os teoremas auxiliam na compreensão do efeito causado por um transdutor na entrada de um amplificador com uma certa resistência de

entrada. Eles auxiliam na explicação do efeito de uma carga, como um alto-falante, na saída de um amplificador. Essas informações não são conseguidas a partir da análise dos nós ou dos laços. De fato, apenas como um simples exemplo, suponha que uma rede, em um específico par de terminais, possua um circuito equivalente de Thévenin consistindo em uma fonte de tensão em série com um resistor de $2\text{ k}\Omega$. Ao se conectar um resistor de $2\text{ }\Omega$ à rede por meio desses terminais, a tensão entre os terminais do resistor de $2\text{ }\Omega$ será praticamente nula. Esse resultado será bastante óbvio ao se utilizar como procedimento o teorema de Thévenin, enquanto uma análise dos nós ou dos laços não fornecerá qualquer justificativa do porquê desse resultado.

Foram estudadas as redes constituídas apenas por fontes dependentes. Esse é um tópico muito importante, uma vez que todos os equipamentos eletrônicos, como os transistores, são modelados dessa forma. Os motores, nos sistemas de potência, também são modelados dessa maneira. Esses dispositivos de amplificação são utilizados em muitas aplicações distintas, como no controle de velocidade de um automóvel.

Além disso, é interessante notar que, ao se empregar uma transformação de fonte, como foi feito no Exemplo 5.14, a conversão simplesmente foi realizada em um e outro sentido, isto é, de um circuito equivalente de Thévenin para um circuito equivalente de Norton e vice-versa.

Finalmente, dispõe-se de uma poderosa ferramenta que pode ser utilizada para fornecer uma compreensão adicional tanto na análise quanto no projeto de circuitos. Essa ferramenta é o programa Excel da Microsoft, que permite uma análise dos efeitos da variação de parâmetros específicos em uma rede. O exemplo a seguir ilustrará a simplicidade desse procedimento.

EXEMPLO 5.15

Deseja-se utilizar o programa Excel da Microsoft na construção de um gráfico com os parâmetros equivalentes de Thévenin, isto é, a tensão V_{ca} e a resistência R_{Th} , do circuito mostrado na Fig. 5.17, fazendo-se a resistência R_x variar entre 0 e $10\text{ k}\Omega$.

SOLUÇÃO

A resistência de Thévenin é facilmente obtida pela substituição das fontes de tensão por curtos-circuitos. O resultado é

$$R_{\text{Th}} = 4 // R_x = \frac{4R_x}{4 + R_x} \quad 5.7$$

em que R_x e R_{Th} são expressas em $\text{k}\Omega$. O princípio da superposição pode ser utilizado efetivamente na obtenção da tensão

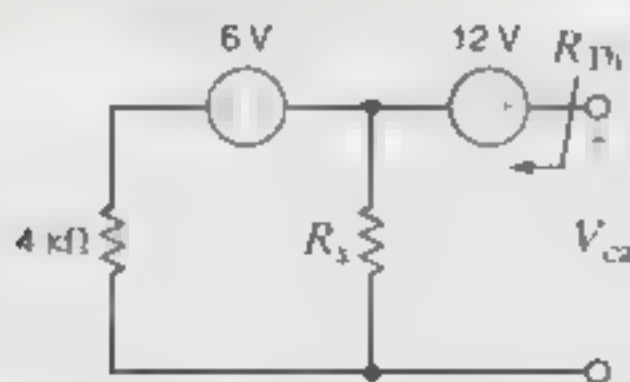


Figura 5.17 Circuito utilizado no Exemplo 5.15.

V_{ca} . Quando a fonte de 12 V é substituída por um curto-circuito, tem-se

$$V_{\text{ca}} = -6 \left[\frac{R_x}{R_x + 4} \right]$$

A aplicação desse mesmo procedimento à fonte de 6 V fornece

$$V_{\text{ca}} = 12$$

e a tensão total do circuito aberto é

$$V_{\text{ca}} = 12 - 6 \left[\frac{R_x}{R_x + 4} \right] \quad 5.8$$

No programa Excel, deseja-se (1) variar a resistência R_x entre 0 e $10\text{ k}\Omega$, (2) calcular a resistência R_{Th} e a tensão V_{ca} para cada valor de R_x e (3) construir o gráfico de V_{ca} e R_{Th} em função de R_x . Inicia-se pela abertura do Excel e digitando-se os títulos das colunas, conforme mostrado na Fig. 5.18a. Em seguida, entra-se com um zero na primeira célula da coluna de R_x , na posição coluna-linha A4. Para que essa coluna seja preenchida automaticamente com os valores desse resistor, vá para o menu Editar (Edu) e selecione o comando Preencher/Sequência (Fill/Series) para que a janela mostrada na Fig. 5.18b seja aberta. Essa janela já está devidamente editada para que 101 pontos sejam gerados. O resultado é a série dos valores de R_x de 0 até $10\text{ k}\Omega$ em intervalos de $100\text{ }\Omega$. Para en-

trar com a Eq. (5.8), vá para a posição B4 (exatamente abaixo do título da coluna, V_{oc}). Entre com o texto a seguir e não se esqueça do sinal de igualdade:

$$=12-6*A4/(A4+4)$$

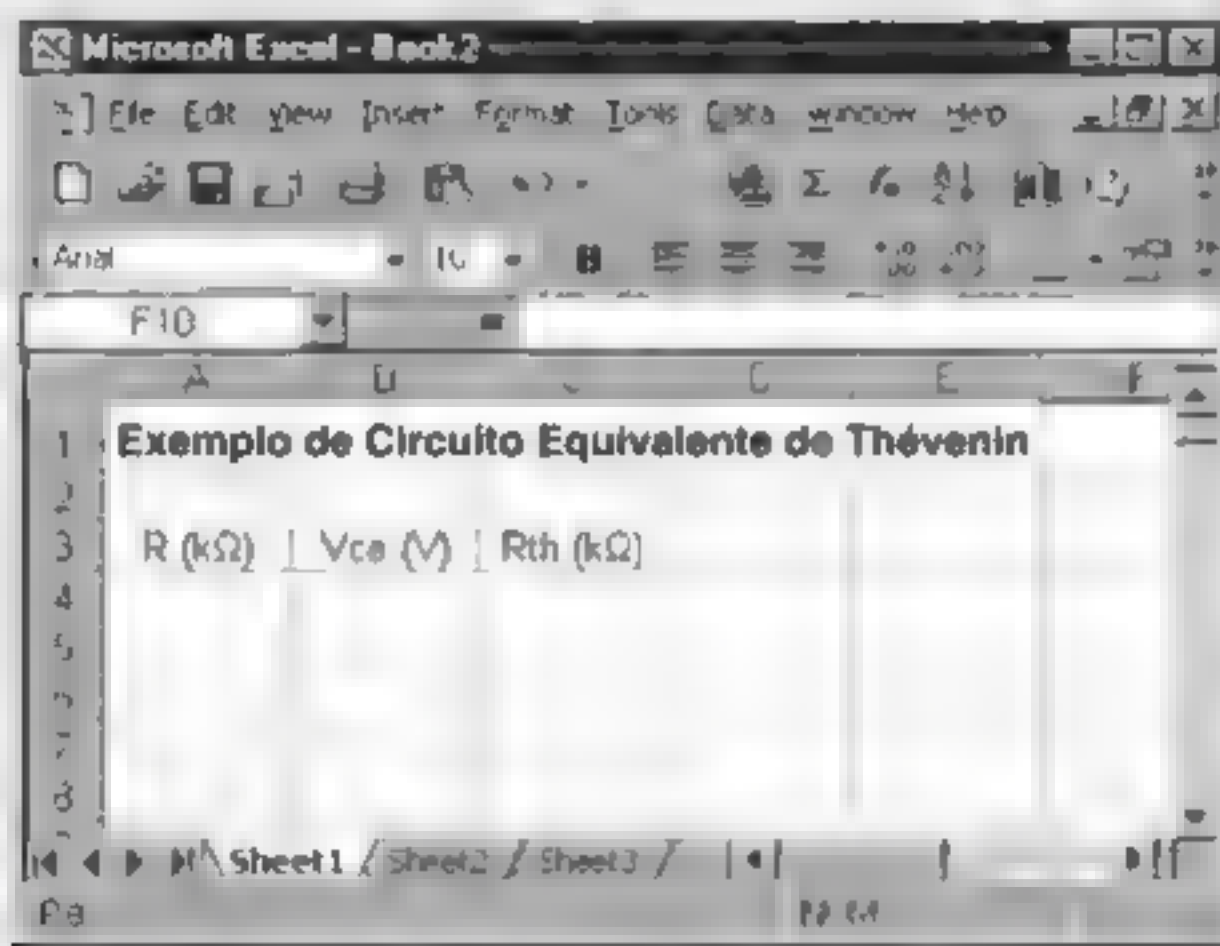
Essa é a Eq. (5.8) com a resistência R_x substituída pelo primeiro valor de R_x que está na posição A4. Analogamente, para R_{Th} entre com a expressão a seguir na posição C4.

$$=4*A4/(A4+4)$$

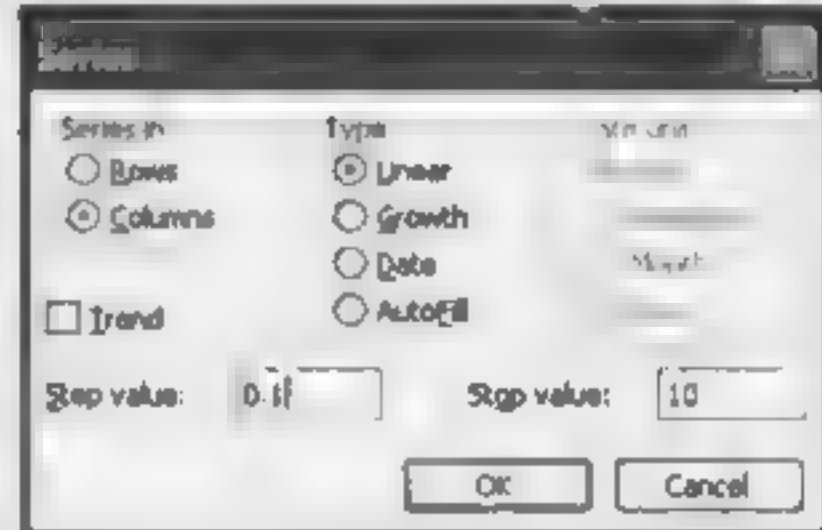
Para reproduzir a expressão da célula B4 para todos os valores de R_x , selecione a célula B4, clique na quina direita inferior

da célula, mantenha o botão do mouse apertado e arraste para baixo até a célula B104 e libere o botão do mouse. Repita essa operação para R_{Th} , duplicando a célula C4.

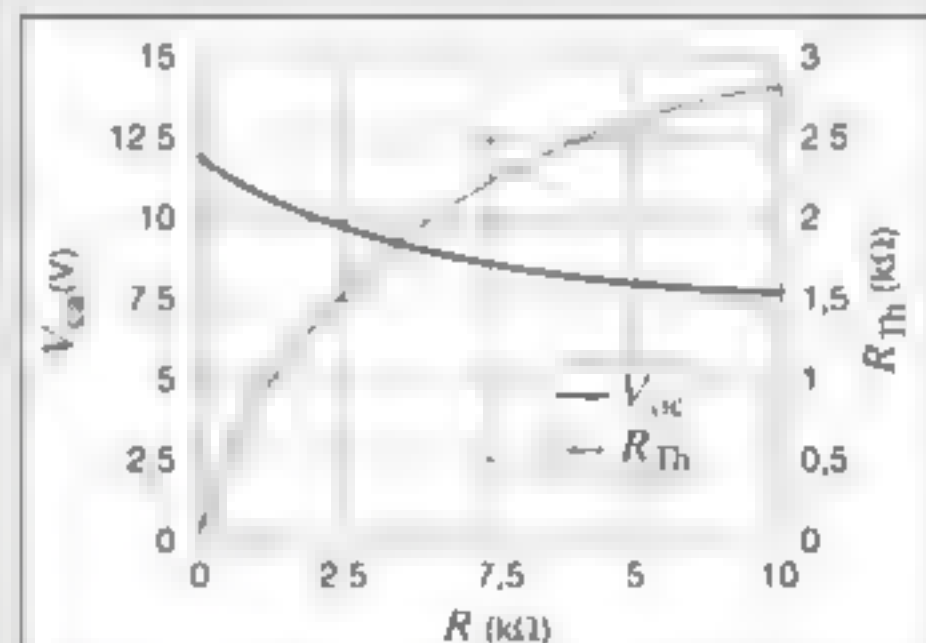
Para construir o gráfico de resultados, inicialmente arraste o cursor ao longo de todas as células entre A4 e C104, marcando-as. Em seguida, pelo menu Inserir (*Insert*), selecione Gráfico (*Chart*). Recomenda-se fortemente que o tipo linha (*Scatter*) seja escolhido para o gráfico XY. O Excel irá interagir com o usuário passo a passo sobre algumas formatações básicas do gráfico, que, após algumas manipulações pode ficar com a aparência daquela mostrada na Fig. 5.18c.



(a)



(b)



(c)

Figura 5.18 (a) Planilha do Excel para o Exemplo 5.15, mostrando os títulos das colunas com as variáveis desejadas. (b) Edição da janela aberta pelo comando Preencher/Sequência (*Fill/Series*) para a variação do resistor R_x e (c) o gráfico final de V_{cc} e R_{Th} .

5.4 Transferência de Potência Máxima

Algumas vezes na análise de circuitos há interesse na determinação da potência máxima que pode ser fornecida para a carga. A aplicação do teorema de Thévenin permite determinar a potência máxima que um circuito pode fornecer e a forma pela qual se pode ajustar a carga para que ocorra uma transferência de potência máxima.

Seja a análise do circuito mostrado na Fig. 5.19. A potência fornecida à carga pode ser expressa por

$$P_{\text{carga}} = i^2 R_c = \left(\frac{v}{R + R_c} \right)^2 R_c$$

Deseja-se determinar o valor do resistor R_c que maximiza essa grandeza. Assim, deriva-se essa expressão em relação a R_c e iguala-se a derivada a zero:

$$\frac{dP_{\text{carga}}}{dR_c} = \frac{(R + R_c)^2 v^2 - 2v^2 R_c (R + R_c)}{(R + R_c)^4} = 0$$

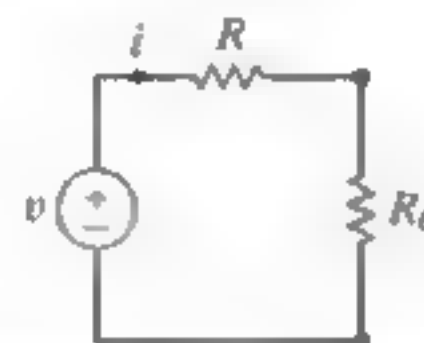


Figura 5.19 Circuito equivalente para a análise da transferência de potência máxima.

que fornece

$$R_C = R$$

Em outras palavras, a potência máxima transferida ocorre quando a resistência representativa da carga R_C é igual a R . Em-

bora esse seja um resultado muito importante, ele foi obtido utilizando-se a rede simples mostrada na Fig. 5.19. Todavia, deve-se lembrar que a tensão v e a resistência R na Fig. 5.19 poderiam representar o circuito equivalente de Thévenin para qualquer rede linear.

EXEMPLO 5.16

Seja a determinação do valor de R_C para a transferência de potência máxima na rede mostrada na Fig. 5.20a e a obtenção da potência máxima que pode ser transferida a essa carga.

SOLUÇÃO

Inicialmente, deve-se obter o circuito equivalente de Thévenin para a rede, excluindo-se a carga. A tensão V_{ca} pode ser calculada com base no circuito mostrado na Fig. 5.20b. As equações das malhas para essa rede são

$$I_1 = 2 \times 10^{-3}$$

$$3k(I_2 - I_1) + 6kI_2 + 3 = 0$$

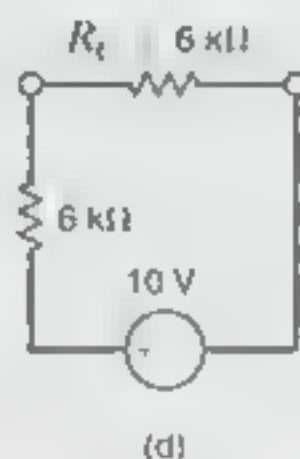
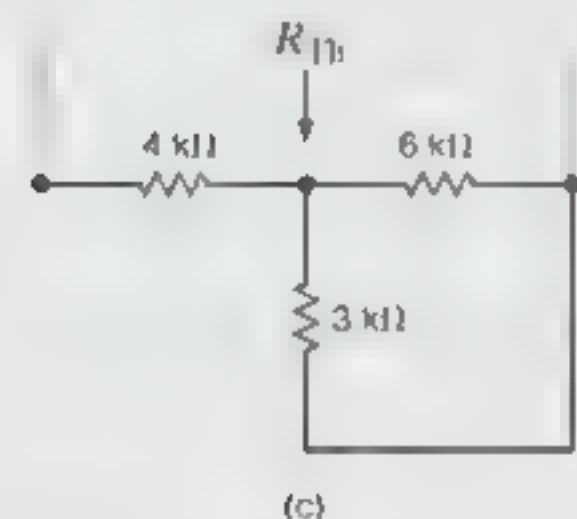
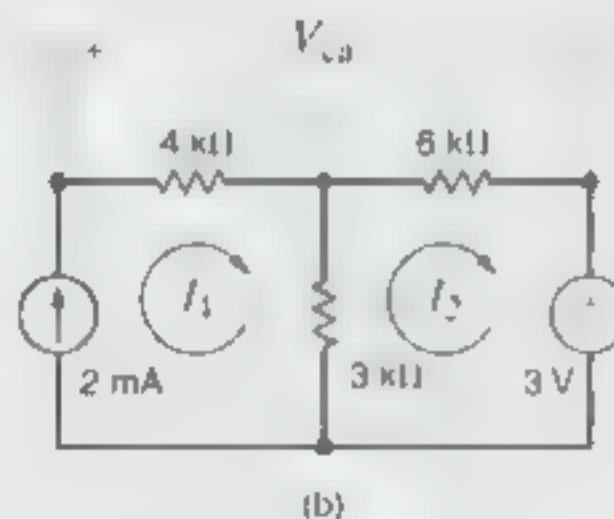
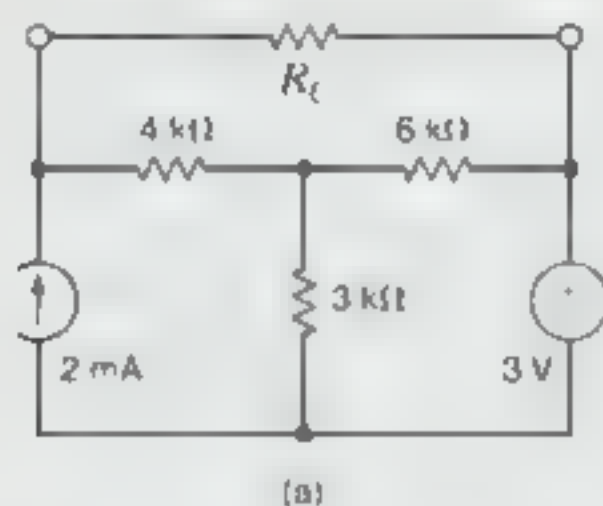


Figura 5.20 Circuitos utilizados no Exemplo 5.16.

A solução dessas equações fornece $I_2 = 1/3$ mA, logo,

$$\begin{aligned} V_{ca} &= 4kI_1 + 6kI_2 \\ &= 10 \text{ V} \end{aligned}$$

A resistência R_{Th} , mostrada na Fig. 5.20c, é igual a $6 \text{ k}\Omega$; portanto, $R_C = R_{Th} = 6 \text{ k}\Omega$ para a transferência de potência máxima. A potência máxima transferida para o resistor carga do circuito mostrado na Fig. 5.20d será, portanto,

$$P_C = \left(\frac{10}{12k} \right)^2 (6k) = \frac{25}{6} \text{ mW}$$

EXEMPLO 5.17

Seja a determinação do valor de R_C para a condição de transferência de potência máxima e da potência máxima transferida para a carga do circuito mostrado na Fig. 5.21a

SOLUÇÃO

Deseja-se reduzir a rede à forma mostrada na Fig. 5.19. Poder-se-ia formar o circuito equivalente cortando a rede na posição da carga. Todavia, um exame mais detalhado da rede indica

que a análise ficará mais simples ao se quebrar a rede à esquerda do resistor de $4 \text{ k}\Omega$. Entretanto, assim fazendo, deve-se lembrar que a transferência da potência máxima ocorrerá quando $R_C = R_{Th} + 4 \text{ k}\Omega$. A tensão V_{ca} pode ser calculada pela rede mostrada na Fig. 5.21b. A formação de um supernó no entorno da fonte dependente juntamente com seus nós de conexão conduz à equação decorrente da aplicação da LKC para esse supernó, qual seja,

$$\frac{V_{ca} - 2000I_x}{1k + 3k} + (-4 \times 10^{-3}) + \frac{V_{ca}}{2k} = 0$$

em que

$$I'_x = \frac{V_{ca}}{2k}$$

Essas equações fornecem $V_{ca} = 8 \text{ V}$. A corrente do curto-circuito pode ser obtida a partir da rede mostrada na Fig. 5.21c. É nesse ponto que pode ser verificada a vantagem de se cortar a rede à esquerda do resistor de $4 \text{ k}\Omega$. O curto-circuito anula o resistor de $2 \text{ k}\Omega$ e, portanto, $I''_x = 0$. Assim, o circuito é reduzido àquele mostrado na Fig. 5.21d, no qual, claramente,

$I_{sc} = 4 \text{ mA}$. Portanto,

$$R_{Th} = \frac{V_{ca}}{I_{sc}} = 2 \text{ k}\Omega$$

A conexão do circuito equivalente de Thévenin ao restante do circuito original resulta na rede apresentada na Fig. 5.21e. Para uma transferência de potência máxima, $R_C = R_{Th} + 4 \text{ k}\Omega = 6 \text{ k}\Omega$, e a potência máxima transferida será

$$P_C = \left(\frac{8}{12k} \right)^2 (6k) = \frac{8}{3} \text{ mW}$$

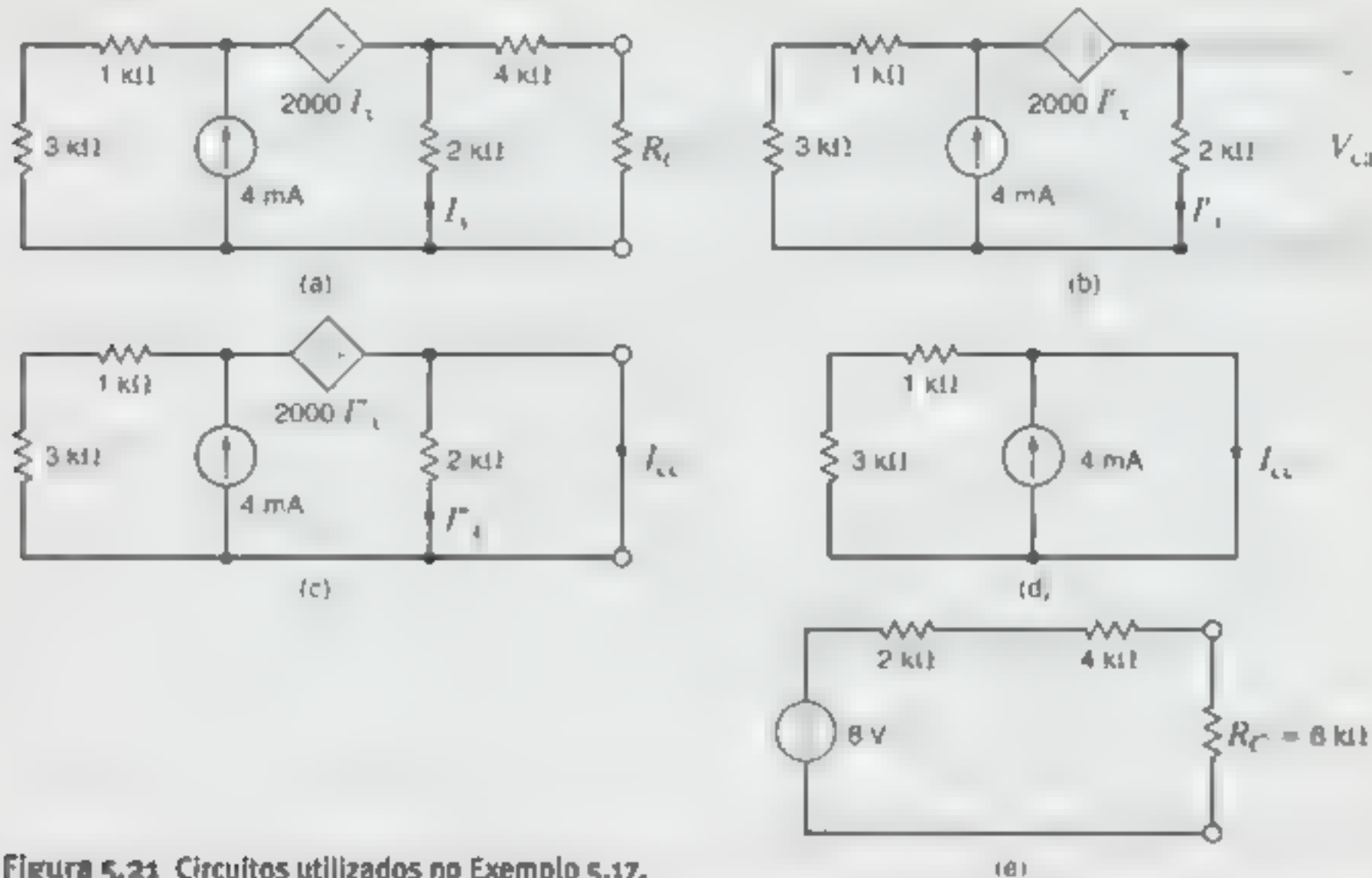


Figura 5.21 Circuitos utilizados no Exemplo 5.17.

Avaliação do Aprendizado

E5.16 Dado o circuito mostrado na Fig. E5.16, determine a resistência R_C para que ocorra a transferência de potência máxima. Determine também a potência máxima transferida.

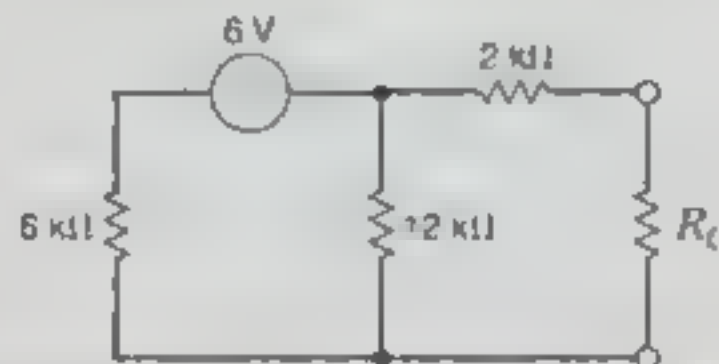


Figura E5.16

RESPOSTAS: $R_C = 6 \text{ k}\Omega$ e

$$P_C = \frac{2}{3} \text{ mW}$$

E5.17 Determine o valor da resistência R_C para que ocorra a transferência de potência máxima e o valor da potência máxima transferida a esse resistor do circuito mostrado na Fig. E5.17.

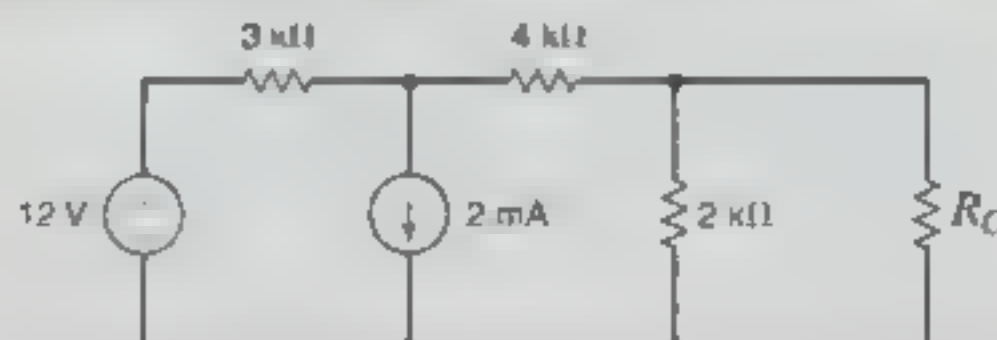
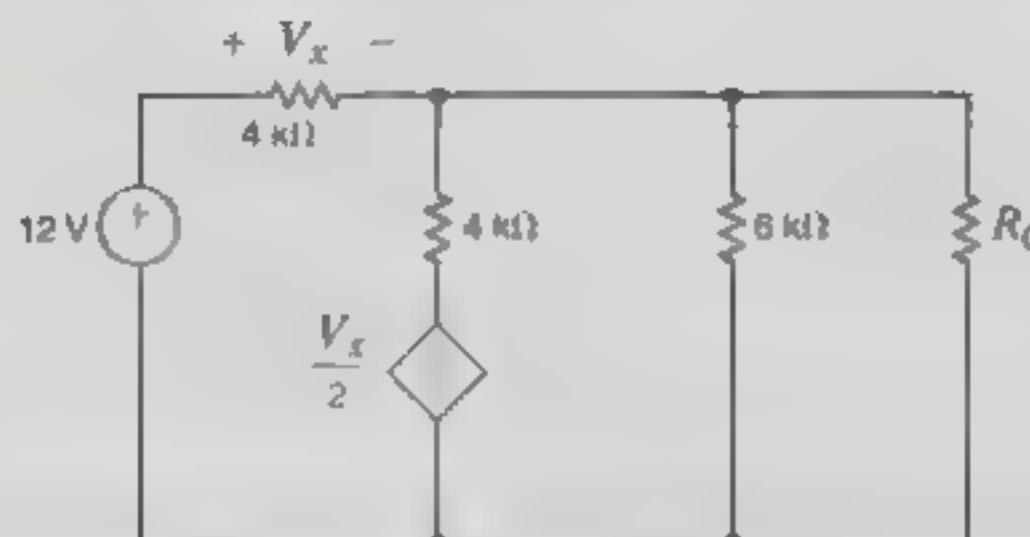


Figura E5.17

RESPOSTAS: $14/9 \text{ k}\Omega$ e

$$2/7 \text{ mW}$$

E5.18 Determine o valor da resistência R_c para que ocorra a transferência de potência máxima e o valor da potência máxima transferida a esse resistor do circuito mostrado na Fig. E5.18.



RESPOSTAS: 24/13 kΩ e 27/26 mW.

Figura E5.18

EXEMPLO 5.18

Dada a rede mostrada na Fig. 5.22, com $V_s = 5\text{ V}$ e $R_1 = 2\ \Omega$, pode-se examinar diversos aspectos relacionados à transferência de potência máxima representando graficamente as grandezas V_s , I , P_s , P_c e a eficiência ($= P_s/P_c$) em função da relação de resistências R_2/R_1 .

SOLUÇÃO

As grandezas a serem representadas graficamente podem ser determinadas pelas simples técnicas de análise de circuitos. Utilizando o conceito de divisão de tensão, tem-se

$$V_c = \left[\frac{R_2}{R_1 + R_2} \right] V_s = \left[\frac{R}{2 + R} \right] (5)$$

Pela lei de Ohm, pode-se escrever

$$I = \frac{V_s}{R_1 + R_2} = \frac{5}{2 + R}$$

As potências de entrada e de saída são

$$P_c = IV_c = \frac{V_s}{R_1 + R_2} \cdot \frac{25}{2 + R_2} = \frac{25}{2 + R_2}$$

$$P_s = I^2 R = R \left[\frac{V_s}{R_1 + R_2} \right]^2 = R \left[\frac{5}{2 + R_2} \right]^2$$

Finalmente, a eficiência pode ser expressa como

$$\text{eficiência} = \frac{P_s}{P_c} = \frac{R_1}{R_1 + R_2} = \frac{R}{2 + R}$$

Os gráficos resultantes das diversas grandezas são mostrados na Fig. 5.23 para R_2 variando de $0,1R_1$ até $10R_1$. Observe que quando R_2 aumenta, V_c aumenta tendendo ao valor de V_s (5 V), conforme estabelecido pela divisão de tensão. A corrente diminui de acordo com o preconizado pela lei de Ohm. Assim, para pequenos valores de R_2 , a tensão V_c é pequena e, quando o valor de R_2 é alto, a corrente I é pequena. Como resultado, a potência de saída (o produto dessas duas grandezas) apresen-

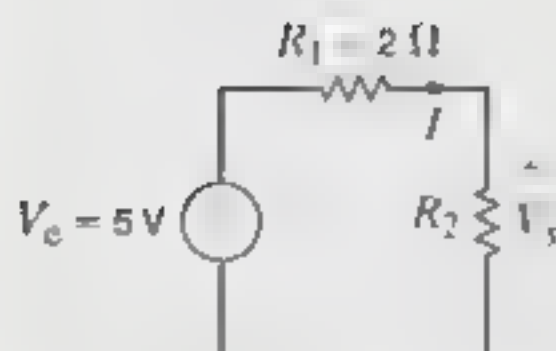


Figura 5.22 Circuito utilizado na análise da transferência de potência máxima.

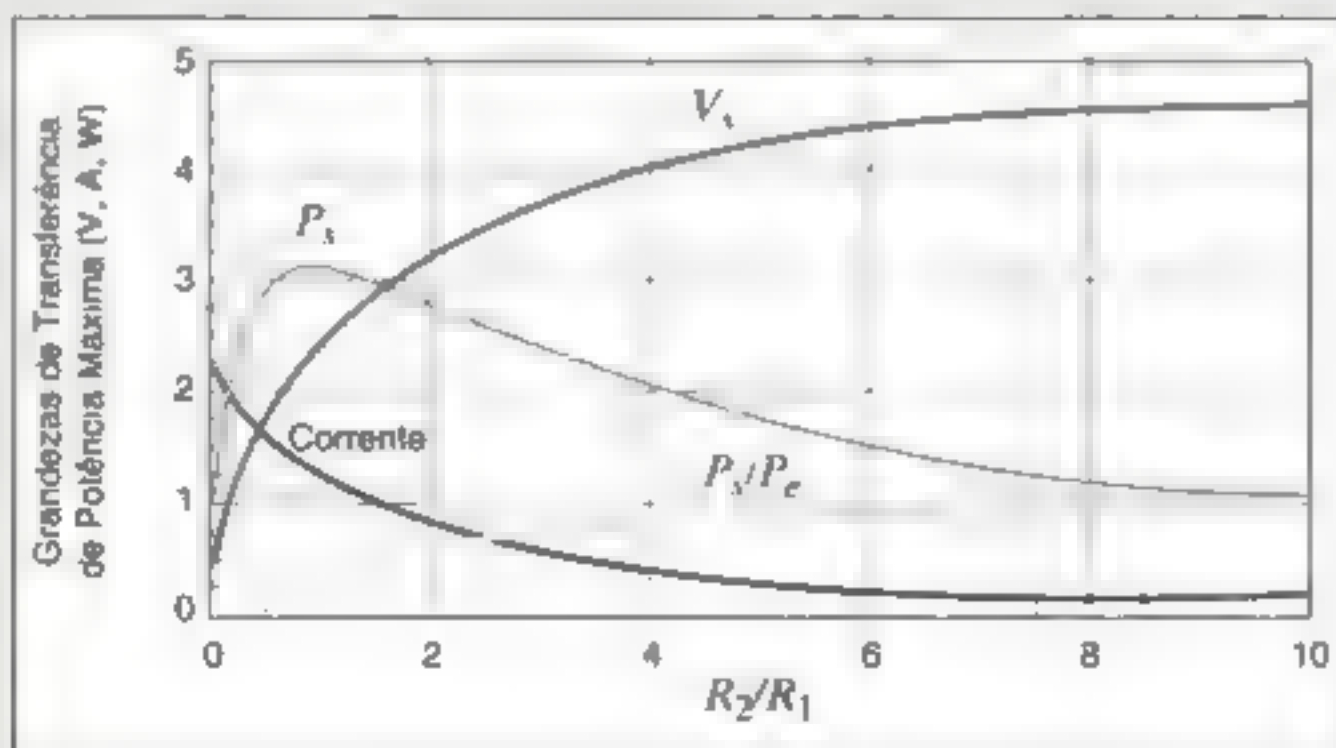


Figura 5.23 Gráfico do comportamento das grandezas relacionadas à transferência de potência máxima para a rede da Fig. 5.22. (As unidades de tensão, corrente e potência são volts, ampères e watts, respectivamente.)

ta um valor máximo quando $R_2/R_1 = 1$, conforme estabelecido pela teoria da transferência de potência máxima.

A potência máxima não corresponde aos valores máximos da tensão de saída, da corrente ou da eficiência. Na realidade, na condição de transferência de potência máxima, a eficiência será sempre igual a 0,5, ou seja, 50%. Ao representar uma concessionária que fornece energia a seus consumidores, você desejaria operar na condição de transferência de potência má-

xima? A resposta a essa questão é óbvia. "Não" porque a eficiência seria de apenas 50%. A concessionária somente seria capaz de fornecer a seus consumidores a energia referente a 50% da energia gerada. Não é incomum para uma grande concessionária de energia elétrica gastar bilhões de dólares, por ano, para produzir eletricidade. A concessionária de energia elétrica está mais interessada em operar com eficiência máxima.

5.5 Exemplo de Aplicação

EXEMPLO DE APLICAÇÃO 5.19

Na segunda-feira à tarde, Connie, em um dado instante, lembrou-se que deveria terminar um trabalho a ser entregue na terça-feira pela manhã. Quando ela se sentou diante de seu computador para começar a digitar o trabalho, descobriu que o mouse não estava funcionando. Após desmontá-lo e fazer algumas verificações, percebeu que o mouse contém uma placa de circuito impresso que é alimentada por uma fonte de 5 V, instalada em um compartimento no interior do computador. Além disso, observou também que a placa é constituída de vários resistores, alguns op-amps e um dispositivo não identificado, que está diretamente conectado à fonte de 5 V do computador, conforme mostrado na Fig. 5.24a. Utilizando um voltímetro para medir as tensões nodais, Connie confirma que todos os resistores e op-amps estão funcionando perfeitamente e que a fonte de tensão está alimentando corretamente a placa do mouse. Todavia, sem conhecer a função do dispositivo misterioso, presente no circuito, ela não pôde determinar suas condições. Telefonando para o representante do fabricante, este concordou que, se Connie pudesse determinar o

circuito equivalente de Thévenin para o componente nos nós A-B com o computador ligado, ele seria capaz de dizer se o dispositivo estava funcionando apropriadamente. De posse de um único resistor de 1 k Ω e um voltímetro, Connie enfrentou problema.

SOLUÇÃO

Para determinar o circuito equivalente de Thévenin do dispositivo desconhecido, junto com a fonte de 5 V, Connie, inicialmente, isolou os nós A e B do restante dos componentes da placa para medir a tensão do circuito aberto. A leitura obtida pelo voltímetro foi de 2,4 V. Assim, a tensão equivalente de Thévenin é de 2,4 V. Em seguida, ela conectou o resistor de 1 k Ω aos terminais A-B conforme mostrado na Fig. 5.24b. A leitura no voltímetro foi, nesse caso, $V_{AB} = 0,8$ V. A utilização da divisão de tensão para expressar V_{AB} em função de V_{Th} , R_{Th} e R_{teste} , na Fig. 5.24b, fornece a expressão

$$0,8 = V_{Th} \left(\frac{1k}{1k + R_{Th}} \right)$$

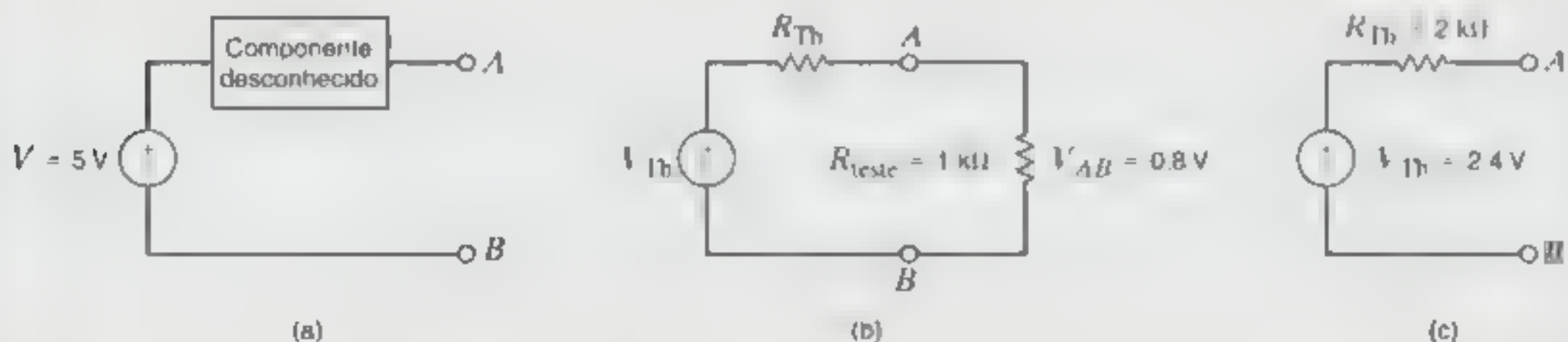


Figura 5.24 Rede utilizada no Exemplo 5.19.

Resolvendo a equação para R_{Th} obtém-se

$$R_{Th} = 2,0 \text{ k}\Omega$$

Portanto, o dispositivo desconhecido e a fonte de 5 V podem ser representados nos terminais A-B pelo circuito equivalente

de Thévenin mostrado na Fig. 5.24c. Quando Connie telefonou para o representante com esses dados, ele a informou que o dispositivo estava, de fato, defeituoso.

5.6 Exemplos de Projeto

EXEMPLO DE PROJETO 5.20

Normalmente, ao se utilizar um equipamento eletrônico, existe a necessidade de ajustar alguma grandeza, como tensão, frequência, contraste, ou outra qualquer. Quando forem necessários ajustes muito precisos, é conveniente que as sintonias grossas e finas sejam realizadas separadamente. Portanto, projeta-se agora um circuito no qual duas entradas (isto é, tensões altas e baixas) são combinadas para produzir uma nova tensão expressa por

$$V_{\text{sintonia}} = \left[\frac{1}{2} \right] V_{\text{grossa}} + \left[\frac{1}{20} \right] V_{\text{fina}}$$

SOLUÇÃO

Como a equação a ser implementada é igual à soma de dois termos, sua solução pode ser caracterizada como uma aplicação excelente da superposição. Como os fatores de ganho na equação (quais sejam, $1/2$ e $1/20$) são menores que um, um divisor de tensão com duas entradas parece ser uma escolha

lógica. Um circuito típico para essa aplicação é mostrado na Fig. 5.25a. Os dois subcircuitos superpostos são mostrados em separado nas Figs. 5.25b e c. Empregando a divisão de tensão à rede mostrada na Fig. 5.25b, tem-se

$$\frac{V_{\text{sint. G}}}{V_{\text{grossa}}} = \left[\frac{R // R_2}{(R // R_2) + R_1} \right] = \frac{1}{2}$$

e, portanto,

$$R // R_2 = R_1$$

De forma similar, obtém-se

$$\frac{V_{\text{sint. F}}}{V_{\text{fina}}} = \left[\frac{R // R_1}{(R // R_1) + R_2} \right] = \frac{1}{20}$$

a qual requer que

$$R_2 = 19(R // R_1)$$

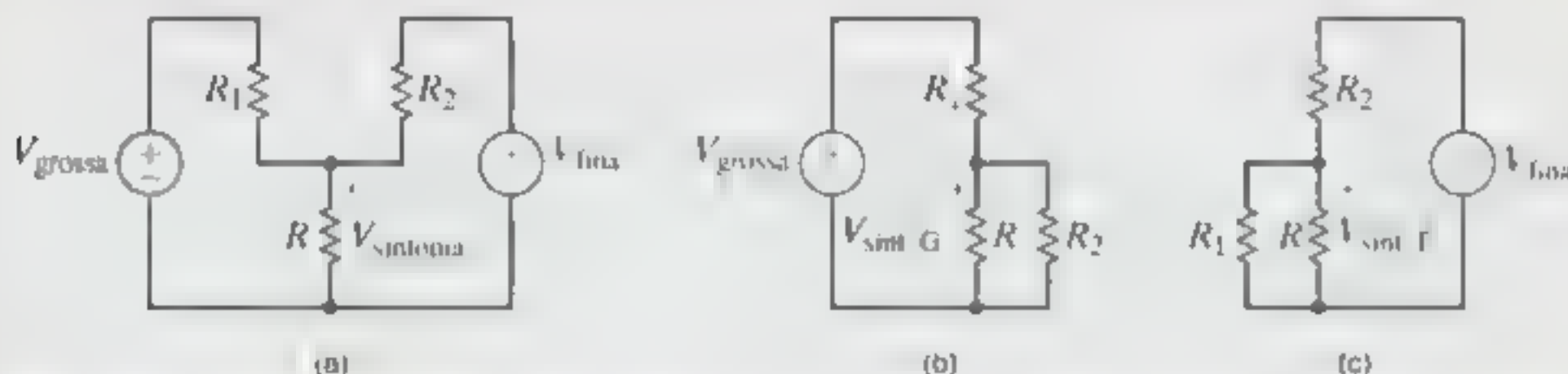


Figura 5.25 (a) Circuitos de ajustes grosso e fino, (b) com V_{fina} ajustada para zero e (c) com V_{grossa} ajustada para zero.

Note que as duas equações de restrição dos resistores apresentam três incógnitas – R , R_1 e R_2 . Assim, deve-se escolher o valor para um dos resistores e resolver as equações para os outros dois. Ao se seleccionar arbitrariamente $R = 1 \text{ k}\Omega$, então

$R_1 = 900 \Omega$ e $R_2 = 9 \text{ k}\Omega$. Esses resultados completam o projeto do circuito. Esse exemplo indica que a superposição não é apenas uma ferramenta de análise útil, mas também propicia um sentimento físico para a análise de novos circuitos.

EXEMPLO DE PROJETO 5.21

Os cabos axiais geralmente são utilizados nos sistemas que operam com frequências muito altas. Por exemplo, eles são comumente utilizados para transmitir os sinais de TV a cabo. Nesses sistemas o casamento de resistências utilizado para transferir a potência máxima é crítico. Um aparato de laboratório comumente utilizado na pesquisa e no desenvolvimento de dispositivos de alta frequência é o atenuador passivo. Esse dispositivo é, basicamente, um divisor de tensão, porém, a resistência equivalente em suas portas de entrada é cuidadosamente projetada em relação ao casamento de resistências. Considere a rede mostrada na Fig. 5.26 na qual uma fonte, modelada por V_F e R_F (50Ω), aciona um atenuador passivo (conjunto de resistores), o qual é conectado a uma carga equivalente. Elaboremos o projeto desse dispositivo de modo que

apresente uma resistência equivalente a 50Ω e divida (isto é, atenuar) a tensão de entrada por um fator de 10.

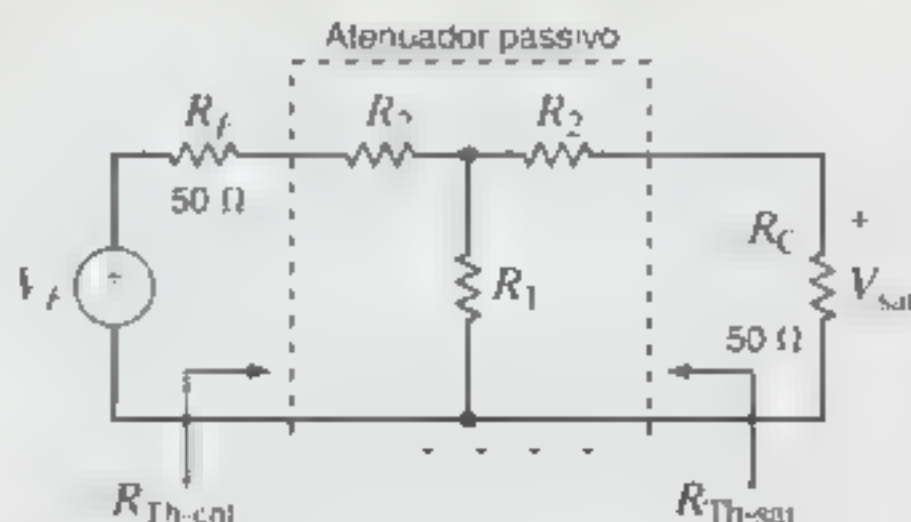


Figura 5.26 Modelo de circuito para o projeto do atenuador passivo.

SOLUÇÃO

Como o atenuador ou "Rede T" deve apresentar uma resistência equivalente a $50\ \Omega$, é necessário que R_{Th-ent} e R_{Th-sai} sejam iguais a $50\ \Omega$. Uma vez que esses valores de resistência de Thévenin são iguais e o circuito é simétrico, pode-se utilizar a designação R_1 duas vezes para indicar que aqueles resistores serão de mesmo valor.

$$R_{Th-ent} = R_2 + [R_1 // (R_2 + 50)] = 50$$

$$R_{Th-sai} = R_2 + [R_1 // (R_2 + 50)] = 50$$

Uma vez que as equações são idênticas, os parâmetros de resistência equivalentes a Thévenin serão designados simples-

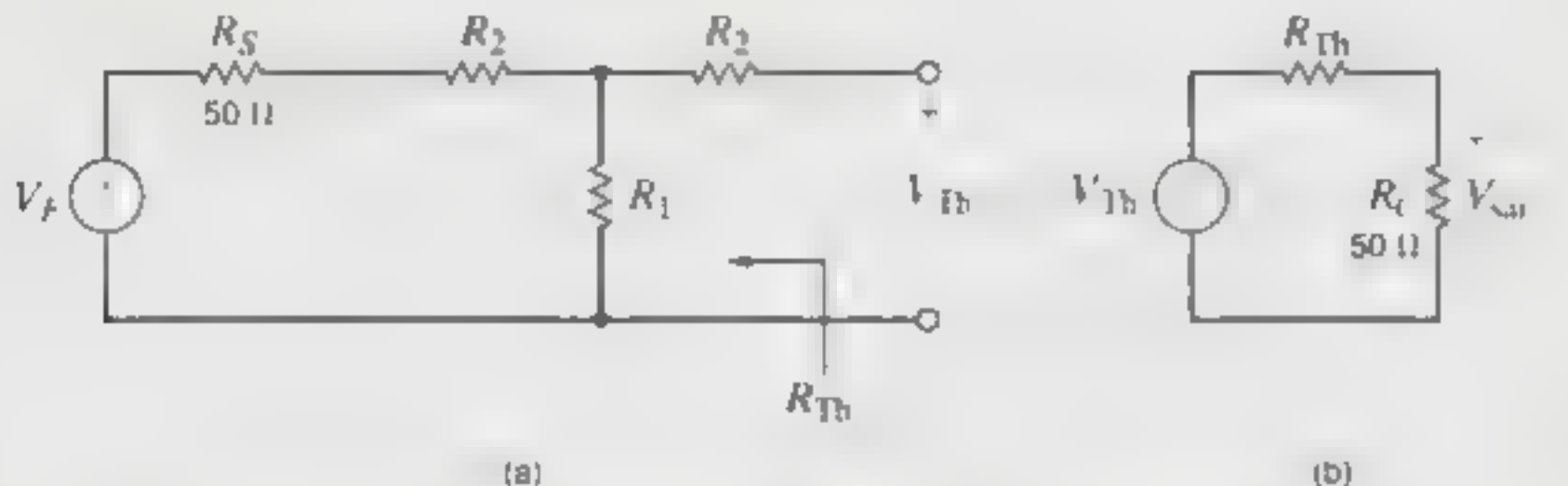


Figura 5.27 (a) Circuito utilizado na obtenção de V_{Th} e (b) modelo resultante.

A combinação dessas equações fornece a atenuação de V_F para V_L

$$\frac{V_L}{V_F} = \left[\frac{V_L}{V_{Th}} \right] \left[\frac{V_{Th}}{V_F} \right] = \frac{1}{2} \left[\frac{R_1}{R_1 + R_2 + 50} \right] = \frac{1}{10}$$

A equação da resistência equivalente de Thévenin e essa equação de atenuação formam um conjunto de duas equações com duas incógnitas, R_1 e R_2 . Resolvendo-se essas equações

mente por R_{Th} . A tensão equivalente a Thévenin, V_{Th} , pode ser deduzida facilmente a partir do circuito mostrado na Fig. 5.27 utilizando uma divisão de tensão.

$$V_{Th} = V_F \left[\frac{R_1}{R_1 + R_2 + 50} \right]$$

Com base no circuito equivalente de Thévenin mostrado na Fig. 5.27b, obtém-se

$$V_L = V_{Th} \left[\frac{50}{R_{Th} + 50} \right] = \frac{V_{Th}}{2}$$

obtém-se $R_1 = 20,83\ \Omega$ e $R_2 = 33,33\ \Omega$. Para um casamento preciso de resistências, esses resistores devem apresentar um alto nível de precisão.

Com esses baixos valores de resistores, a dissipação de potência pode se tornar significativa quando V_F aumenta. Por exemplo, se $V_F = 10\text{ V}$, $V_L = 1\text{ V}$ e a potência dissipada no resistor R_2 conectado à fonte de entrada será de 333 mW. Para se manter a temperatura daquele resistor em níveis razoáveis, a potência nominal do resistor deve ser de no mínimo 0,5 W.

EXEMPLO DE PROJETO 5.22

Seja o projeto de um circuito que realize a seguinte equação.

$$V_o = -3V_F - 2000I_F$$

SOLUÇÃO

Uma análise dessa equação indica que será necessário adicionar dois termos, um dos quais é oriundo de uma fonte de tensão e o outro de uma fonte de corrente. Como os termos possuem sinais negativos, parece que o uso de um estágio com op-amp inversor seria de grande utilidade. Assim, um possível circuito para essa aplicação seria o mostrado na Fig. 5.28.

O circuito equivalente de Norton apresentará em seus terminais A-B uma vista composta das entradas do op-amp. A superposição também pode ser utilizada em conjunção com o equivalente de Norton para simplificar a análise. Com o uso

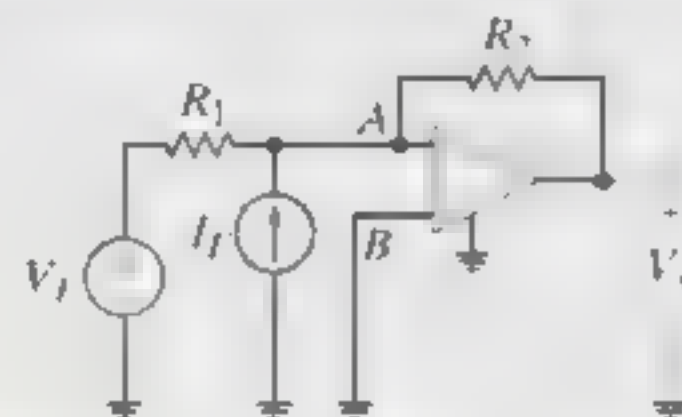


Figura 5.28 Circuito utilizado no Exemplo 5.22.

da rede mostrada na Fig. 5.29a, pode-se determinar a contribuição de V_F para a corrente de curto-circuito, I_{cc} , a qual será designada por I_{cc1} .

$$I_{cc1} = \frac{V_F}{R_1}$$

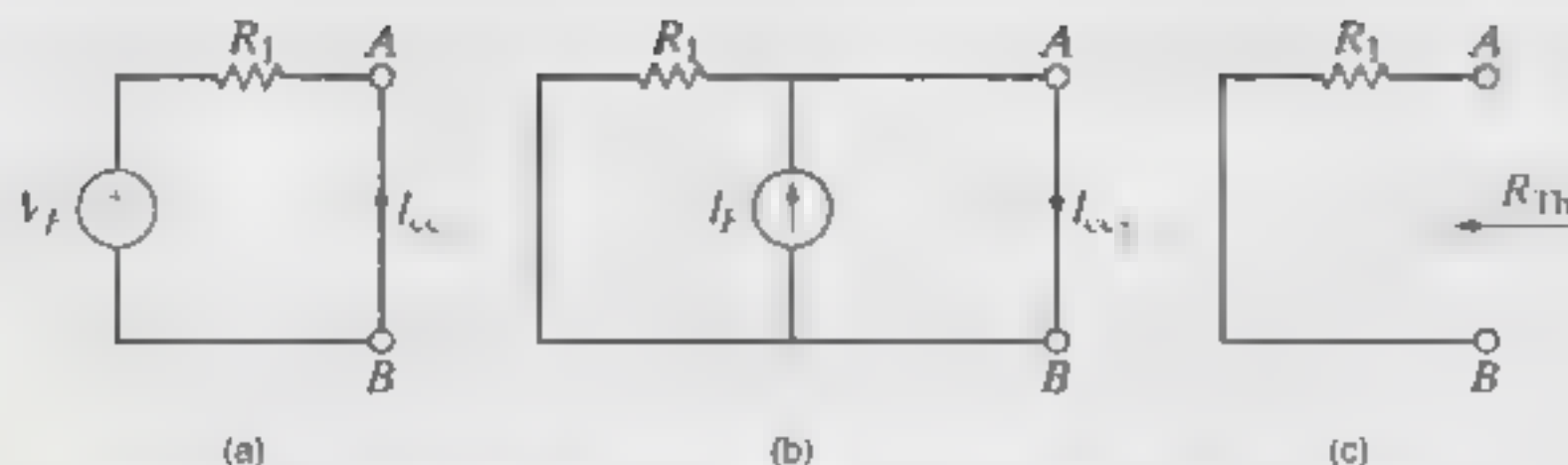


Figura 5.29 Circuitos utilizados na dedução de um circuito equivalente de Norton

Da mesma forma, utilizando a Fig. 5.29b, obtém-se que a contribuição de I_f para a corrente de curto-circuito é

$$I_{cc} = I_f$$

Empregando a superposição, a soma dessas duas correntes fornece a corrente de curto-circuito real

$$I_{cc} = \frac{V_f}{R} + I_f$$

A resistência equivalente de Thévenin em nós A-B é obtida a partir da rede da Fig. 5.29c como

$$R_{Th} = R$$

O circuito equivalente é agora redesenhado na Fig. 5.30 em que foram empregadas as condições ideais para o op-amp (isto é, $V_e = 0$) e o fato de ser nula a corrente que entra nos terminais do op-amp. Como a tensão V_e atua diretamente entre os terminais da resistência R_{Th} , a corrente nesse resistor também será nula. Assim, toda a corrente I_{cc} fluirá por meio de R_2 , produzindo a tensão

$$V = -R_2 \left[\frac{V_f}{R_1} + I_f \right] = -\frac{R_2}{R_1} V_f - I_f R_2$$

A comparação dessa equação com o requisito de projeto estabelece que

$$\frac{R_2}{R_1} = 3 \quad \text{e} \quad R_2 = 2000 \, \Omega$$

o que fornece $R_1 = 667 \, \Omega$. A combinação dos resistores de $1 \, \text{k}\Omega$ e $2 \, \text{k}\Omega$ em paralelo fornecerá exatamente o valor necessário de $667 \, \Omega$.

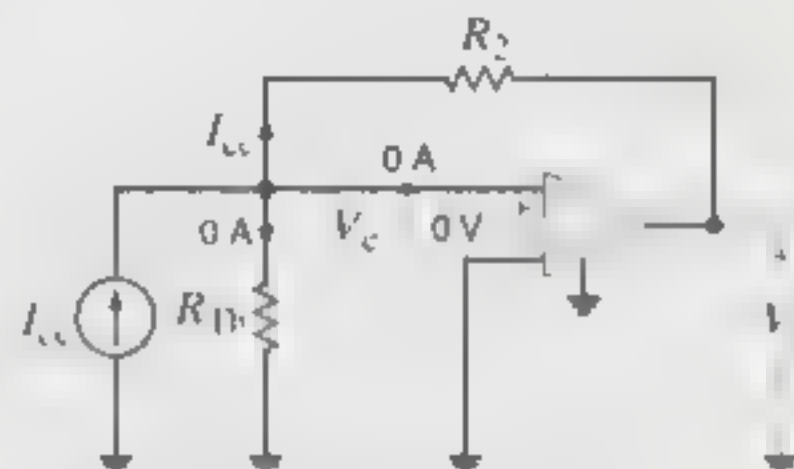


Figura 5.30 Circuito necessário contendo o equivalente de Norton.

EXEMPLO DE PROJETO 5.23

Ventiladores são frequentemente utilizados para manter os circuitos eletrônicos refrigerados. Eles variam de dimensões, potência necessária, tensão de entrada e vazão de ar. Em uma aplicação particular, três ventiladores são conectados em paralelo a uma fonte de $24 \, \text{V}$ conforme mostrado na Fig. 5.31. Diversos testes foram realizados nessa configuração e verificou-se que o fluxo de ar, a corrente nos ventiladores e a tensão de entrada estão relacionados pelas seguintes equações.

$$F_{PCM} = 2000 V_f \quad V_f = 100 I_f$$

em que F_{PCM} representa o fluxo de ar em pés cúbicos por minuto (PCM), V_f é a tensão no ventilador em volts e I_f é a corrente no ventilador em ampères. Note que a corrente no ventilador está relacionada à sua velocidade, que por sua vez está relacionada ao fluxo de ar. Um procedimento popular e barato para se monitorar as correntes nas aplicações em que uma alta precisão não é crítica, envolve a instalação de um

resistor-sensor de baixo valor em série com o ventilador para “sentir” a corrente por meio da medição da tensão no resistor-sensor.

Pretende-se projetar um circuito que meça o fluxo de ar nesse sistema de três ventiladores. Especificamente, deseja-se

- determinar o valor desse resistor-sensor, posicionado em série com cada ventilador, de modo que sua tensão seja igual a 2% da tensão nominal do ventilador de $24 \, \text{V}$, e es-

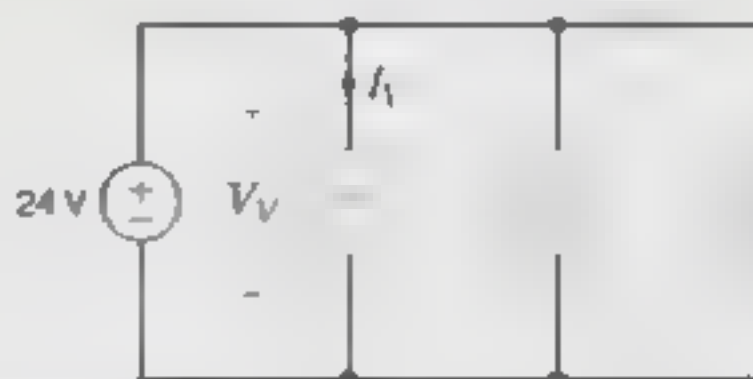


Figura 5.31 Três ventiladores de $24 \, \text{V}$ em paralelo.

pecificar um componente particular de 1% que pode ser obtido pela página da Digikey Corporation (Endereço: www.digikey.com).

- b. projetar um circuito com op-amp que produza uma tensão de saída proporcional ao fluxo de ar total, de modo que 1 V corresponda a 50 pés cúbicos por minuto.

SOLUÇÃO

A relação tensão-corrente estabelece que cada ventilador possui uma resistência de $100\ \Omega$. Como a tensão entre os terminais do resistor-sensor deve ser igual a 2% de 24 V, ou seja, 0,48 V, a corrente no ventilador, calculada com base na rede mostrada na Fig. 5.32, vale

$$I_v = \frac{24 - 0,48}{100} = 235,2\ \text{mA}$$

e o valor necessário para o resistor-sensor é

$$R_{\text{sensor}} = \frac{0,48}{0,2352} = 2,04\ \Omega$$

A dissipação de potência nesse componente é de apenas

$$P_{\text{sensor}} = I_v^2 R_{\text{sensor}} = 0,11\ \text{W}$$

E, assim, um resistor de $2\ \Omega$ e $1/4\ \text{W}$ atenderá às especificações.

O circuito com op-amp deve ser capaz de somar as contribuições dos fluxos de todos os três ventiladores e representar o resultado de modo que 1 V corresponda a 50 pés cúbicos por minuto. O circuito com op-amp somador parece ser uma opção lógica para essa situação e, assim, seleciona-se o circuito mostrado na Fig. 5.33, em que o segundo estágio é simplesmente um inversor que realiza a correção do sinal negativo resultante da saída do somador. De modo a se determinar o ganho do somador, calcula-se a relação volts/PCM nos resistores-sensores. Para um único ventilador, o fluxo de ar é

$$F_{\text{PCM}} = 2(\text{K})/V = 47,04\ \text{PCM}$$

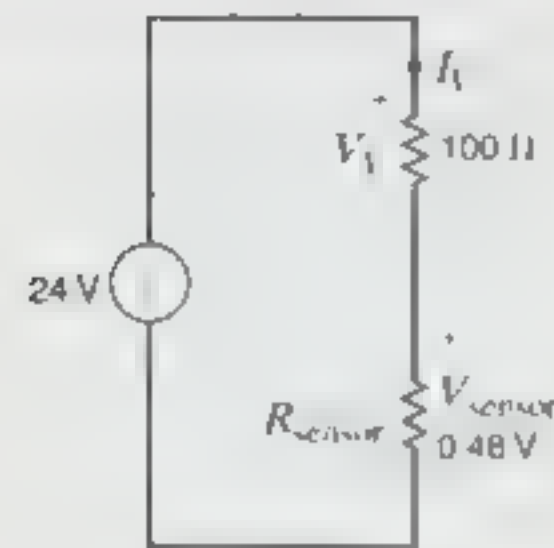


Figura 5.32 Circuito equivalente de um ventilador e seu resistor-sensor.

E a relação volts/PCM na entrada do somador é

$$\frac{0,48\ \text{V}}{47,04\ \text{PCM}} = 0,0102\ \text{V/PCM}$$

Logo, o ganho do somador com op-amp deve ser

$$\frac{V_i}{V_{\text{sensor}}} = \frac{1\ \text{V}/50\ \text{PCM}}{0,0102\ \text{V/PCM}} = 1,96\ \text{V/V}$$

Este é um ganho próximo de 2 e, portanto, serão utilizados resistores que produzam uma relação de 2:1, isto é, muito próximo de 1,96. Agora, uma consideração adicional deve ser registrada. Note que os resistores na saída do somador são, basicamente, conectados em paralelo com os resistores-sensores. Para se assegurar que todas as correntes nos ventiladores fluem nos resistores-sensores, são selecionados valores bem altos para os resistores dos op-amps. Seleciona-se $R_1 = R_2 = R_3 = 100\ \text{k}\Omega$ e, então, $R_4 = 200\ \text{k}\Omega$.

Finalmente, os valores para R_5 e R_6 podem ser arbitrários, contanto que sejam iguais. Ao se selecionar um valor de $100\ \text{k}\Omega$, apenas dois valores distintos de resistores são necessários para todo o circuito com op-amp.

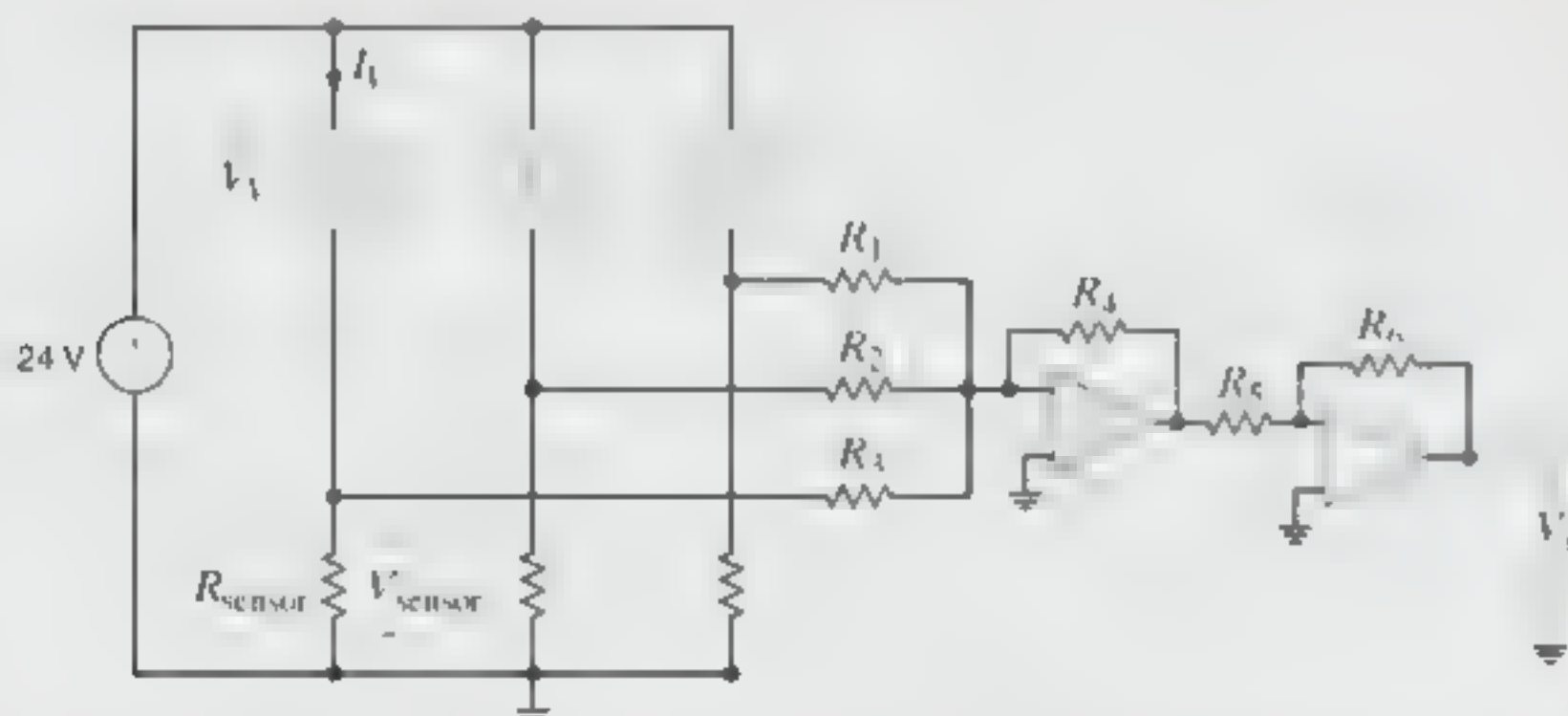


Figura 5.33 Sistema completo de medição do fluxo de ar.

RESUMO

- **Linearidade:** Essa propriedade requer tanto a aditividade quanto a homogeneidade. Utilizando essa propriedade, a tensão ou a corrente em qualquer ponto da rede pode ser determinada admitindo-se um valor específico para a variável e, em seguida, determinando qual o valor da fonte necessário para produzi-lo. A relação entre o valor da fonte especificada e aquele calculado com base no valor assumido da variável, juntamente com o valor assumido para a variável, pode ser utilizado para se obter uma solução.
- Em uma rede linear contendo múltiplas fontes independentes, o princípio da superposição permite que se calcule qualquer corrente ou tensão na rede como a soma algébrica das contribuições individuais de cada fonte atuando isoladamente.
- A superposição é uma propriedade linear e não se aplica a funções não lineares como, por exemplo, a potência.
- Utilizando o teorema de Thévenin, pode-se substituir uma parte de uma rede em um par de terminais, por uma fonte de

tensão V_{th} em série com um resistor R_{th} . V_{th} é a tensão do circuito aberto nos terminais e R_{th} é a resistência equivalente de Thévenin obtida observando-se os terminais com todas as fontes independentes tomadas nulas.

- Utilizando o teorema de Norton pode-se substituir uma parte de uma rede em um par de terminais, por uma fonte de corrente I_{cc} em paralelo com um resistor R_{th} . I_{cc} é a corrente do curto-circuito nos terminais e R_{th} é a resistência equivalente de Thévenin.
- A transformação de fonte permite que uma fonte de tensão V em série com um resistor R seja substituída por uma fonte de corrente $I = V/R$ em paralelo com a resistência R . O inverso também é verdadeiro. Essa é uma relação intercambiável entre os circuitos equivalentes de Thévenin e Norton.
- A potência máxima transferida pode ser obtida fazendo-se o resistor carga R_c igual a R_{th} obtido observando-se a rede dos terminais da carga.

PROBLEMAS

- 5.1 Utilize a linearidade e considere que a tensão $V_1 = 1$ V para determinar o valor real de V_1 no circuito mostrado na Fig. P5.1.

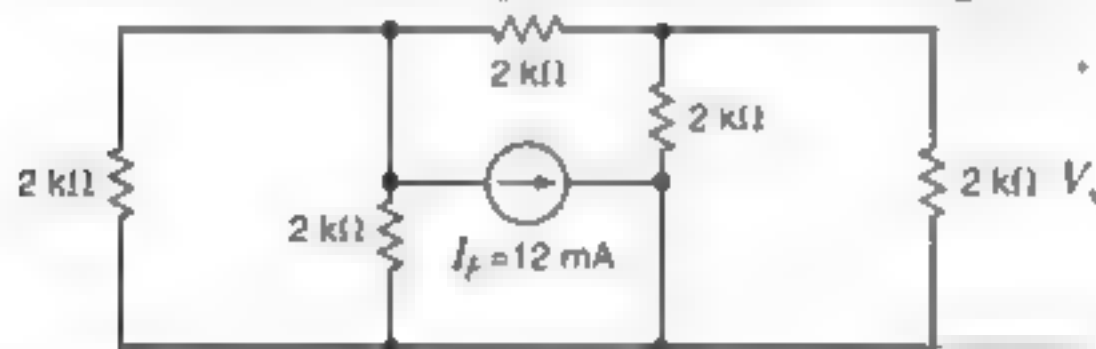


Figura P5.1

- 5.2 Utilizando a linearidade e considerando que a corrente $I_1 = 1$ mA, determine o valor real de I_1 na rede mostrada na Fig. P5.2.

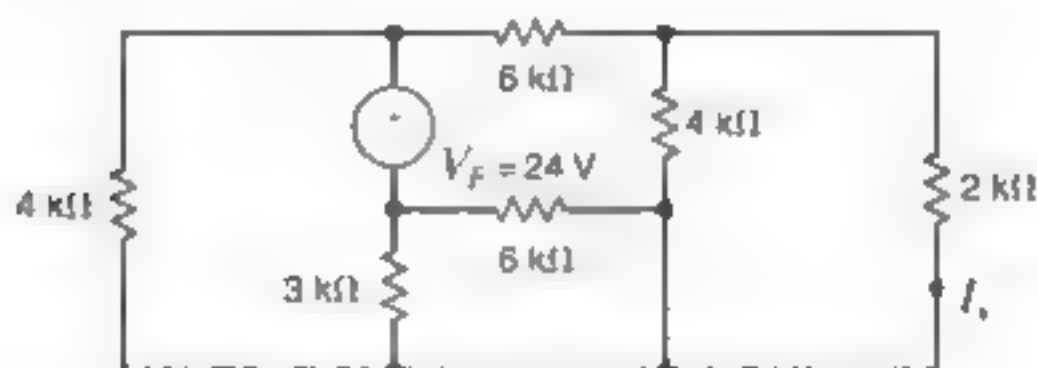


Figura P5.2

- 5.3 Determine a corrente I_1 da rede mostrada na Fig. P5.3 utilizando a linearidade e considerando que $I_2 = 1$ mA.

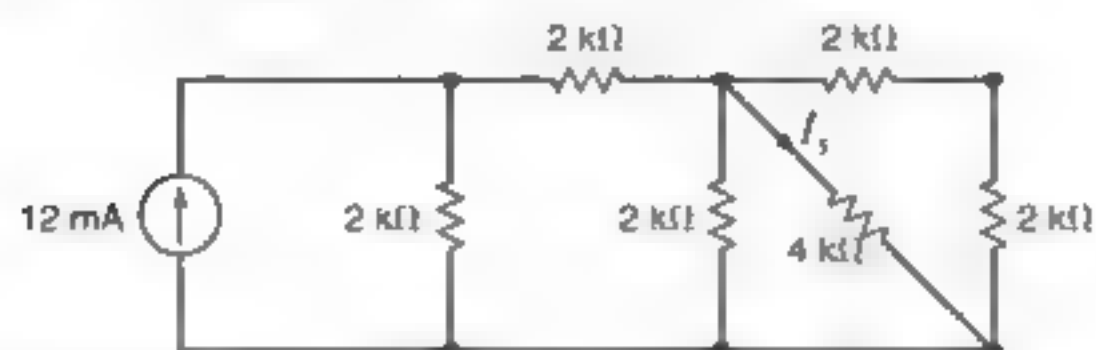


Figura P5.3

- 5.4 Determine a corrente I_1 do circuito mostrado na Fig. P5.4 utilizando a hipótese de linearidade e considerando $I_1 = 1$ mA.

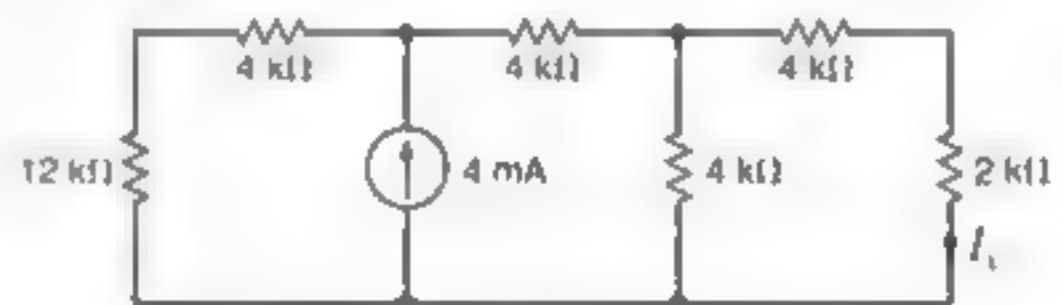


Figura P5.4

- 5.5 Determine a tensão V_1 da rede mostrada na Fig. P5.5 utilizando a hipótese de linearidade e considerando $V_1 = 1$ V.

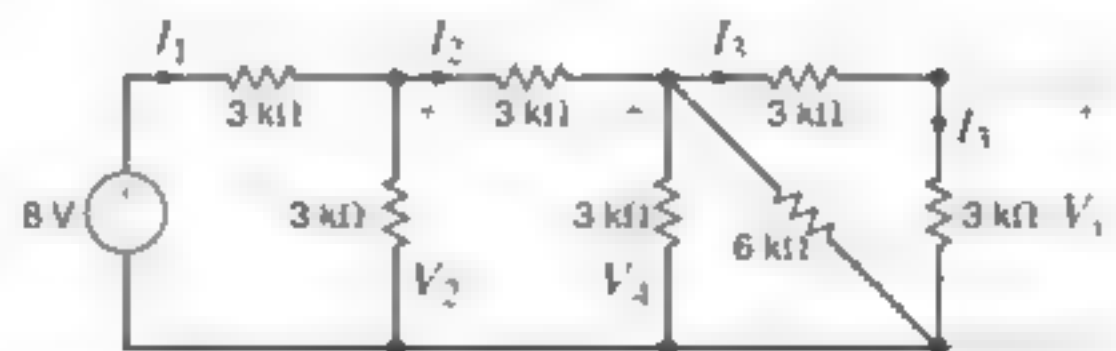


Figura P5.5

- 5.6 Determine a corrente I_1 da rede mostrada na Fig. P5.6 utilizando a superposição.

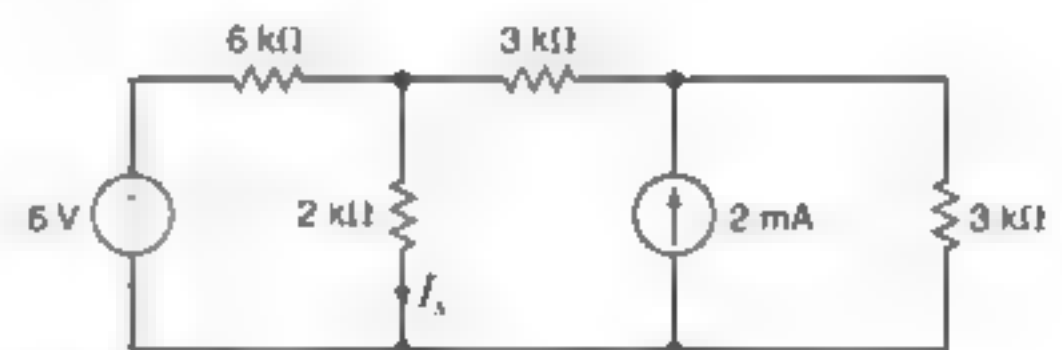


Figura P5.6

- 5.7 Considerando a rede mostrada na Fig. P5.7, determine a corrente I_x utilizando a superposição.

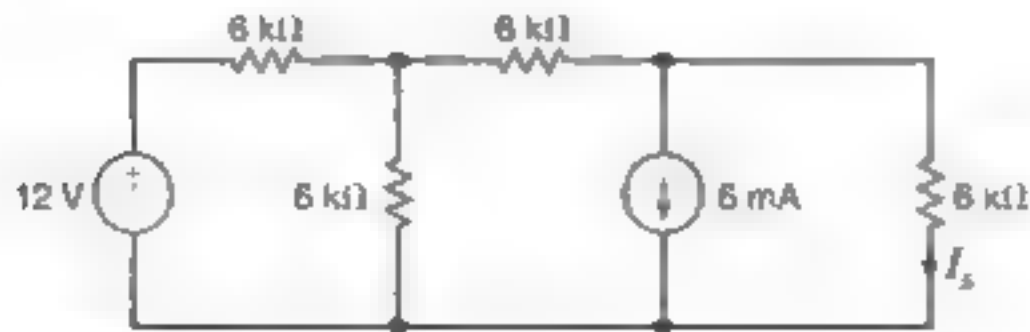


Figura P5.7

- 5.8 Determine a tensão V_x da rede mostrada na Fig. P5.8 utilizando a superposição.

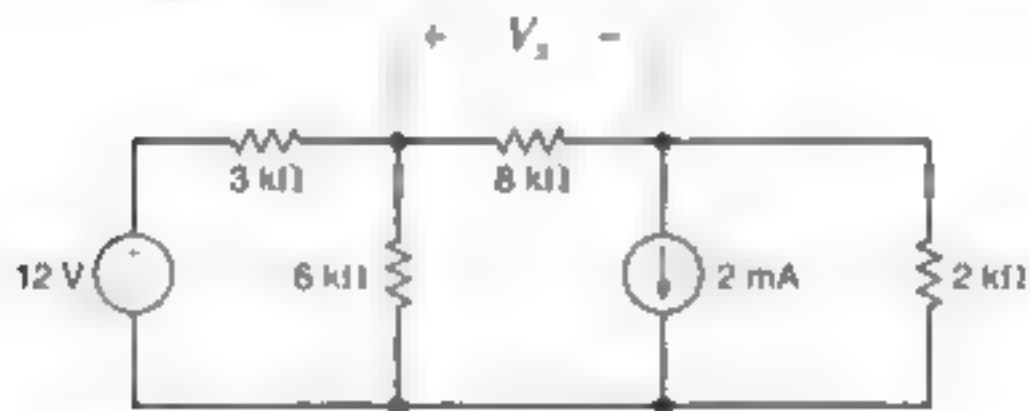


Figura P5.8

- 5.9 Determine a tensão V_x da rede mostrada na Fig. P5.9 utilizando a superposição.

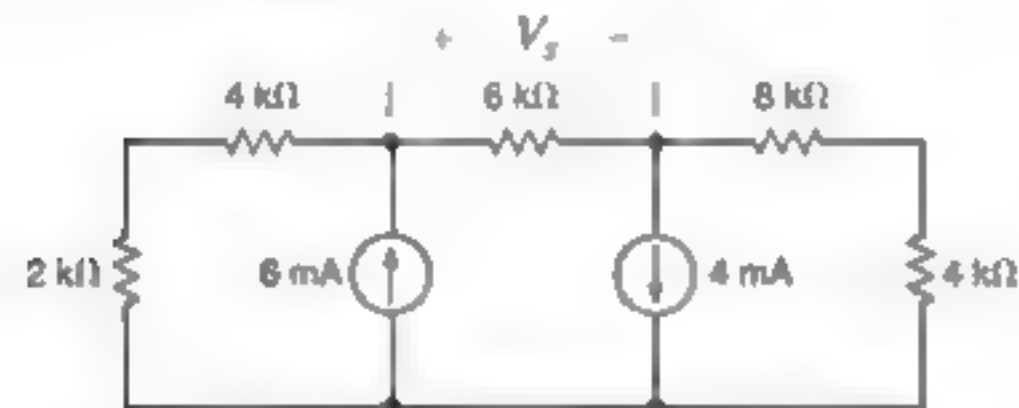


Figura P5.9

- 5.10 Determine a tensão V_x da rede mostrada na Fig. P5.10 utilizando a superposição.

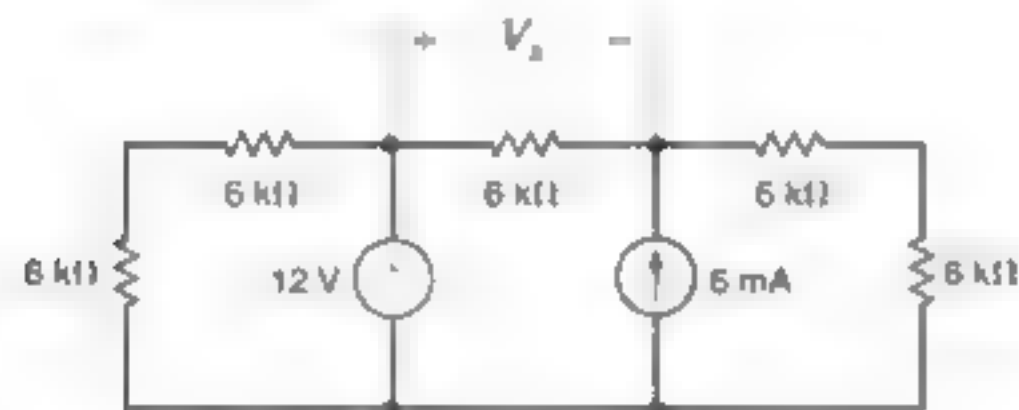


Figura P5.10

- 5.11 Determine a corrente I_x da rede mostrada na Fig. P5.11 utilizando a superposição.

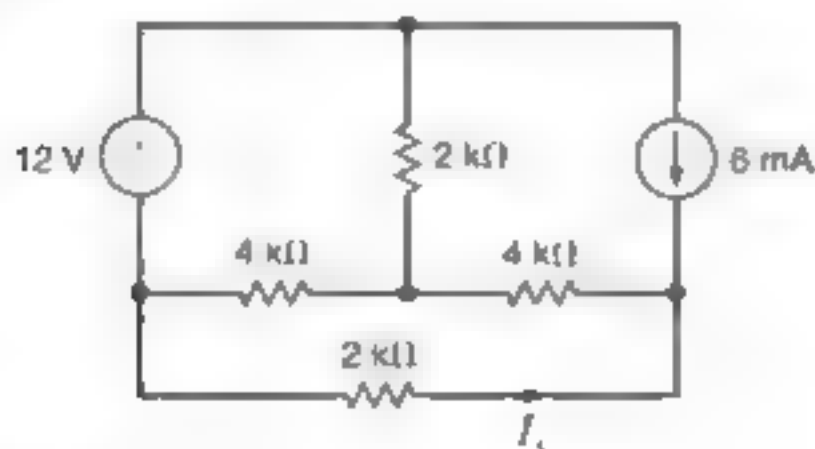


Figura P5.11

- 5.12 Determine a tensão V_x do circuito mostrado na Fig. P5.12 utilizando a superposição.

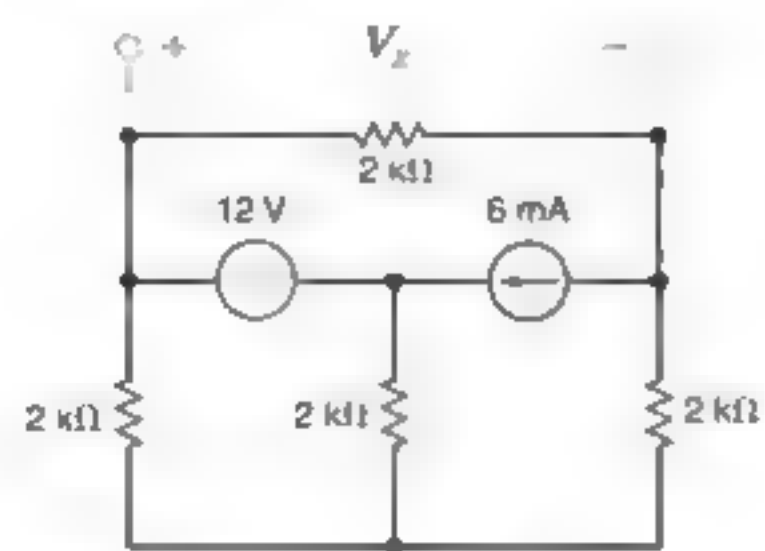


Figura P5.12

- 5.13 Determine a tensão V_x do circuito mostrado na Fig. P5.13 utilizando a superposição.

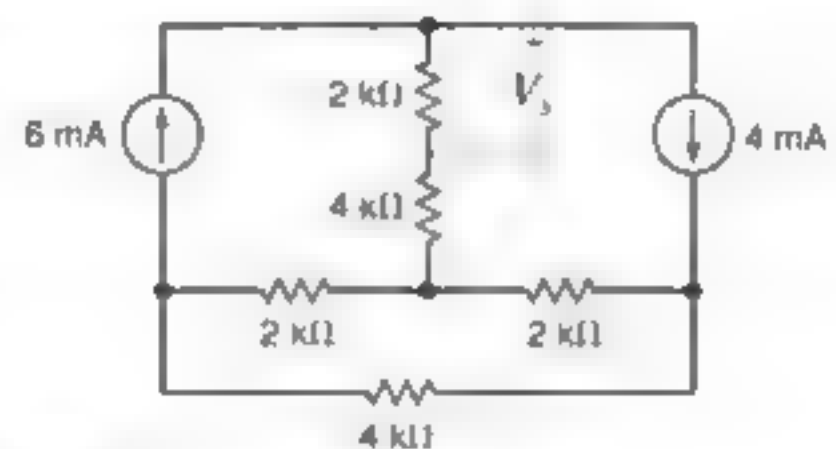


Figura P5.13

- 5.14 Determine a corrente I_x do circuito mostrado na Fig. P5.14 utilizando a superposição.

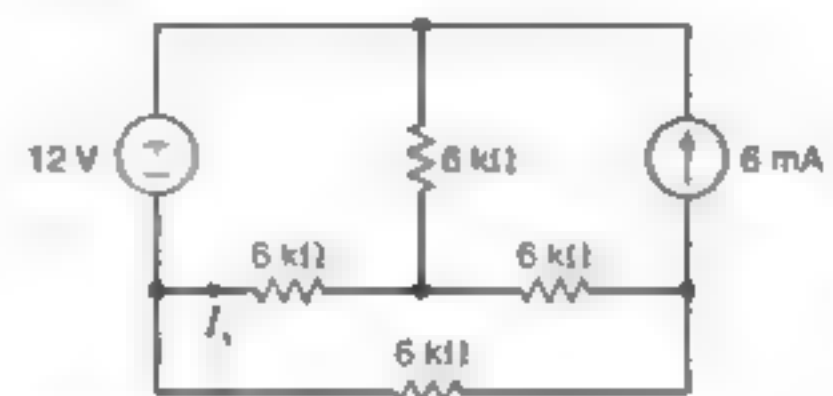


Figura P5.14

- 5.15 Determine a tensão V_x do circuito mostrado na Fig. P5.15 utilizando a superposição.

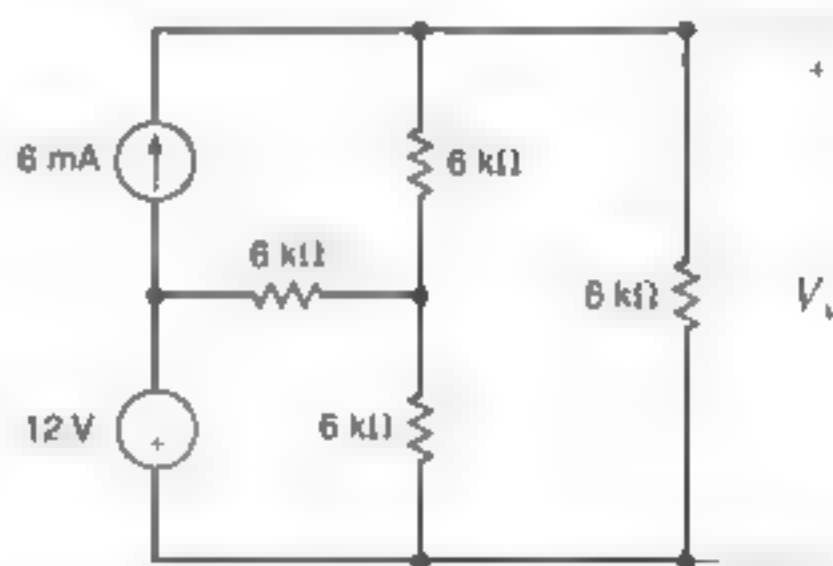


Figura P5.15

- 5.16 Determine a corrente I_x do circuito mostrado na Fig. P5.16 utilizando a superposição.

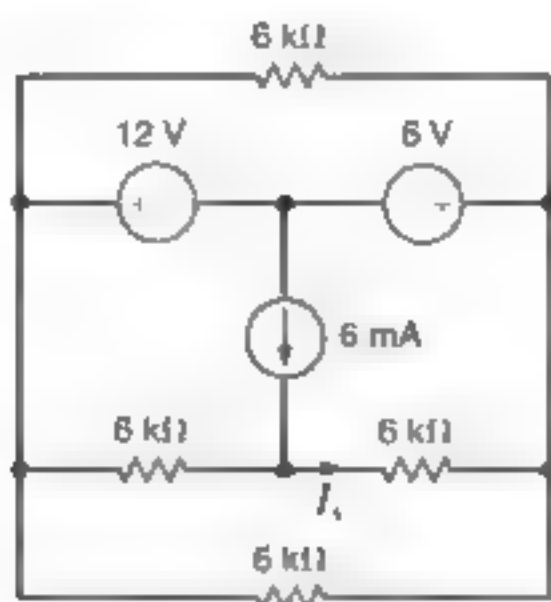


Figura P5.16

- 5.17 Utilize a superposição para determinar a corrente I_x do circuito mostrado na Fig. P5.17.

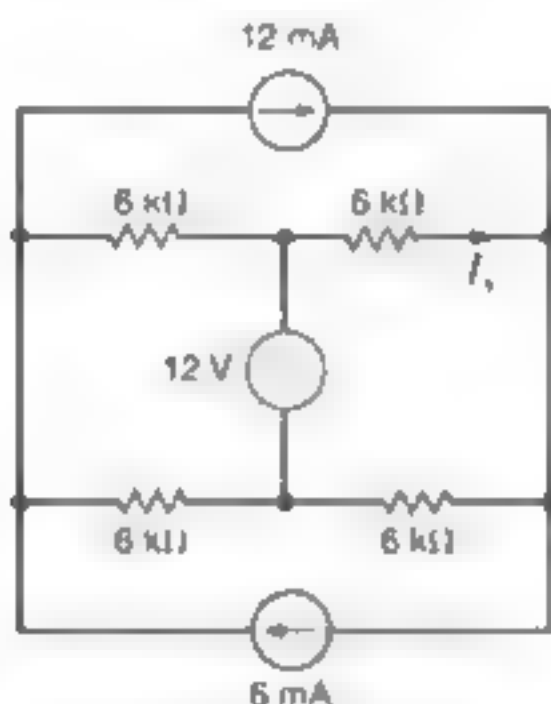


Figura P5.17

- 5.18 Utilize a superposição para determinar a corrente I_x da rede mostrada na Fig. P5.18.

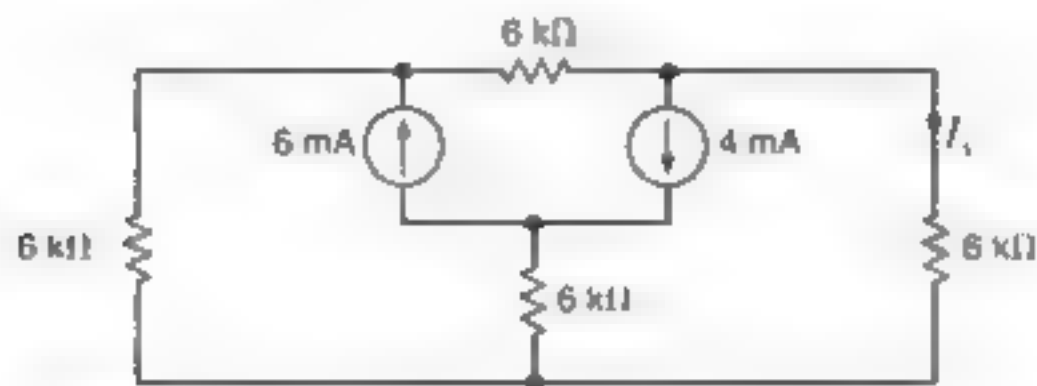


Figura P5.18

- 5.19 Utilize a superposição para determinar a tensão V_x do circuito mostrado na Fig. P5.19.

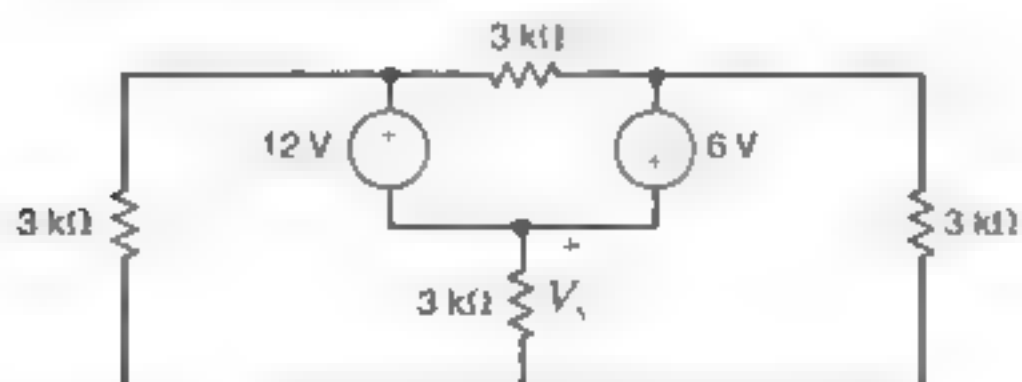


Figura P5.19

- 5.20 Utilize a superposição para determinar a tensão V_x da rede mostrada na Fig. P5.20.

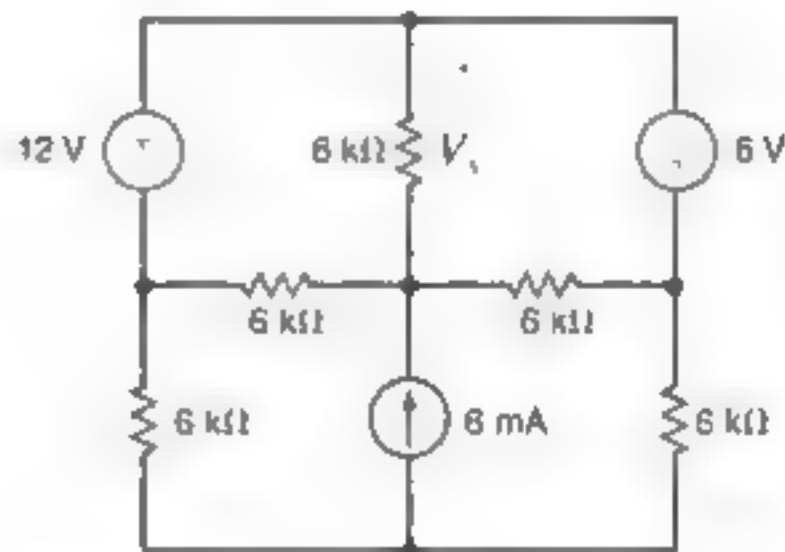


Figura P5.20

- 5.21 Utilize a superposição para determinar a corrente I_x do circuito mostrado na Fig. P5.21.

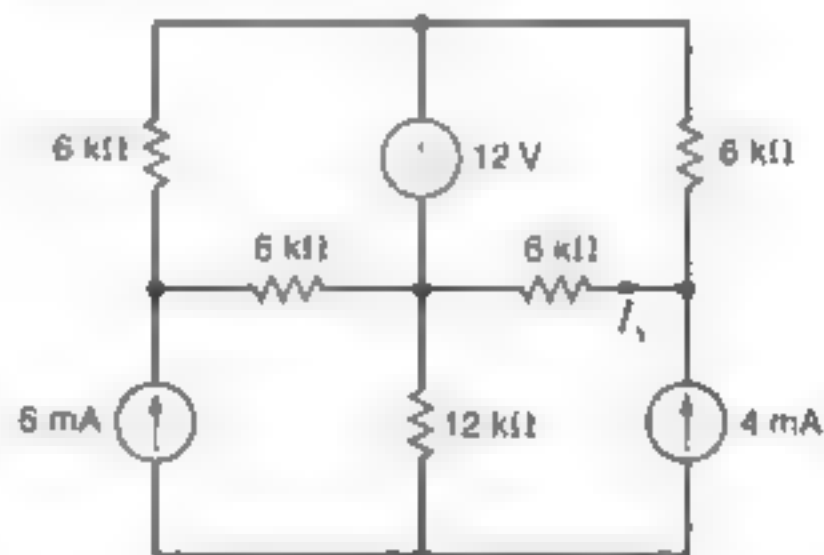


Figura P5.21

- 5.22 Utilize a superposição para determinar a corrente I_x da rede mostrada na Fig. P5.22.

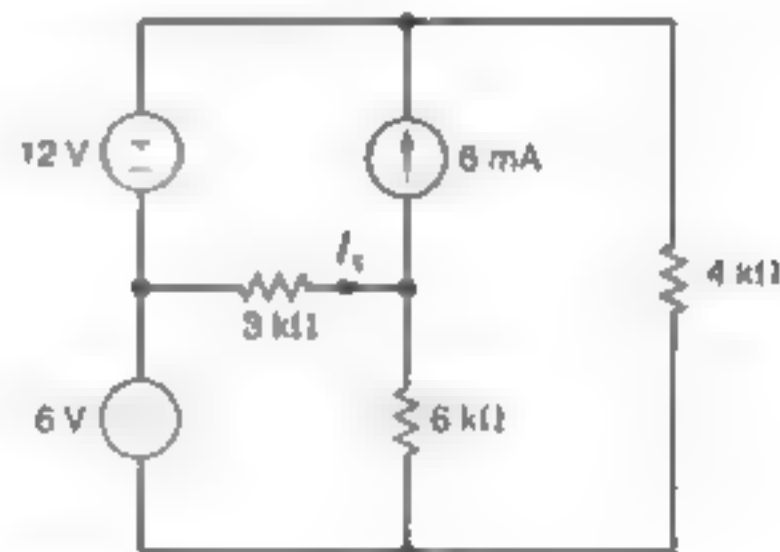


Figura P5.22

- 5.23 Utilize a superposição para determinar a tensão V_x do circuito mostrado na Fig. P5.23.

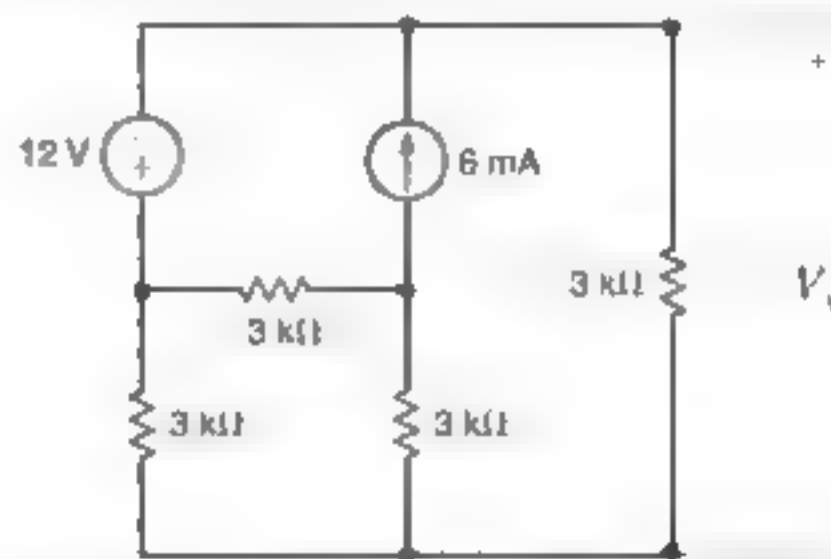


Figura P5.23

- 5.24** Determine a tensão V_A do circuito mostrado na Fig. P5.24 utilizando a superposição.

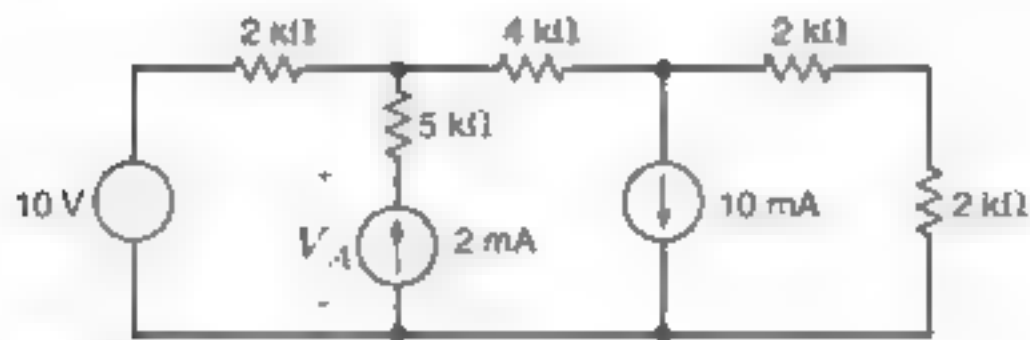


Figura P5.24

- 5.25** Determine a corrente I_1 do circuito mostrado na Fig. P5.25 utilizando a superposição.

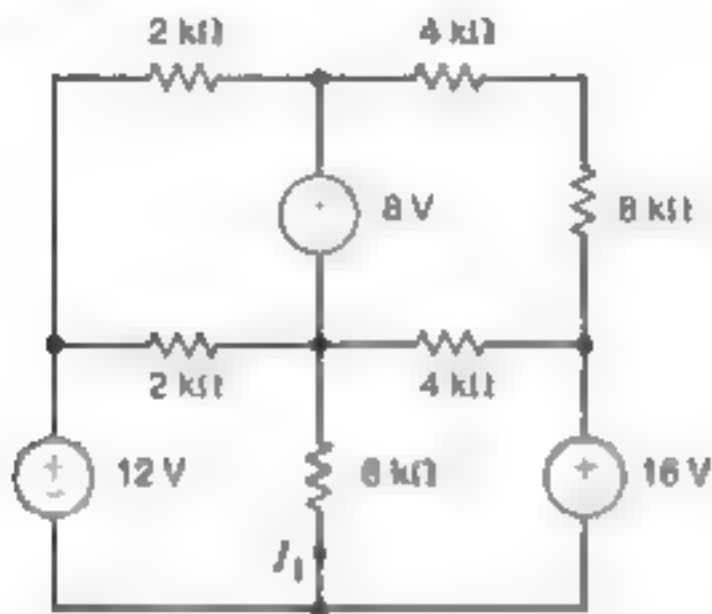


Figura P5.25

- 5.26** Utilize a superposição para calcular a corrente I_x do circuito mostrado na Fig. P5.26.

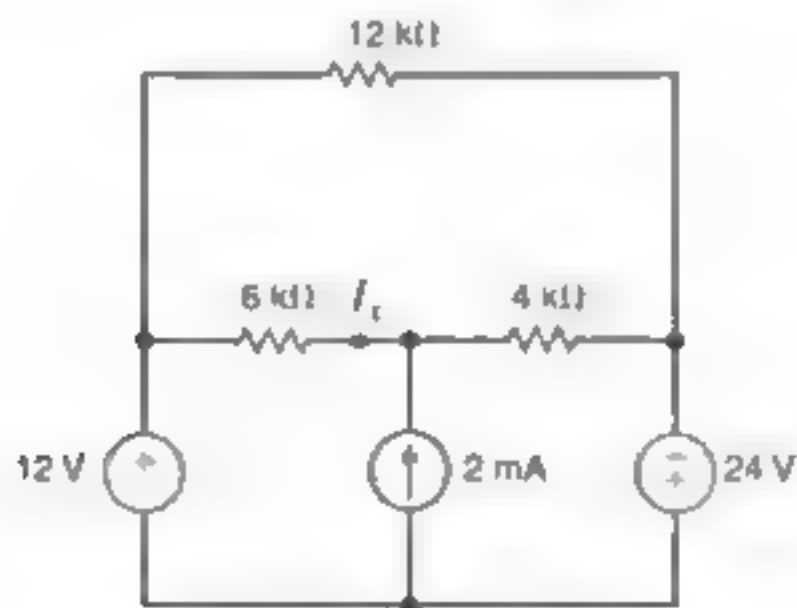


Figura P5.26

- 5.27** Calcule a tensão V_x da rede mostrada na Fig. P5.27 utilizando a superposição.

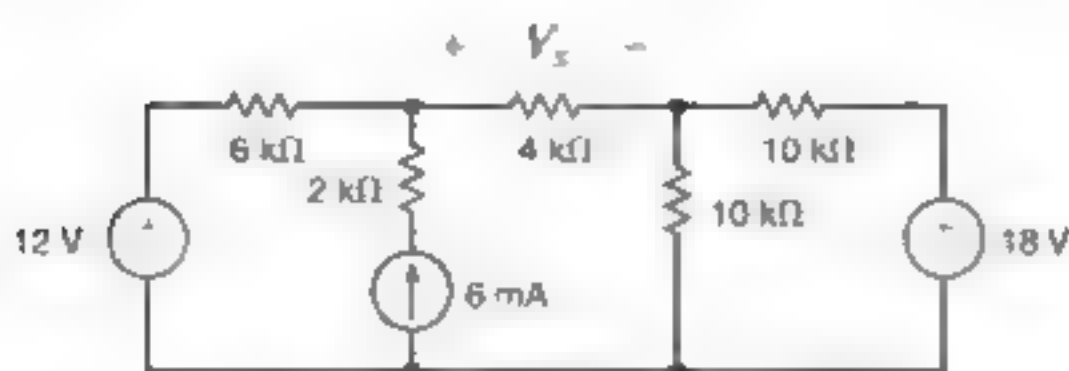


Figura P5.27

- 5.28** Determine a tensão V_x do circuito mostrado na Fig. P5.28 utilizando a superposição.

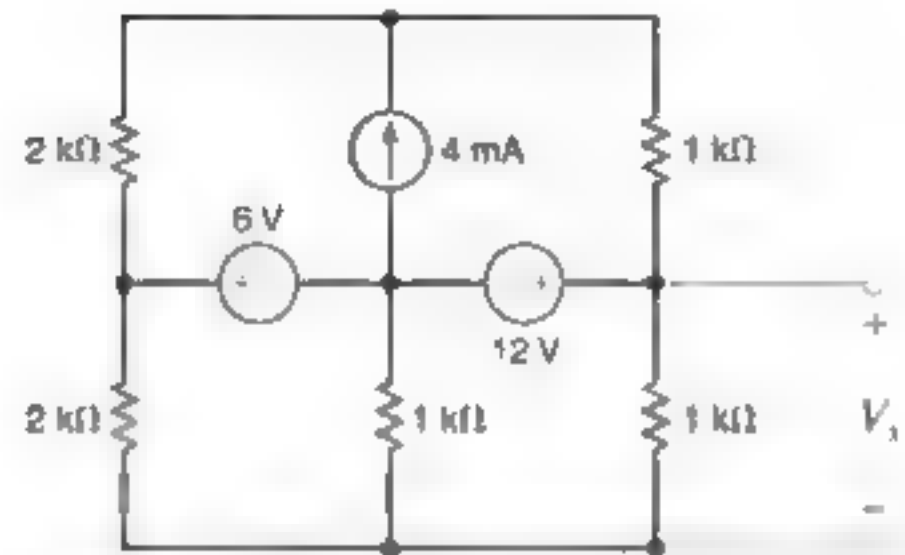


Figura P5.28

- 5.29** Utilize a superposição para determinar a corrente I_x da rede mostrada na Fig. P5.29.

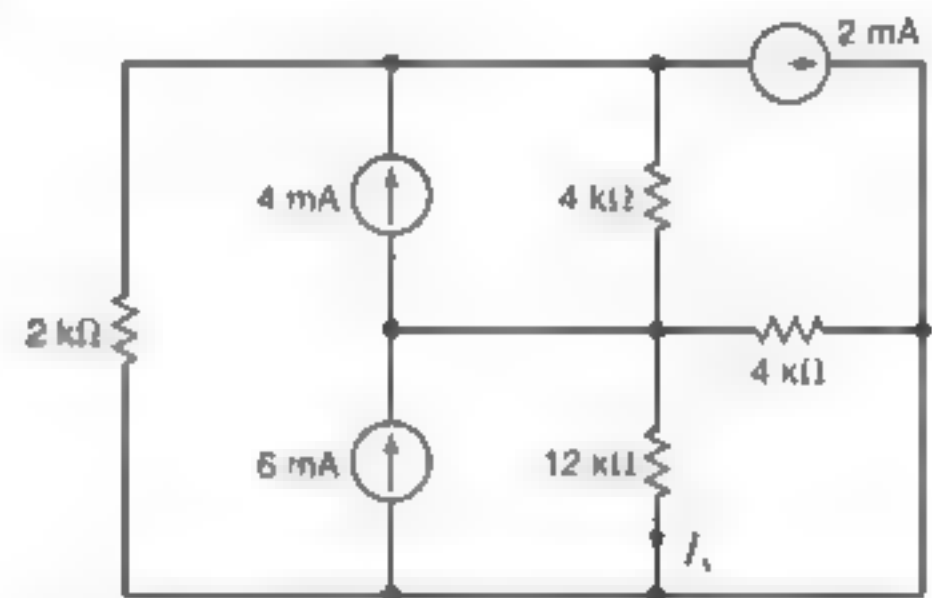


Figura P5.29

- 5.30** Utilize a superposição para determinar a corrente I_x do circuito mostrado na Fig. P5.30.

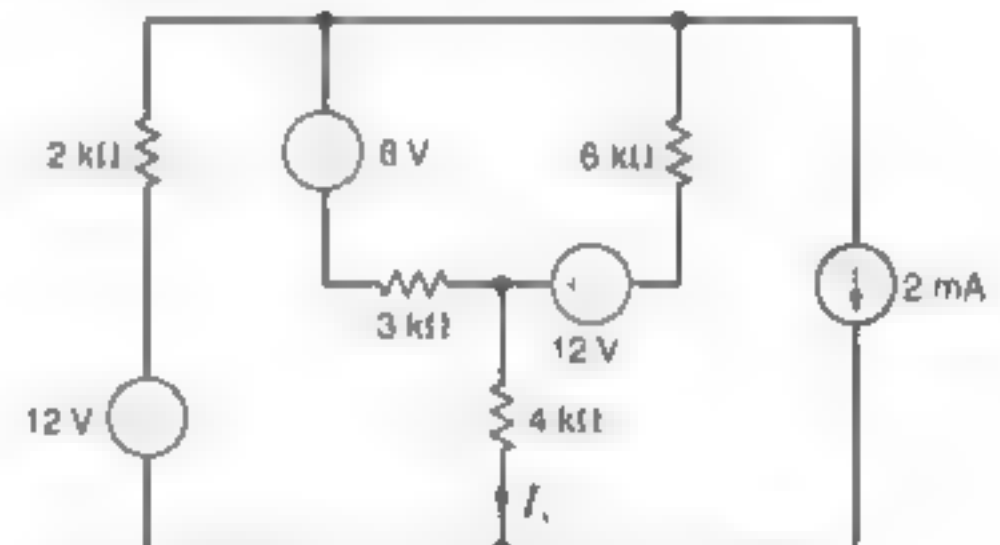


Figura P5.30

- 5.31** Utilize a superposição para determinar a corrente I_x do circuito mostrado na Fig. P5.31.

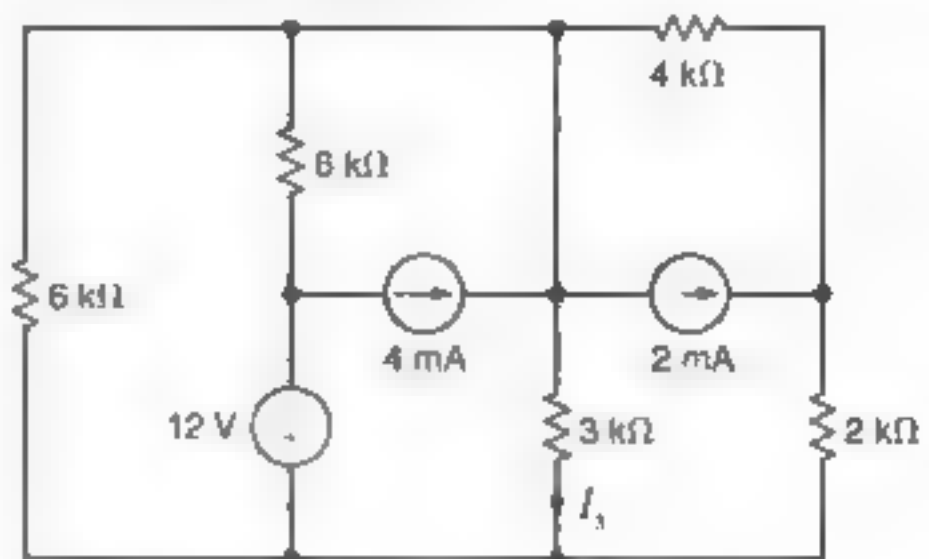


Figura P5.31

- 5.32** Utilize o teorema de Thévenin para determinar a tensão V_x da rede mostrada na Fig. P5.32.

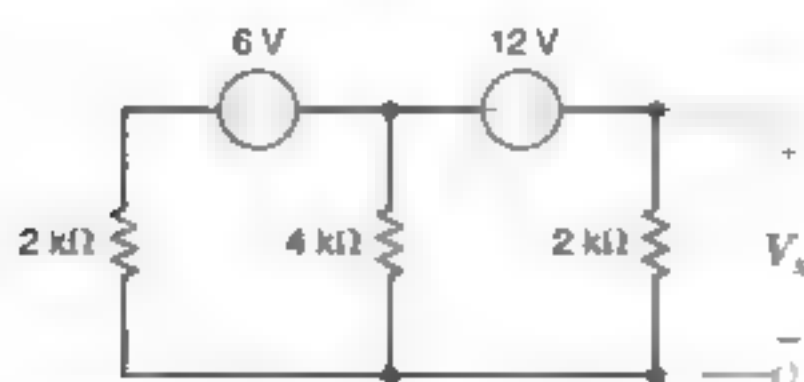


Figura P5.32

- 5.33** Utilize o teorema de Thévenin para determinar a corrente I_x do circuito mostrado na Fig. P5.33.

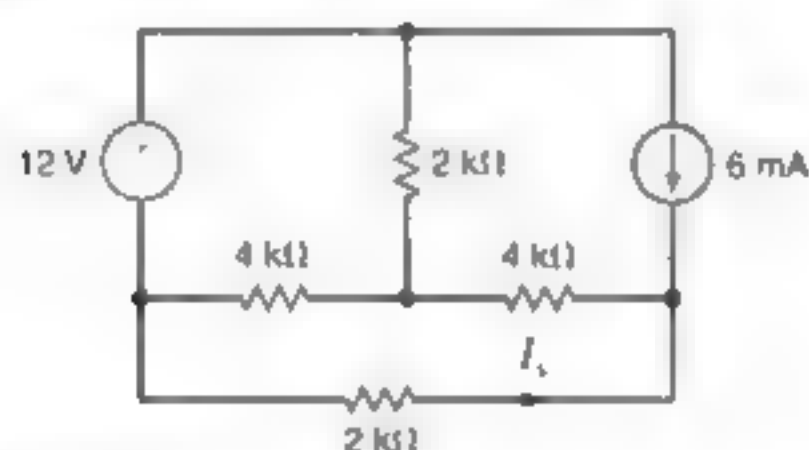


Figura P5.33

- 5.34** Utilize o teorema de Thévenin para determinar a tensão V_x do circuito mostrado na Fig. P5.34.

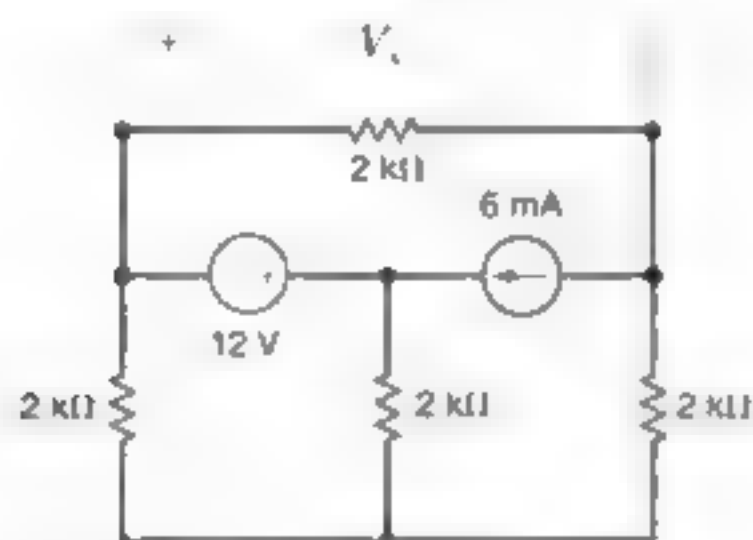


Figura P5.34

- 5.35** Utilize o teorema de Thévenin para determinar a tensão V_x do circuito mostrado na Fig. P5.35.

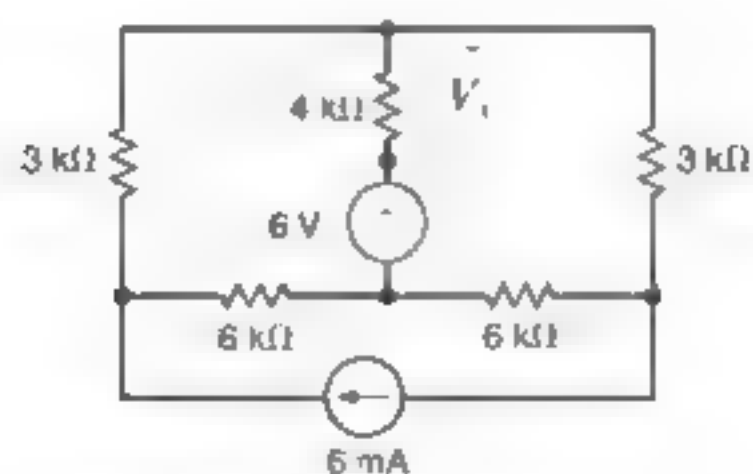


Figura P5.35

- 5.36** Utilize o teorema de Thévenin para determinar a corrente I_x da rede mostrada na Fig. P5.36.

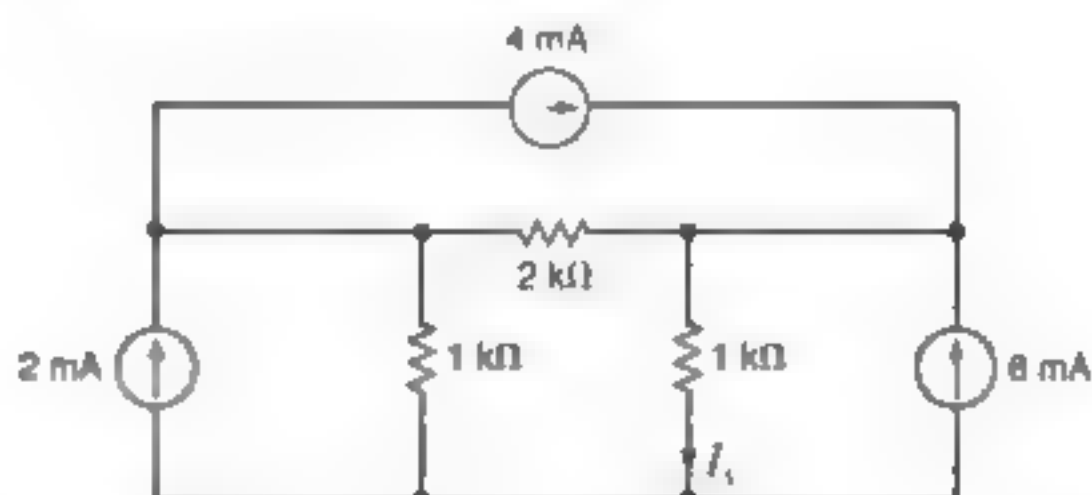


Figura P5.36

- 5.37** Determine a corrente I_x da rede mostrada na Fig. P5.37 utilizando o teorema de Thévenin.

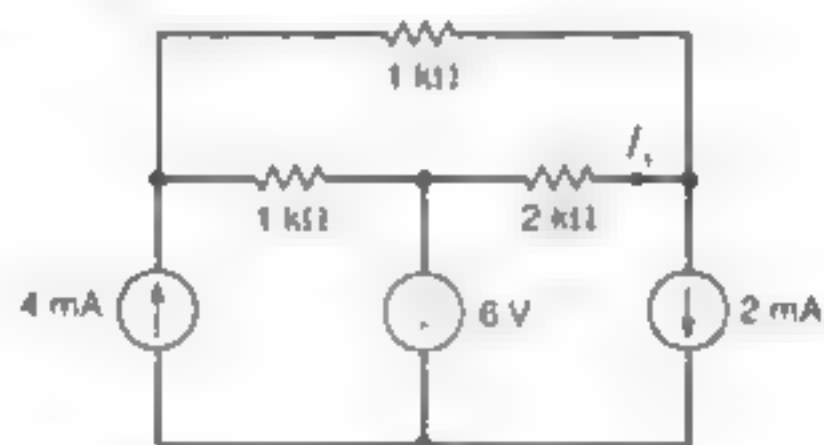


Figura P5.37

- 5.38** Determine a tensão V_x do circuito mostrado na Fig. P5.38 utilizando o teorema de Thévenin.

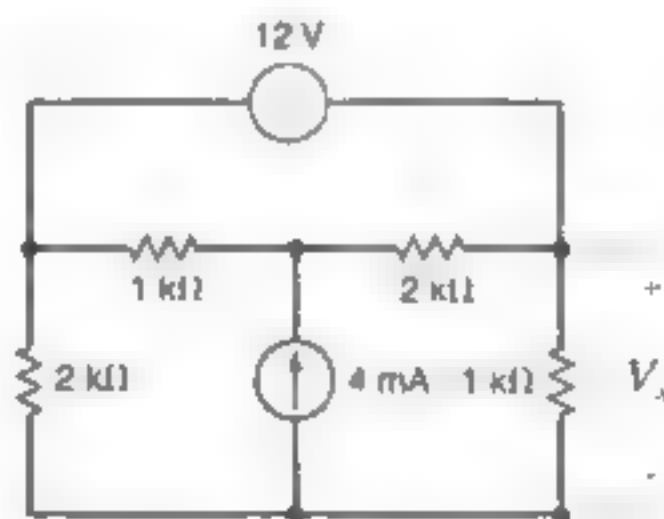


Figura P5.38

- 5.39** Determine a tensão V_x do circuito mostrado na Fig. P5.39 utilizando o teorema de Thévenin.

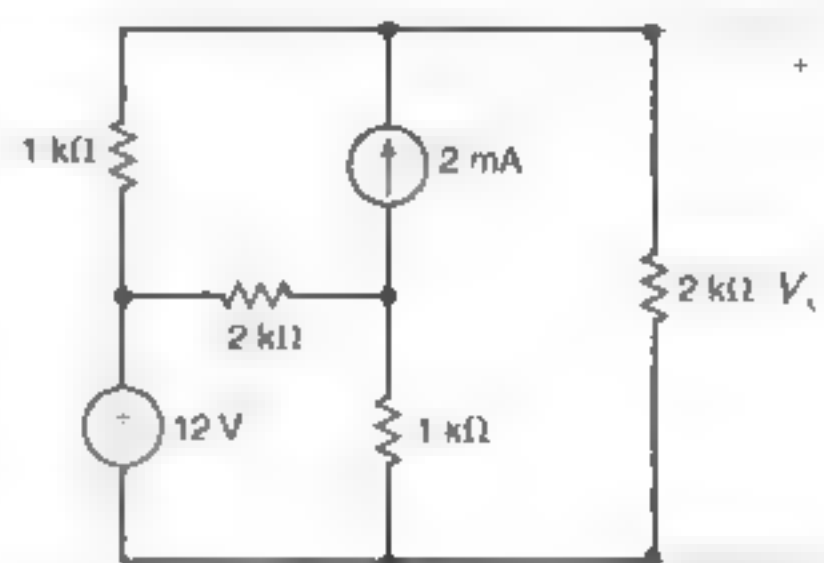


Figura P5.39

- 5.40 Determine a corrente I_x do circuito mostrado na Fig. P5.40 utilizando o teorema de Thévenin.

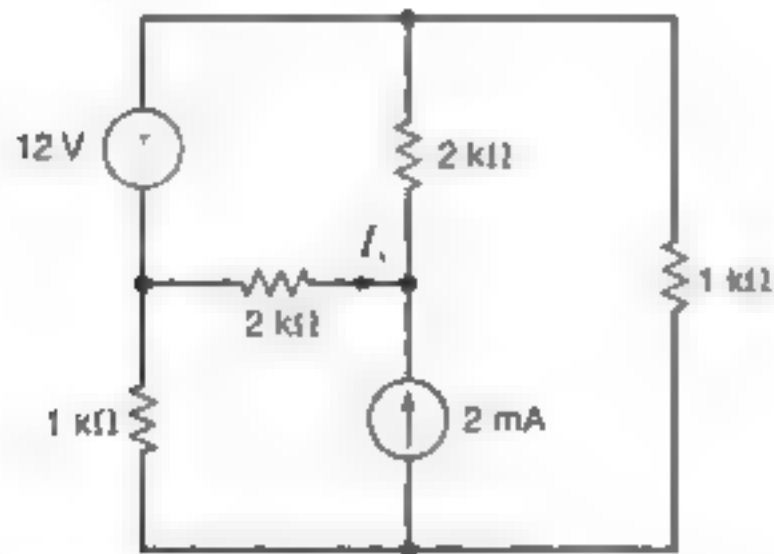


Figura P5.40

- 5.41 Determine a tensão V_x da rede mostrada na Fig. P5.41 utilizando o teorema de Thévenin.

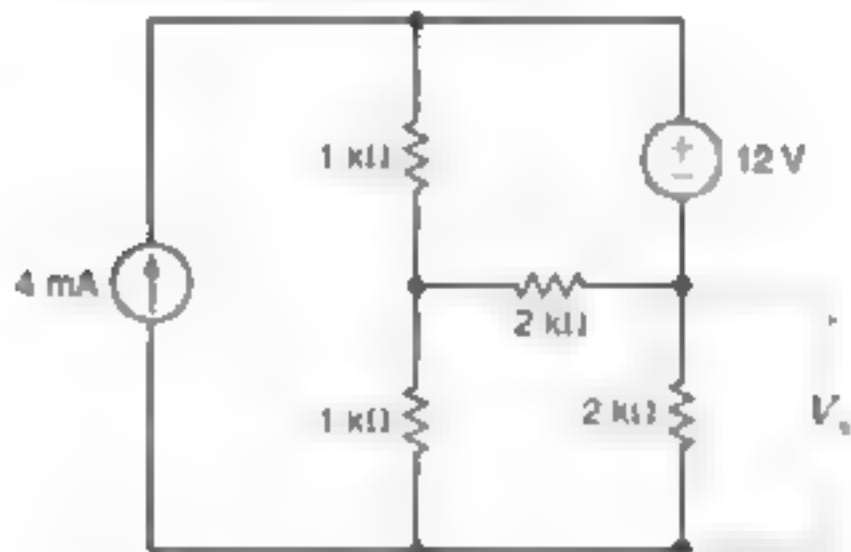


Figura P5.41

- 5.42 Determine a corrente I_x da rede mostrada na Fig. P5.42 utilizando o teorema de Thévenin.

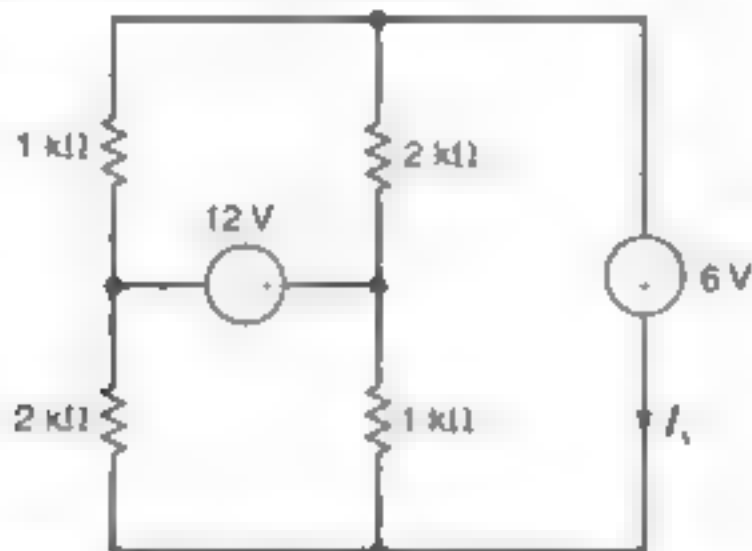


Figura P5.42

- 5.43 Utilize o teorema de Thévenin para determinar a corrente I_x do circuito mostrado na Fig. P5.43.

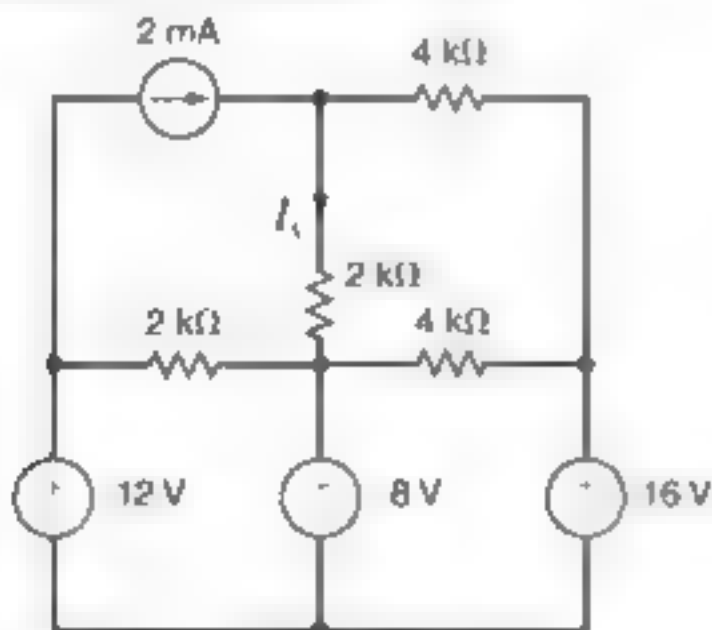


Figura P5.43

- 5.44 Calcule a corrente I_x do circuito mostrado na Fig. P5.44 utilizando o teorema de Thévenin.

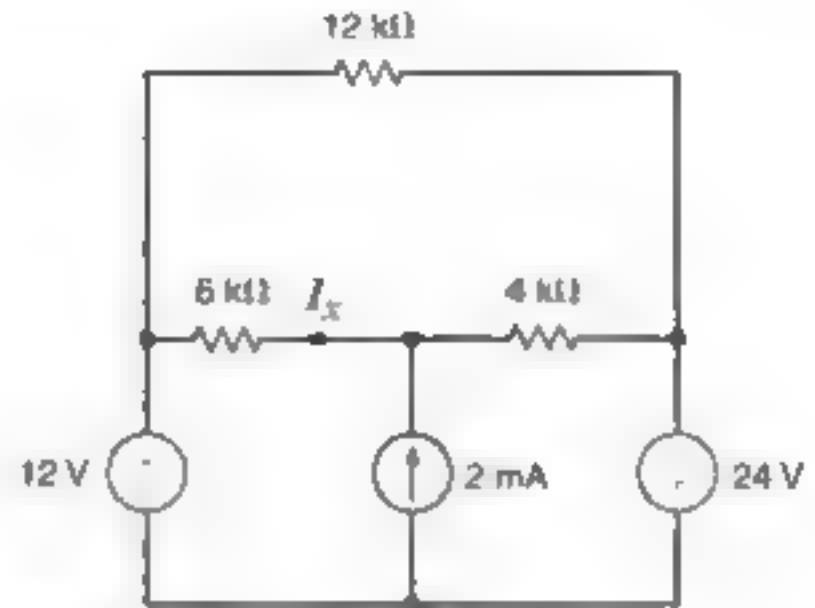


Figura P5.44

- 5.45 Determine a corrente I_x da rede mostrada na Fig. P5.45 utilizando o teorema de Thévenin.

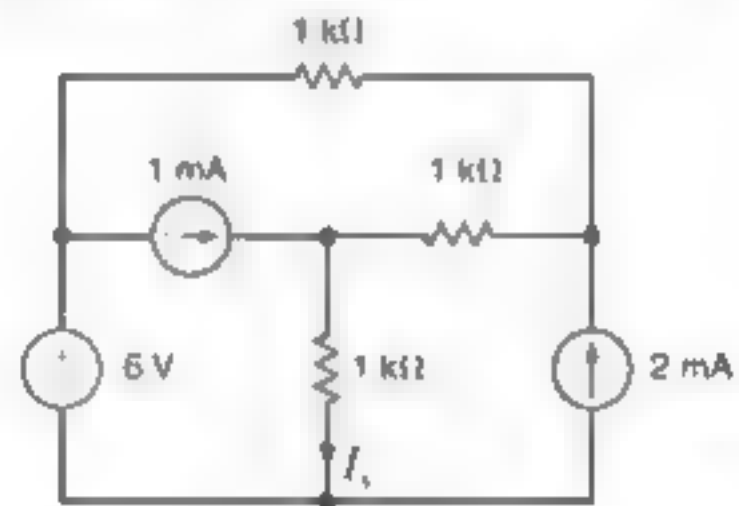


Figura P5.45

- 5.46 Determine a tensão V_x da rede mostrada na Fig. P5.46 utilizando o teorema de Thévenin.

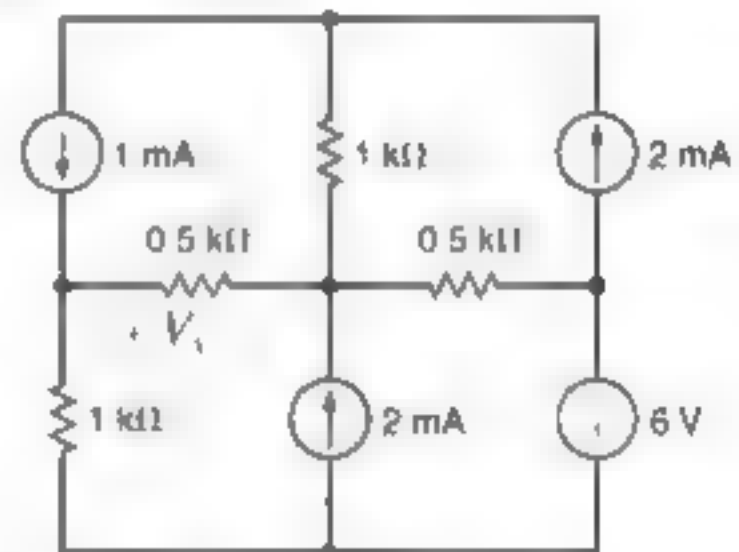


Figura P5.46

- 5.47 Utilize o teorema de Thévenin para determinar a corrente I_x da rede mostrada na Fig. P5.47.

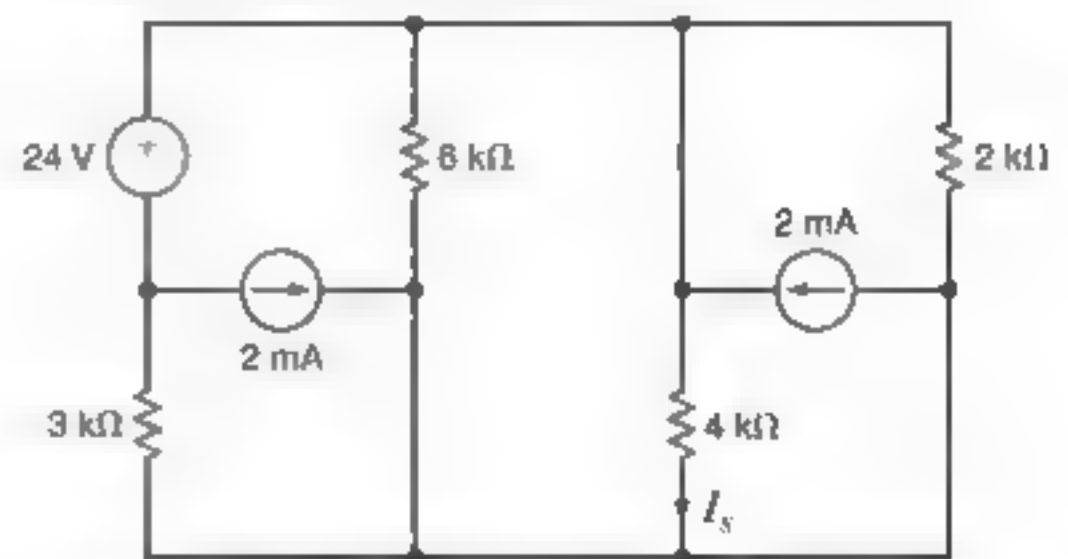


Figura P5.47

- 5.48 Utilize o teorema de Thévenin para determinar a corrente I_x do circuito mostrado na Fig. P5.48.

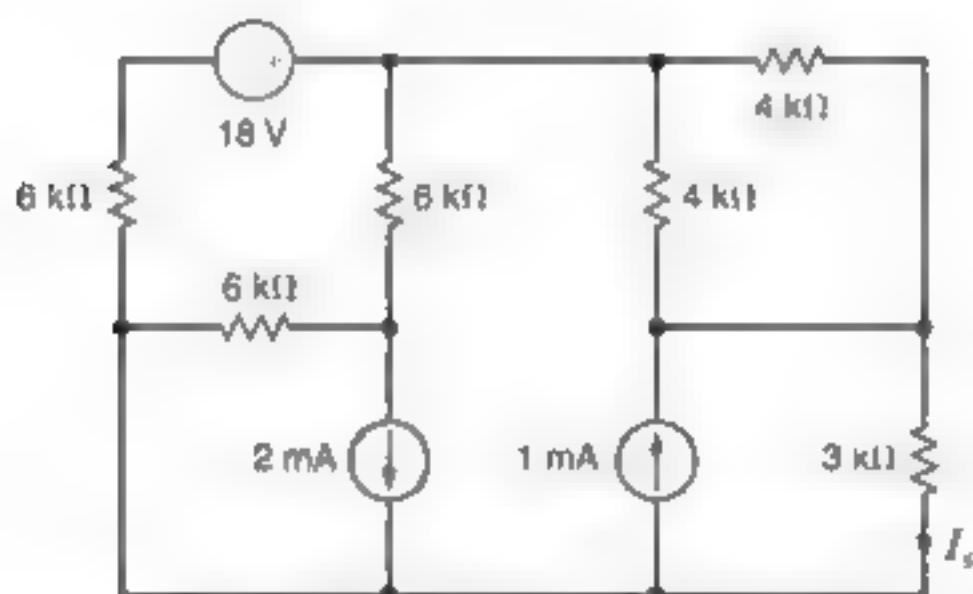


Figura P5.48

- 5.49 Sabe-se que quando uma carga de $2\text{ k}\Omega$ é conectada aos terminais A - B do circuito linear mostrado na Fig. P5.49, a corrente que passa pela carga é de 10 mA . Se uma carga de $10\text{ k}\Omega$ é conectada aos terminais, essa corrente é de 6 mA . Determine a corrente para uma carga de $20\text{ k}\Omega$.

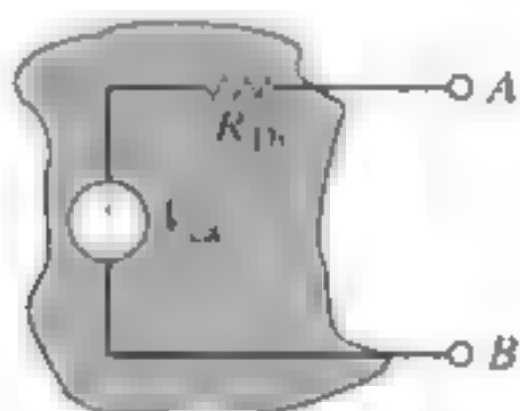


Figura P5.49

- 5.50 Se uma carga de $8\text{ k}\Omega$ é conectada aos terminais da rede mostrada na Fig. P5.50, $V_{AB} = 16\text{ V}$. Se uma carga de $2\text{ k}\Omega$ é conectada aos terminais, $V_{AB} = 8\text{ V}$. Determine a tensão V_{AB} se uma carga de $20\text{ k}\Omega$ for conectada aos terminais.

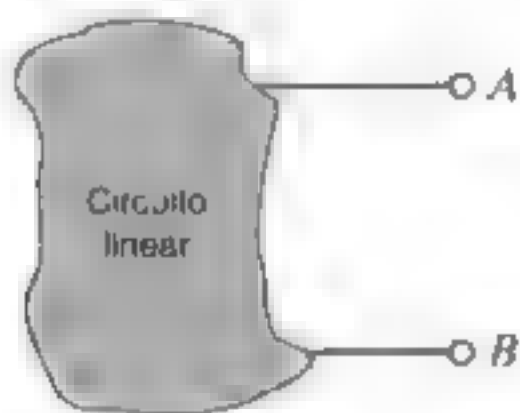


Figura P5.50

- 5.51 Determine a corrente I_x da rede mostrada na Fig. P5.51 utilizando o teorema de Norton.

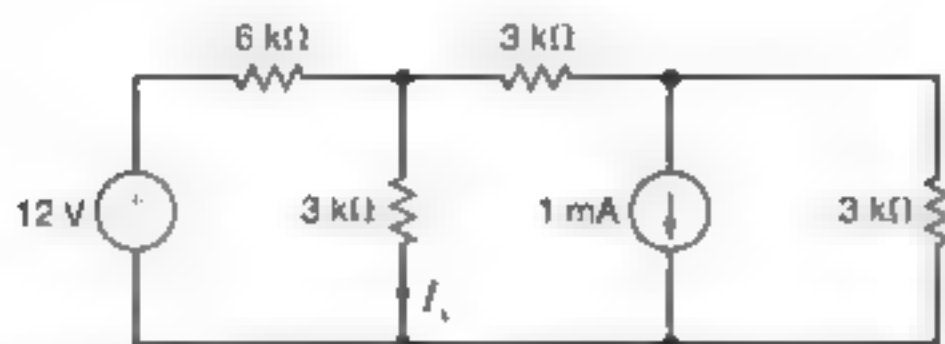


Figura P5.51

- 5.52 Utilize o teorema de Norton para determinar a corrente I_x do circuito mostrado na Fig. P5.52.

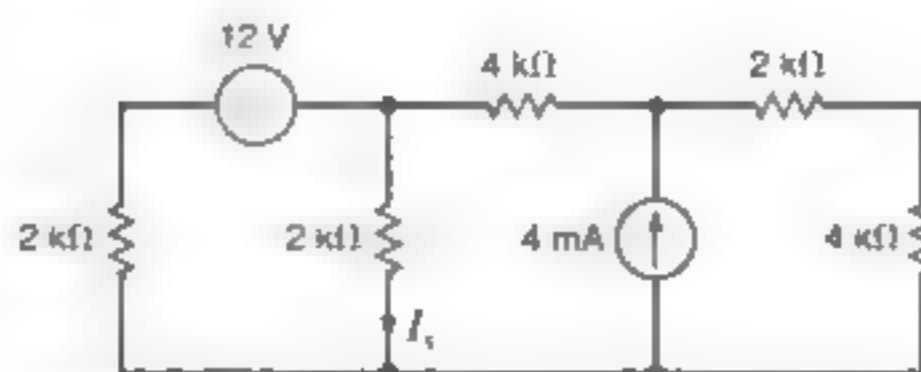


Figura P5.52

- 5.53 Determine a corrente I_x da rede mostrada na Fig. P5.53 utilizando o teorema de Norton.

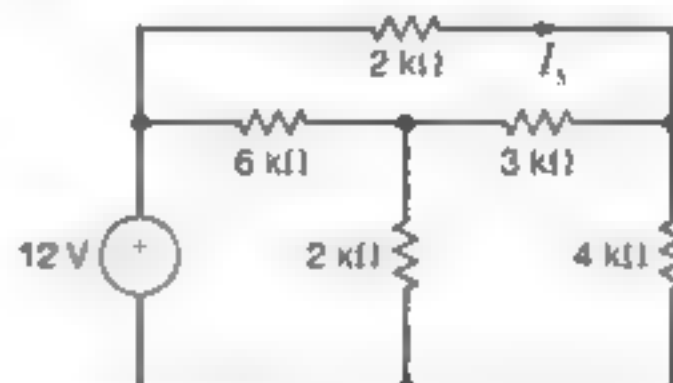


Figura P5.53

- 5.54 Utilize o teorema de Norton para determinar a tensão V_x da rede mostrada na Fig. P5.54.

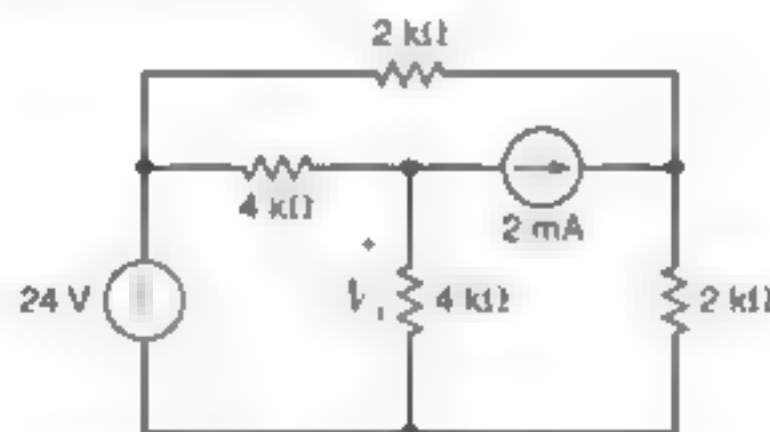


Figura P5.54

- 5.55 Utilize o teorema de Norton para determinar a corrente I_x do circuito mostrado na Fig. P5.55.

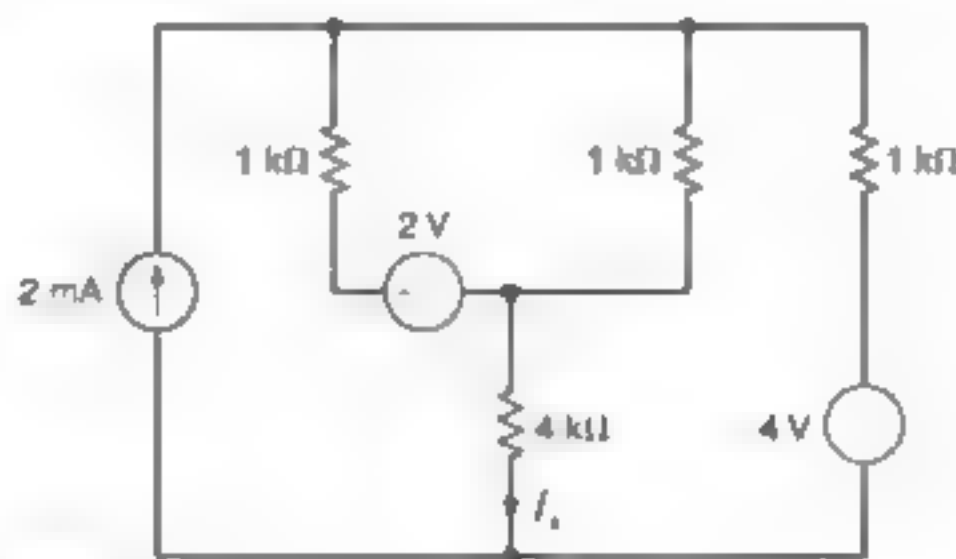


Figura P5.55

- 5.56 Determine a tensão V_x do circuito mostrado na Fig. P5.56 utilizando o teorema de Norton.

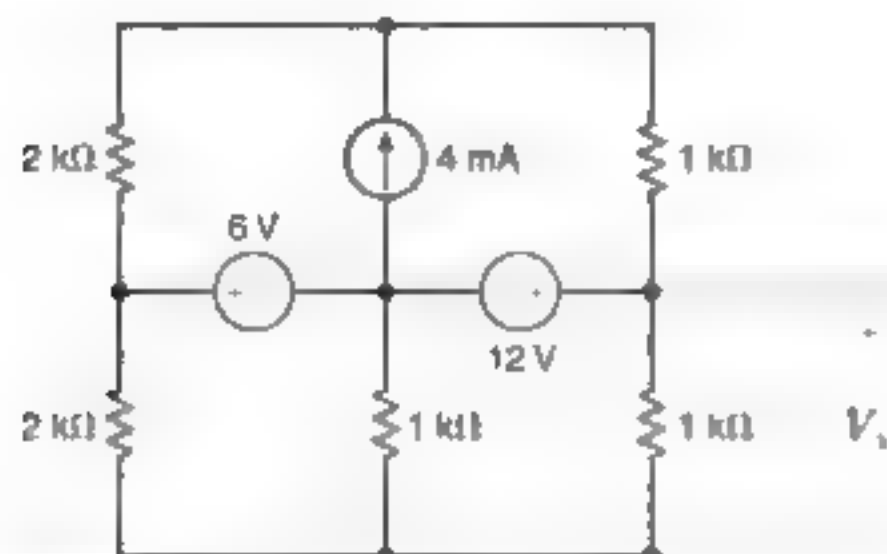


Figura P5.56

- 5.57 Utilize o teorema de Norton para determinar a corrente I_x da rede mostrada na Fig. P5.57.

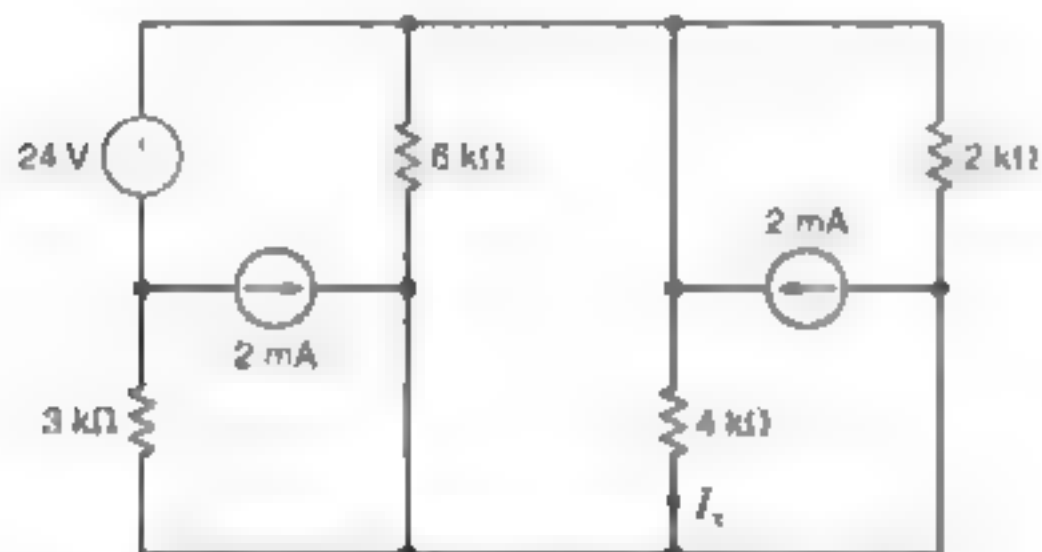


Figura P5.57

- 5.58 Utilize o teorema de Norton para determinar a corrente I_x do circuito mostrado na Fig. P5.58

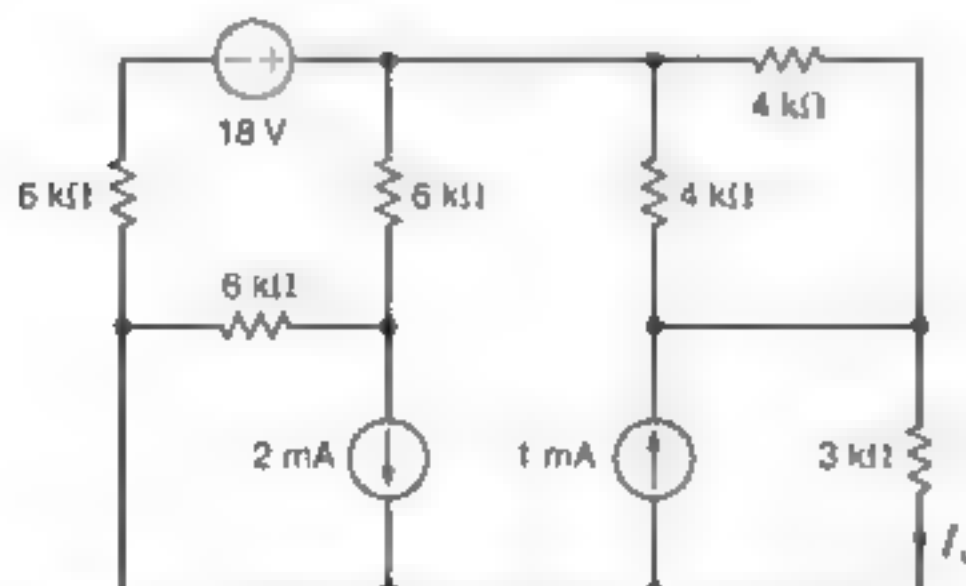


Figura P5.58

- 5.59 Determine a tensão V_x da rede mostrada na Fig. P5.59 utilizando o teorema de Thévenin.

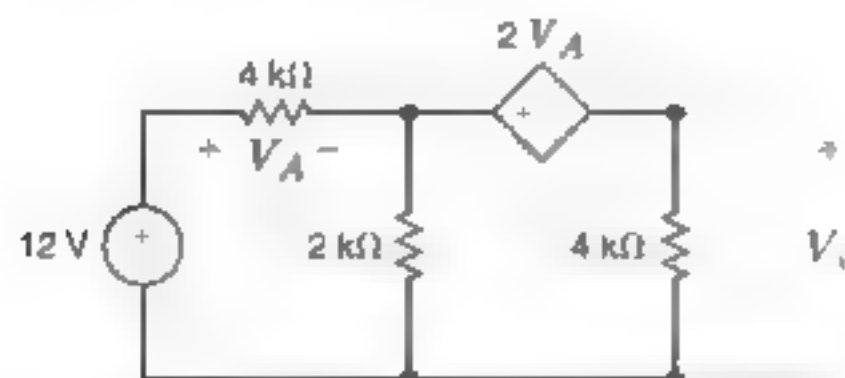


Figura P5.59

- 5.60 Utilize o teorema de Thévenin para determinar a tensão V_x do circuito mostrado na Fig. P5.60.

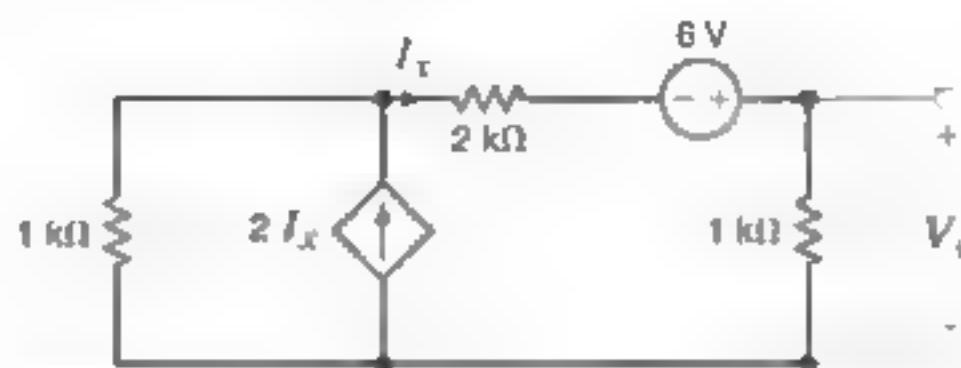


Figura P5.60

- 5.61 Utilize o teorema de Thévenin para determinar a corrente I_x do circuito mostrado na Fig. P5.61.

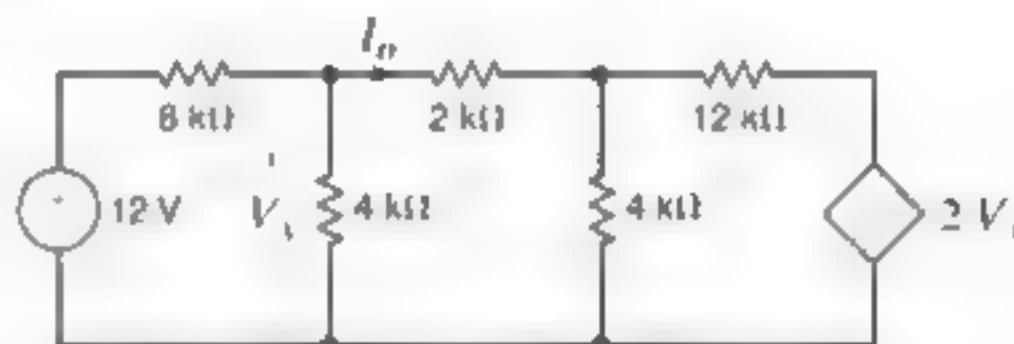


Figura P5.61

- 5.62 Utilize o teorema de Thévenin para determinar a tensão V_x do circuito mostrado na Fig. P5.62.

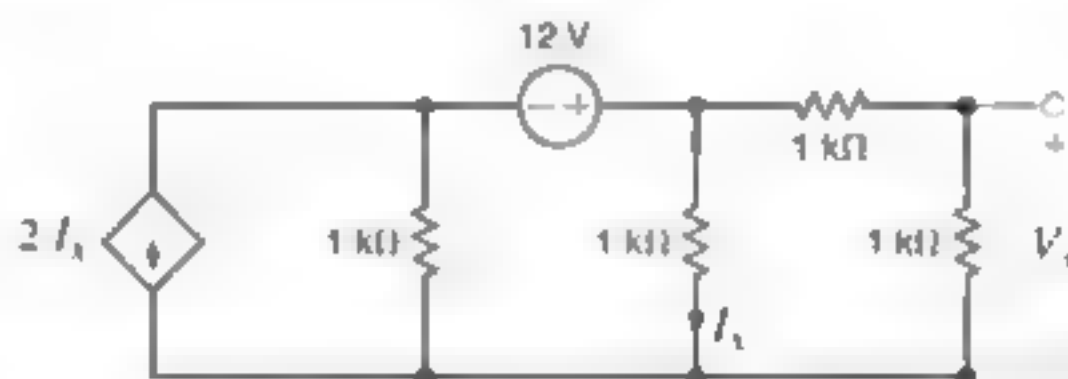


Figura P5.62

- 5.63 Determine a corrente I_x do circuito mostrado na Fig. P5.63 utilizando o teorema de Thévenin.

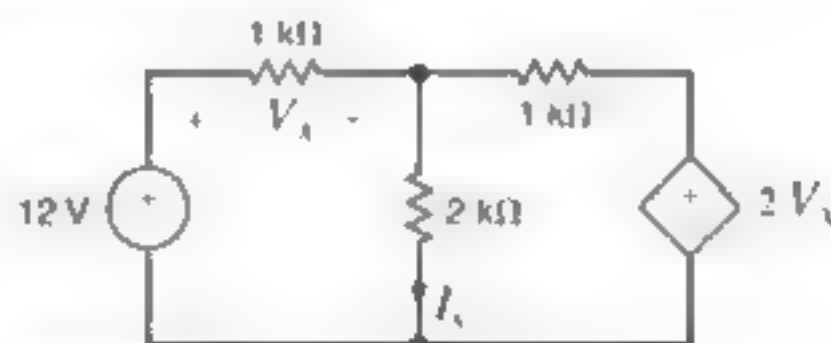


Figura P5.63

- 5.64 Determine a tensão V_x da rede mostrada na Fig. P5.64 utilizando o teorema de Thévenin.

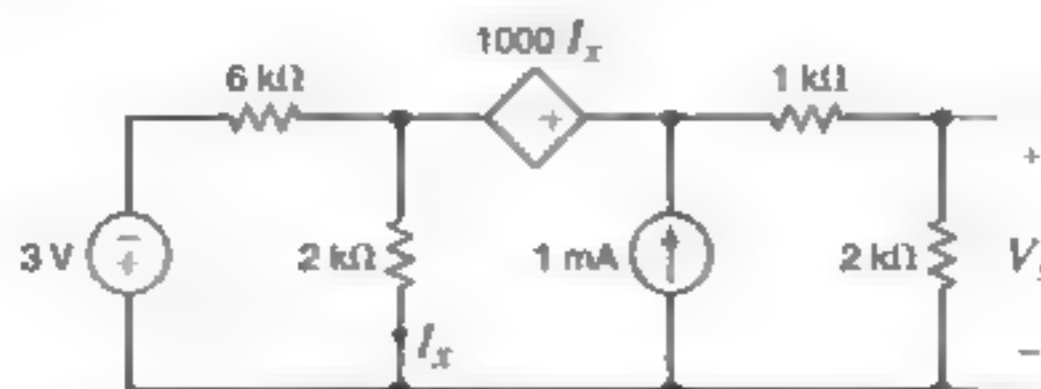


Figura P5.64

- 5.65 Utilize o teorema de Norton para determinar a tensão V_x da rede mostrada na Fig. P5.65.

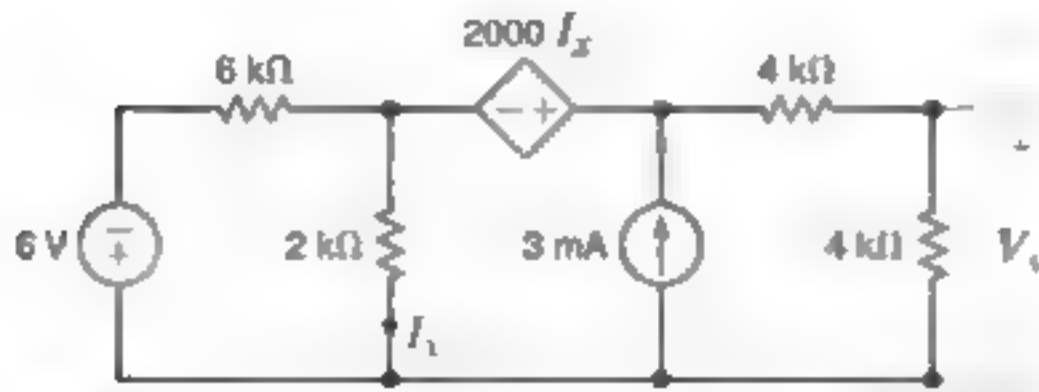


Figura P5.65

- 5.66 Determine a tensão V_x do circuito mostrado na Fig. P5.66 utilizando o teorema de Thévenin.

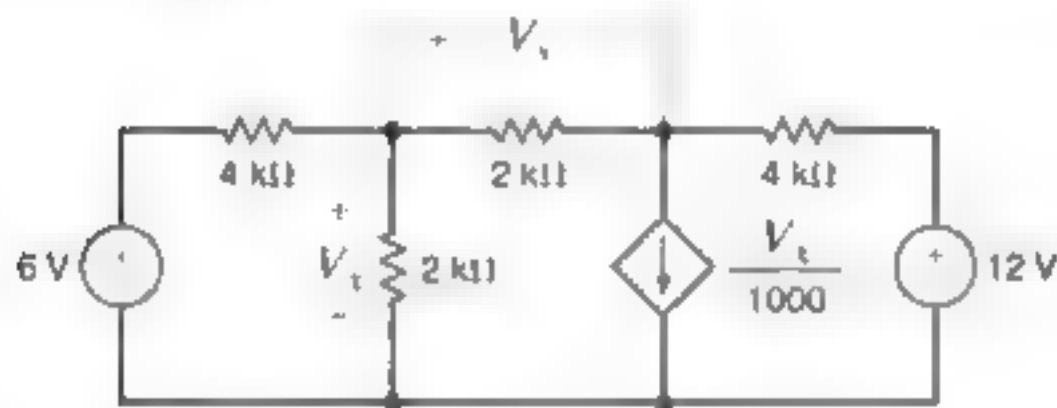


Figura P5.66

- 5.67 Determine a tensão V_x da rede mostrada na Fig. P5.67 utilizando o teorema de Thévenin.

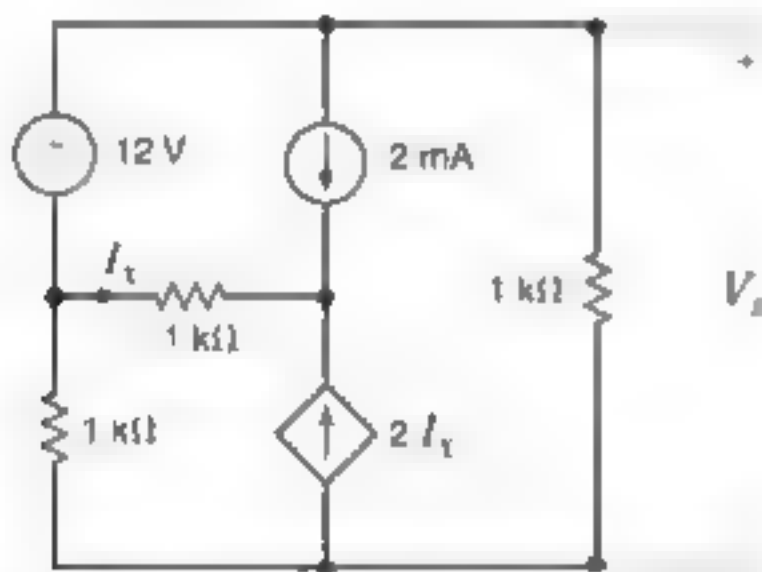


Figura P5.67

- 5.68 Utilize o teorema de Thévenin para determinar a tensão V_x do circuito mostrado na Fig. P5.68.

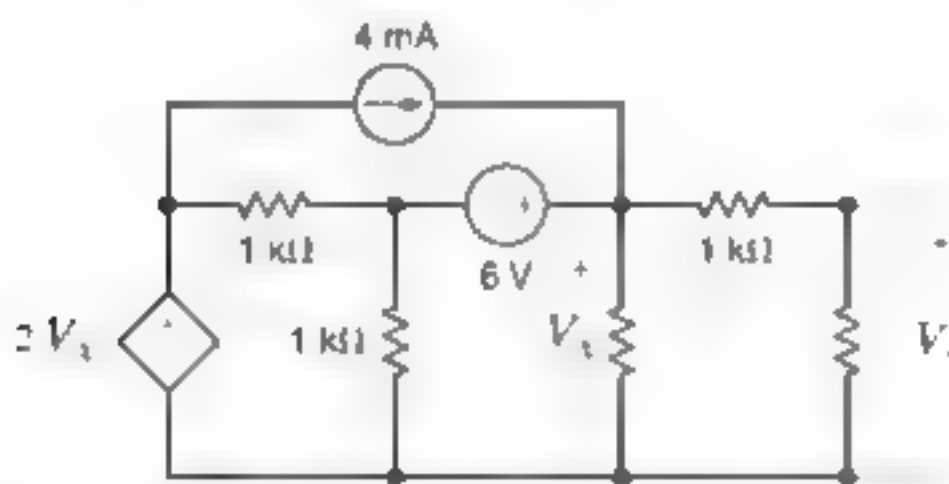


Figura P5.68

- 5.69 Utilize o teorema de Thévenin para determinar a tensão V_x do circuito mostrado na Fig. P5.69.

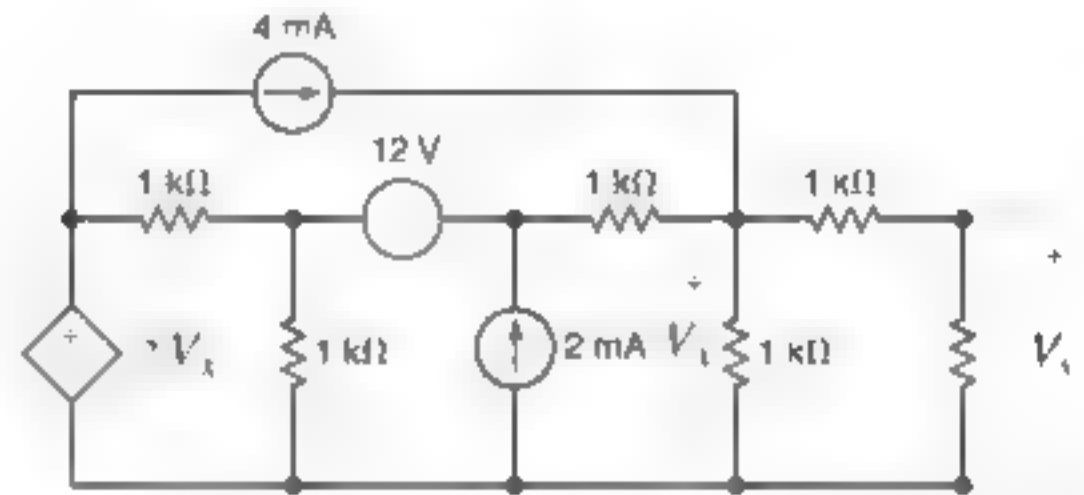


Figura P5.69

- 5.70 Utilize o teorema de Thévenin para determinar a tensão V_x da rede mostrada na Fig. P5.70.

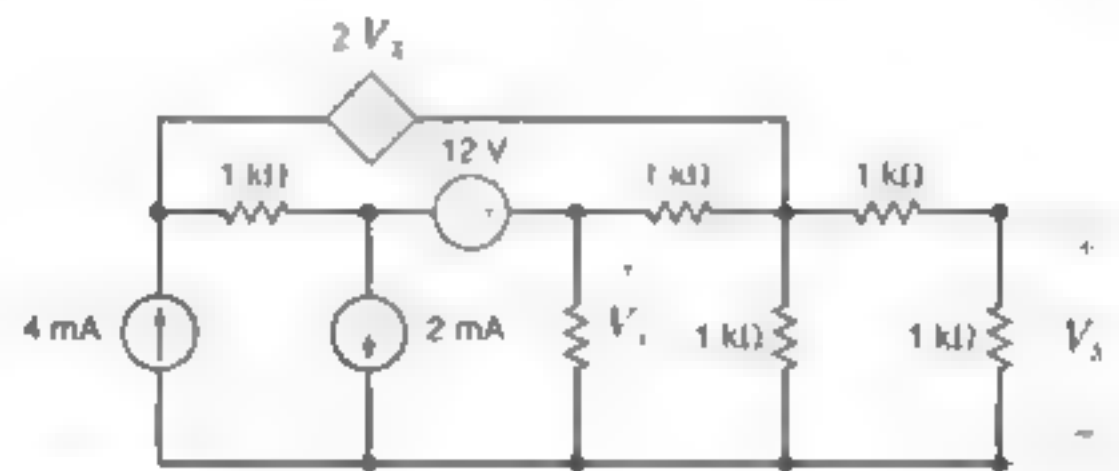


Figura P5.70

- 5.71 Determine a tensão V_x da rede mostrada na Fig. P5.71 utilizando o teorema de Norton.

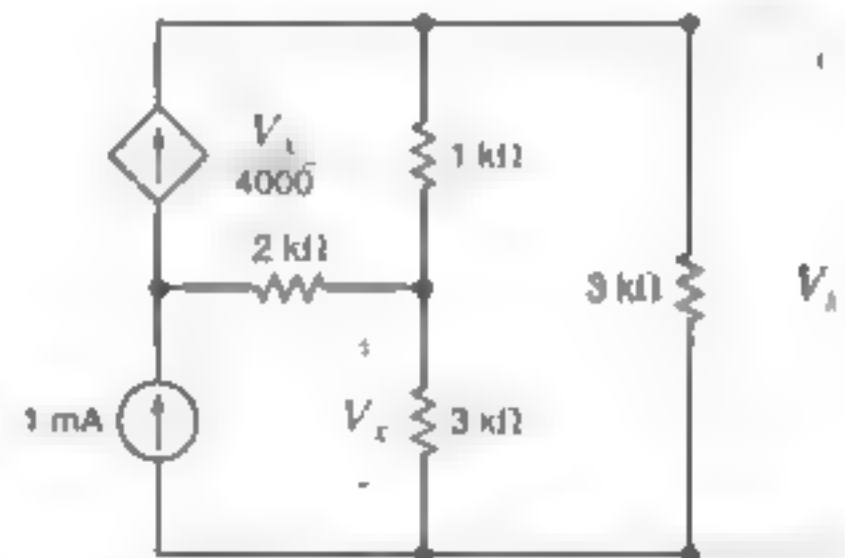


Figura P5.71

- 5.72 Determine a corrente I_x da rede mostrada na Fig. P5.72 utilizando o teorema de Thévenin.

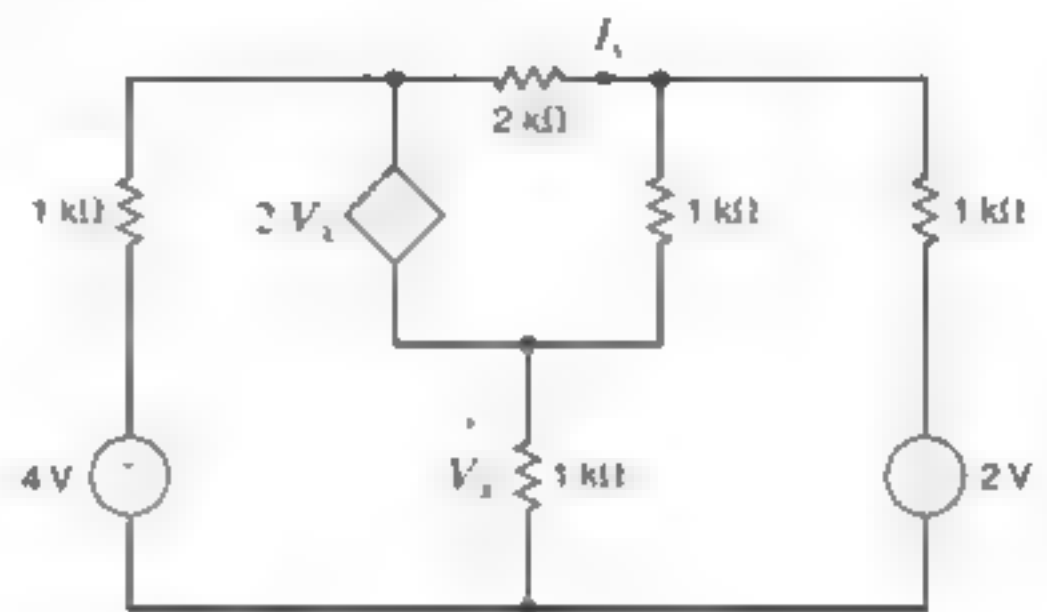


Figura P5.72

- 5.81** Determine a resistência equivalente de Thévenin nos terminais A-B da rede mostrada na Fig. P5.81.

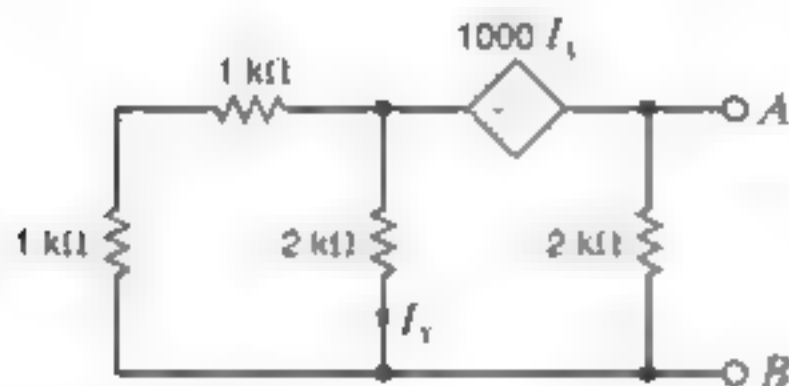


Figura P5.81

- 5.82** Obtenha o circuito equivalente de Thévenin nos terminais A-B da rede mostrada na Fig. P5.82.

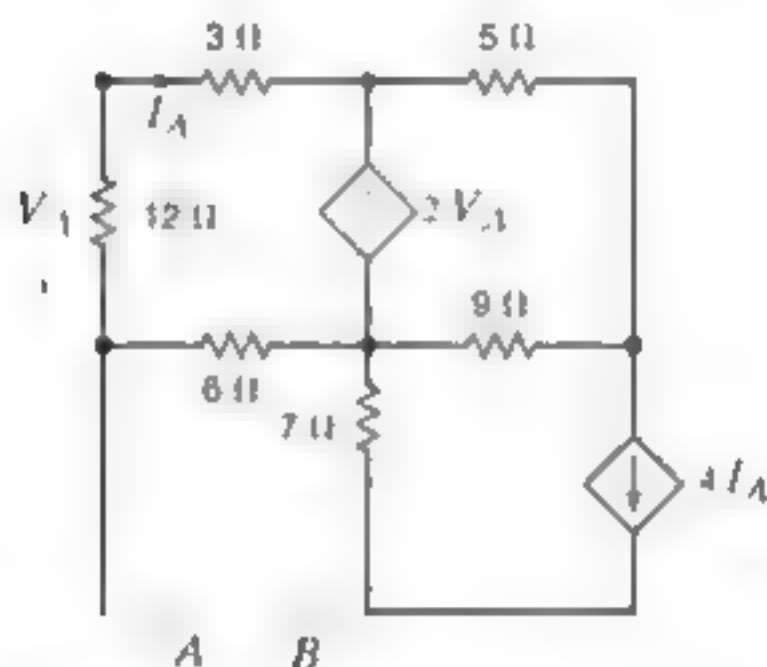


Figura P5.82

- 5.83** Determine a resistência equivalente de Thévenin nos terminais A-B da rede mostrada na Fig. P5.83.

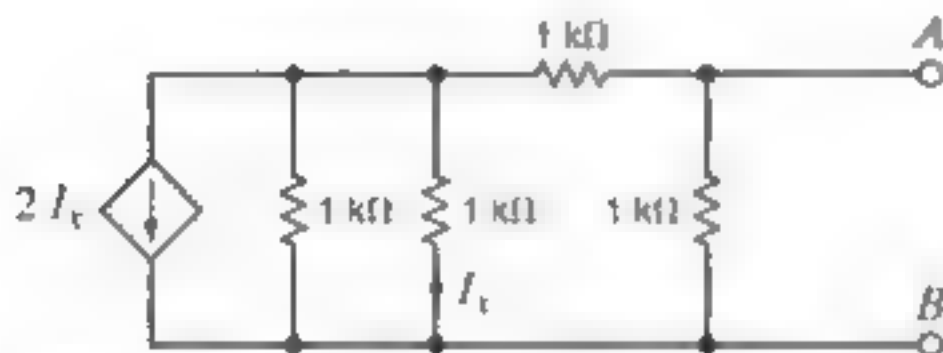


Figura P5.83

- 5.84** Determine a corrente I_x da rede mostrada na Fig. P5.84 utilizando o teorema de Thévenin.

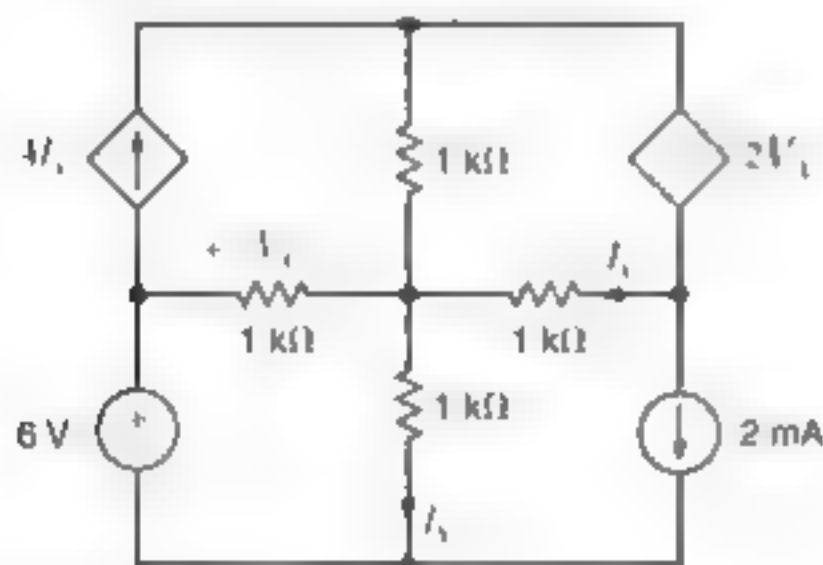


Figura P5.84

- 5.85** Utilize uma transformação de fonte para determinar a tensão V_x da rede mostrada na Fig. P5.85.

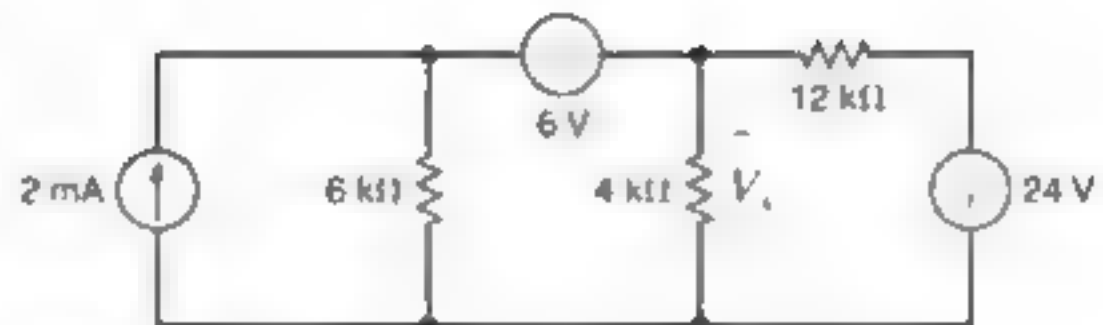


Figura P5.85

- 5.86** Determine a corrente I_x da rede mostrada na Fig. P5.86 utilizando uma transformação de fonte.

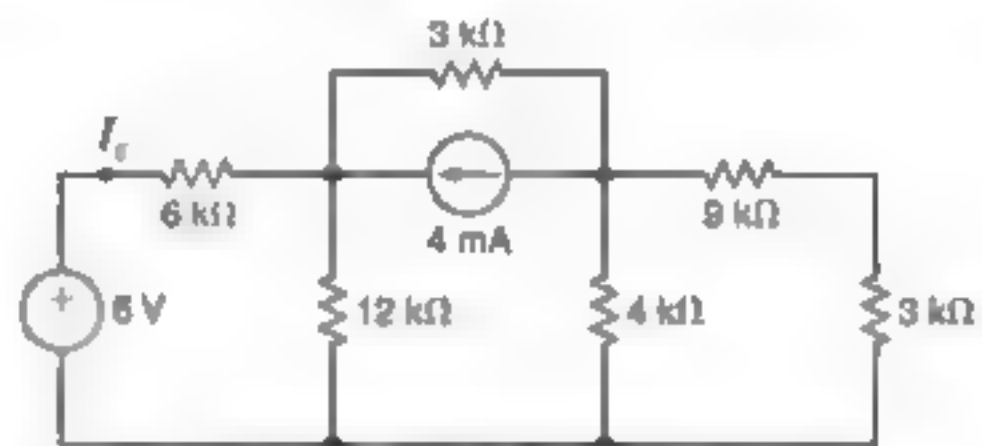


Figura P5.86

- 5.87** Determine a tensão V_x da rede mostrada na Fig. P5.87 utilizando uma transformação de fonte.

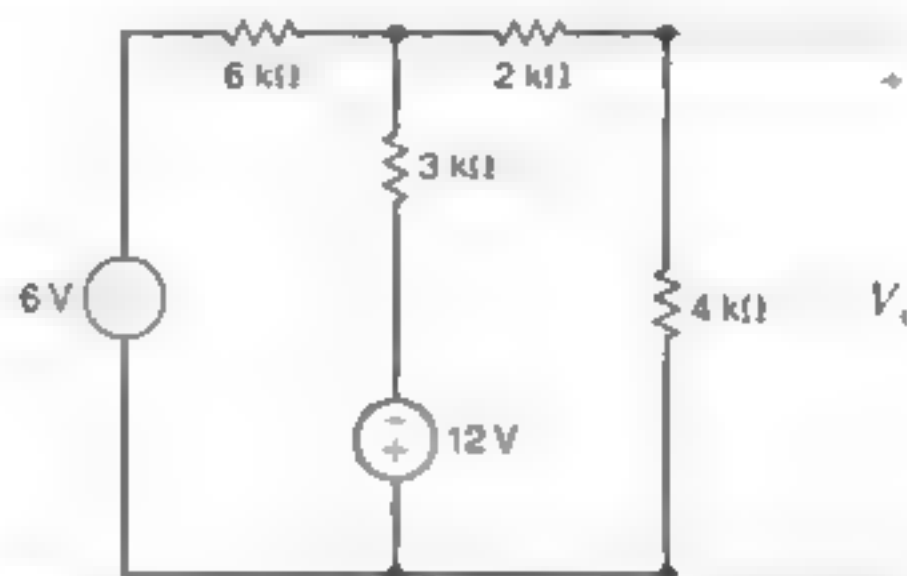


Figura P5.87

- 5.88** Utilize uma transformação de fonte para determinar a corrente I_x da rede mostrada na Fig. P5.88.

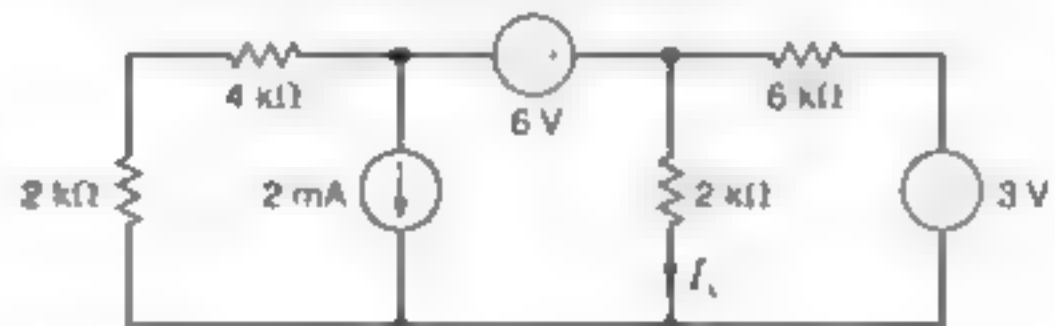


Figura P5.88

- 5.89** Determine a tensão V_x da rede mostrada na Fig. P5.89 utilizando uma transformação de fonte.

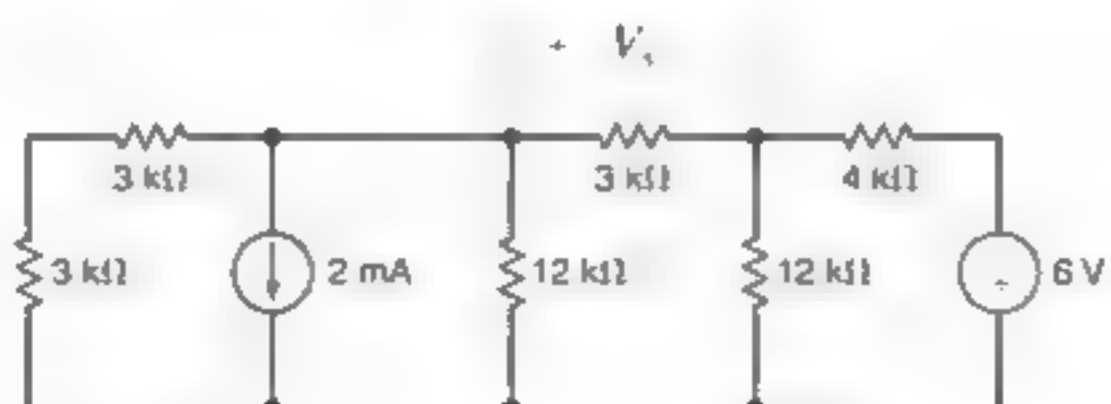


Figura P5.89

- 5.90 Determine a corrente I_x da rede mostrada na Fig. P5.90 utilizando uma transformação de fonte.

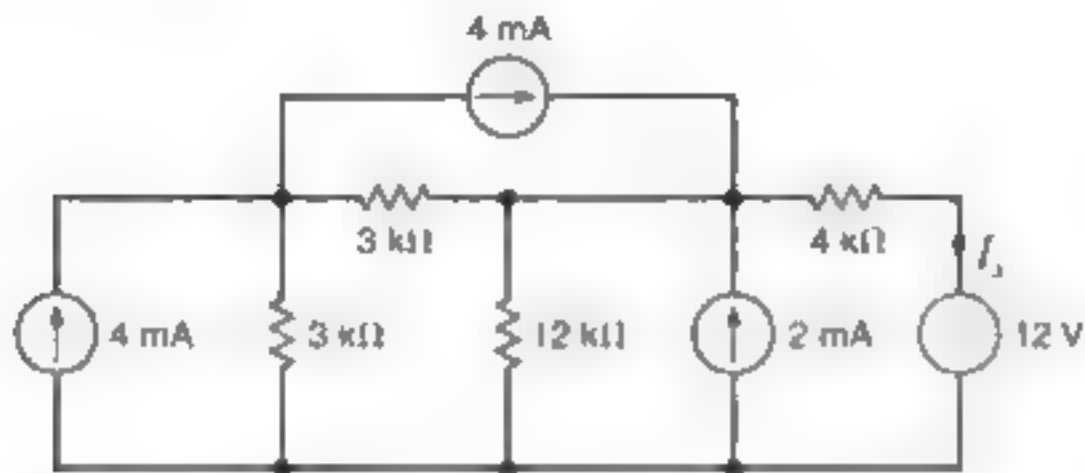


Figura P5.90

- 5.91 Determine a corrente I_x do circuito mostrado na Fig. P5.91 utilizando uma transformação de fonte.

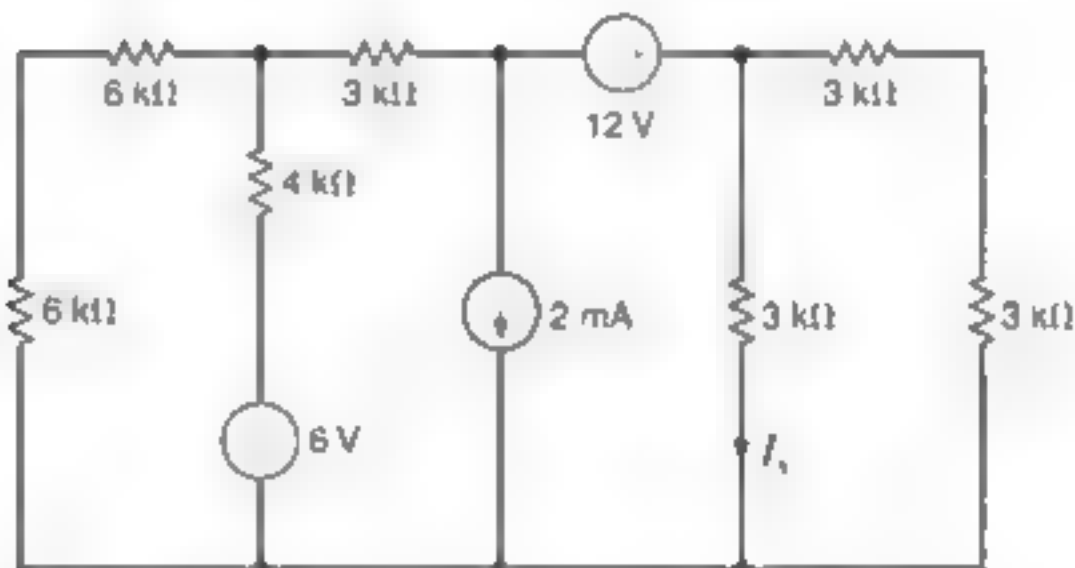


Figura P5.91

- 5.92 Utilize uma troca de fonte para obter a corrente I_x da rede mostrada na Fig. P5.92.

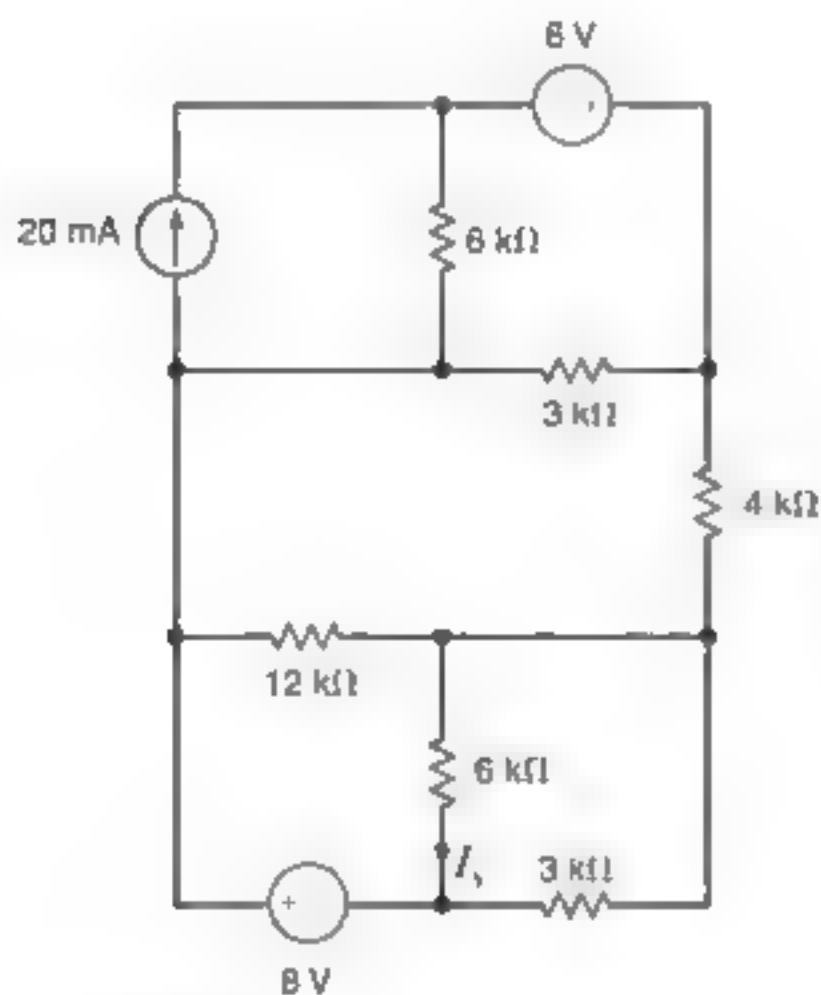


Figura P5.92

- 5.93 Utilize uma combinação de transformação Y-Δ com transformação de fonte para determinar a corrente I_x do circuito mostrado na Fig. P5.93.

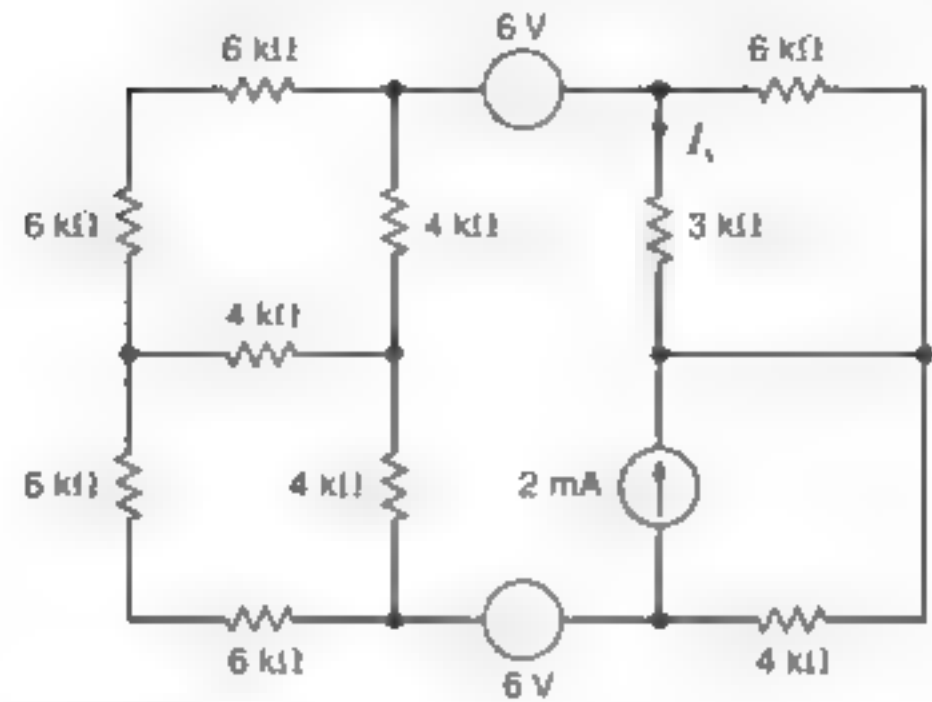


Figura P5.93

- 5.94 Determine a tensão V_x da rede mostrada na Fig. P5.94 utilizando uma troca de fonte.

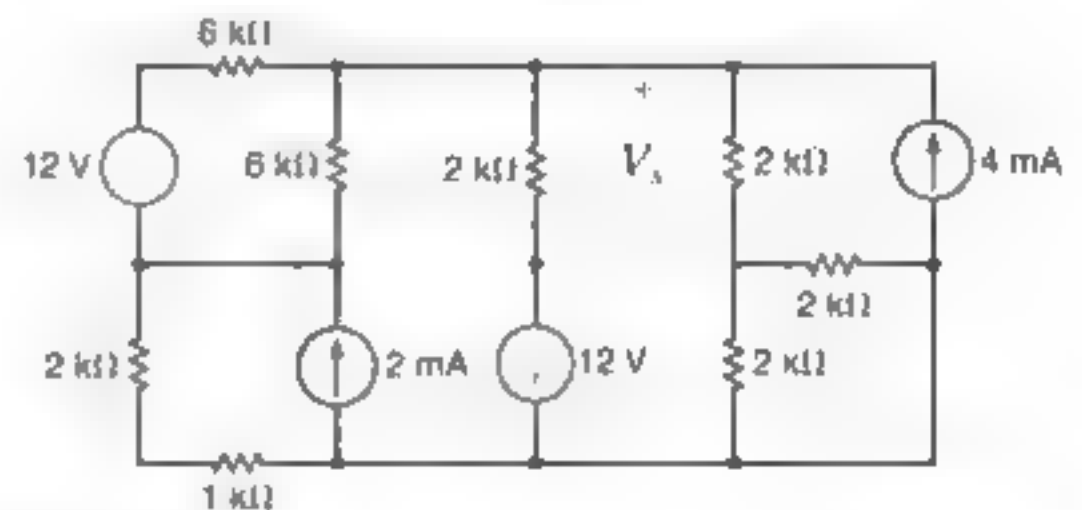


Figura P5.94

- 5.95 Utilize uma troca de fonte para determinar a corrente I_x do circuito mostrado na Fig. P5.95.

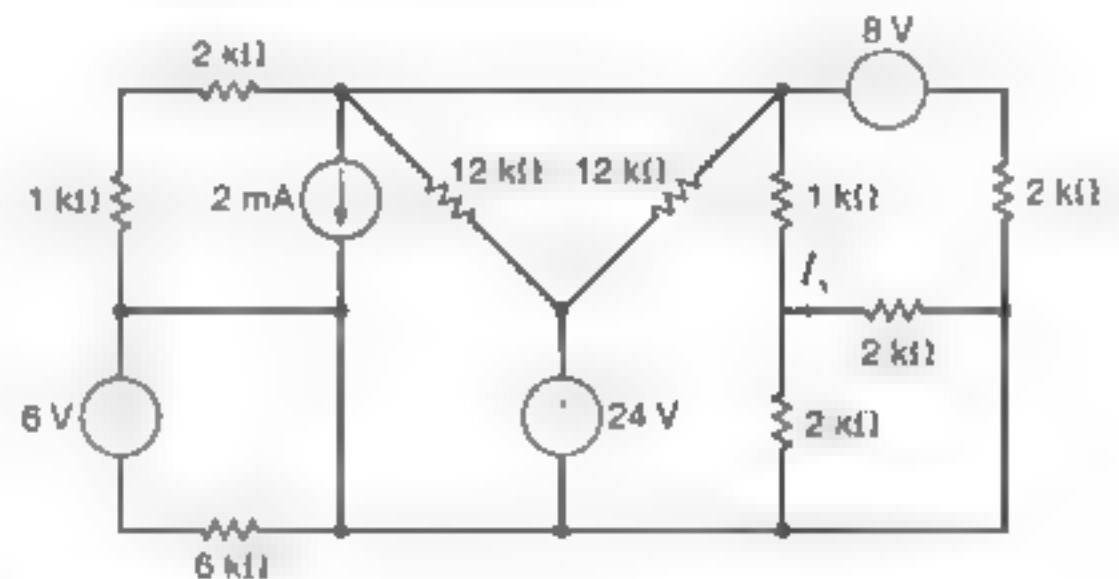


Figura P5.95

- 5.96 Utilize uma troca de fonte para determinar a corrente I_x da rede mostrada na Fig. P5.96.

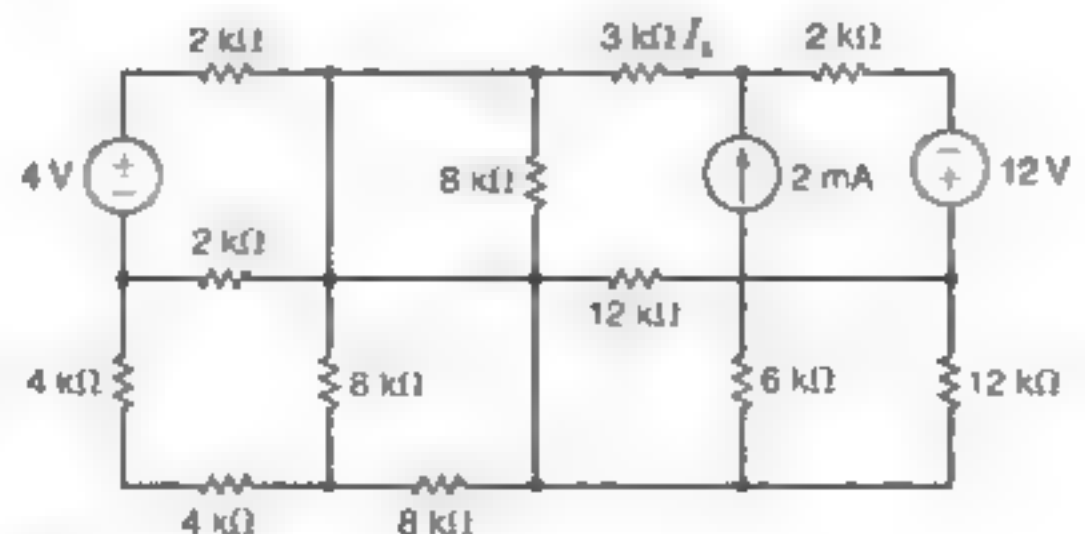


Figura P5.96

- 5.97 Utilize uma troca de fonte para determinar a corrente I_x da rede mostrada na Fig. P5.97.

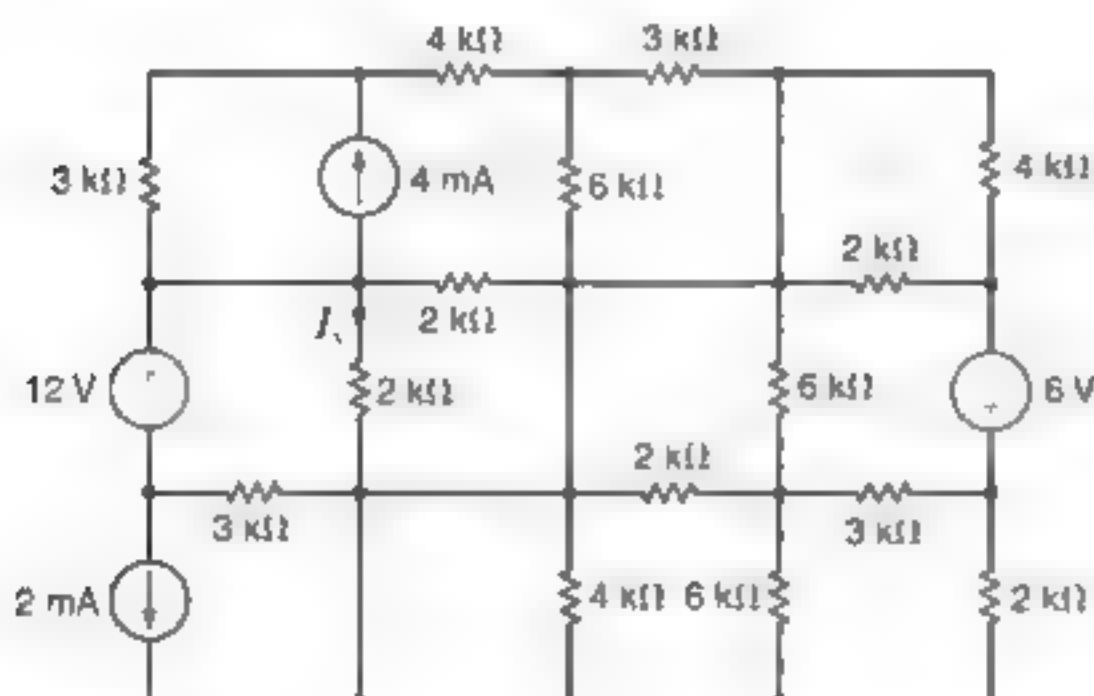


Figura P5.97

- 5.98 Utilize uma transformação de fonte para obter a corrente I_x da rede mostrada na Fig. P5.98.

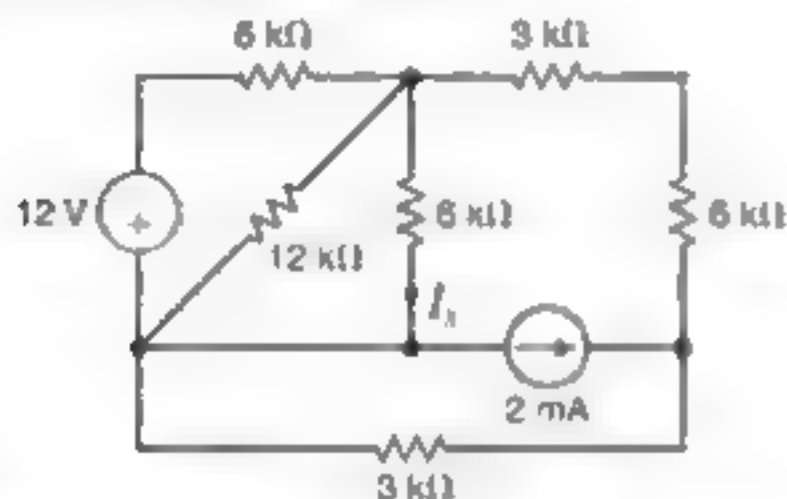


Figura P5.98

- 5.99 Utilizando uma transformação de fonte, determine a tensão V_x do circuito mostrado na Fig. P5.99.

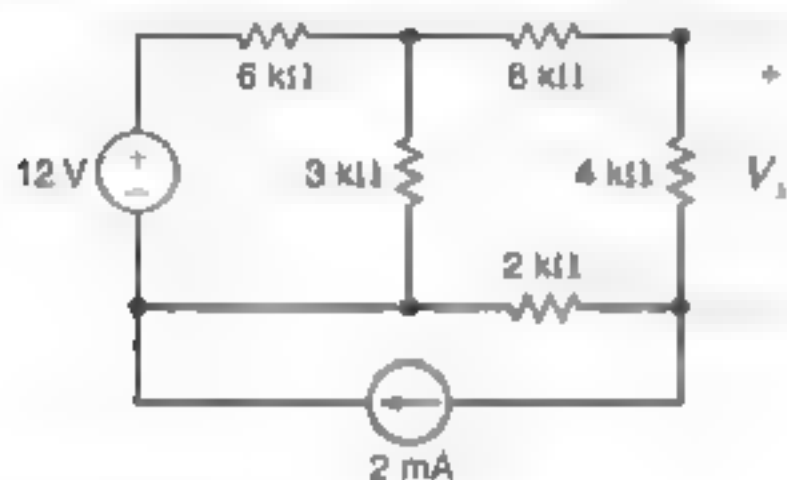


Figura P5.99

- 5.100 Utilizando uma transformação de fonte, determine a corrente I_x do circuito mostrado na Fig. P5.100.

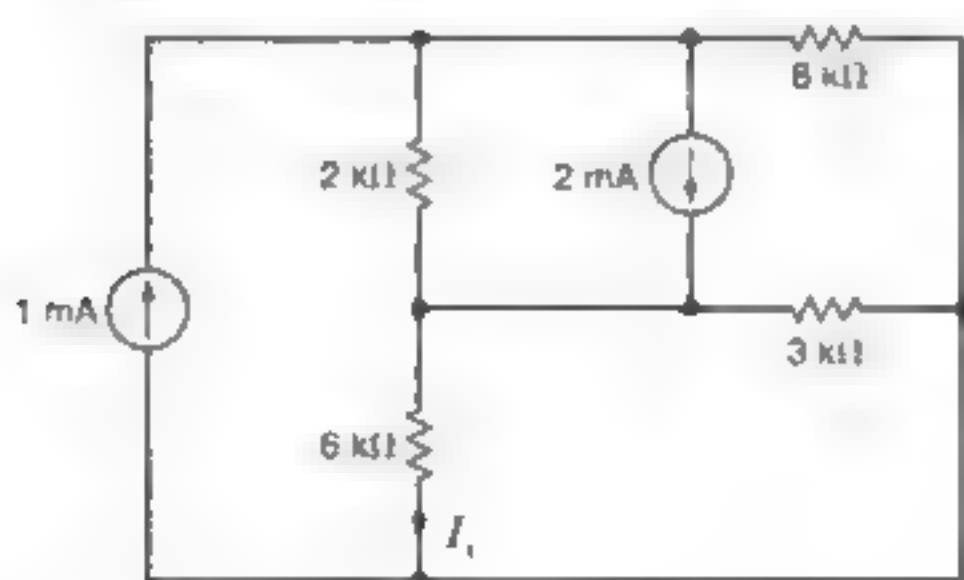


Figura P5.100

- 5.101 Utilize uma transformação de fonte para obter a corrente I_x do circuito mostrado na Fig. P5.101.

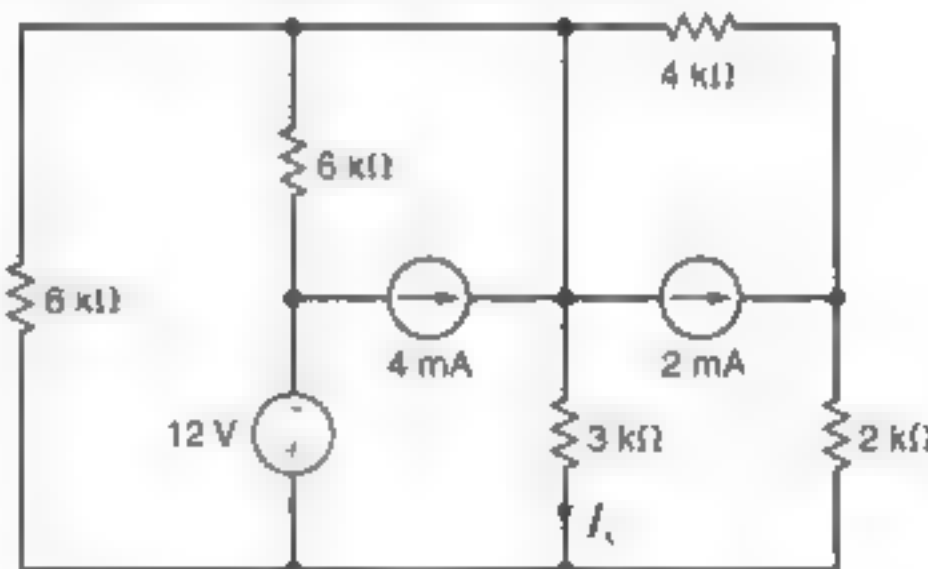


Figura P5.101

- 5.102 Utilizando uma transformação de fonte determine a corrente I_x da rede mostrada na Fig. P5.102.

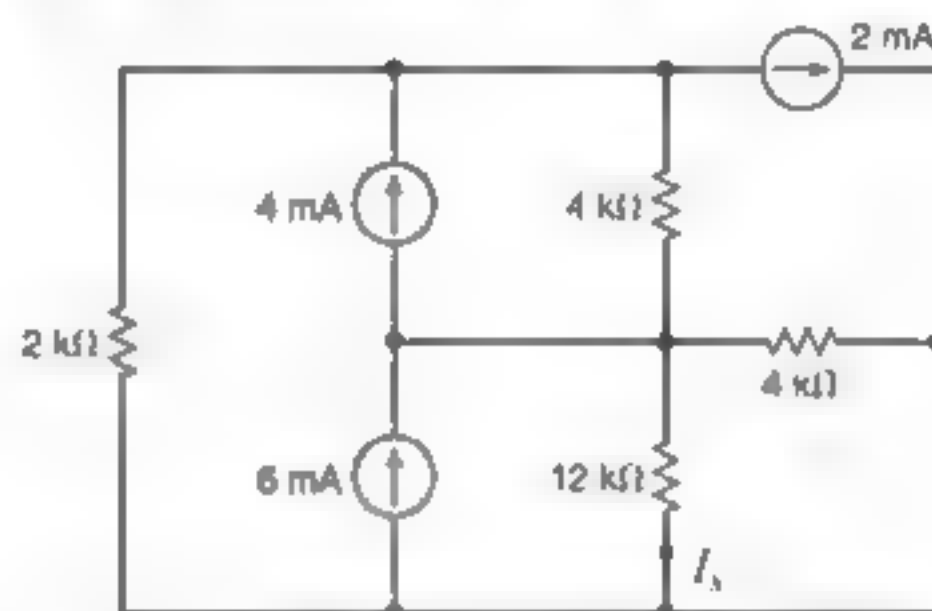


Figura P5.102

- 5.103 Utilize uma transformação de fonte para obter a corrente I_x do circuito mostrado na Fig. P5.103.

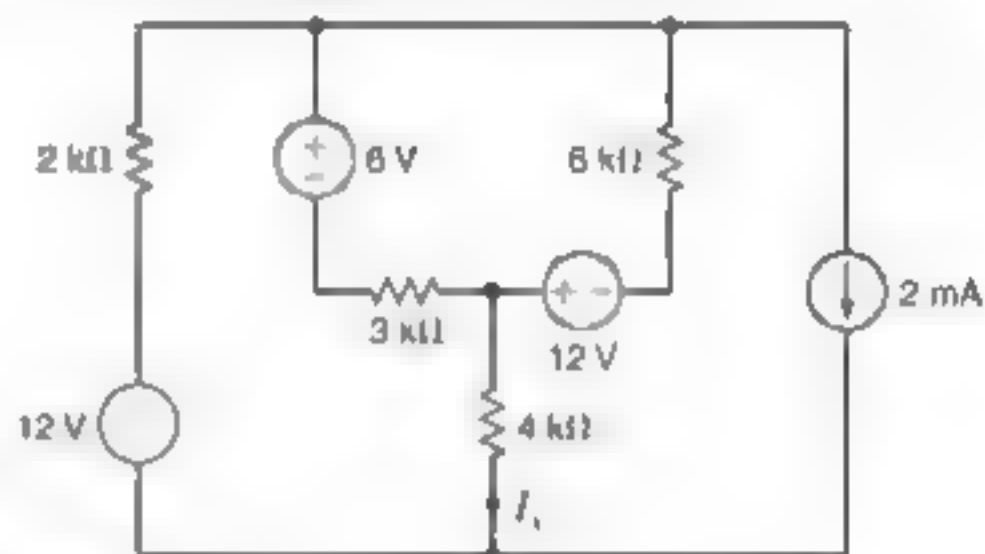


Figura P5.103

- 5.104 Utilize uma transformação de fonte para obter a corrente I_x do circuito mostrado na Fig. P5.104.

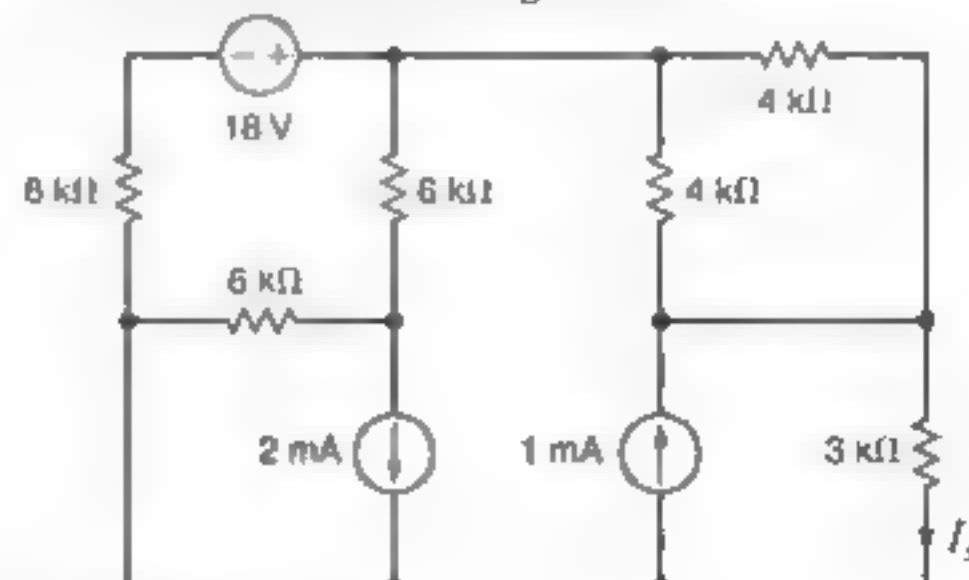


Figura P5.104

- 5.105** Utilizando uma transformação de fonte, determine a corrente I_x do circuito mostrado na Fig. P5.105.

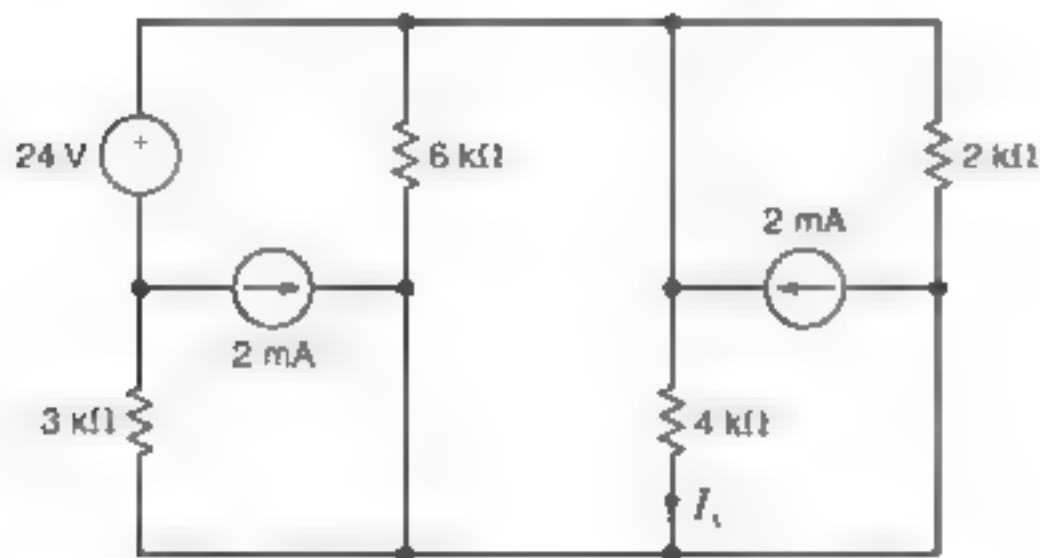


Figura P5.105

- 5.106** Determine a resistência R_C da rede mostrada na Fig. P5.106 de modo a se obter a transferência de potência máxima.

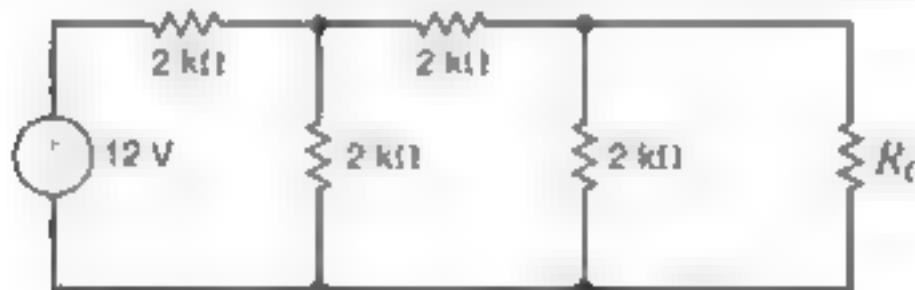


Figura P5.106

- 5.107** Considerando a rede mostrada na Fig. P5.107, determine a resistência R_C para a transferência de potência máxima e a potência máxima transferida a essa carga.

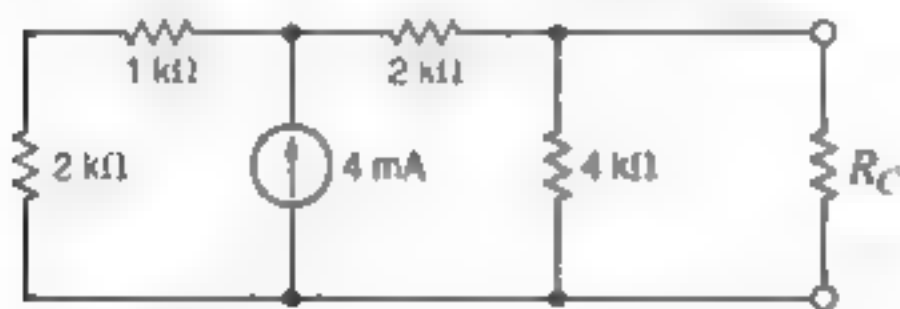


Figura P5.107

- 5.108** Determine a resistência R_C para transferência de potência máxima e a potência máxima que pode ser transferida à carga no circuito mostrado na Fig. P5.108.

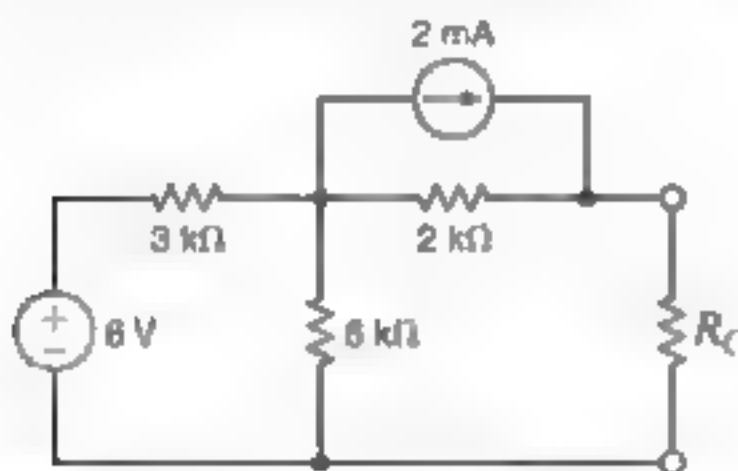


Figura P5.108

- 5.109** Calcule a potência máxima que pode ser transferida à resistência R_C do circuito mostrado na Fig. P5.109

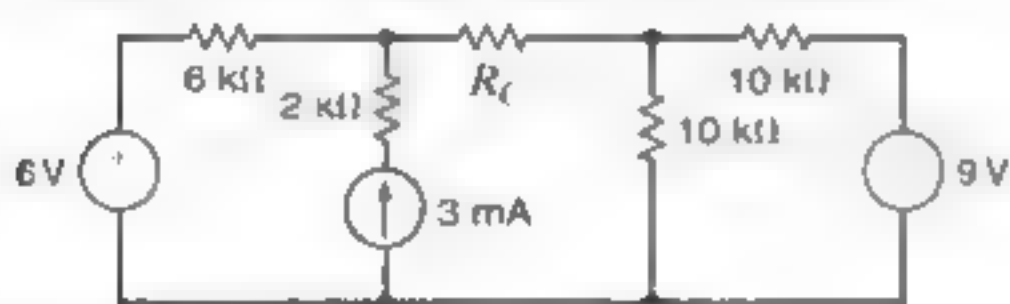


Figura P5.109

- 5.110** Determine o valor da resistência R_C do circuito mostrado na Fig. P5.110 para que ocorra a transferência de potência máxima e a potência máxima que pode ser dissipada em R_C .

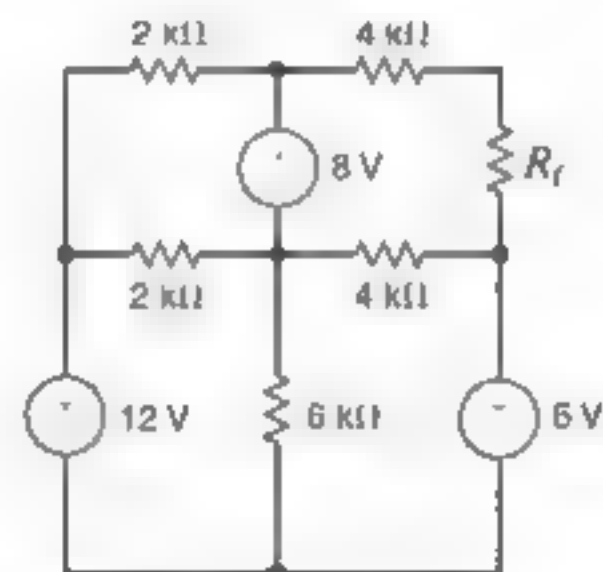


Figura P5.110

- 5.111** Determine o valor de R_C no circuito mostrado na Fig. P5.111 para que ocorra a transferência de potência máxima. Além disso, calcule a potência dissipada em R_C nessas condições.

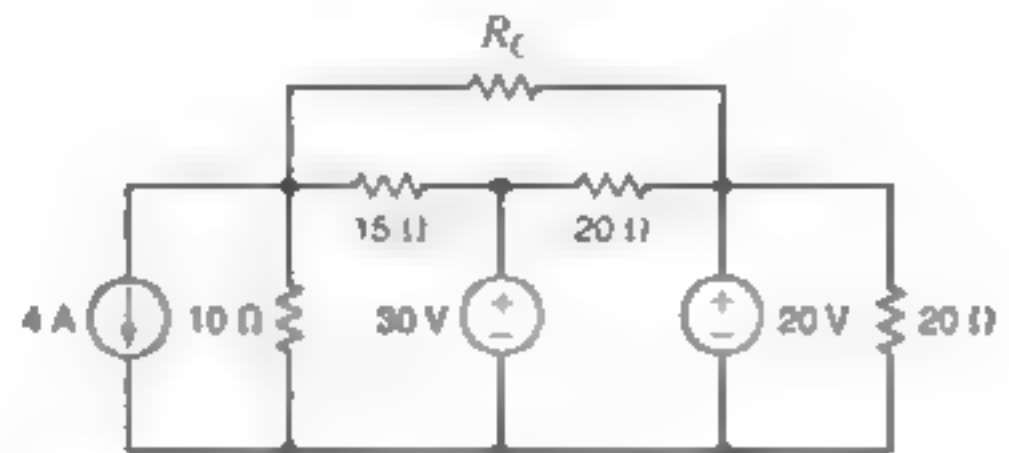


Figura P5.111

- 5.112** Determine o valor da resistência R_C na rede mostrada na Fig. P5.112 de modo que ocorra a transferência de potência máxima.

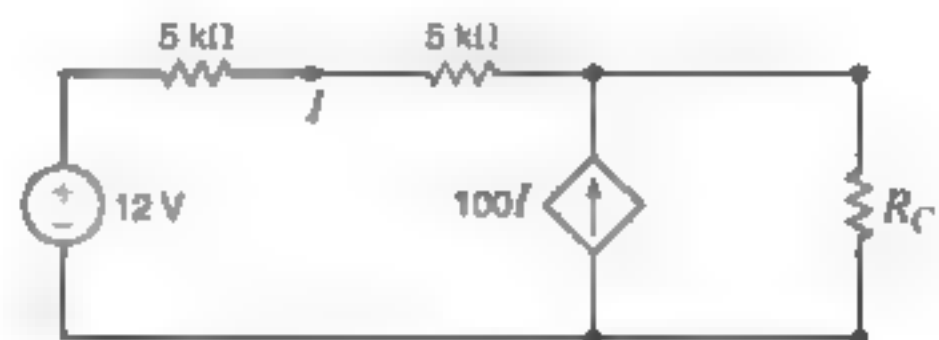


Figura P5.112

- 5.113** Determine a resistência R_C para transferência de potência máxima e a potência máxima que pode ser transferida à carga no circuito mostrado na Fig. P5.113.

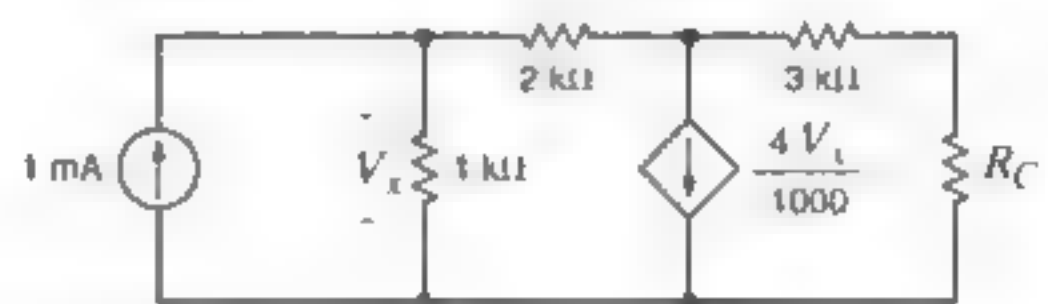


Figura P5.113

- 5.114** Determine o valor da resistência R_C na rede mostrada na Fig. P5.114 de modo que ocorra a transferência de potência máxima.

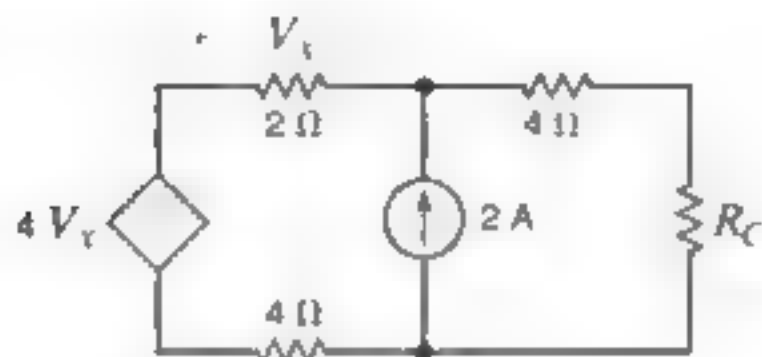


Figura P5.114

- 5.115** Determine o valor da resistência R_C do circuito mostrado na Fig. P5.115 para que ocorra a transferência de potência máxima e a potência máxima que pode ser transferida a R_C .

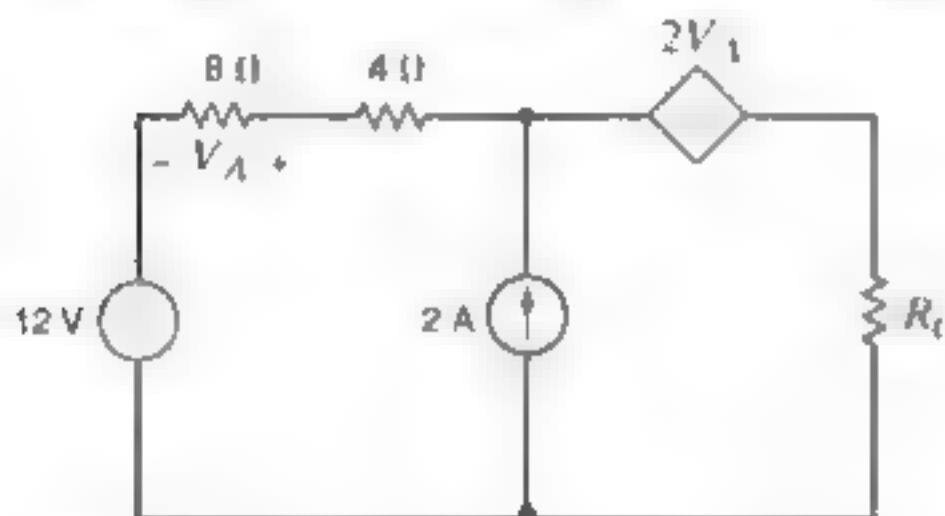


Figura P5.115

- 5.116** Determine o valor da resistência R_C do circuito mostrado na Fig. P5.116 para que ocorra a transferência de potência máxima e a potência máxima que pode ser dissipada em R_C .

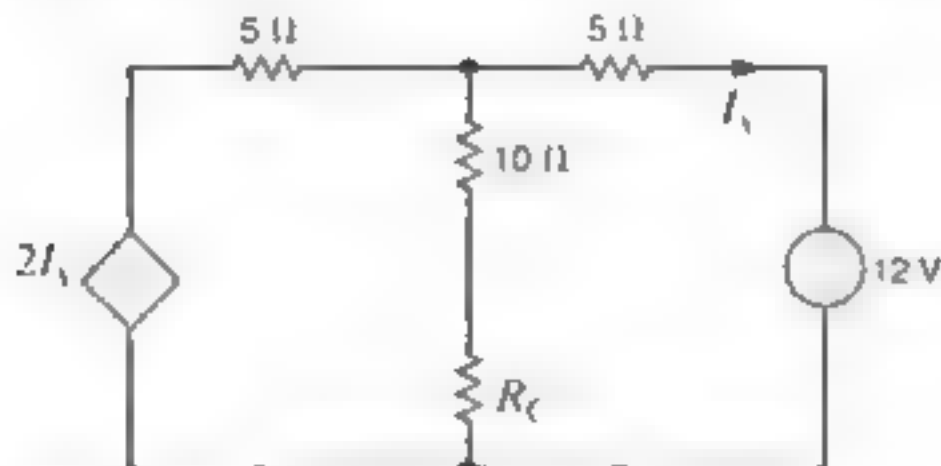


Figura P5.116

- 5.117** Determine o valor de R_C no circuito mostrado na Fig. P5.117 para que ocorra a transferência de potência máxima. Além disso, calcule a potência dissipada em R_C nessas condições.

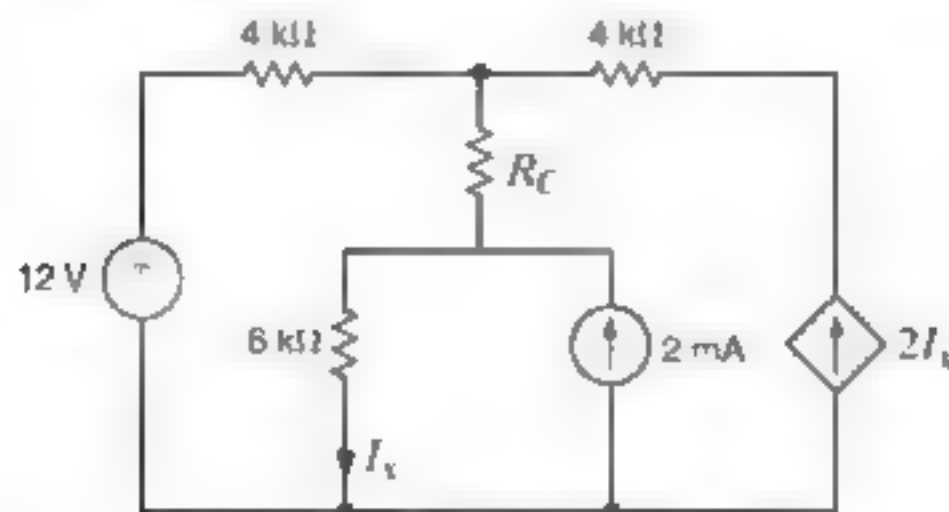


Figura P5.117

- 5.118** Determine o valor de R_C no circuito mostrado na Fig. P5.118 para que ocorra a transferência de potência máxima. Além disso, calcule a potência dissipada em R_C nessas condições.

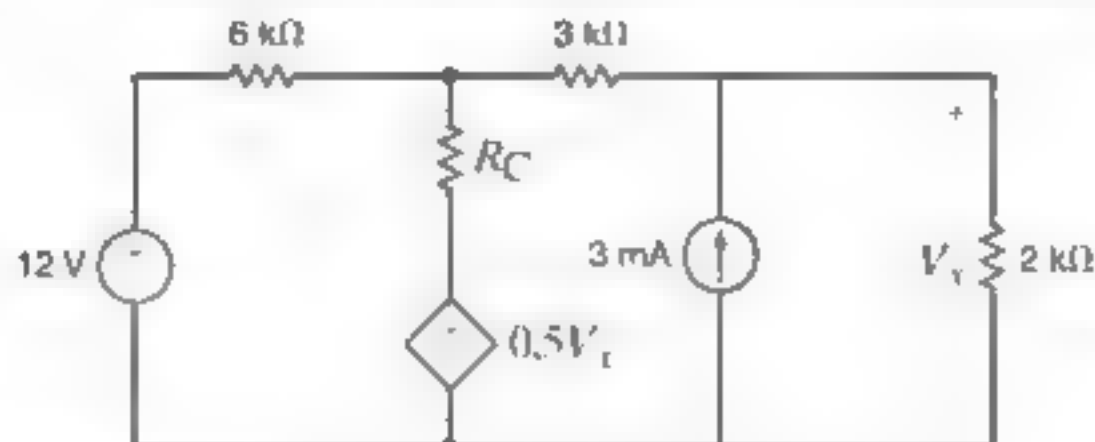


Figura P5.118

- 5.119** Calcule a potência máxima que pode ser transferida à resistência R_C do circuito mostrado na Fig. P5.119.

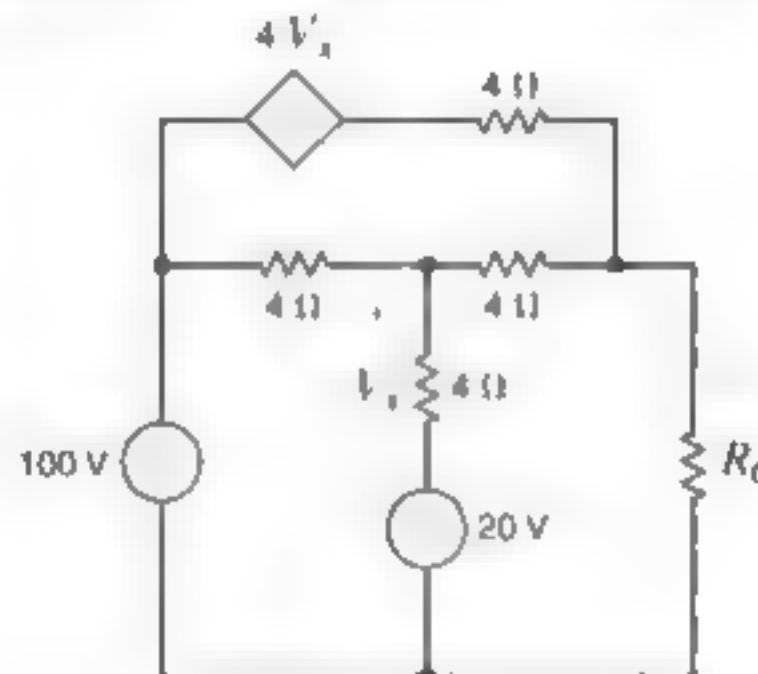


Figura P5.119

- 5.120** Determine o valor da resistência R_C para que ocorra a transferência de potência máxima e a potência máxima que pode ser transferida na rede mostrada na Fig. P5.120.

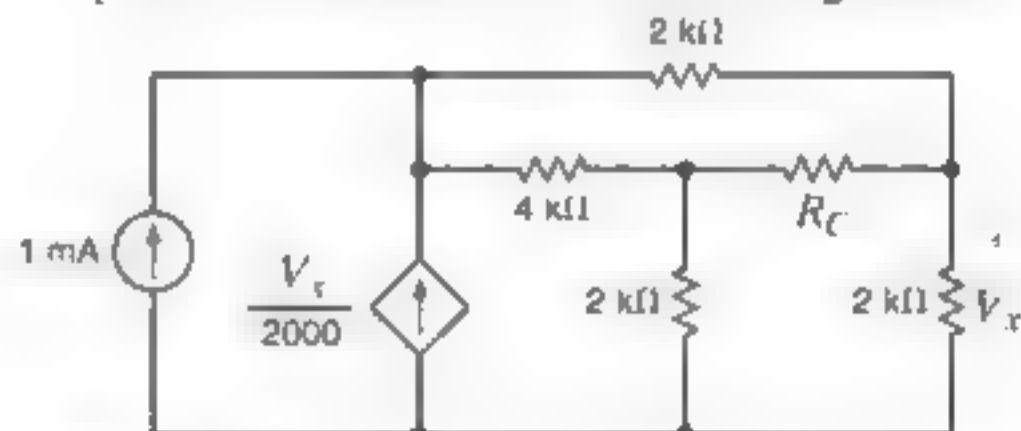


Figura P5.120

- 5.121** Determine o valor da resistência R_C no circuito mostrado na Fig. P5.121 para que ocorra a transferência de potência máxima e a potência máxima que pode ser dissipada em R_C .

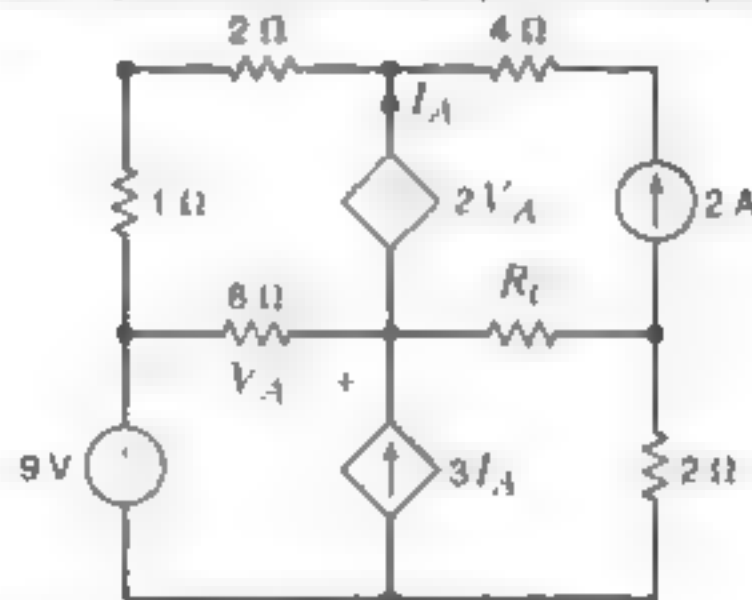


Figura P5.121

- 5.122** Resolva os demais problemas utilizando métodos computacionais. Determine a corrente I_x da rede mostrada na Fig. P5.122.

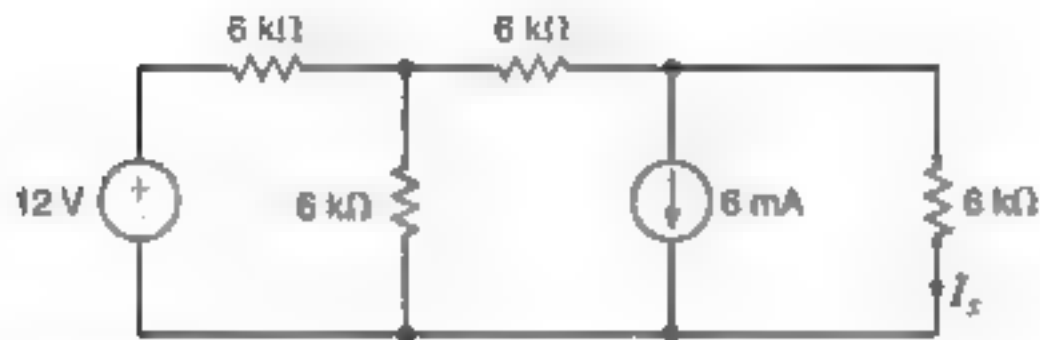


Figura P5.122

- 5.123** Determine a tensão V_x da rede mostrada na Fig. P5.123.

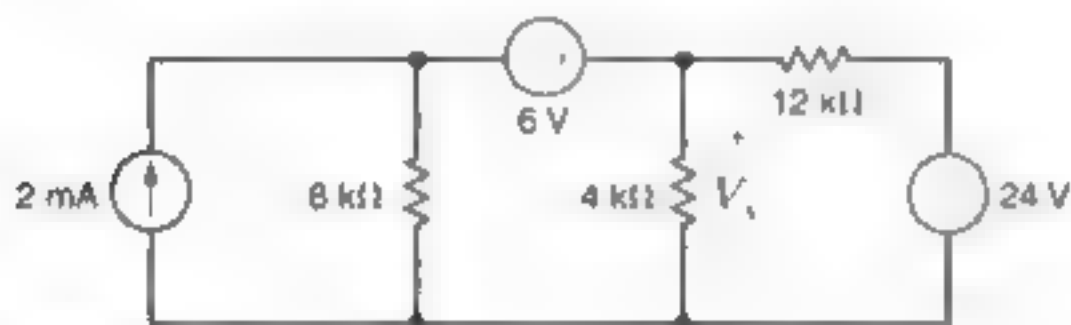


Figura P5.123

- 5.124** Determine a corrente I_x do circuito mostrado na Fig. P5.124.

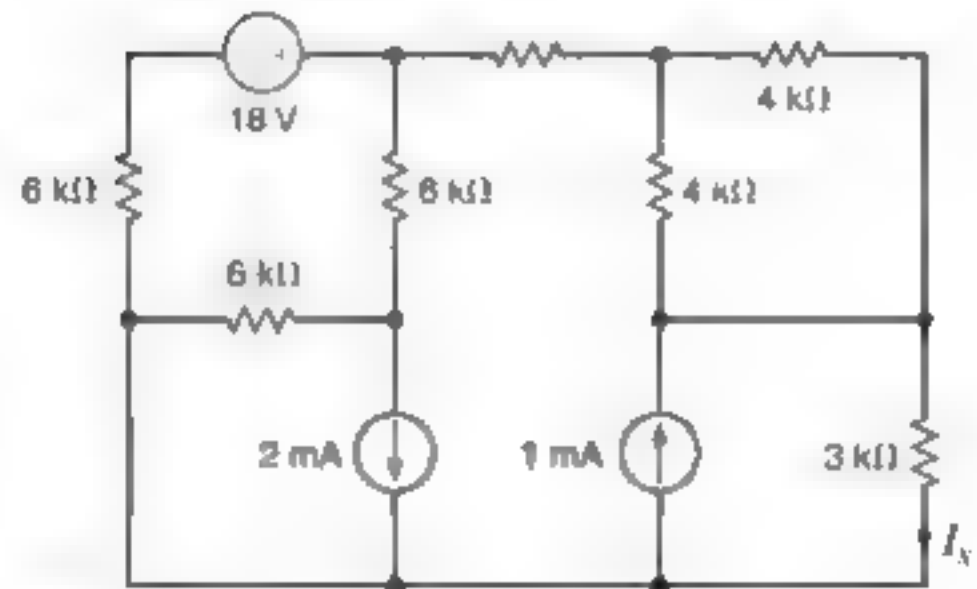


Figura P5.124

- 5.125** Determine a tensão V_x da rede mostrada na Fig. P5.125.

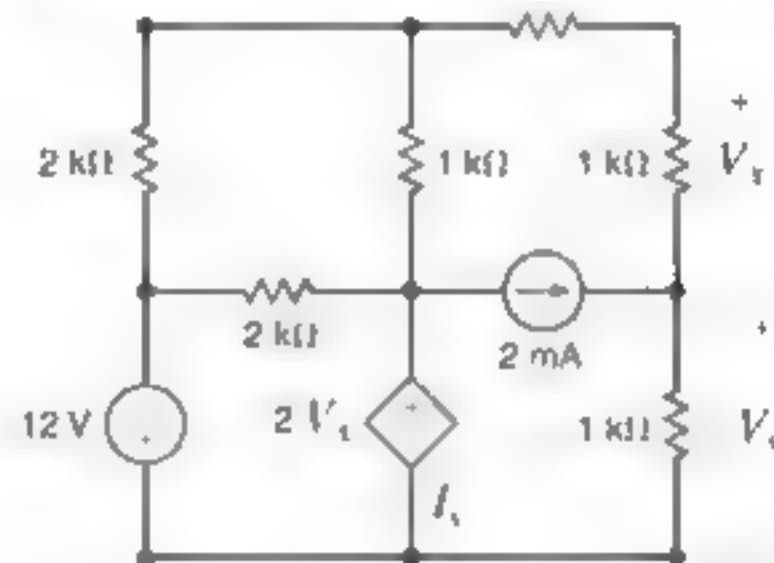


Figura P5.125

PROBLEMAS TÍPICOS DE EXAMES PROFISSIONAIS DE ENGENHARIA

- 5PEP-1** Determine a potência máxima que pode ser fornecida à carga R_C da rede mostrada na Fig. 5PEP-1.

- 2 mW
- 10 mW
- 4 mW
- 8 mW

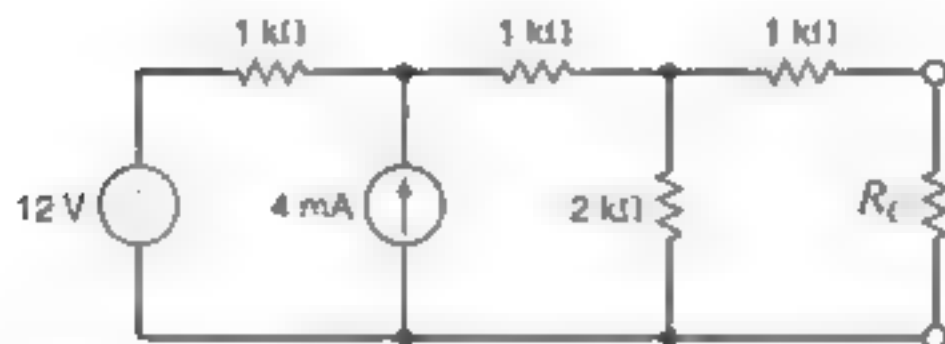


Figura 5PEP-1

- 5PEP-2** Determine o valor da carga R_C da rede mostrada na Fig. 5PEP-2 de modo que ocorra a transferência de potência máxima e determine o valor dessa potência máxima.

- 22,5 mW
- 80,4 mW
- 64,3 mW
- 121,5 mW

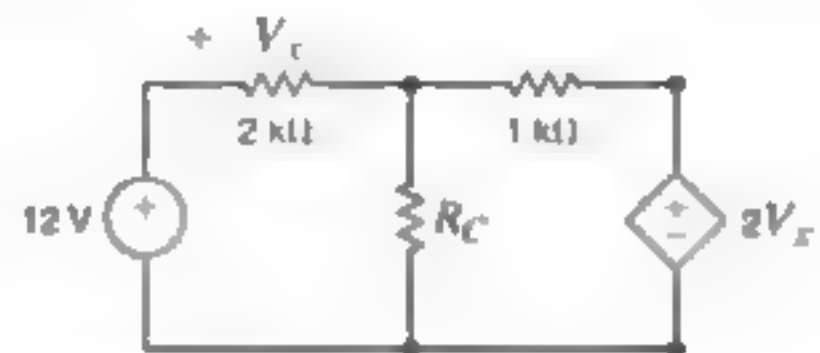


Figura 5PEP-2

- 5PEP-3** Determine o valor da resistência R_C da rede mostrada na Fig. 5PEP-3 de modo que ocorra a transferência de potência máxima para esta carga.

- 12,92 Ω
- 8,22 Ω
- 6,78 Ω
- 10,53 Ω

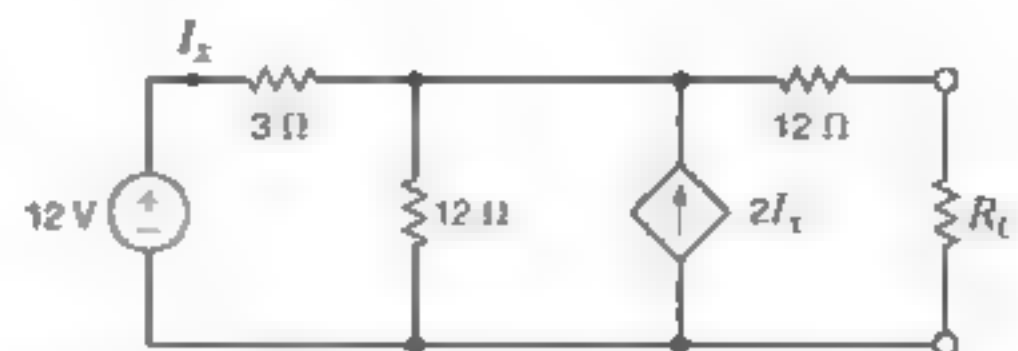


Figura 5PEP-3

5PEP-4 Qual é o valor da corrente I no circuito mostrado na Fig. 5PEP-4?

- a. 8 A
- b. -4 A
- c. 0 A
- d. 4 A

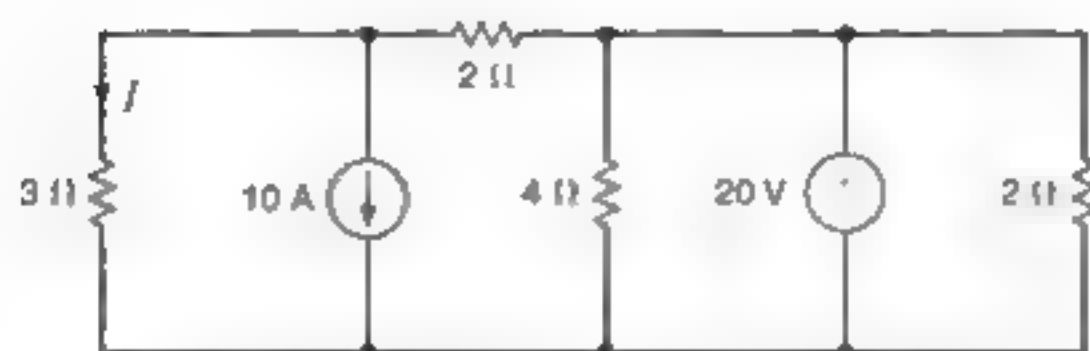


Figura 5PEP-4

5PEP-5 Qual é o valor da tensão de circuito aberto V_{ca} nos terminais a e b do circuito mostrado na Fig. 5PEP-5?

- a. 8 V
- b. 12 V
- c. 4 V
- d. 10 V

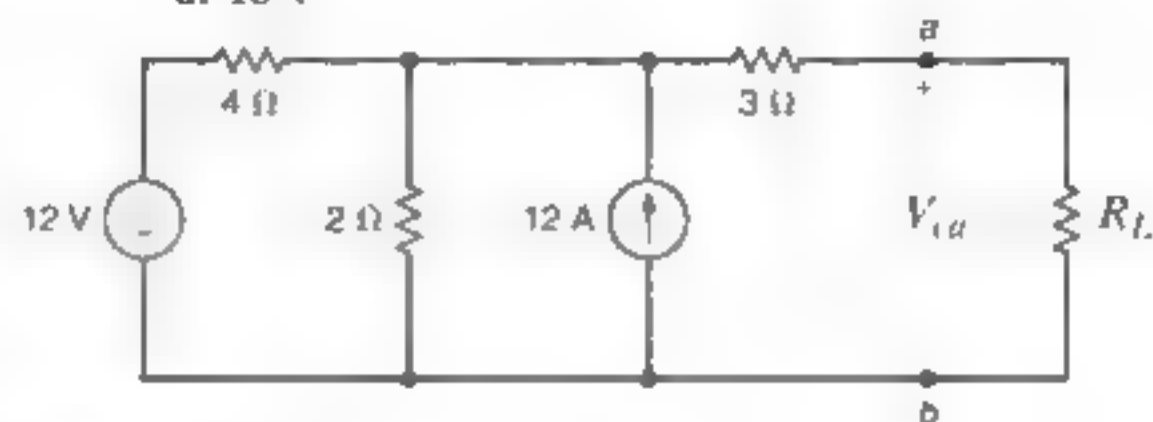


Figura 5PEP-5

CAPACITÂNCIA E INDUTÂNCIA



Cortesia de UPI/Brian Kersey/NewsCom

AS METAS DE APRENDIZAGEM DESTE CAPÍTULO SÃO:

- Saber como utilizar modelos de circuitos com indutores e capacitores para calcular tensões, correntes e potências
- Ser capaz de calcular a energia armazenada nos capacitores e indutores
- Compreender os conceitos de continuidade da corrente em um indutor e de continuidade da tensão em um capacitor
- Ser capaz de calcular as tensões e as correntes dos capacitores e indutores nos circuitos com fontes CC
- Saber como combinar capacitores e indutores em série e em paralelo

Scanners de Aeroporto Ser revistado ou não ser revistado nunca é a questão. Os viajantes demandam segurança nos céus, e a tecnologia atual a torna possível por meio de um scanner de corpo inteiro com duração de 15 a 30 segundos, ao invés de uma revista mais intrusiva que pode levar de dois a quatro minutos. Cerca de 99% dos passageiros das linhas aéreas dos principais aeroportos que cruzam o país preferem o uso dos scanners de corpo quando essa opção está disponível. Os scanners podem detectar armas plásticas e cerâmicas, e explosivos que não são identificáveis por detectores de metal e poderiam, eventualmente, substituir os detectores de metal nos cerca de 2.000 pontos de checagem dos aeroportos.

A maioria dos viajantes é receptiva a qualquer medida que aumente a segurança, mesmo se isso significar uma certa invasão de privacidade. Os novos scanners de corpo inteiro, atualmente disponíveis, dependem da tecnologia de ondas milimétricas ou da tecnologia dos raios X por retrodifusão. Os primeiros produzem uma imagem que se assemelha à do negativo de uma foto obscura; os

segundos produzem algo similar a uma gravura a giz. A tecnologia de ondas milimétricas emite 10.000 vezes menos rádio frequência que um telefone celular. A tecnologia por retrodifusão utiliza raios X de alta energia ao se mover por meio de roupas e outros materiais. Em ambos os casos, as imagens utilizadas para efeito de segurança não são salvas, ao contrário, são destruídas imediatamente.

Este capítulo introduz dois novos componentes de circuito: os capacitores e os indutores, os quais armazenam energia de campo elétrico e de campo magnético. As relações entre tensão e corrente relacionadas a esses componentes não seguem a lei de Ohm. Neles, as tensões e as correntes estão relacionadas por meio de suas derivadas e integrais. Os capacitores e os indutores são os componentes centrais do estudo dos circuitos de corrente alternada. Eles também são os componentes principais da operação dos scanners de corpo inteiro. Os projetos dos circuitos dos scanners de corpo inteiro de bom desempenho auxiliam na manutenção da segurança de cada pessoa nos céus, propiciando um sentimento de tranquilidade.

6.1 Capacitores

Um *capacitor* é um componente de circuito que consiste em duas superfícies condutoras separadas por um material não condutor, ou *dielétrico*. O modelo físico simplificado de um capacitor e seu símbolo elétrico são mostrados na Fig. 6.1.

Existem muitos tipos diferentes de capacitores. Eles podem ser classificados pelo tipo de material dielétrico utilizado entre suas placas condutoras. Embora qualquer bom isolante possa servir como dielétrico, cada tipo possui características particulares que os tornam mais apropriados para uma aplicação específica.

Para as aplicações nos circuitos eletrônicos (por exemplo, o acoplamento entre os vários estágios de um processo de amplificação), em geral, o material dielétrico pode ser um papel impregnado com óleo ou cera, mylar, polistireno, mica, vidro ou cerâmica.

Os capacitores dielétricos cerâmicos fabricados de titanatos de bário possuem alta relação capacitância-volume, devido à sua alta constante dielétrica. Os capacitores dielétricos de mica, vidro e cerâmica operam satisfatoriamente em altas frequências.

Os capacitores eletrolíticos de alumínio, que consistem em um par de placas de alumínio separadas por uma pasta eletrolítica besuntada de bórax, podem apresentar altos valores de capacitância em pequenos volumes. Esses capacitores são tipicamente utilizados nas operações de filtragem, desvio e acoplamento, e nas aplicações envolvendo fontes de potência e motores de partida. Os capacitores eletrolíticos de tântalo apresentam menores perdas e características mais estáveis que os capacitores eletrolíticos de alumínio. A Fig. 6.2 mostra uma grande variedade de capacitores discretos típicos.

Além desses capacitores, que são deliberadamente utilizados em uma rede para uma aplicação específica, uma capacitância

[atenção]

Observe a utilização da convenção passiva de sinais.

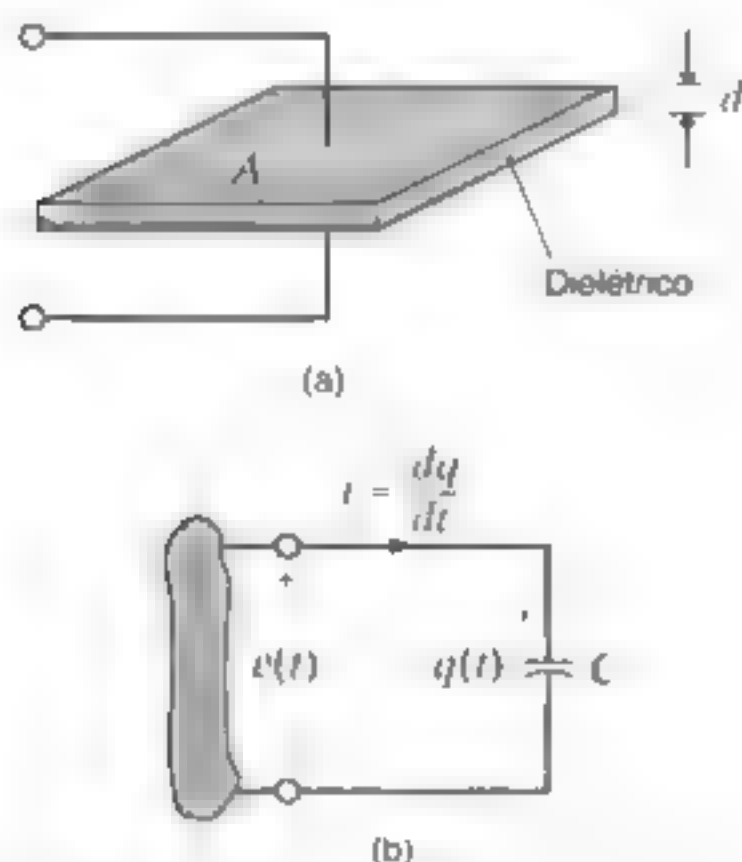


Figura 6.1 O capacitor e seu símbolo elétrico.



Figura 6.2 Alguns capacitores típicos. (Cortesia de Mark Nelms e Jo Ann Loden)

parasita estará sempre presente quando existir uma diferença de potencial entre dois materiais condutores separados por um dielétrico. Como essa capacitância parasita pode causar uma interferência indesejada entre os circuitos, deve-se ter grande cuidado com a disposição dos sistemas eletrônicos nas placas de circuitos impressos.

A capacitância é medida em coulombs por volt ou farads. A unidade *farad* (F) é assim chamada em homenagem ao famoso físico inglês Michael Faraday. Os capacitores podem ser fixos ou variáveis e tipicamente suas capacitâncias estão na faixa de milhares de microfarads (μF) até uns poucos picofarads (pF).

A tecnologia de fabricação dos capacitores, inicialmente motivada pela aplicação em veículos elétricos, está evoluindo rapidamente. Por exemplo, o capacitor da esquerda na fotografia mostrada na Fig. 6.3 é um capacitor de dupla camada, nominalmente possui 100 F e opera a 2,5 V. Um capacitor eletrolítico de alumínio de 68.000 μF que, nominalmente, opera a 25 V é mostrado à direita nesta fotografia. O capacitor eletrolítico pode armazenar $0,5 \times 6,8 \times 10^{-2} \times 25^2 = 21,25$ joules (J). O capacitor de dupla camada pode armazenar $0,5 \times 100 \times 2,5^2 = 312,5$ J. Pode-se agora conectar dez capacitores de 100 F em série para formar um capacitor equivalente que opere a 25 V. A energia armazenada nesse capacitor equivalente é de 3.125 J. Seriam necessários 147 capacitores eletrolíticos conectados em paralelo para armazenar esse nível de energia.

Um cálculo interessante é o das dimensões de um simples capacitor equivalente consistindo em duas placas paralelas,

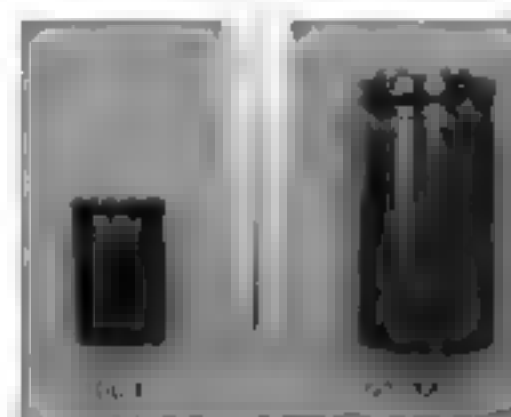


Figura 6.3 Capacitor de camada dupla de 100 F e capacitor eletrolítico de 68.000 μF . (Cortesia de Mark Nelms e Jo Ann Loden)

cada uma de área A , separadas de uma distância d , conforme mostrado na Fig. 6.1. Para isso, basta lembrar-se dos conceitos da física básica, nos quais a capacitância de duas placas paralelas de área A , separadas de uma distância d , vale

$$C = \frac{\epsilon A}{d}$$

em que ϵ_0 , a permissividade do espaço livre, é de $8,85 \times 10^{-12}$ F/m. Admitindo-se que as placas sejam separadas por uma distância em ar correspondente a uma folha de papel impregnada de óleo, que corresponde a uma distância de aproximadamente $1,016 \times 10^{-4}$ m, tem-se

$$1,00 \text{ f} = \frac{(8,85 \times 10^{-12}) A}{1,016 \times 10^{-4}}$$

$$A = 1,148 \times 10^9 \text{ m}^2$$

e, sendo 1 milha quadrada igual a $2,59 \times 10^6$ metros quadrados, a área será igual a

$$A \approx 443 \text{ milhas quadradas}$$

que é a área de uma cidade de porte médio! Portanto, agora, o capacitor de dupla camada mostrado na fotografia se torna muito mais expressivo que aparentava originalmente. Na realidade, esse capacitor é fabricado utilizando-se uma grande área de superfície de material como carbono pulverizado, o qual é agregado a uma lâmina metálica. Literalmente, milhões de pedaços de carbono seriam empregados para se obter a área de superfície requerida.

Suponha agora que uma fonte seja conectada aos terminais do capacitor, conforme mostrado na Fig. 6.1; dessa forma, as cargas positivas serão transferidas para uma das placas e as cargas negativas serão transferidas para a outra placa. A carga no capacitor é proporcional à tensão imposta entre seus terminais, de forma que

$$q = Cv \quad 6.1$$

em que C é o fator de proporcionalidade, conhecido como capacitância, do componente e é expresso em farads.

O diferencial de carga entre as placas gera um campo elétrico que armazena energia. Devido à presença do dielétrico, a condução da corrente que flui nos condutores que conectam o capacitor ao restante do circuito não pode fluir internamente entre as placas. Entretanto, pela teoria dos campos eletromagnéticos, pode ser mostrado que essa condução de corrente é igual ao deslocamento da corrente que flui entre as placas do capacitor e estará presente sempre que um campo elétrico ou uma tensão variar com o tempo

Assim, tem-se especial interesse na relação corrente-tensão entre os terminais do capacitor. Uma vez que a corrente, por definição, é

$$i = \frac{dq}{dt}$$

então,

$$i = \frac{d}{dt}(Cv)$$

que para uma capacitância constante fica

$$i = C \frac{dv}{dt} \quad 6.2$$

A Eq. (6.2) pode ser reescrita como

$$dt = \frac{1}{C} i^{-1} di$$

A integração dessa expressão do tempo $t = -\infty$ até um tempo t qualquer, admitindo que $v(-\infty) = 0$, fornece

$$v(t) = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i(x) dx \quad 6.3$$

em que $v(t)$ indica a forma pela qual a tensão depende do tempo. A Eq. (6.3) pode ser expressa pela soma de duas integrações, isto é,

$$v(t) = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^{t_0} i(x) dx + \frac{1}{C} \int_{t_0}^t i(x) dx$$

$$= v(t_0) + \frac{1}{C} \int_{t_0}^t i(x) dx \quad 6.4$$

em que $v(t_0)$ é a tensão devida à carga que se acumula no capacitor desde o tempo $t = -\infty$ até o tempo $t = t_0$.

A energia armazenada no capacitor pode ser obtida a partir da potência que é fornecida ao componente. Essa potência pode ser expressa como

$$p(t) = v(t)i(t) = Cv(t) \frac{dv(t)}{dt} \quad 6.5$$

Logo, a energia armazenada no campo elétrico será

$$w_C(t) = \int_{-\infty}^t Cv(x) \frac{dv(x)}{dx} dx = C \int_{-\infty}^t v(x) \frac{dv(x)}{dx} dx$$

$$= C \int_{-\infty}^t v(x) dv(x) = \frac{1}{2} Cv(x) \Big|_{-\infty}^t$$

$$= \frac{1}{2} Cv^2(t) \text{ J} \quad 6.6$$

uma vez que $v(t = -\infty) = 0$. A expressão para a energia pode também ser escrita utilizando a Eq. (6.1), isto é,

$$w_C(t) = \frac{1}{2} \frac{q^2(t)}{C} \quad 6.7$$

As Eqs. (6.6) e (6.7) representam a energia armazenada pelo capacitor, a qual, na realidade, é igual ao trabalho realizado pela fonte para carregar o capacitor.

Considere agora o caso de uma tensão CC aplicada entre os terminais de um capacitor. Com base na Eq. (6.2), verifica-se

que a corrente que flui pelo capacitor é diretamente proporcional à taxa de variação com o tempo da tensão entre os terminais do capacitor. Uma tensão CC não varia com o tempo, portanto, a corrente que flui pelo capacitor é igual a zero. Pode-se dizer que um capacitor é um “circuito aberto para sinais CC” ou que ele “bloqueia sinais CC”. Os capacitores geralmente são utilizados para remover ou filtrar uma tensão CC indesejada. Ao se analisar um circuito contendo fontes de tensão CC e capacitores, estes podem ser substituídos por um circuito aberto e as tensões e correntes do circuito podem ser calculadas utilizando-se diversas ferramentas de análise.

Observe que a potência absorvida por um capacitor, expressa pela Eq. (6.5), é diretamente proporcional à taxa de variação com o tempo da tensão entre os terminais do capacitor. O que ocorre no caso de a tensão no capacitor variar instantaneamente? Essa situação corresponde a $dv/dt = \infty$ e uma potência infinita. No Capítulo 1 foi excluída a possibilidade de qualquer

fonte de potência infinita. Como as fontes reais possuem potência finita, a tensão entre os terminais de um capacitor não pode variar instantaneamente. Essa condição será particularmente útil no próximo capítulo, quando serão analisados circuitos contendo chaves. Essa ideia de “continuidade da tensão” para um capacitor indica que a tensão entre os terminais do capacitor imediatamente após a chave ser acionada é a mesma tensão atuante nesses terminais imediatamente antes de a chave ser acionada.

A polaridade da tensão entre os terminais do capacitor que está sendo carregado é mostrada na Fig. 6.1b. No caso ideal, o capacitor manterá a carga por um período de tempo indefinido caso a fonte seja removida. Se, em algum tempo posterior, um dispositivo de absorção de energia (por exemplo, uma lâmpada) for conectado entre os terminais do capacitor, uma corrente será descarregada fluindo pelo capacitor e, portanto, o capacitor fornecerá sua energia armazenada àquele elemento.

EXEMPLO 6.1

Se a carga acumulada em dois condutores paralelos carregados com 12 V for de 600 pC, qual será a capacitância dos condutores em paralelo?

SOLUÇÃO

Utilizando a Eq. (6.1) obtém-se

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{(600)(10^{-12})}{12} = 50 \text{ pF}$$

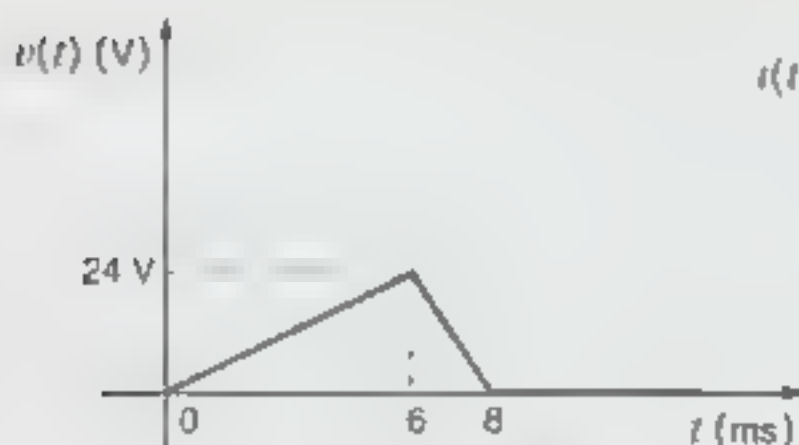
EXEMPLO 6.2

A tensão entre os terminais de um capacitor de 5 μF possui a forma de onda mostrada na Fig. 6.4a. Determine a forma de onda da corrente.

SOLUÇÃO

Note que

$$\begin{aligned} v(t) &= \frac{24}{6 \times 10^{-3}} t & 0 \leq t \leq 6 \text{ ms} \\ &= \frac{24}{2 \times 10^{-3}} (t - 6) & 6 \leq t < 8 \text{ ms} \\ &= 0 & 8 \text{ ms} \leq t \end{aligned}$$



(a)

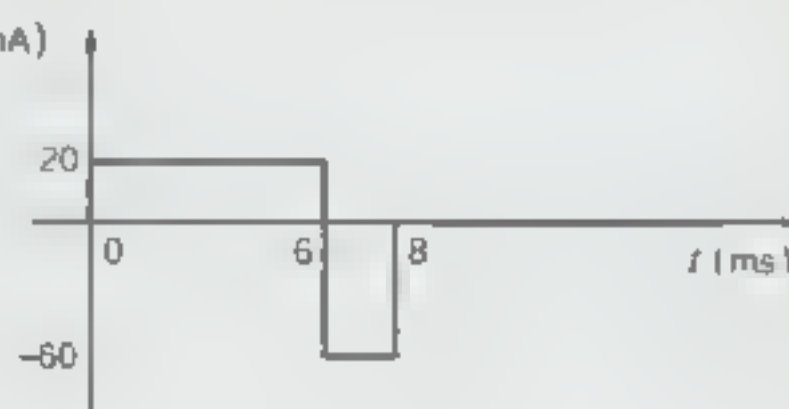
Utilizando a Eq. (6.2), obtém-se

$$\begin{aligned} i(t) &= C \frac{dv(t)}{dt} \\ &= 5 \times 10^{-6} (4 \times 10^3) & 0 \leq t \leq 6 \text{ ms} \\ &= 20 \text{ mA} & 0 \leq t \leq 6 \text{ ms} \\ i(t) &= 5 \times 10^{-6} (-12 \times 10^3) & 6 \leq t \leq 8 \text{ ms} \\ &= -60 \text{ mA} & 6 \leq t < 8 \text{ ms} \end{aligned}$$

e

$$i(t) = 0 \quad 8 \text{ ms} \leq t$$

Portanto, a forma de onda da corrente é a mostrada na Fig. 6.4b e $i(t) = 0$ para $t > 8 \text{ ms}$.



(b)

Figura 6.4 Formas de onda da tensão e da corrente para um capacitor de 5 μF .

EXEMPLO 6.3

Determine a energia armazenada no campo elétrico do capacitor do Exemplo 6.2 em $t = 6$ ms.

SOLUÇÃO

Utilizando a Eq. (6.6), tem-se

$$w(t) = \frac{1}{2} C v^2(t)$$

Em $t = 6$ ms,

$$w(6 \text{ ms}) = \frac{1}{2} (5 \times 10^{-6}) (24)^2 \\ = 1440 \mu\text{J}$$

Avaliação do Aprendizado

E6.1 Um capacitor de $10 \mu\text{F}$ possui uma carga acumulada de 500 nC . Determine a tensão entre os terminais desse capacitor.

RESPOSTA: 0,05 V.

EXEMPLO 6.4

A Fig. 6.5a mostra o comportamento da corrente em um capacitor de $4 \mu\text{F}$ inicialmente descarregado. Obtenha o comportamento da tensão, da potência e da energia, e calcule a energia armazenada no campo elétrico do capacitor em $t = 2$ ms.

SOLUÇÃO

As equações para a forma de onda da corrente nos intervalos de tempo específicos são

$$i(t) = \begin{cases} 16 \times 10^{-3} t & 0 \leq t \leq 2 \text{ ms} \\ 2 \times 10^{-3} & \\ 8 \times 10^{-3} & 2 \text{ ms} \leq t \leq 4 \text{ ms} \\ 0 & 4 \text{ ms} < t \end{cases}$$

Como $v(0) = 0$, a equação para $v(t)$ no intervalo de tempo $0 \leq t \leq 2$ ms é

$$v(t) = \frac{1}{(4)(10^{-6})} \int_0^t 8(10^{-3})x \, dx = 10^3 t^2$$

e, portanto,

$$v(2 \text{ ms}) = 10^3 (2 \times 10^{-3})^2 = 4 \text{ mV}$$

No intervalo de tempo $2 \text{ ms} \leq t \leq 4 \text{ ms}$, tem-se

$$v(t) = \frac{1}{(4)(10^{-6})} \int_{2 \times 10^{-3}}^t - (8)(10^{-3})dx + (4)(10^{-3}) \\ = -2t + 8 \times 10^{-3}$$

A forma de onda para a tensão é mostrada na Fig. 6.5b.

Uma vez que a potência é $p(t) = v(t)i(t)$, a expressão para a potência no intervalo de tempo $0 \leq t \leq 2$ ms será $p(t) = 8t^3$.

No intervalo de tempo $2 \text{ ms} \leq t \leq 4 \text{ ms}$, a equação da potência será

$$p(t) = -(8)(10^{-6})(-2t + 8 \times 10^{-3}) \\ = 16(10^{-6})t - 64(10^{-9})$$

A forma de onda da potência é mostrada na Fig. 6.5c. Observe que, durante o intervalo de tempo $0 \leq t \leq 2$ ms, o capacitor está absorvendo energia e durante o intervalo de tempo $2 \text{ ms} \leq t \leq 4$ ms ele está fornecendo energia.

A energia é expressa por

$$w(t) = \int_{t_0}^t p(x) \, dx + w(t_0)$$

No intervalo de tempo $0 \leq t \leq 2$ ms, tem-se

$$w(t) = \int_0^t 8x^3 \, dx = 2t^4$$

Logo,

$$w(2 \text{ ms}) = 32 \mu\text{J}$$

No intervalo de tempo $2 \text{ ms} \leq t \leq 4 \text{ ms}$, obtém-se

$$w(t) = \int_{2 \times 10^{-3}}^t [(16 \times 10^{-6})x - (64 \times 10^{-9})] \, dx + 32 \times 10^{-12} \\ = [(8 \times 10^{-6})x^2 - (64 \times 10^{-9})x]_{2 \times 10^{-3}}^t + 32 \times 10^{-12} \\ = (8 \times 10^{-6})t^2 - (64 \times 10^{-9})t + 128 \times 10^{-12}$$

Utilizando essa expressão, pode-se determinar que $w(2 \text{ ms}) = 32 \mu\text{J}$ e $w(4 \text{ ms}) = 0$. A forma de onda da energia é mostrada na Fig. 6.5d.

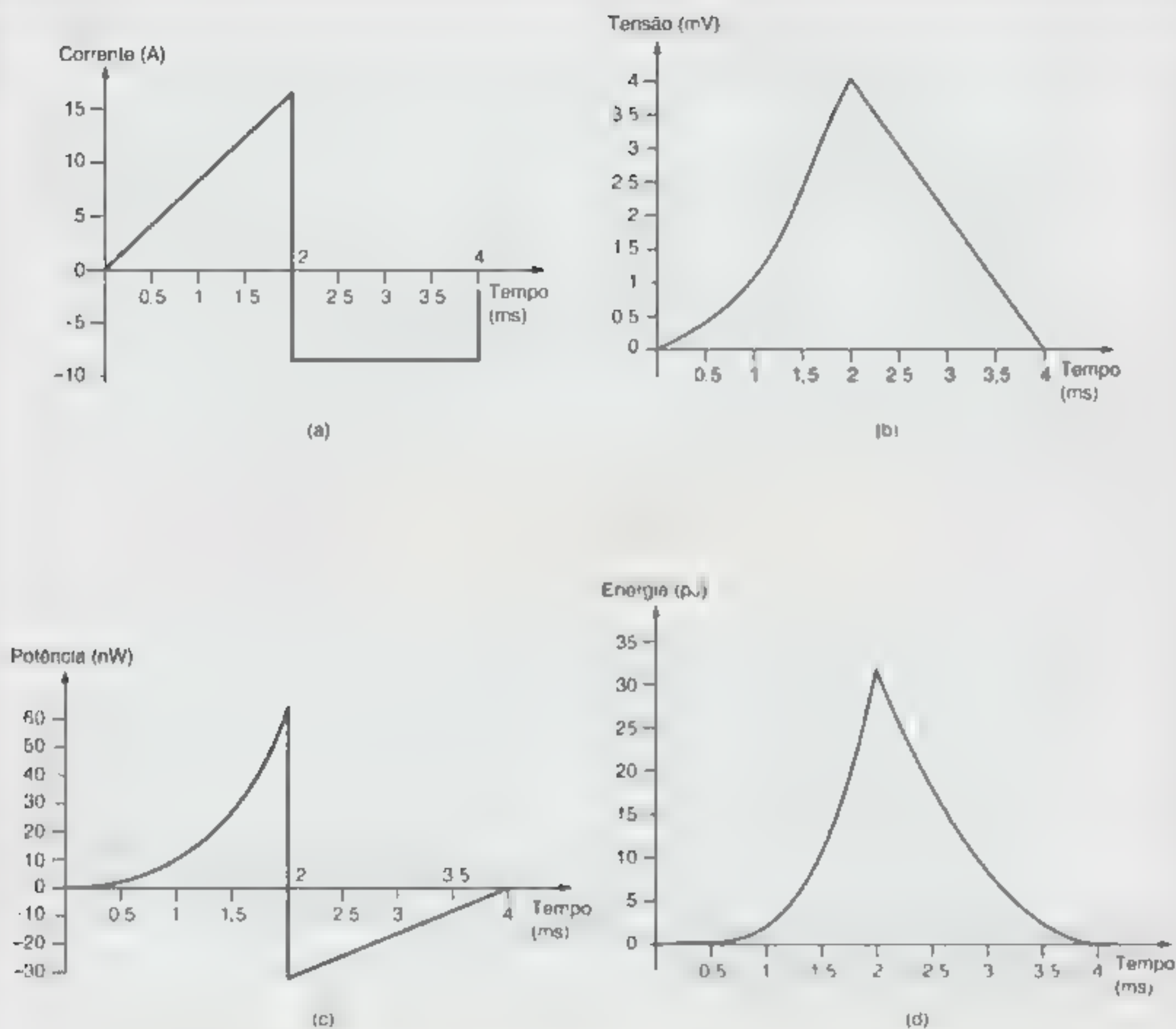


Figura 6.5 Formas de onda utilizadas no Exemplo 6.4.

Avaliação do Aprendizado

E6.2 A tensão entre os terminais de um capacitor de $2 \mu\text{F}$ é mostrada na Fig. E6.2. Determine a forma de onda da corrente no capacitor.

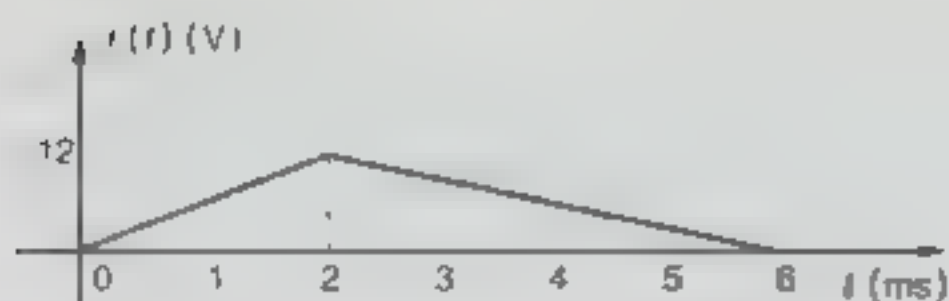
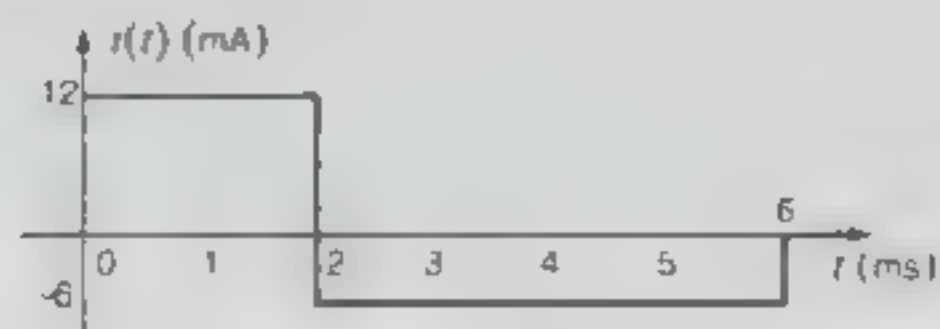


Figura E6.2

RESPOSTA:



E6.3 Calcule a energia armazenada no campo elétrico do capacitor do exercício de Avaliação do Aprendizado E6.2 em $t = 2$ ms.

RESPOSTA: $w = 144 \mu\text{J}$

E6.4 A tensão entre os terminais de um capacitor de $5 \mu\text{F}$ é mostrada na Fig. E6.4. Obtenha a forma de onda da corrente nesse capacitor. Qual é a quantidade de energia armazenada no capacitor em $t = 4$ ms?

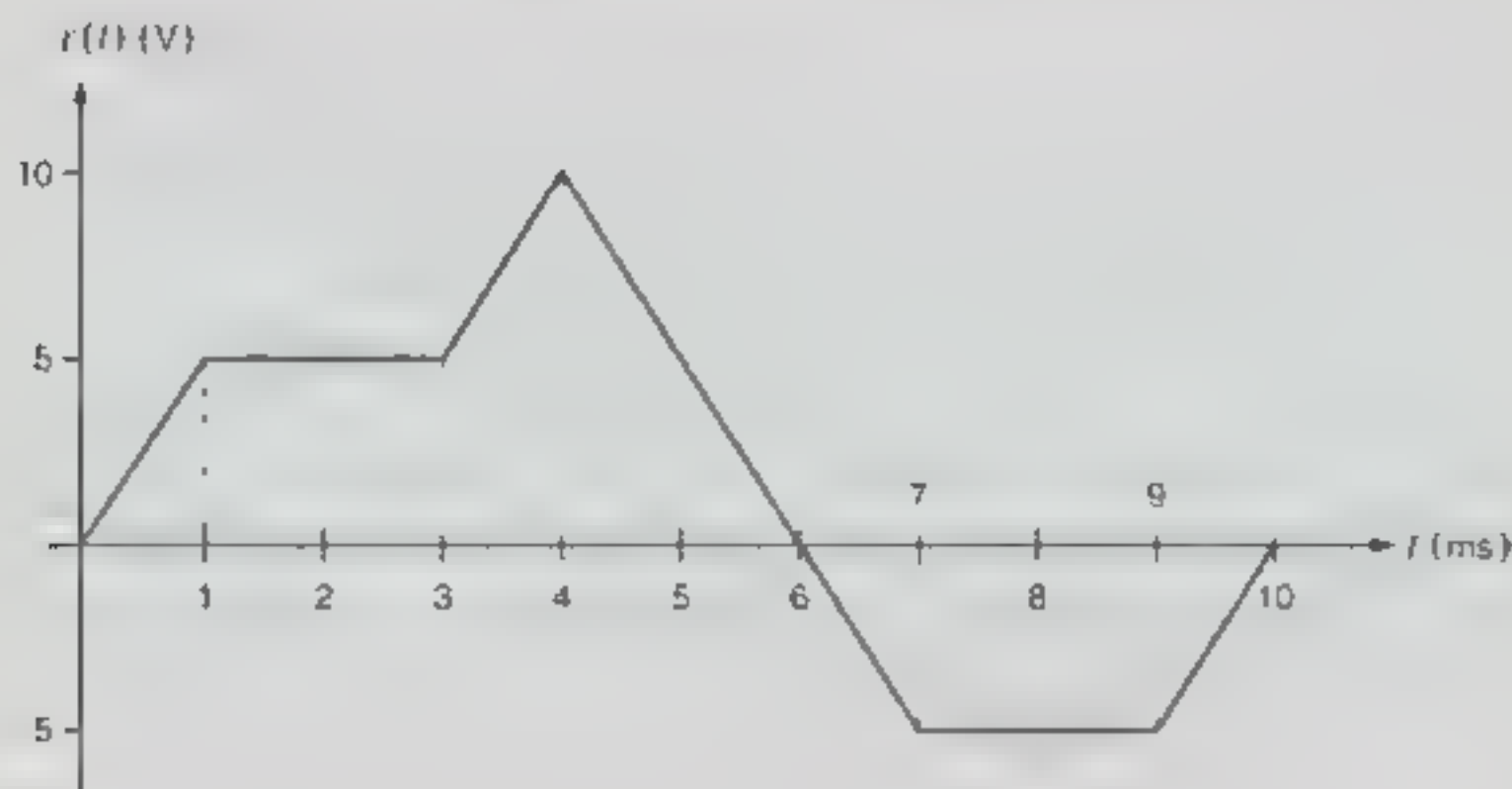
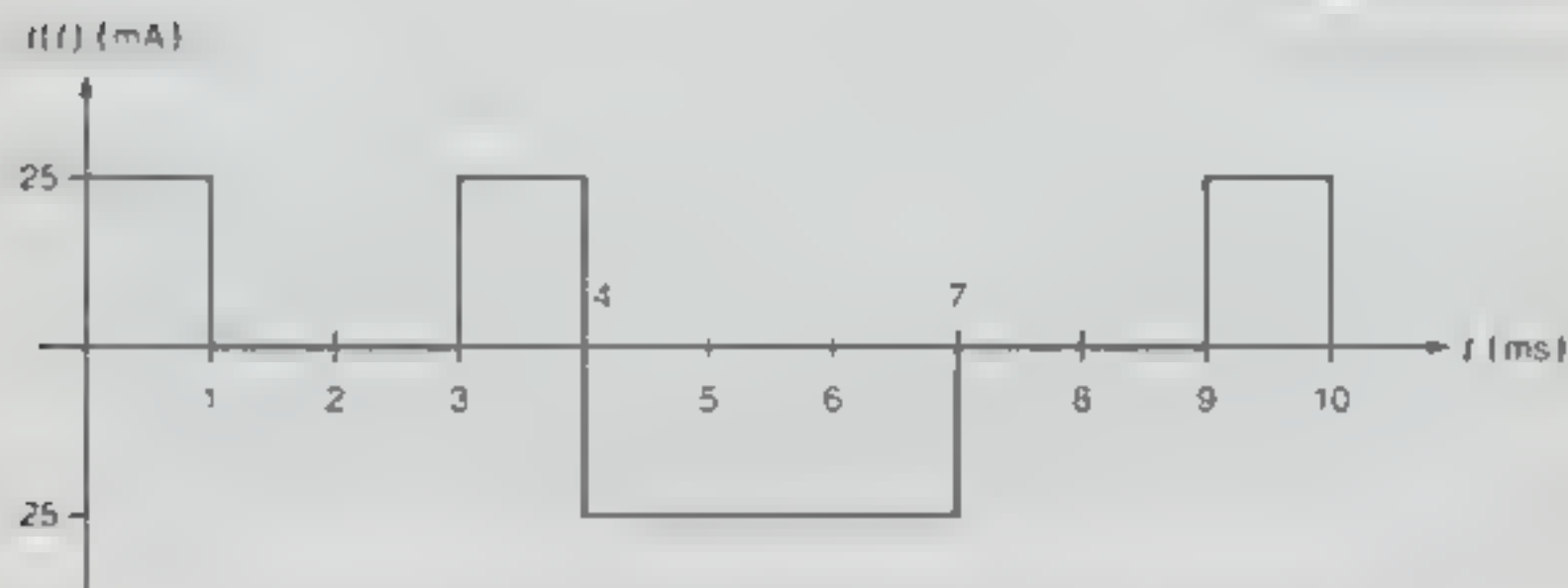


Figura E6.4

RESPOSTA: $250 \mu\text{J}$



E6.5 A forma de onda da corrente em um capacitor de 1 nF é mostrada na Fig. E6.5. Se o capacitor, inicialmente, fica sujeito a uma tensão de -5 V , determine a forma de onda da tensão nos terminais do capacitor. Qual é a quantidade de energia armazenada no capacitor em $t = 6$ ms?

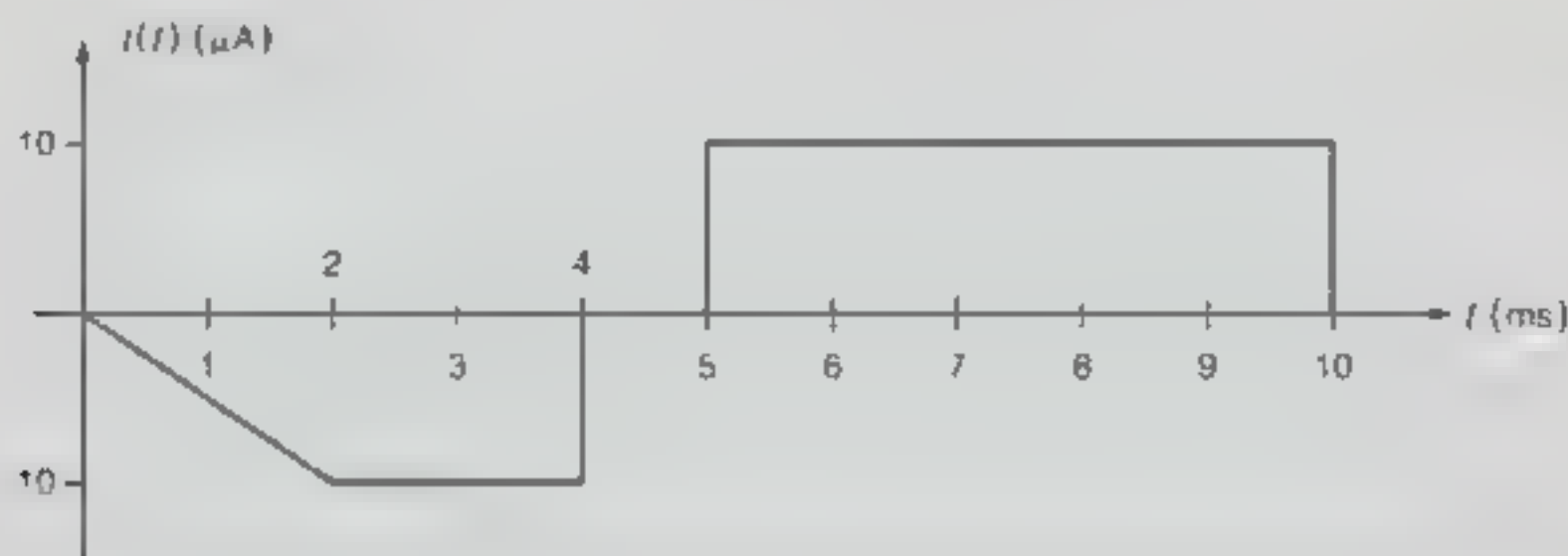
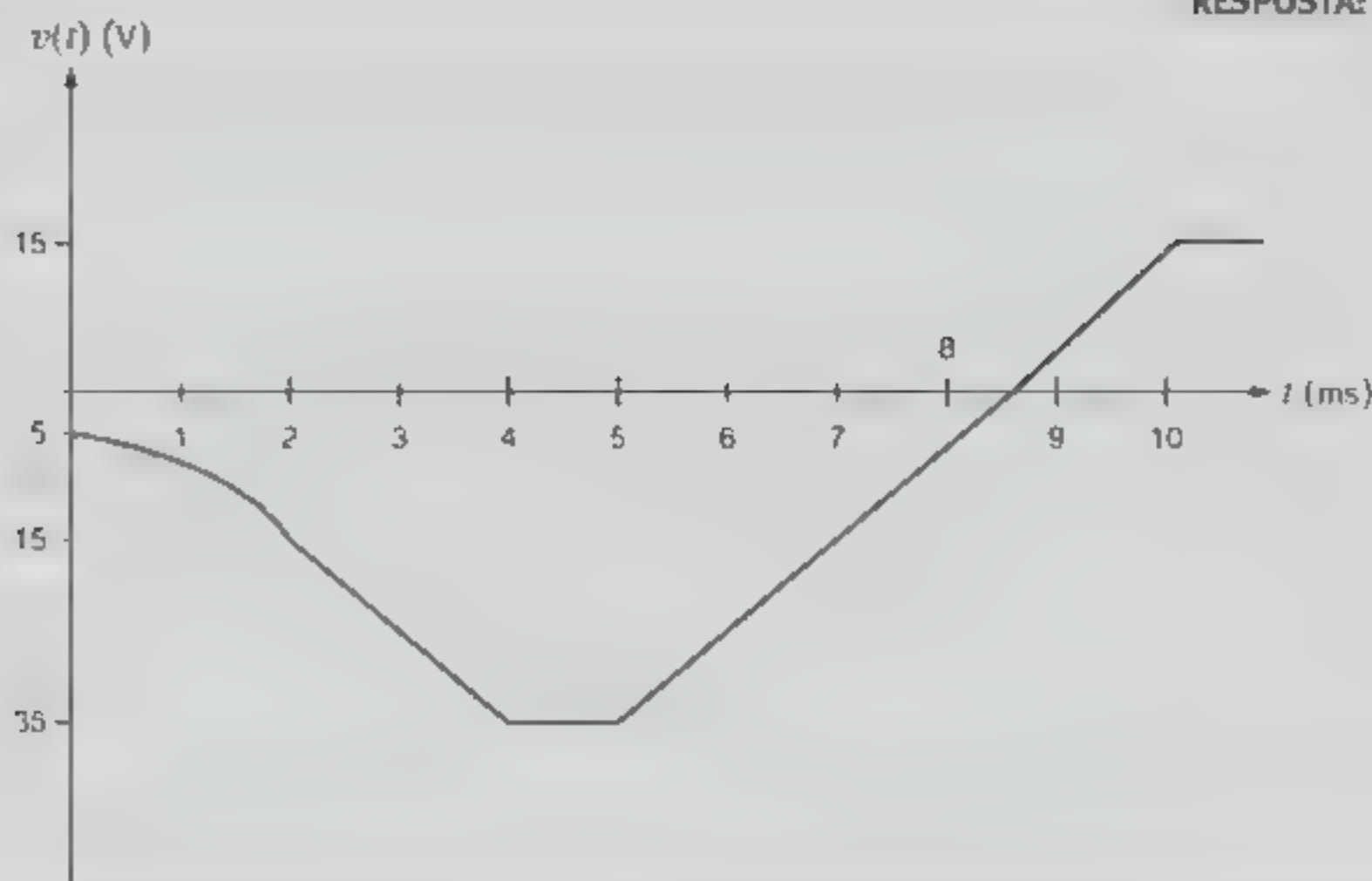


Figura E6.5

RESPOSTA: 312,5 nJ.



6.2 Indutores

Um *indutor* é um componente de circuito que consiste em um fio condutor usualmente com a forma de uma bobina. Dois indutores típicos e seus símbolos elétricos são mostrados na Fig. 6.6. Os indutores são tipicamente classificados pelo tipo de núcleo ao qual são bobinados. Por exemplo, o material do núcleo pode ser o ar ou qualquer material não magnético, ferro, ou ferrita. Os indutores feitos com ar ou materiais não magnéticos são amplamente utilizados nos circuitos de rádios, televisores e filtros. Os indutores com núcleo de ferro são utilizados em fontes de potência elétrica e filtros. Os indutores com núcleo de ferrita são amplamente utilizados em aplicações que envolvam altas frequências. Observe que, ao contrário do núcleo magnético que restringe o fluxo, conforme mostrado na Fig. 6.6b, as linhas de fluxo nos indutores não magnéticos se estendem além do próprio indutor, conforme ilustrado na Fig. 6.6a. Da mesma forma que a capacitância parasita, a indutância parasita pode resultar de qualquer componente que conduza corrente e é en-

volto por elos de fluxo. A Fig. 6.7 mostra diversos indutores típicos.

Do ponto de vista histórico, os desenvolvimentos que levaram ao modelo matemático empregado para representar o indutor são os descritos a seguir. Foi inicialmente mostrado que um condutor que conduz uma corrente poderia produzir um campo magnético. Posteriormente, foi mostrado que o campo magnético e a corrente que o produzia estavam linearmente relacionados. Finalmente, foi mostrado que a variação de um campo magnético produzia uma tensão que era proporcional à taxa de variação com o tempo da corrente que o produziu; isto é,

$$v(t) = L \frac{di(t)}{dt} \quad 6.8$$

A constante de proporcionalidade L é chamada de indutância e é medida em unidades de *henry*, nome este que homenageia o inventor americano Joseph Henry, que descobriu a relação. Conforme pode ser depreendido da Eq. (6.8), 1 henry (H) é dimensionalmente igual a 1 volt-segundo por ampère.

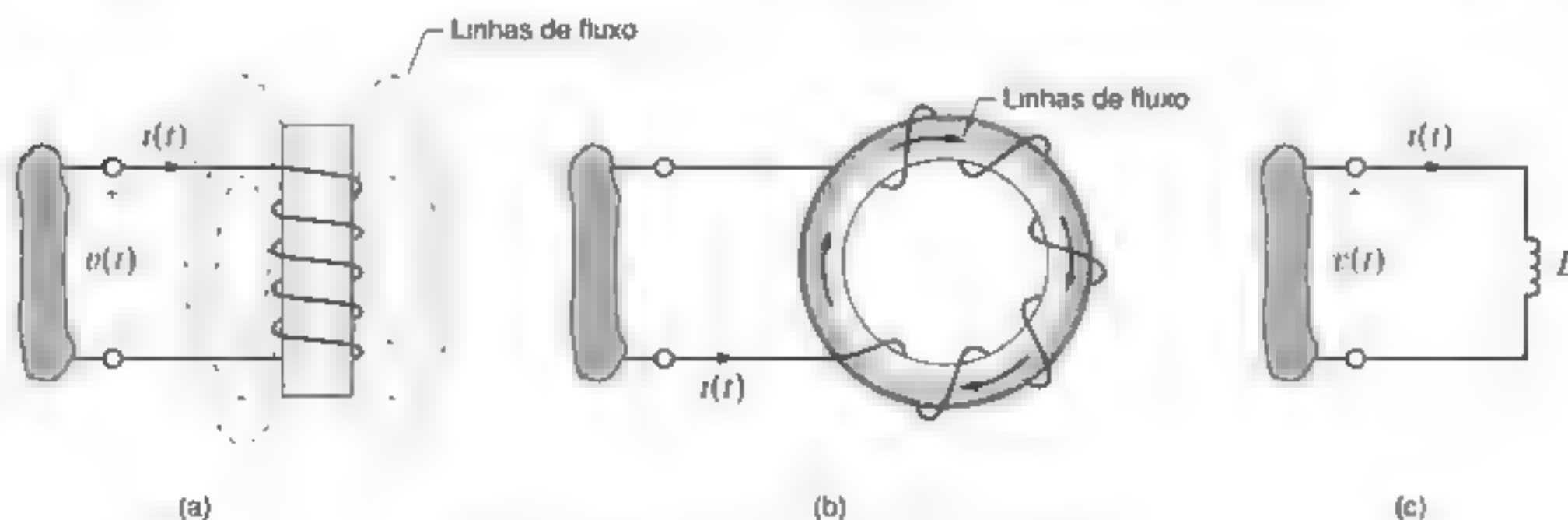


Figura 6.6 Dois indutores e seus símbolos elétricos.

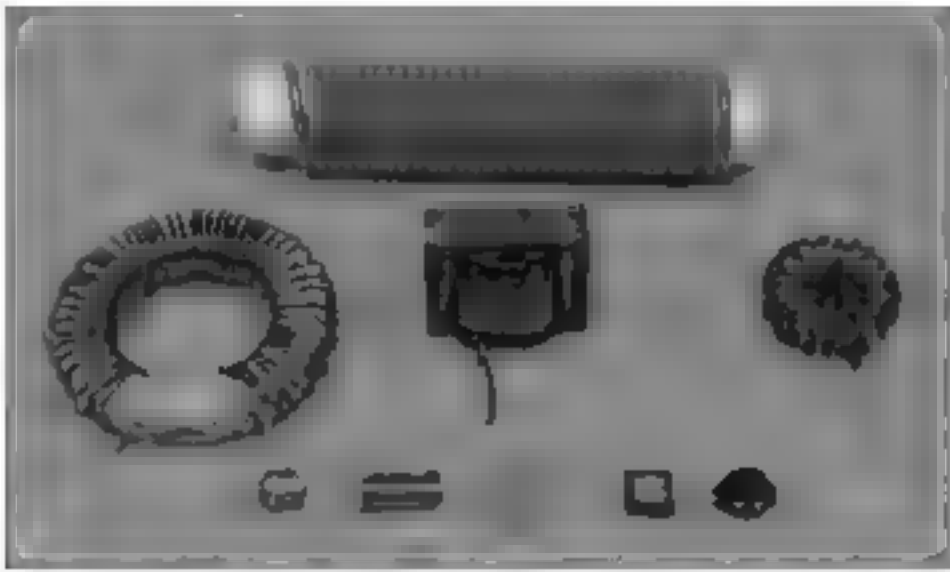


Figura 6.7 Alguns indutores típicos. (Cortesia de Mark Nelms e Jo Ann Loden)

Segundo o desenvolvimento realizado para as equações matemáticas do capacitor, obtém-se que a expressão para a corrente em um indutor é

$$i(t) = \frac{1}{L} \int_{-\infty}^t v(x) dx \quad 6.9$$

que também pode ser escrita como

$$i(t) = i(t_0) + \frac{1}{L} \int_{t_0}^t v(x) dx \quad 6.10$$

A potência fornecida ao indutor pode ser utilizada para deduzir a energia nele armazenada. Essa potência é igual a

$$\begin{aligned} p(t) &= v(t)i(t) \\ &= \left[L \frac{di(t)}{dt} \right] i(t) \end{aligned} \quad 6.11$$

Portanto, a energia armazenada no campo magnético é

$$w_L(t) = \int_{-\infty}^t \left[L \frac{di(x)}{dx} \right] i(x) dx$$

Segundo o desenvolvimento da Eq. (6.6), obtém-se

$$w_L(t) = \frac{1}{2} Li^2(t) \text{ J} \quad 6.12$$

Considere agora o caso de uma corrente CC fluindo por um indutor. Com base na Eq. (6.8), percebe-se que a tensão entre os terminais do indutor é diretamente proporcional à taxa de variação com o tempo da corrente que flui pelo indutor. Uma corrente CC não varia com o tempo, assim, a tensão entre os terminais do indutor é nula. Pode-se dizer que um indutor opera como um “curto-circuito para correntes CC”. Ao se analisar um circuito contendo fontes e indutores, pode-se substituir qualquer indutor por um curto-circuito e calcular as tensões e correntes no circuito utilizando as diversas ferramentas de análise.

Observe, pela Eq. (6.11), que uma variação instantânea na corrente de um indutor necessitaria de uma potência infinita. Como não é possível se obter fontes de potência infinita, a corrente que flui por um indutor não pode variar instantaneamente. Este será um conceito particularmente importante no próximo capítulo, quando serão apresentados circuitos contendo chaves. O conceito de “continuidade da corrente” para um indutor estabelece que a corrente que flui por um indutor imediatamente após o acionamento de uma chave é igual à corrente que flui pelo indutor imediatamente antes do acionamento da chave.

EXEMPLO 6.5

Determine a energia total armazenada no circuito mostrado na Fig. 6.8a.

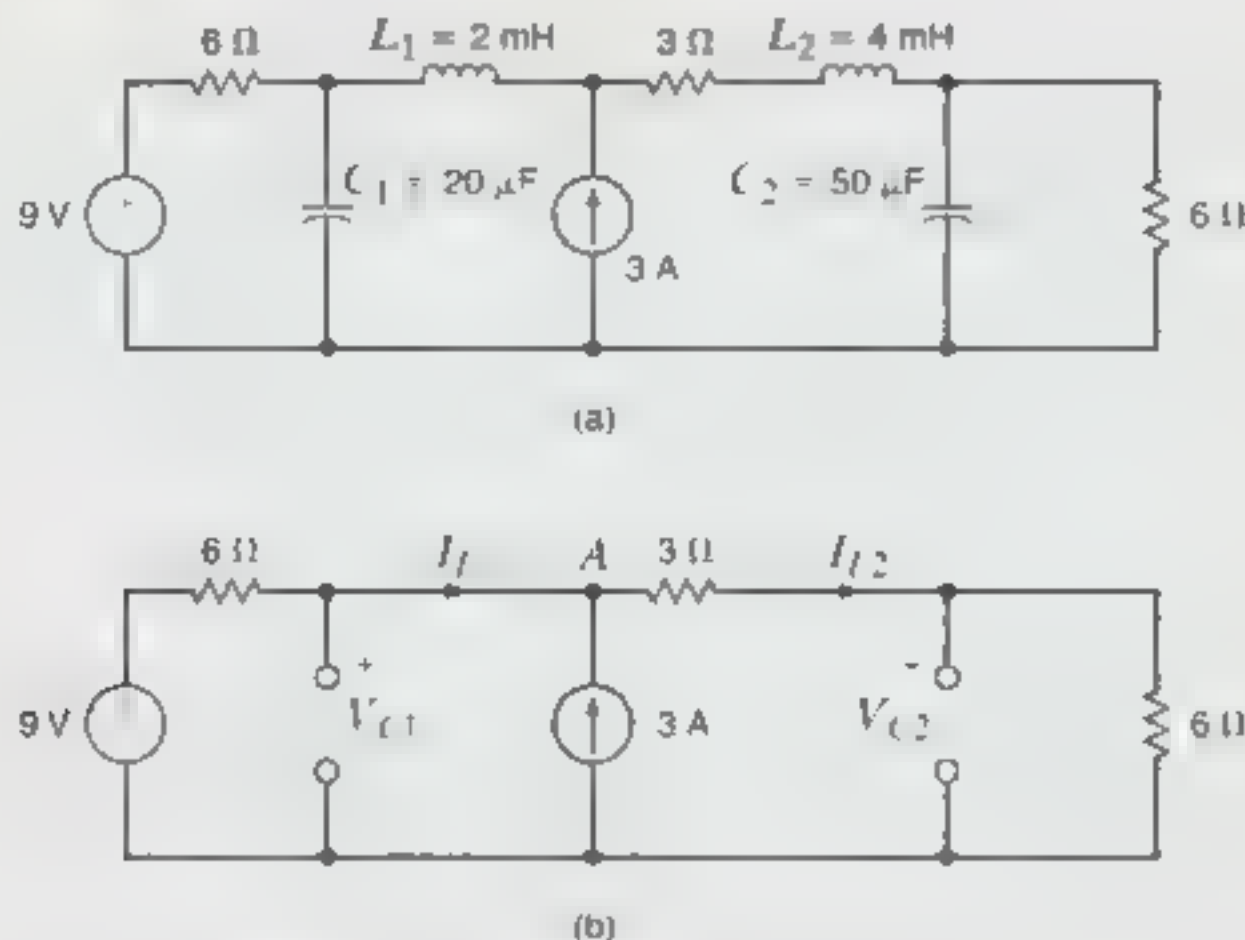


Figura 6.8 Circuitos utilizados no Exemplo 6.5.

SOLUÇÃO

Este circuito possui apenas fontes CC. Com base nas discussões anteriores sobre capacitores e indutores, e fontes constantes, os capacitores podem ser substituídos por circuitos abertos e os indutores por curtos-circuitos. O circuito resultante é mostrado na Fig. 6.8b.

Este circuito resistivo pode agora ser resolvido utilizando qualquer das técnicas apresentadas nos capítulos anteriores. Aplicando a LKC ao nó A, tem-se

$$I_2 = I_1 + 3$$

A aplicação da LKT ao longo do caminho externo do circuito fornece

$$6I_{L1} + 3I_{L2} + 6I_{L2} = 9$$

A solução dessas equações fornece $I_{L1} = -1,2$ A e $I_{L2} = 1,8$ A. As tensões V_{C1} e V_{C2} podem ser calculadas a partir das correntes:

$$V_{C1} = -6I_{L1} + 9 = 16,2 \text{ V}$$

$$V_{C2} = 6I_{L2} = 6(1,8) = 10,8 \text{ V}$$

A energia total armazenada no circuito é igual à soma das energias armazenadas nos dois indutores e nos dois capacitores.

$$w_{L1} = \frac{1}{2}(2 \times 10^{-3})(-1,2)^2 = 1,44 \text{ mJ}$$

$$w_{L2} = \frac{1}{2}(4 \times 10^{-3})(1,8)^2 = 6,48 \text{ mJ}$$

$$w_{C1} = \frac{1}{2}(20 \times 10^{-6})(16,2)^2 = 2,62 \text{ mJ}$$

$$w_{C2} = \frac{1}{2}(50 \times 10^{-6})(10,8)^2 = 2,92 \text{ mJ}$$

Assim, a energia total armazenada é de 13,46 mJ.

O indutor, assim como o resistor e o capacitor, é um componente passivo. A polaridade da tensão entre seus terminais é mostrada na Fig. 6.6.

A faixa típica de valores dos indutores utilizados na prática vai desde uns poucos microhenrys até dezenas de henrys. Do ponto de vista do projeto de um circuito, é importante notar

que os indutores não podem ser facilmente fabricados em um chip de circuito integrado e, portanto, os projetos de chips tipicamente empregam apenas componentes eletrônicos ativos, resistores e capacitores que podem ser fabricados facilmente na forma de microcircuitos.

EXEMPLO 6.6

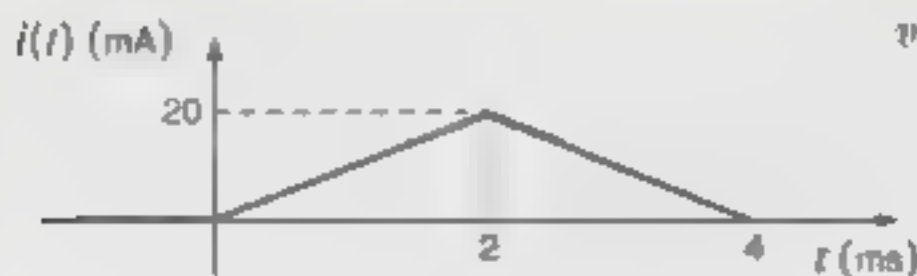
A corrente em um indutor de 10 mH possui a forma de onda mostrada na Fig. 6.9a. Determine a forma de onda da tensão entre os terminais desse indutor.

SOLUÇÃO

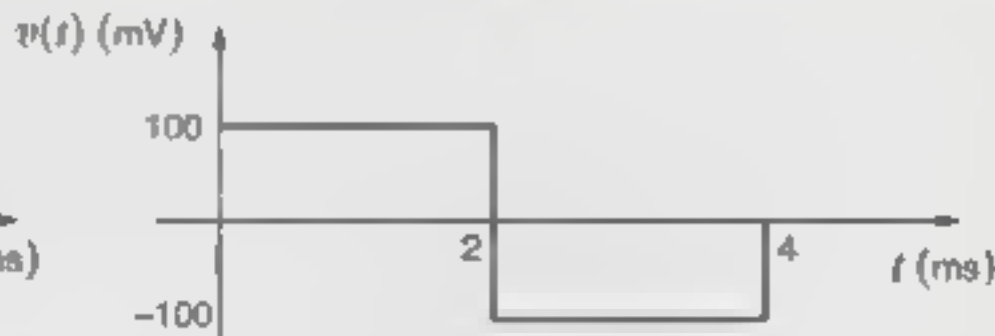
Utilizando a Eq. (6.8) e notando-se que

$$i(t) = \frac{20 \times 10^{-3}}{2 \times 10^{-3}} t \quad 0 \leq t \leq 2 \text{ ms}$$

$$i(t) = \frac{20 \times 10^{-3}}{2 \times 10^{-3}} t + 40 \times 10^{-3} \quad 2 \leq t \leq 4 \text{ ms}$$



(a)



(b)

Figura 6.9 Formas de onda da corrente e da tensão para um indutor de 10 mH.

e

$$i(t) = 0 \quad 4 \text{ ms} < t$$

obtem-se que

$$v(t) = (10 \times 10^{-3}) \frac{20 \times 10^{-3}}{2 \times 10^{-3}} \quad 0 \leq t \leq 2 \text{ ms}$$

$$= 100 \text{ mV}$$

e

$$v(t) = (10 \times 10^{-3}) \frac{20 \times 10^{-3}}{2 \times 10^{-3}} \quad 2 \leq t \leq 4 \text{ ms}$$

$$= -100 \text{ mV}$$

e $v(t) = 0$ para $t > 4$ ms. Portanto, a forma de onda da tensão será a mostrada na Fig. 6.9b.

EXEMPLO 6.7

A corrente em um indutor de 2 mH pode ser expressa por

$$i(t) = 2 \sin 377t \text{ A}$$

Determine a tensão entre os terminais desse indutor e a energia nele armazenada.

SOLUÇÃO

Pela Eq. (6.8), tem-se

$$\begin{aligned} v(t) &= L \frac{di(t)}{dt} \\ &= (2 \times 10^{-3}) \frac{d}{dt} (2 \sin 377t) \\ &= 1,548 \cos 377t \text{ V} \end{aligned}$$

e, pela Eq. (6.12),

$$\begin{aligned} w_L(t) &= \frac{1}{2} L i^2(t) \\ &= \frac{1}{2} (2 \times 10^{-3}) (2 \sin 377t)^2 \\ &= 0,004 \sin^2 377t \text{ J} \end{aligned}$$

EXEMPLO 6.8

A tensão entre os terminais de um indutor de 200 mH é dada pela expressão

$$\begin{aligned} v(t) &= (1 - 3t)e^{-3t} \text{ mV} \quad t \geq 0 \\ &= 0 \quad t < 0 \end{aligned}$$

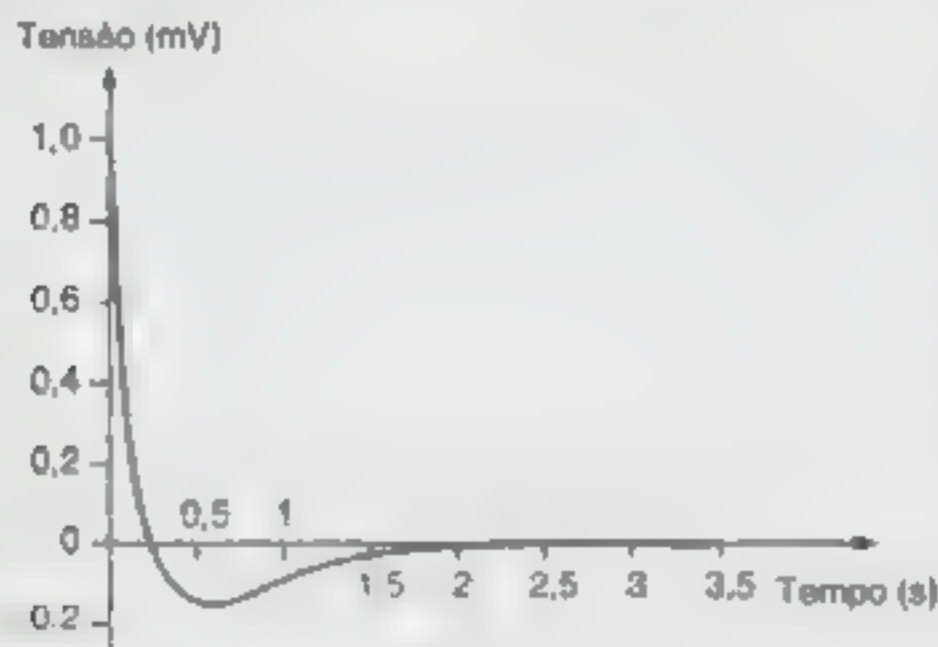
Seja a dedução da forma de onda para a corrente, para a energia e para a potência.

SOLUÇÃO

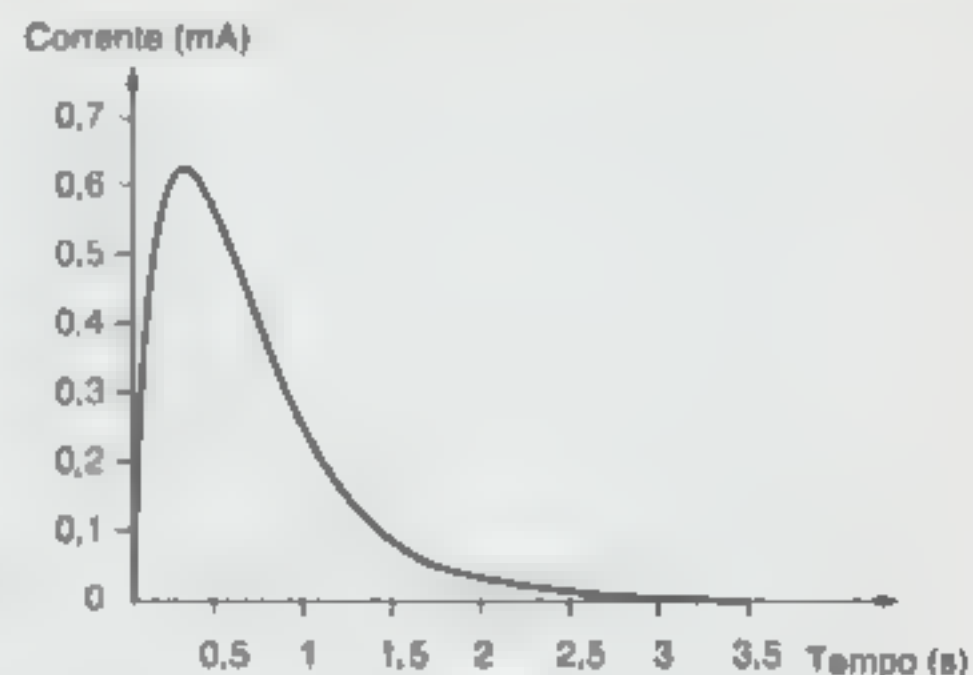
A forma de onda da tensão é mostrada na Fig. 6.10a. A corrente é obtida a partir da Eq. (6.10) como

$$\begin{aligned} i(t) &= \frac{10^3}{200} \int_0^t (1 - 3x)e^{-3x} dx \\ &= 5 \left\{ \int_0^t e^{-3x} dx - 3 \int_0^t x e^{-3x} dx \right\} \\ &= 5 \left\{ \left[\frac{e^{-3x}}{-3} \right]_0^t - 3 \left[\frac{e^{-3x}}{9} (-3x - 1) \right]_0^t \right\} \\ &= 5te^{-3t} \text{ mA} \quad t \geq 0 \\ &= 0 \quad t < 0 \end{aligned}$$

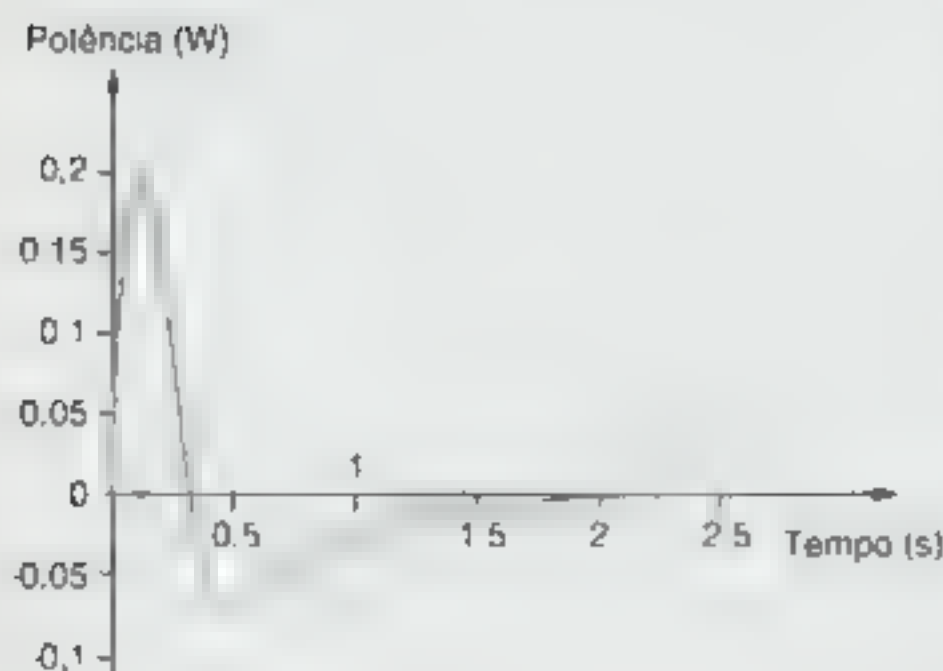
A curva representativa da forma de onda da corrente é mostrada na Fig. 6.10b.



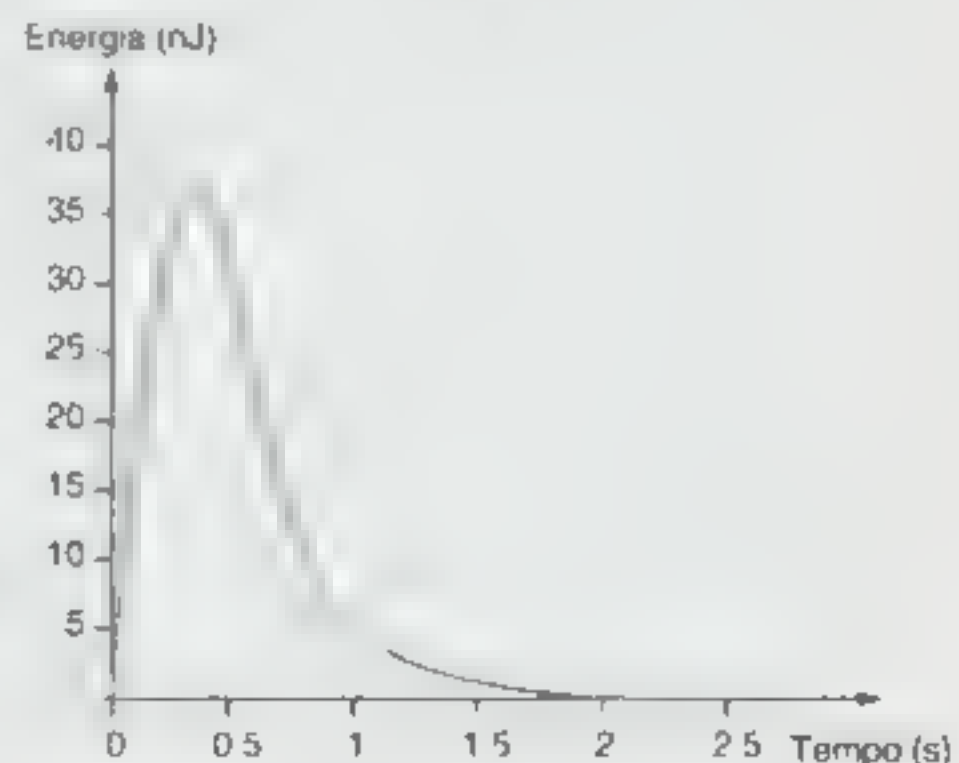
(a)



(b)



(c)



(d)

Figura 6.10 Formas de onda utilizadas no Exemplo 6.8.

A potência pode ser expressa por

$$\begin{aligned} p(t) &= v(t)i(t) \\ &= 5t(1 - 3t)e^{-4t} \mu\text{W} & t \geq 0 \\ &= 0 & t < 0 \end{aligned}$$

A curva representativa da potência é mostrada no gráfico da Fig. 6.10c.

A expressão para a energia é

$$\begin{aligned} w(t) &= \frac{1}{2} Li^2(t) \\ &= 2,25t^2e^{-4t} \mu\text{J} & t \geq 0 \\ &= 0 & t < 0 \end{aligned}$$

A curva representativa desta equação é mostrada no gráfico da Fig. 6.10d.

Avaliação do Aprendizado

E6.6 A corrente em um indutor de 5 mH apresenta a forma de onda mostrada na Fig. E6.6. Obtenha a forma de onda da tensão nos terminais do indutor

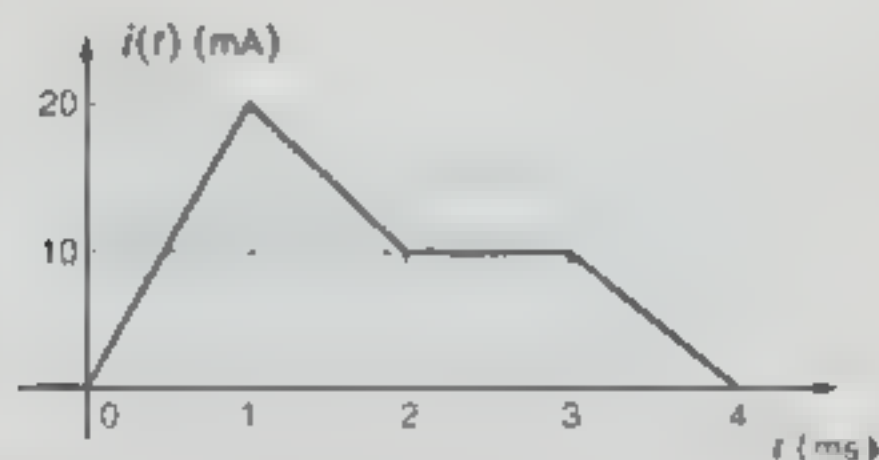
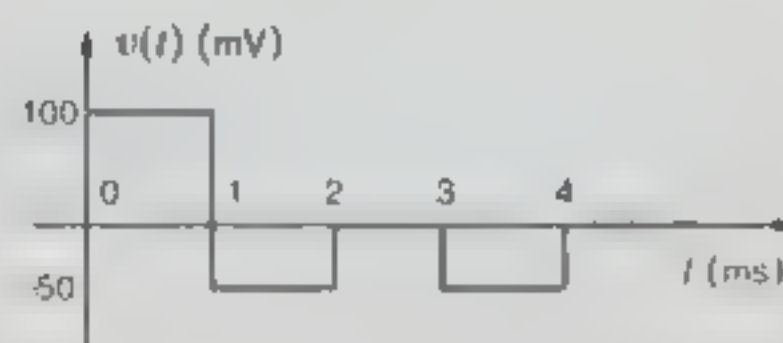


Figura E6.6

RESPOSTA:



E6.7 Calcule a energia armazenada no campo magnético do indutor do exercício de Avaliação do Aprendizado E6.6 em $t = 1,5$ ms.

RESPOSTA: $W = 562,5$ nJ.

E6.8 A corrente em um indutor de 2 H é mostrada na Fig. E6.8. Obtenha a forma de onda da tensão nos terminais do indutor. Qual é a quantidade de energia armazenada no indutor em $t = 3$ ms?

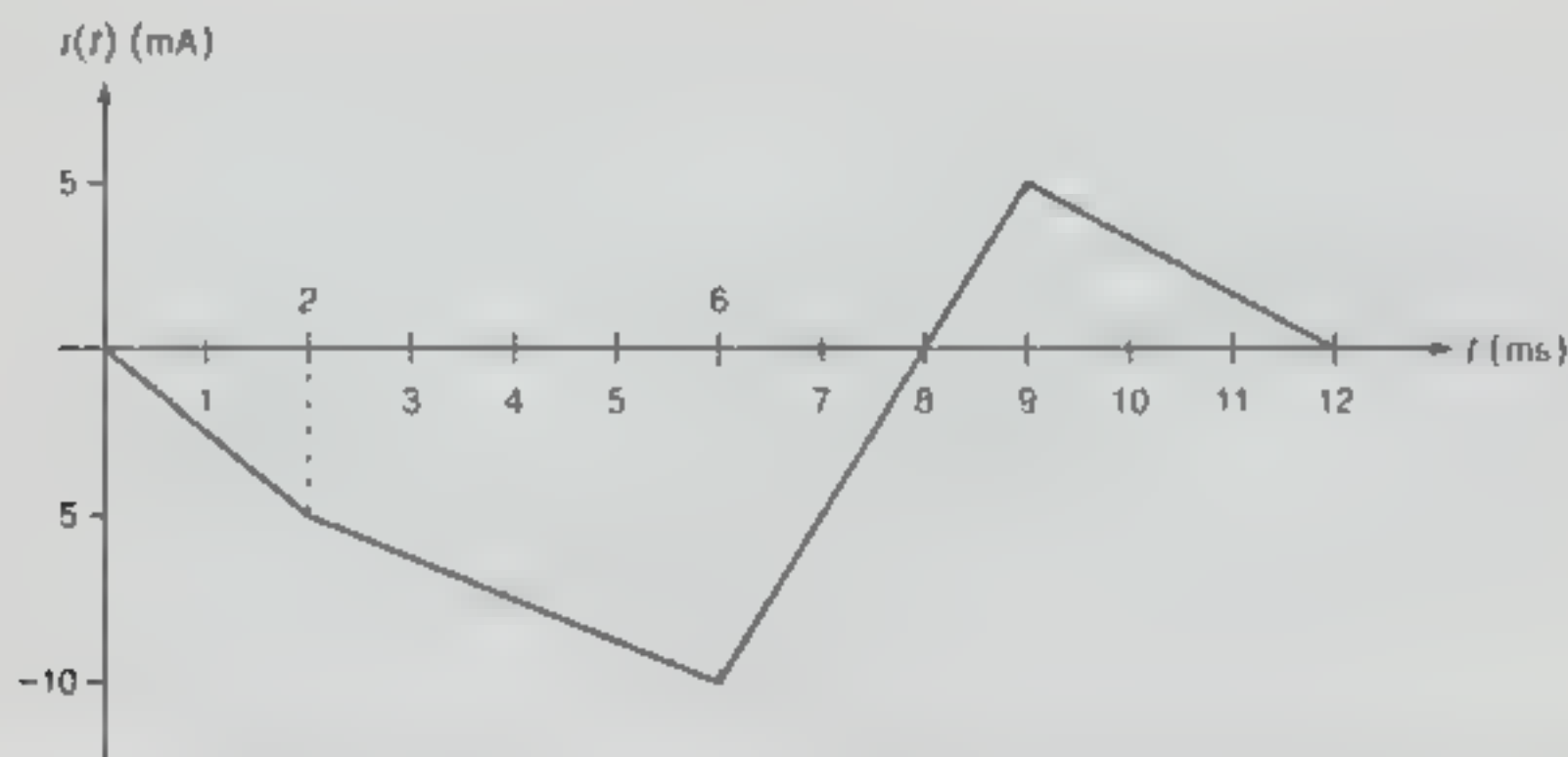
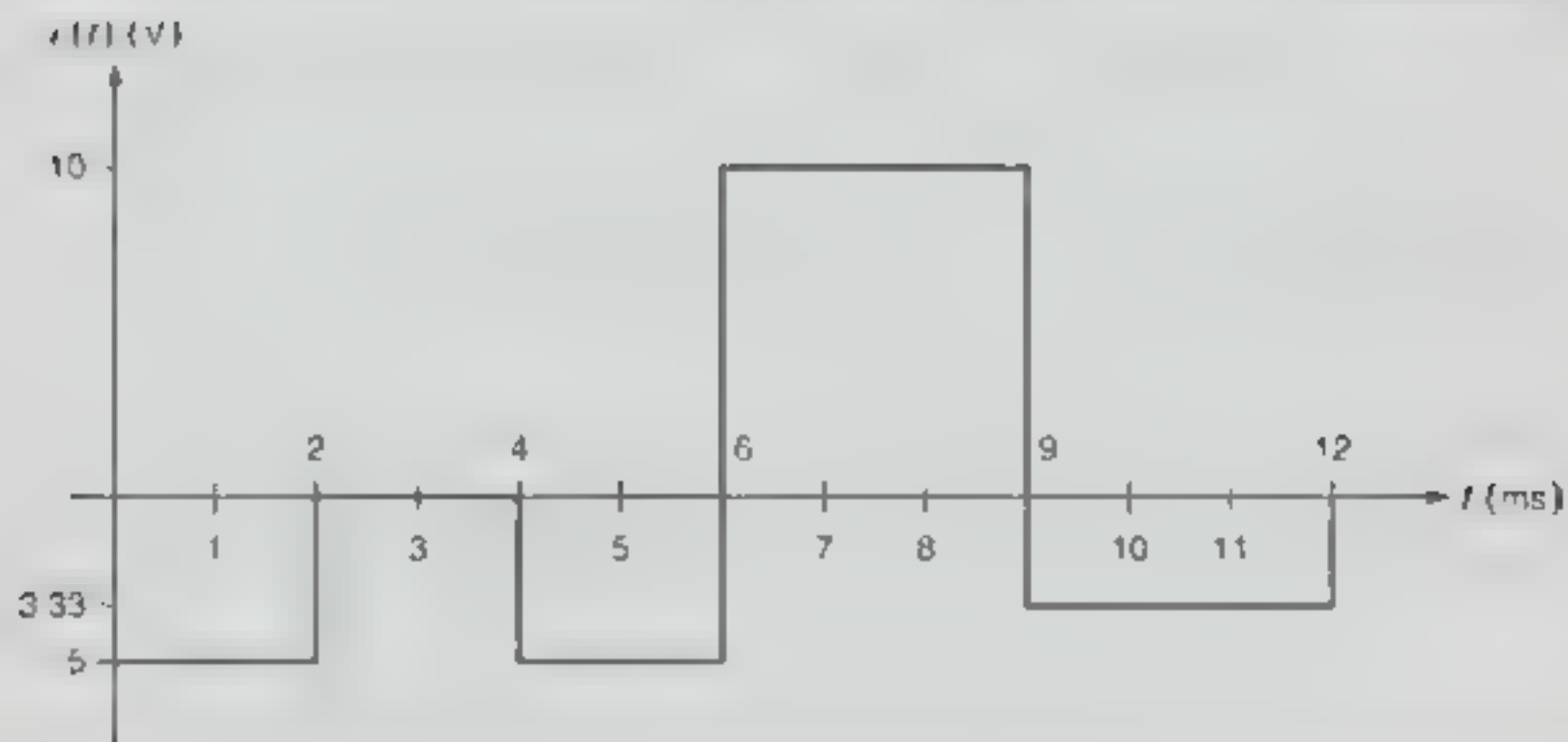


Figura E6.8

RESPOSTA: 25 μJ .

E6.9 A tensão entre os terminais de um indutor de 0,1 H é mostrada na Fig. E6.9. Obtenha a forma de onda da corrente que passa pelo indutor se $i(0) = 0,1$ A. Qual é a quantidade de energia armazenada no indutor em $t = 7$ ms?

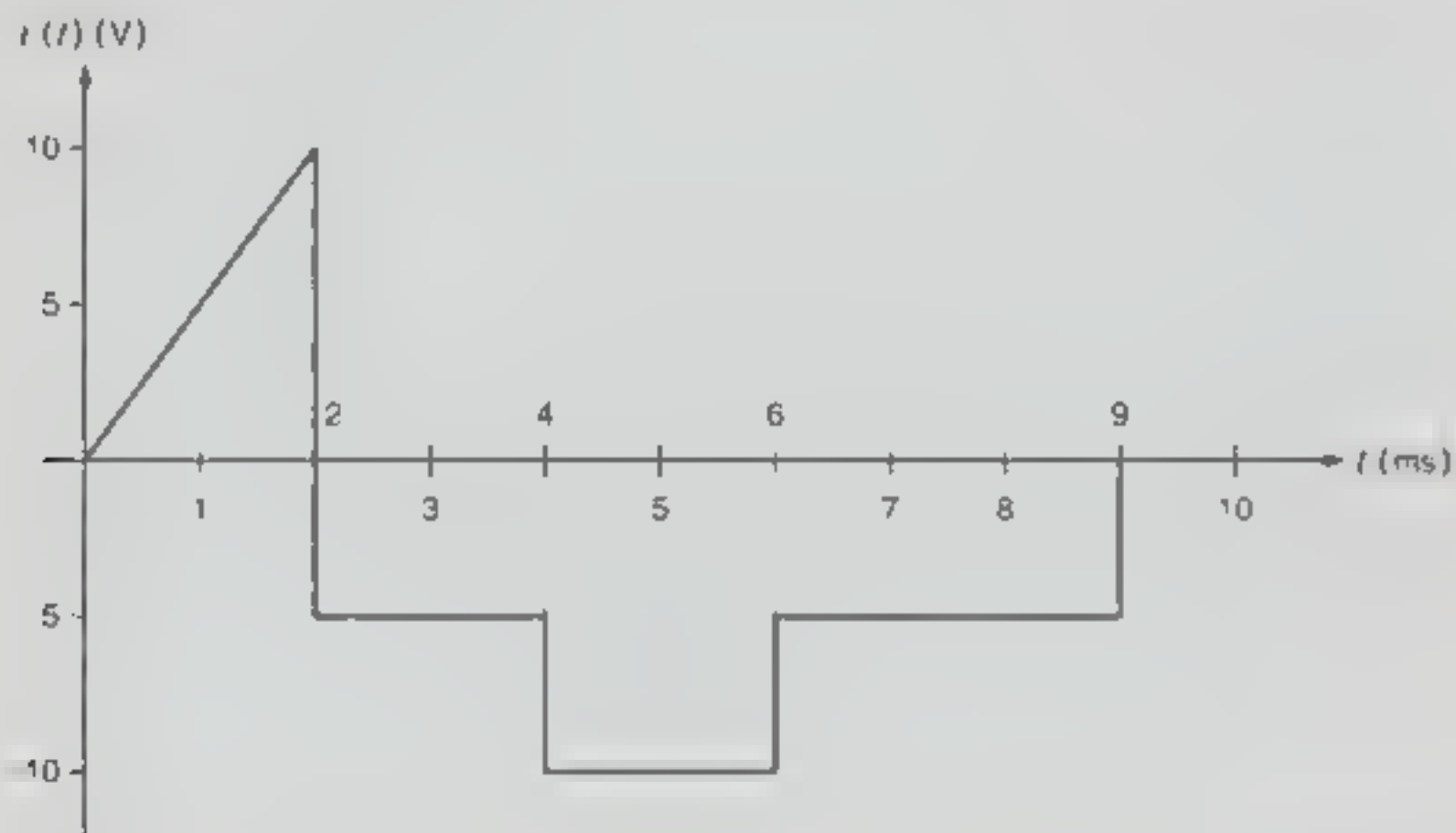
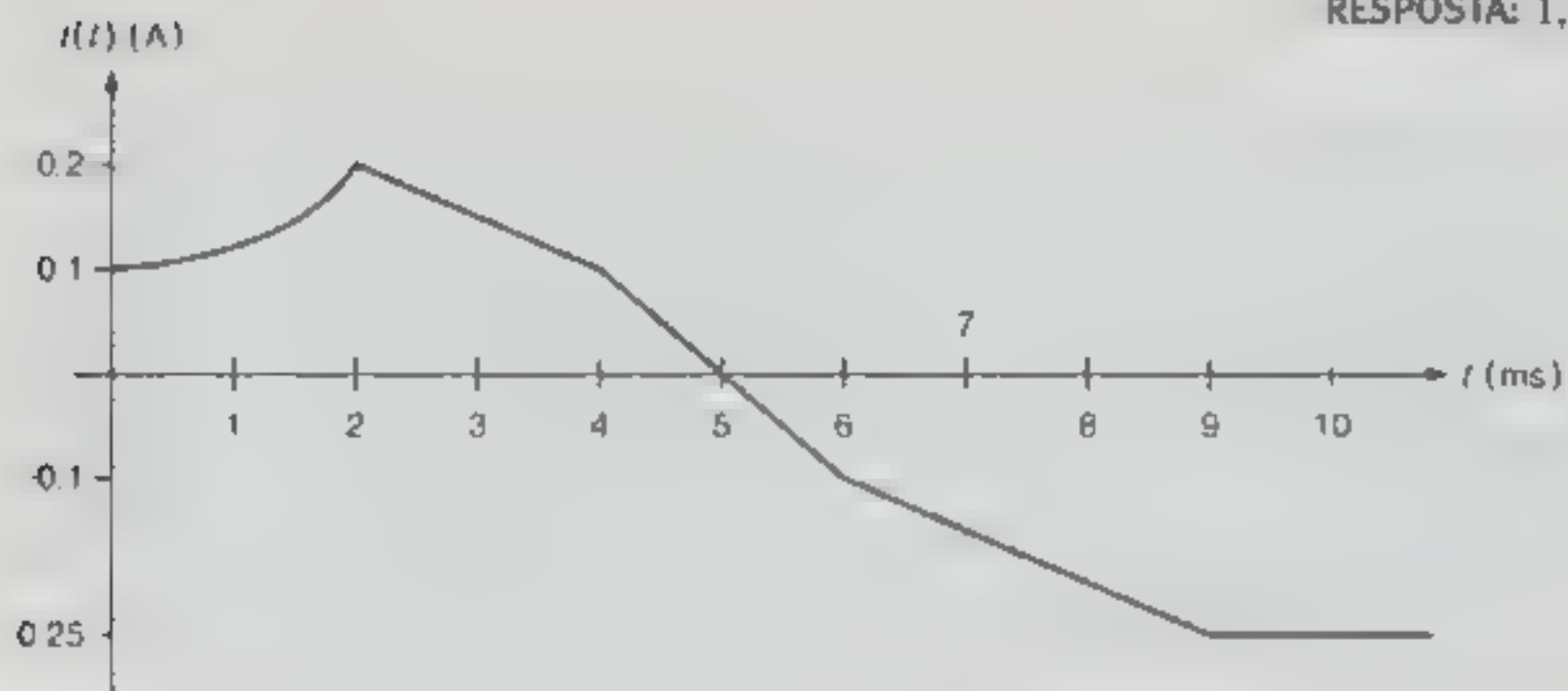


Figura E6.9

RESPOSTA: 1,125 mJ.



E6.10 Determine a energia armazenada no capacitor e no indutor do circuito mostrado na Fig. E6.10.

RESPOSTAS: $0,72 \mu\text{J}$ e $0,5 \mu\text{J}$.

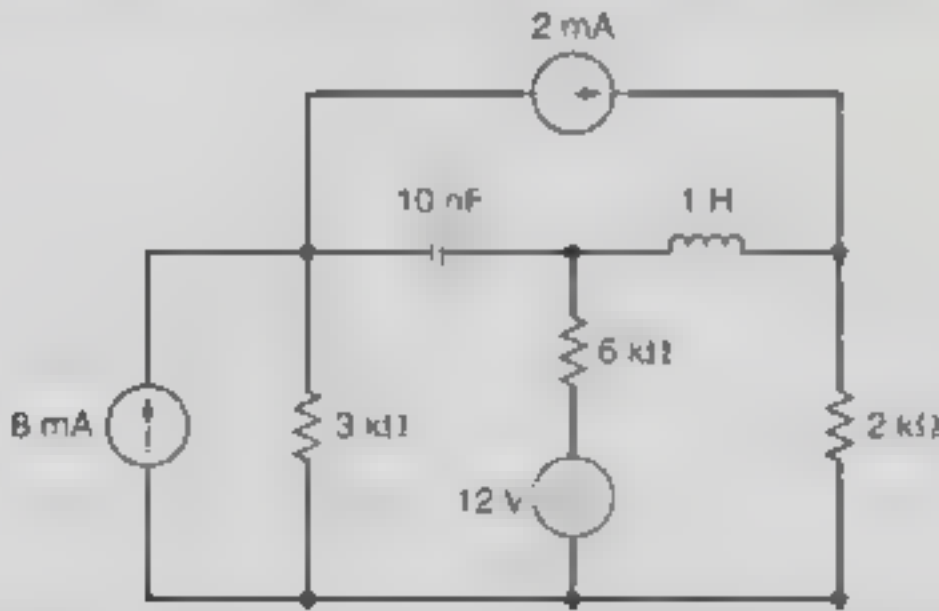


Figura E6.10

ESPECIFICAÇÕES DE CAPACITORES E INDUTORES Existe um conjunto de importantes parâmetros a serem considerados na especificação dos capacitores e dos indutores. No caso dos capacitores, os valores da capacitância, da tensão de trabalho e da tolerância são características que devem ser consideradas de acordo com as aplicações. A faixa de valores dos capacitores padronizados vai de uns poucos pF até cerca de 50 mF. Capacitores acima de 1 F são disponíveis, todavia não serão discutidos neste texto. A Tabela 6.1 apresenta uma lista dos valores padronizados de capacitores, os quais são fornecidos tipicamente em picofarads ou microfarads. Embora tanto os valores nominais menores quanto os maiores sejam disponíveis, a tensão de trabalho padronizada, ou tensão nominal CC, está, normalmente, entre 6,3 V e 500 V. Os fabricantes especificam essa tensão de trabalho, uma vez que ela é crítica para manter a tensão aplicada abaixo do ponto de colapso dos dielétricos. A tolerância é um valor adjunto ao valor da capacitância e é geralmente apresentada como um percentual do valor nominal. Os valores padronizados para a tolerância são $\pm 5\%$, $\pm 10\%$ e $\pm 20\%$. Eventualmente, as tolerâncias para os capacitores com um único dígito em

pF podem ser também apresentadas em pF. Por exemplo, $5 \text{ pF} \pm 0,25 \text{ pF}$.

As duas especificações principais de um indutor são sua indutância e sua resistência. As indutâncias padronizadas comercialmente estão na faixa de aproximadamente 1 nH até cerca de 100 mH. Indutores com indutâncias maiores podem, certamente, ser fabricados para uma aplicação específica. A Tabela 6.2 lista os valores padronizados de indutores. A faixa de correntes para os indutores, tipicamente, vai desde alguns mA até cerca de 1 A. As tolerâncias típicas são de 5% ou 10% do valor nominal.

Conforme indicado no Capítulo 2, os resistores com enrolamento são, na realidade, bobinas de fios e, portanto, é bastante lógico que os indutores apresentem algum efeito resistivo. A grande diferença entre os resistores com enrolamento e os indutores é o material do fio. Materiais com alta resistência, como nicromo, são utilizados nos resistores e o cobre de baixa resistência é utilizado nos indutores. A resistência do fio de cobre depende do seu comprimento e do seu diâmetro. A Tabela 6.3 relaciona os diâmetros dos condutores padronizados AWG (*American Wire Gauge*) e a resistência resultante por pé de comprimento do condutor de cobre.

TABELA 6.1 Valores padronizados de capacitores

1	10	100	1000	0,010	0,10	1,0	10	100	1000	10.000
	12	120	1200	0,012	0,12	1,2	12	120	1200	12.000
1,5	15	150	1500	0,015	0,15	1,5	15	150	1500	15.000
	18	180	1800	0,018	0,18	1,8	18	180	1800	18.000
2	20	200	2000	0,020	0,20	2,0	20	200	2000	20.000
	22	220	2200	0,022	0,22	2,2	22	220	2200	22.000
	27	270	2700	0,027	0,27	2,7	27	270	2700	27.000
3	33	330	3300	0,033	0,33	3,3	33	330	3300	33.000
4	39	390	3900	0,039	0,39	3,9	39	390	3900	39.000
5	47	470	4700	0,047	0,47	4,7	47	470	4700	47.000
6	51	510	5100	0,051	0,51	5,1	51	510	5100	51.000
7	56	560	5600	0,056	0,56	5,6	56	560	5600	56.000
8	68	680	6800	0,068	0,68	6,8	68	680	6800	68.000
9	82	820	8200	0,082	0,82	8,2	82	820	8200	82.000

TABELA 6.2 Valores padronizados de indutores






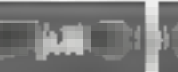



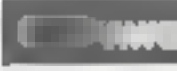


								
1	10	100	1,0	10	100	1,0	10	100
1,2	12	120	1,2	12	120	1,2	12	
1,5	15	150	1,5	15	150	1,5	15	
1,8	18	180	1,8	18	180	1,8	18	
2	20	200	2,0	20	200	2,0	20	
2,2	22	220	2,2	22	220	2,2	22	
2,7	27	270	2,7	27	270	2,7	27	
3	33	330	3,3	33	330	3,3	33	
4	39	390	3,9	39	390	3,9	39	
5	47	470	4,7	47	470	4,7	47	
6	51	510	5,1	51	510	5,1	51	
7	56	560	5,6	56	560	5,6	56	
8	68	680	6,8	68	680	6,8	68	
9	82	820	8,2	82	820	8,2	82	

TABELA 6.3 Resistência por pé dos condutores de cobre maciços

		
12	0,0808	1,59
14	0,0641	2,54
16	0,0508	4,06
18	0,0400	6,50
20	0,0320	10,4
22	0,0253	16,5
24	0,0201	26,2
26	0,0159	41,6
28	0,0126	66,2
30	0,0100	105
32	0,0080	167
34	0,0063	267
36	0,0049	428
38	0,0039	684
40	0,0031	1094

EXEMPLO 6.9

Deseja-se obter a possível faixa de valores de capacitância para um capacitor de 51 mF que possua uma tolerância de 20%.

SOLUÇÃO

O menor valor da capacitância é de $0,8C = 40,8$ mF e o maior valor da capacitância é de $1,2C = 61,2$ mF.

EXEMPLO 6.10

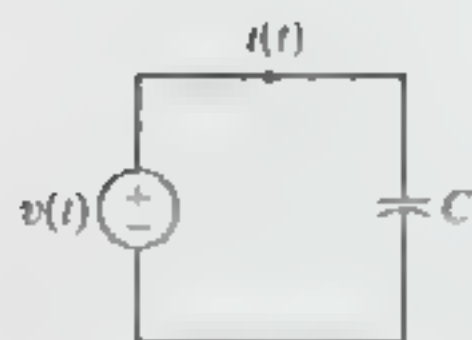
O capacitor do circuito mostrado na Fig. 6.11a possui 100 nF com uma tolerância de 20%. Considerando que a forma de onda da tensão entre seus terminais seja a mostrada na Fig. 6.11b, obtenha a curva representativa da forma de onda da corrente para os valores mínimo e máximo de sua capacitância.

SOLUÇÃO

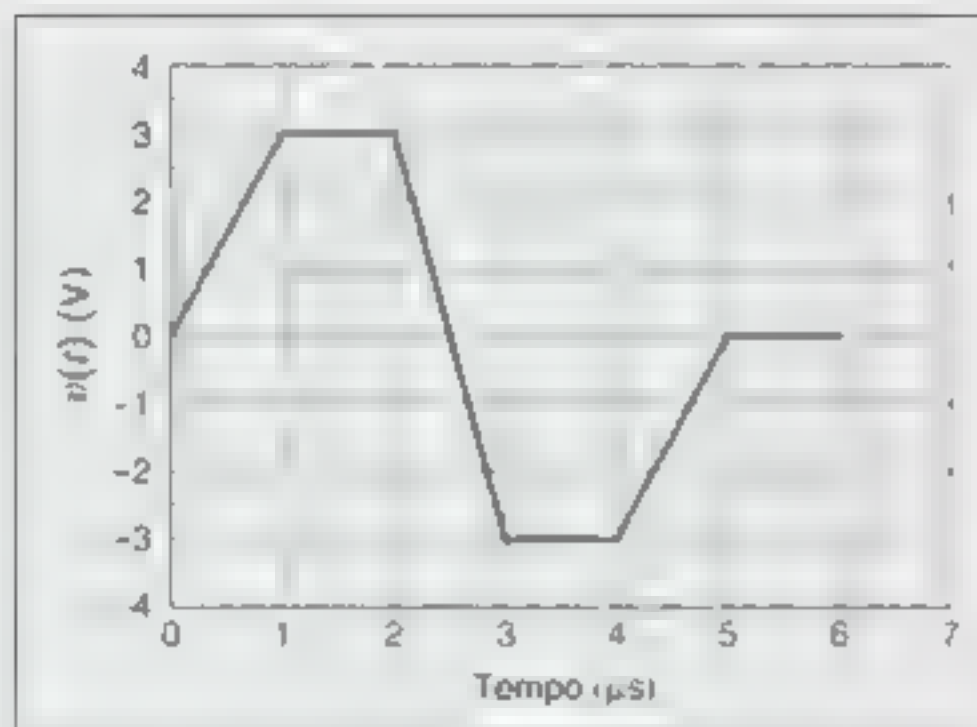
O valor máximo da capacitância é de $1,2C = 120$ nF, e o valor mínimo dessa capacitância é de $0,8C = 80$ nF. As correntes máxima e mínima que passam pelo capacitor, obtidas pela equação

$$i(t) = C \frac{dv(t)}{dt}$$

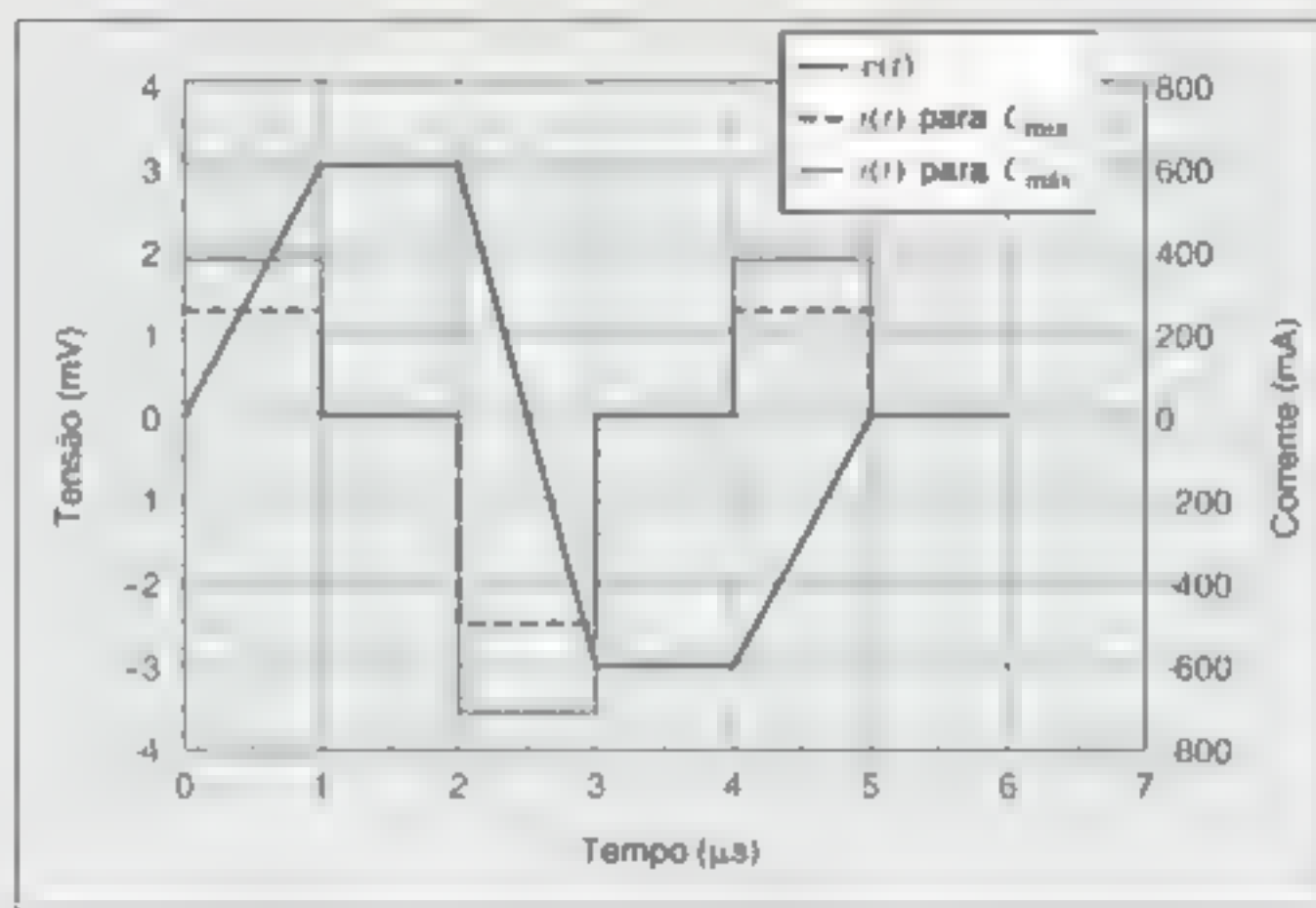
são mostradas na Fig. 6.11c.



(a)



(b)



(c)

Figura 6.11 Circuito e gráficos utilizados no Exemplo 6.10.

EXEMPLO 6.11

O indutor mostrado na Fig. 6.12a possui $100 \mu\text{H}$ com uma tolerância de 10%. Considerando que a forma de onda da corrente seja a mostrada na Fig. 6.12b, obtenha o gráfico da forma de onda da tensão em seus terminais para os valores mínimo e máximo de sua indutância.

SOLUÇÃO

O valor máximo da indutância é de $1,1L = 110 \mu\text{H}$, e o valor mínimo é de $0,9L = 90 \mu\text{H}$. As tensões máxima e mínima entre

os terminais do indutor, obtidas pela equação

$$v(t) = L \frac{di(t)}{dt}$$

são mostradas na Fig. 6.12c.

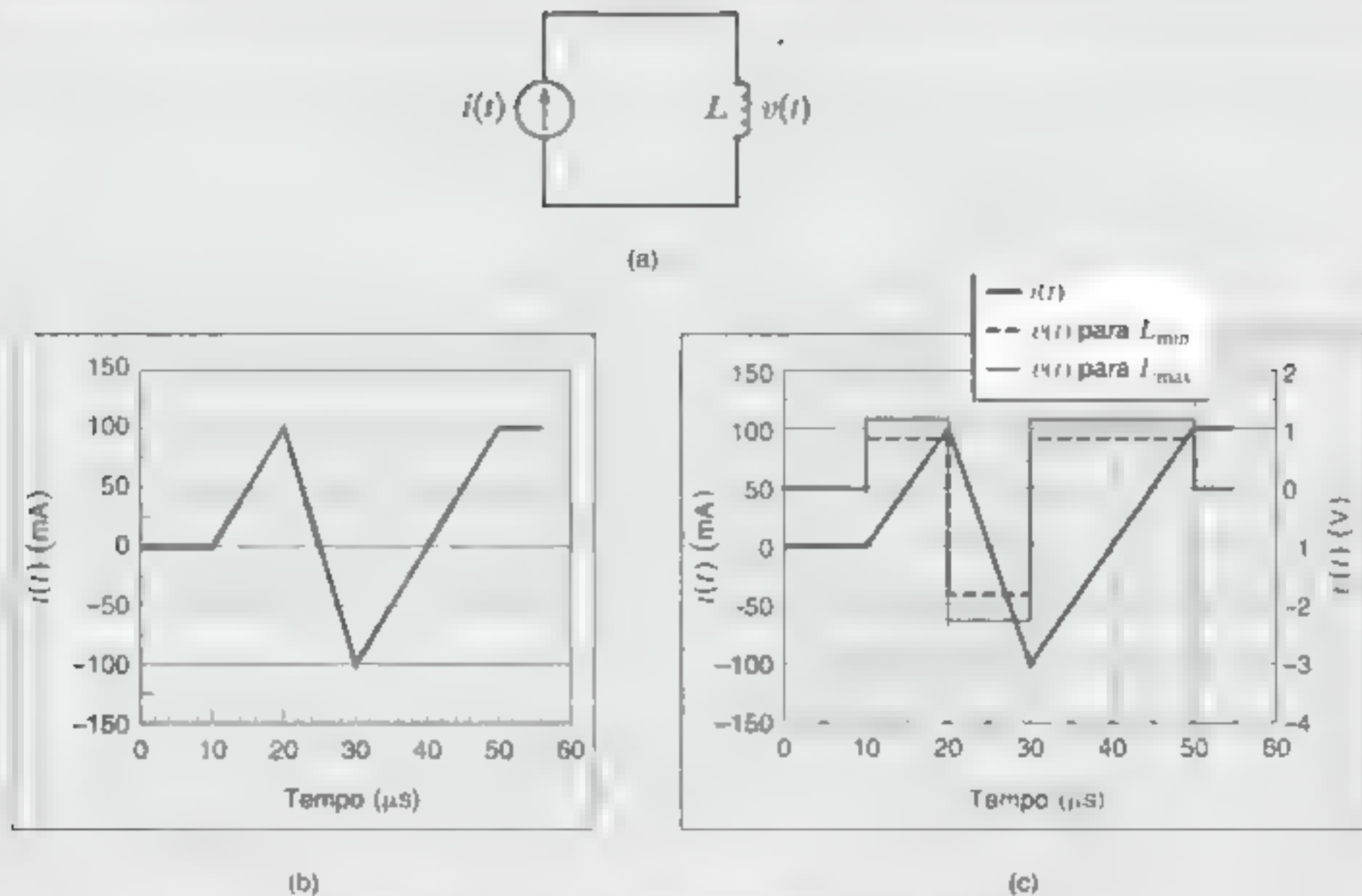


Figura 6.12 Circuito e gráficos utilizados no Exemplo 6.11.

6.3 Combinações de Capacitores e Indutores

CAPACITORES EM SÉRIE Se alguns capacitores são conectados em série, sua capacitância equivalente pode ser calculada utilizando-se a LKT. Considere o circuito mostrado na Fig. 6.13a. Para esse circuito tem-se

$$v(t) = v_1(t) + v_2(t) + v_3(t) + \dots + v_N(t) \quad 6.13$$

porém,

$$v_1(t) = \frac{1}{C_1} \int_{t_0}^t i(t) dt + v_1(t_0) \quad 6.14$$

Portanto, a Eq. (6.13) pode ser escrita como se segue utilizando a Eq. (6.14):

$$v(t) = \left(\sum_{i=1}^N \frac{1}{C_i} \right) \int_{t_0}^t i(t) dt + \sum_{i=1}^N v_i(t_0) \quad 6.15$$

$$\frac{1}{C_S} \int_{t_0}^t i(t) dt + v(t) = \sum_{i=1}^N v_i(t_0) \quad 6.16$$

em que

$$v(t) = \sum_{i=1}^N v_i(t)$$

e

$$\frac{1}{C_S} = \sum_{i=1}^N \frac{1}{C_i} \quad \frac{1}{C_S} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \dots + \frac{1}{C_N} \quad 6.17$$

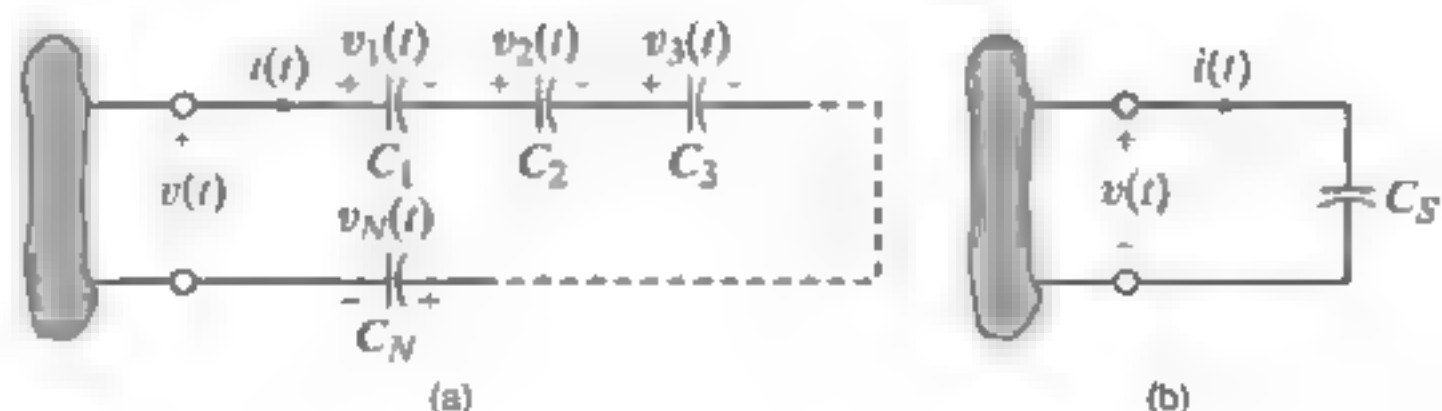
[atenção]

Os capacitores em série se combinam como os resistores em paralelo.

Assim, o circuito mostrado na Fig. 6.13b é equivalente àquele mostrado na Fig. 6.13a sob as condições estabelecidas anteriormente.

É também importante notar que, sendo a mesma corrente a fluir em cada capacitor em série, cada capacitor recebe a mesma carga no mesmo período de tempo. A tensão entre os terminais de cada capacitor dependerá dessa carga e da capacitância do componente.

Figura 6.13 Circuito equivalente para N capacitores conectados em série.



EXEMPLO 6.12

Determine a capacitância equivalente e a tensão inicial do circuito mostrado na Fig. 6.14.

SOLUÇÃO

Note que os capacitores devem ter sido carregados antes de serem conectados em série, caso contrário, possuiriam cargas idênticas e as tensões estariam no mesmo sentido.

A capacitância equivalente vale

$$\frac{1}{C_s} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6}$$

na qual todos os valores de capacitância estão expressos em microfarads.

Portanto, $C_s = 1 \mu\text{F}$ e, conforme pode ser visto pela figura, $v(t_0) = -3 \text{ V}$. Note que a energia total armazenada no circuito vale

$$w(t_0) = \frac{1}{2} [2 \times 10^{-6} (2)^2 + 3 \times 10^{-6} (-4)^2 + 6 \times 10^{-6} (-1)^2] \\ = 3,5 \mu\text{J}$$

Entretanto, a energia disponível nos terminais do circuito será

$$w_c(t_0) = \frac{1}{2} C_s v^2(t) \\ = \frac{1}{2} (1 \times 10^{-6} (-3)^2) \\ = 4,5 \mu\text{J}$$

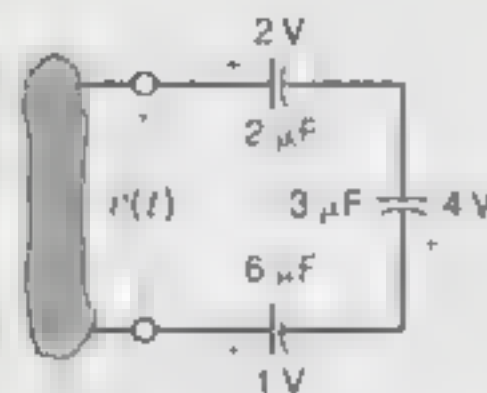


Figura 6.14 Circuito contendo múltiplos capacitores com tensões iniciais prescritas.

EXEMPLO 6.13

Dois capacitores previamente descarregados são conectados em série e, em seguida, carregados por uma fonte de 12 V. Um dos capacitores possui $30 \mu\text{F}$ e o outro é desconhecido. Se a tensão entre os terminais do capacitor de $30 \mu\text{F}$ é de 8 V, determine a capacitância do capacitor incógnito.

SOLUÇÃO

A carga no capacitor de $30 \mu\text{F}$ vale

$$Q = CV = (30 \mu\text{F})(8 \text{ V}) = 240 \mu\text{C}$$

Uma vez que a mesma corrente flui em cada um dos capacitores em série, cada capacitor ganha a mesma carga no mesmo período de tempo. Assim,

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{240 \mu\text{C}}{4 \text{ V}} = 60 \mu\text{F}$$

CAPACITORES EM PARALELO Para determinar-se a capacitância equivalente de N capacitores conectados em paralelo, emprega-se a LKC. Conforme pode ser depreendido da Fig. 6.15a,

$$i(t) = i_1(t) + i_2(t) + i_3(t) + \cdots + i_N(t) \quad 6.18$$

$$= C_1 \frac{dv(t)}{dt} + C_2 \frac{dv(t)}{dt} + C_3 \frac{dv(t)}{dt} + \cdots + C_N \frac{dv(t)}{dt}$$

$$= \left(\sum_{i=1}^N C_i \right) \frac{dv(t)}{dt}$$

$$= C_p \frac{dv(t)}{dt} \quad 6.19$$

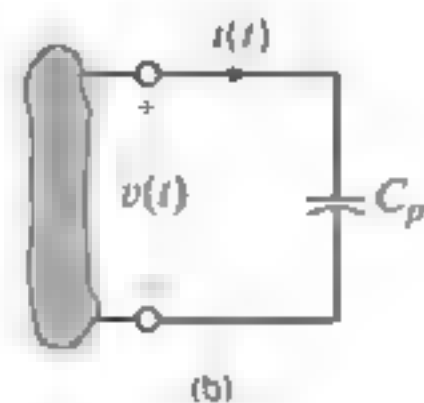
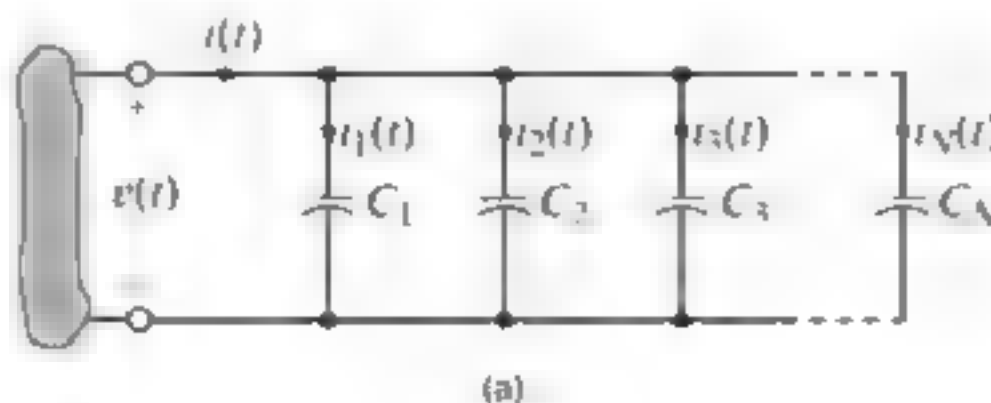
em que

$$C_p = C_1 + C_2 + C_3 + \cdots + C_N \quad 6.20$$

[atenção]

Os capacitores em paralelo se combinam como os resistores em série.

Figura 6.15 Circuito equivalente para N capacitores conectados em paralelo.



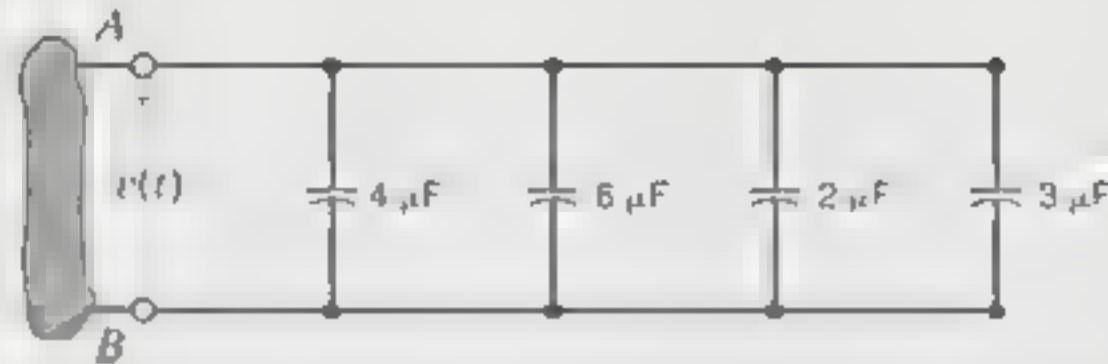
EXEMPLO 6.14

Determine a capacitância equivalente nos terminais A - B do circuito mostrado na Fig. 6.16.

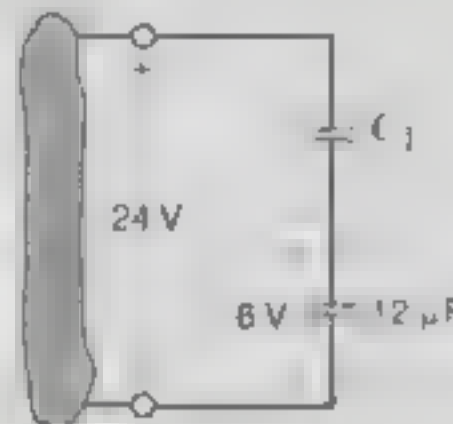
SOLUÇÃO

$$C_T = 15 \mu\text{F}$$

Figura 6.16 Circuito contendo múltiplos capacitores em paralelo.

**Avaliação do Aprendizado**

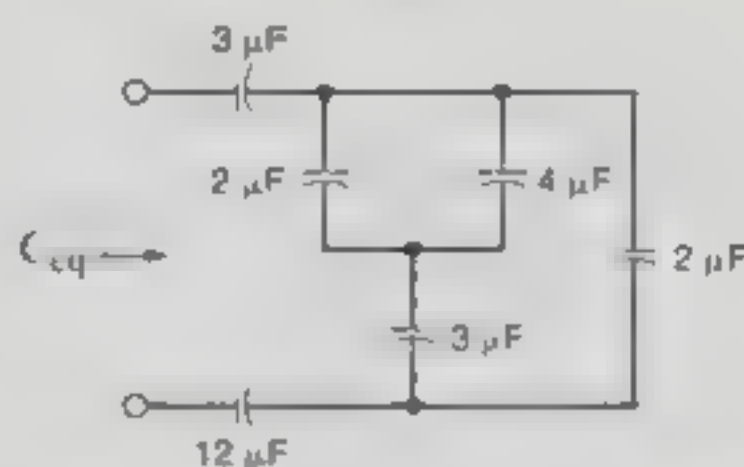
E6.11 Dois capacitores inicialmente descarregados são conectados conforme mostrado na Fig. E6.11. Após um certo período de tempo, a tensão atinge o valor indicado. Determine o valor de C_1 .



RESPOSTA: $C_1 = 4 \mu\text{F}$.

Figura E6.11

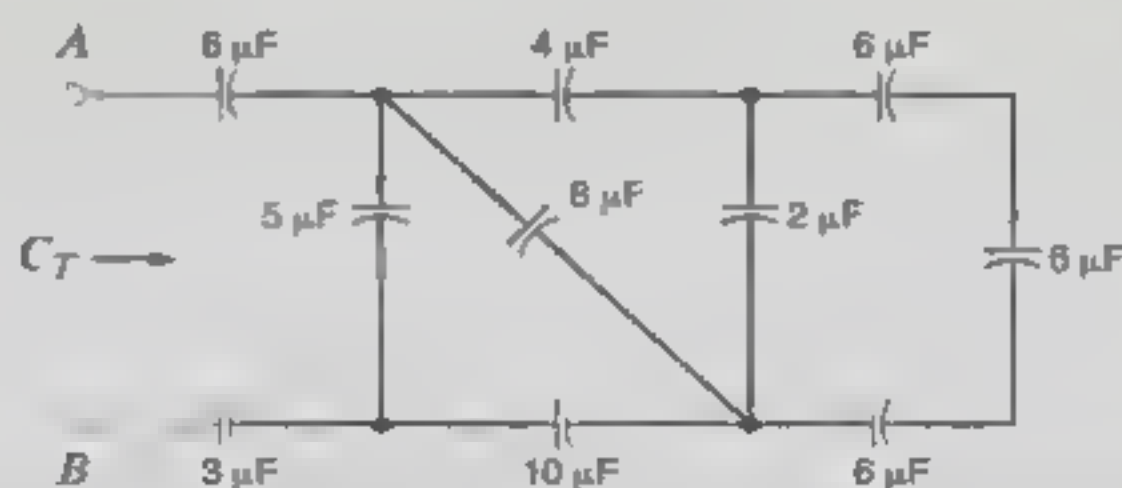
E6.12 Calcule a capacitância equivalente da rede mostrada na Fig. E6.12.



RESPOSTA: $C_{eq} = 1,5 \mu\text{F}$.

Figura E6.12

E6.13 Determine a capacitância C_T do circuito mostrado na Fig. E6.13.



RESPOSTA: $1,667 \mu\text{F}$.

Figura E6.13

INDUTORES EM SÉRIE Se N indutores são conectados em série, a indutância equivalente da combinação pode ser determinada como descrito a seguir. Com base na Fig. 6.17a e utilizando a LKT, pode-se escrever

$$v(t) = v_1(t) + v_2(t) + v_3(t) + \cdots + v_N(t) \quad 6.21$$

e, portanto,

$$v(t) = L_1 \frac{di(t)}{dt} + L_2 \frac{di(t)}{dt} + L_3 \frac{di(t)}{dt} + \cdots + L_N \frac{di(t)}{dt} \quad 6.22$$

$$\begin{aligned} & \left(\sum_{i=1}^N L_i \right) \frac{di(t)}{dt} \\ &= L_s \frac{di(t)}{dt} \end{aligned} \quad 6.23$$

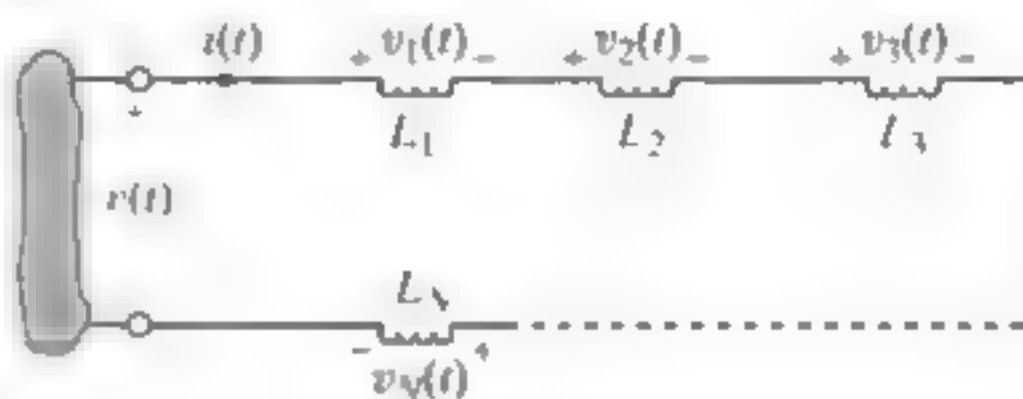


Figura 6.17 Circuito equivalente para N indutores conectados em série.

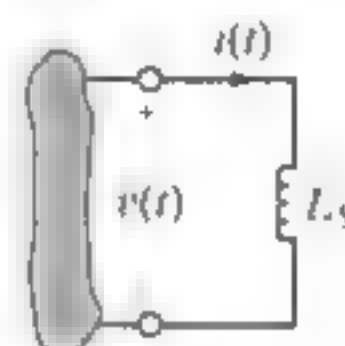
em que

$$L_s = \sum_{i=1}^N L_i = L_1 + L_2 + \cdots + L_N \quad 6.24$$

[atenção]

Os indutores em série se combinam como os resistores em série.

Portanto, nessas condições, a rede mostrada na Fig. 6.17b é equivalente àquela mostrada na Fig. 6.17a.



(b)

(a)

EXEMPLO 6.15

Determine a indutância equivalente do circuito mostrado na Fig. 6.18.

SOLUÇÃO

A indutância equivalente do circuito mostrado na Fig. 6.18 é

$$\begin{aligned} L_s &= 1\text{H} + 2\text{H} + 4\text{H} \\ &= 7\text{H} \end{aligned}$$

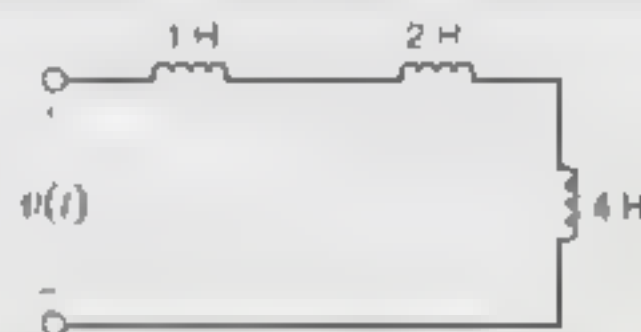


Figura 6.18 Circuito contendo múltiplos indutores.

INDUTORES EM PARALELO Considere o circuito mostrado na Fig. 6.19a, que contém N indutores em paralelo. Utilizando a LKC, pode-se escrever

$$i(t) = i_1(t) + i_2(t) + i_3(t) + \cdots + i_N(t) \quad 6.25$$

Todavia,

$$i_j(t) = \frac{1}{L_j} \int_{t_0}^t v(x) dx + i_j(t_0) \quad 6.26$$

A substituição dessa expressão na Eq. (6.25) fornece

$$i(t) = \left(\sum_{j=1}^N \frac{1}{L_j} \right) \int_{t_0}^t v(x) dx + \sum_{j=1}^N i_j(t_0) \quad 6.27$$

$$= \frac{1}{L_s} \int_{t_0}^t v(x) dx + i(t_0) \quad 6.28$$

em que

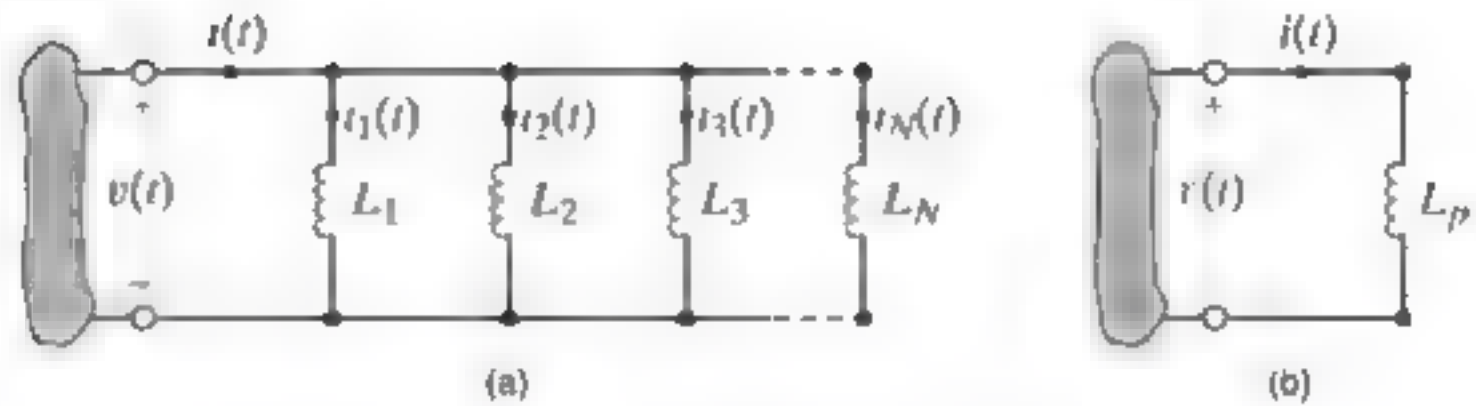
$$\frac{1}{L_s} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} + \frac{1}{L_3} + \cdots + \frac{1}{L_N} \quad 6.29$$

[atenção]

Os indutores em paralelo se combinam como os resistores em paralelo.

e $i(t_0)$ é igual à corrente em L_s em $t = t_0$. Assim, o circuito mostrado na Fig. 6.19b é equivalente àquele mostrado na Fig. 6.19a sob as condições estabelecidas anteriormente

Figura 6.19 Circuito equivalente para N indutores conectados em paralelo.



EXEMPLO 6.16

Determine a indutância equivalente e a corrente inicial para o circuito mostrado na Fig. 6.20.

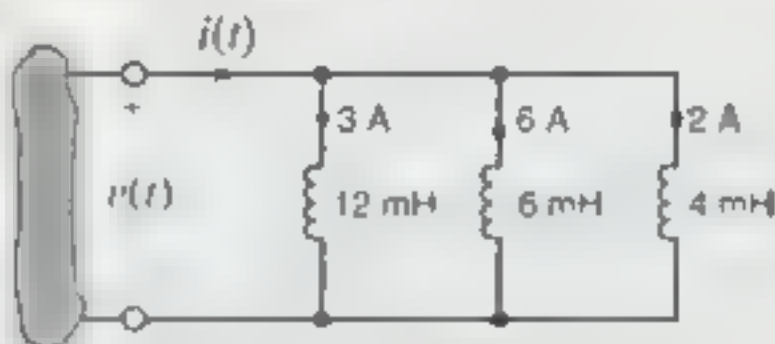


Figura 6.20 Circuito contendo múltiplos indutores com correntes iniciais prescritas.

SOLUÇÃO

A indutância equivalente vale

$$\frac{1}{L_p} = \frac{1}{12} + \frac{1}{6} + \frac{1}{4}$$

na qual todos os valores de indutância são expressos em milihenrys:

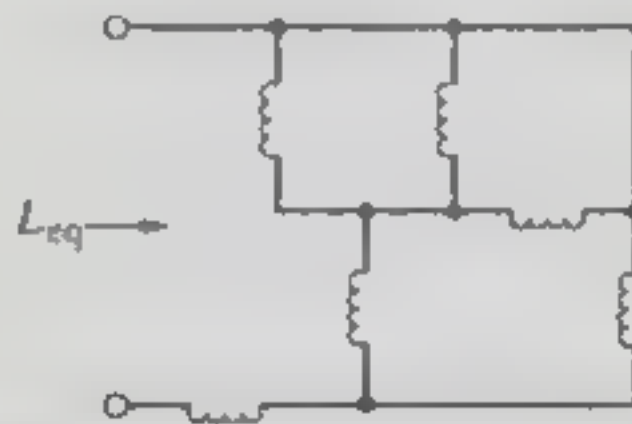
$$L_p = 2 \text{ mH}$$

e a corrente inicial é $i(t_0) = -1 \text{ A}$.

O material anterior indica que os capacitores se combinam como as condutâncias, enquanto os indutores se combinam como as resistências.

Avaliação do Aprendizado

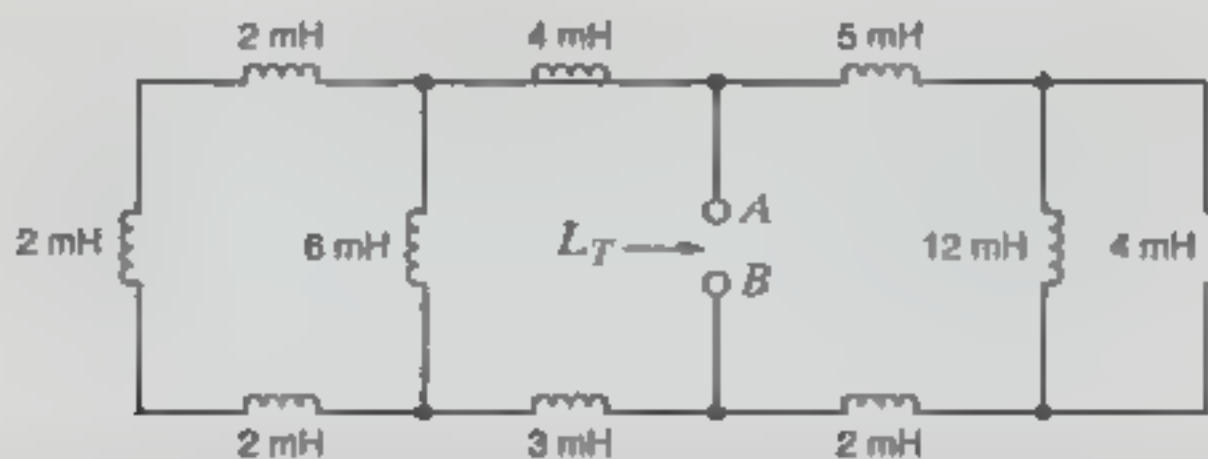
E6.14 Determine a indutância equivalente da rede mostrada na Fig. E6.14 considerando que todas as indutâncias sejam iguais a 6 mH.



RESPOSTA: 9,429 mH.

Figura E6.14

E6.15 Calcule a indutância L_T do circuito mostrado na Fig. E6.15.



RESPOSTA: 5 mH.

Figura E6.15

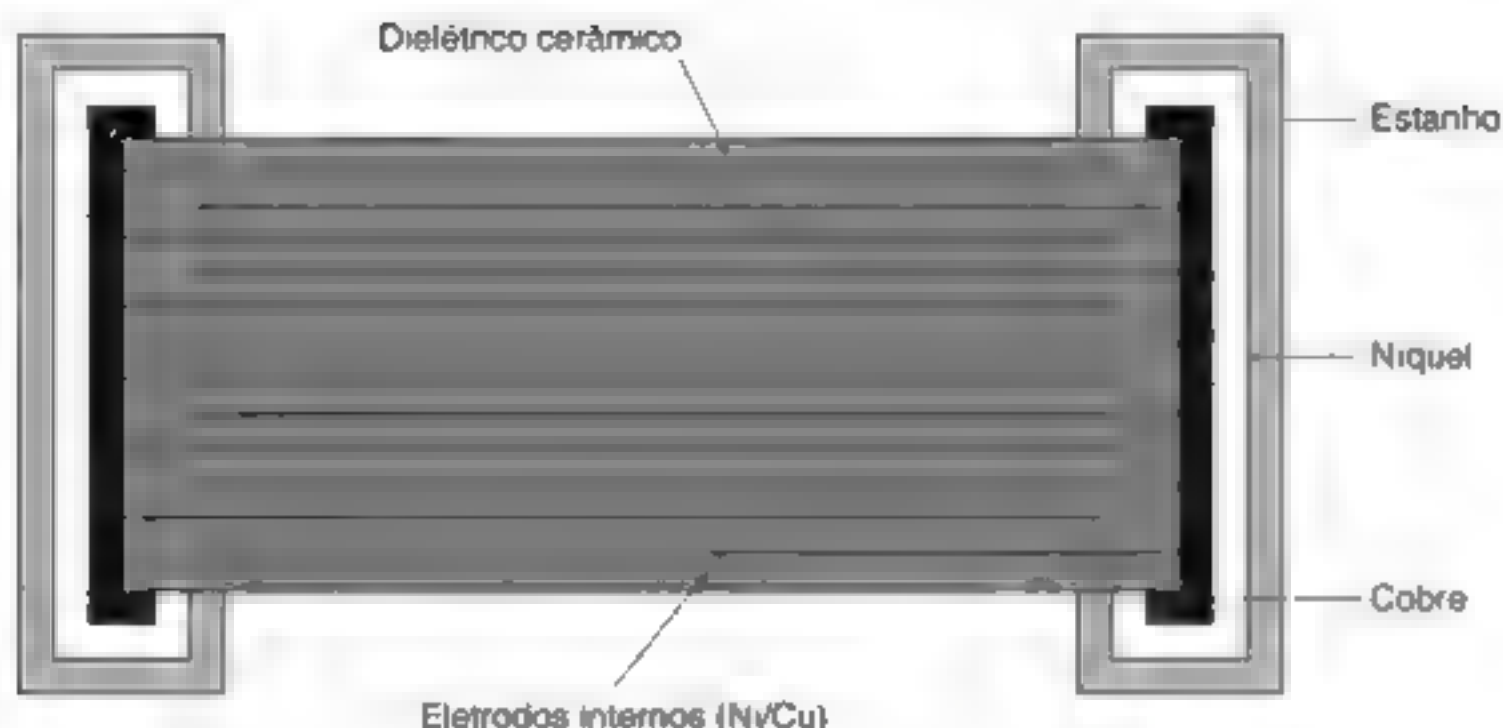


Figura 6.21 Seção transversal de um capacitor de chip cerâmico multicamadas.

CAPACITORES DE CHIPS No Capítulo 2 discutiram-se brevemente os resistores utilizados na fabricação dos equipamentos eletrônicos modernos. Um exemplo ilustrando a montagem desses dispositivos foi mostrado na Fig. 2.41, juntamente com alguns capacitores de chips típicos. Conforme será indicado no material que se segue, os equipamentos eletrônicos modernos empregam principalmente resistores e capacitores, e evitam o uso de indutores tanto quanto possível.

Os capacitores de chips montados em superfícies representam a maioria dos capacitores utilizados nos conjuntos eletrônicos atuais. Esses capacitores se apresentam em uma grande faixa de dimensões, desde 10 mils de lado até 250 mils de lado. Todos os capacitores de chips cerâmicos consistem em uma camada dielétrica cerâmica entre placas de metal. As propriedades das camadas cerâmica e metálica determinam o tipo de capacitor, sua capacitância e sua confiabilidade. Uma vista em corte de um capacitor de chip padrão é mostrada na Fig. 6.21. Os eletrodos metálicos internos são alternadamente conectados aos lados opostos do chip, em que são adicionados terminais metálicos. Esses terminais não apenas realizam a conexão com os eletrodos internos, mas também representam uma base para a fixação por solda desses chips à placa de circuito impresso. O número de camadas que se alternam e o espaçamento entre elas, juntamente com a constante dielétrica do material cerâmico, determinarão o valor da capacitância.

Indicamos anteriormente que os resistores normalmente são fabricados em dimensões padronizadas com potência nominal específica. Os capacitores de chips também são fabricados dessa forma, e a Tabela 6.4 mostra uma relação parcial desses dispositivos.

Os tamanhos padronizados dos capacitores de chips são mostrados na Tabela 6.4.

INDUTORES DE CHIPS Um indutor de chip consiste em um substrato cerâmico miniaturizado com um condutor enrolado em seu entorno ou de um filme fino depositado e posicionado formando uma espira. Eles podem ser encapsulados ou moldados com um material de modo a proteger o condutor dos elementos ou deixados desprotegidos. Os indutores de chips são de diversos tipos e são encontrados em uma grande faixa de valores, com três configurações típicas que se adaptam ao kit

TABELA 6.4 Dimensões padronizadas dos capacitores cerâmicos de chip

Código de Dimensão	Dimensão (mils)	Relação Nominal (watts)
0201	20 × 10	1/20
0402	40 × 20	1/16
0603	60 × 30	1/10
0805	80 × 50	1/8
1206	120 × 60	1/4
2010	200 × 100	1/2
2512	250 × 120	1

do chip padronizado largamente utilizado nas placas de circuito impresso (PCI) industriais.

O primeiro tipo é o indutor de chip de precisão, no qual o cobre é depositado na cerâmica e posicionado formando uma espira, conforme mostrado na Fig. 6.22.

O segundo tipo é um indutor de chip de ferrita, o qual utiliza uma série de bobinas padronizadas empilhadas entre as camadas de ferrita formando uma bobina multicamadas, conforme mostrado na Fig. 6.23.

O terceiro tipo é uma estrutura aberta de condutores enrolados em um substrato cerâmico formando a bobina indutora. A estrutura completa é mostrada na Fig. 6.24.

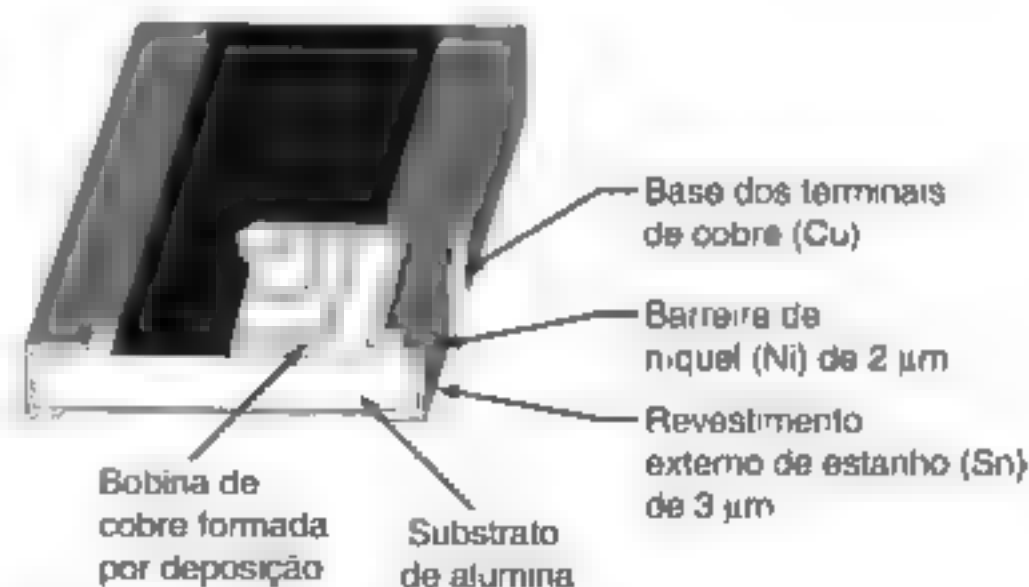


Figura 6.22 Seção transversal do indutor de chip de precisão.

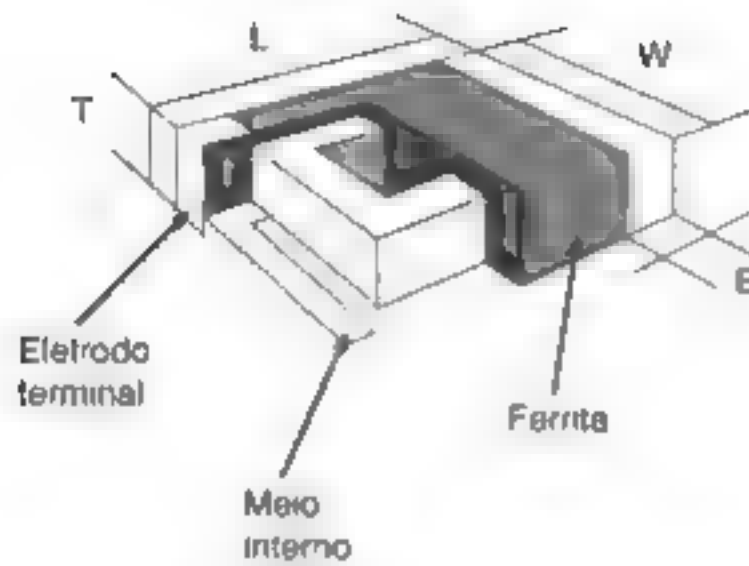


Figura 6.23 Seção transversal do indutor de chip de ferrita.

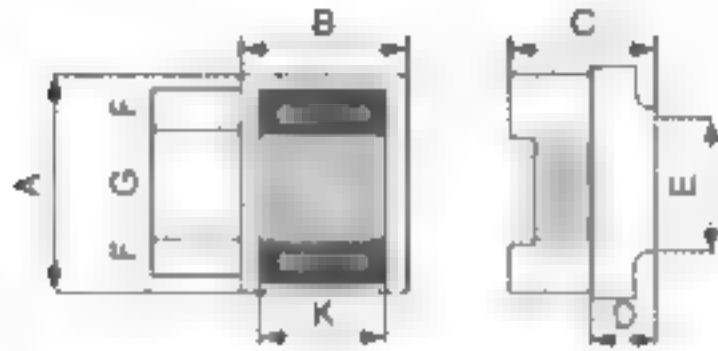
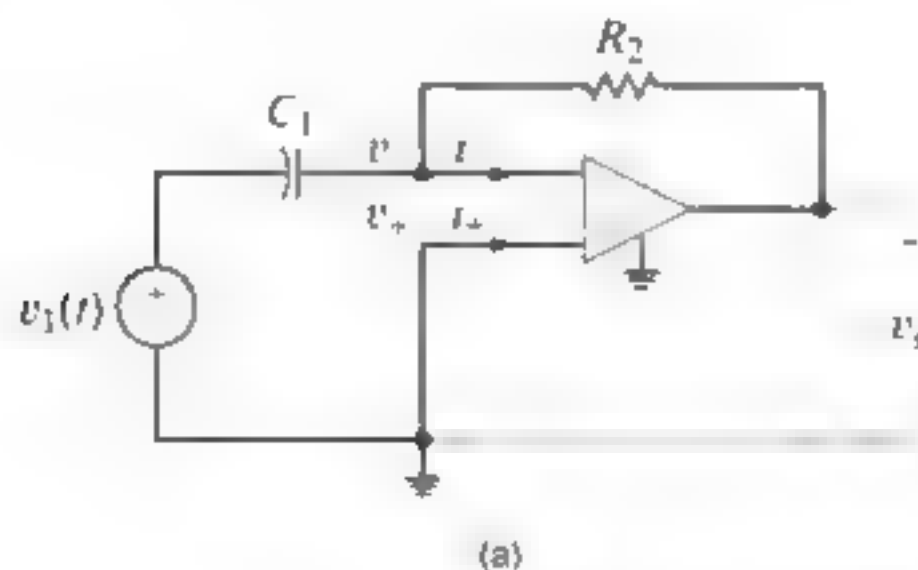


Figura 6.24 Seção transversal do indutor de chip de condutor enrolado.

Cada uma dessas configurações possui características distintas, com o tipo que utiliza um condutor enrolado apresentando os maiores valores de indutância (10 nH – 4,7 uH) – e tolerâncias razoáveis (1% – 2%). O indutor de chip de ferrita apresenta uma ampla faixa de valores (47 nH – 33 uH), porém tolerâncias na faixa de 5%. Os indutores de chip de precisão possuem baixos valores de indutância (1 – 100 nH), porém tolerâncias muito boas ($\pm 0,1$ nH).

6.4 Circuitos com Amplificadores Operacionais RC

Dois circuitos com amplificadores operacionais RC muito importantes são o derivador e o integrador. Esses circuitos são obtidos a partir do circuito de um op-amp inversor, substituindo-se os resistores R_1 e R_2 , respectivamente, por um capacitor.



Considere, por exemplo, o circuito mostrado na Fig. 6.25a. As equações do circuito são

$$C_1 \frac{d}{dt}(v_1 - v_-) + \frac{v_- - v_2}{R_2} = 0$$

Entretanto, $v_- = 0$ e $i_- = 0$. Portanto,

$$v_2(t) = -R_2 C_1 \frac{dv_1(t)}{dt} \quad 6.30$$

[atenção]

As propriedades de um op-amp ideal são $v_- = v_+$ e $i_- = i_+ = 0$.

Assim, a saída do circuito do op-amp é proporcional à derivada da entrada.

As equações do circuito para a configuração do op-amp mostrado na Fig. 6.25b são

$$\frac{v_1 - v_-}{R_1} + C_2 \frac{d}{dt}(v_- - v_2) = 0$$

porém, uma vez que $v_- = 0$ e $i_- = 0$, a equação reduz-se a

$$\frac{v_1}{R_1} = -C_2 \frac{dv_2}{dt}$$

ou

$$v_2(t) = \frac{-1}{R_1 C_2} \int_{-\infty}^t v_1(x) dx$$

$$= \frac{-1}{R_1 C_2} \int_0^t v_1(x) dx + v_2(0) \quad 6.31$$

Caso o capacitor esteja inicialmente descarregado, então $v_2(0) = 0$; logo,

$$v_2(t) = \frac{-1}{R_1 C_2} \int_0^t v_1(x) dx \quad 6.32$$

Assim, a tensão de saída do circuito com op-amp é proporcional à integral da tensão de entrada.

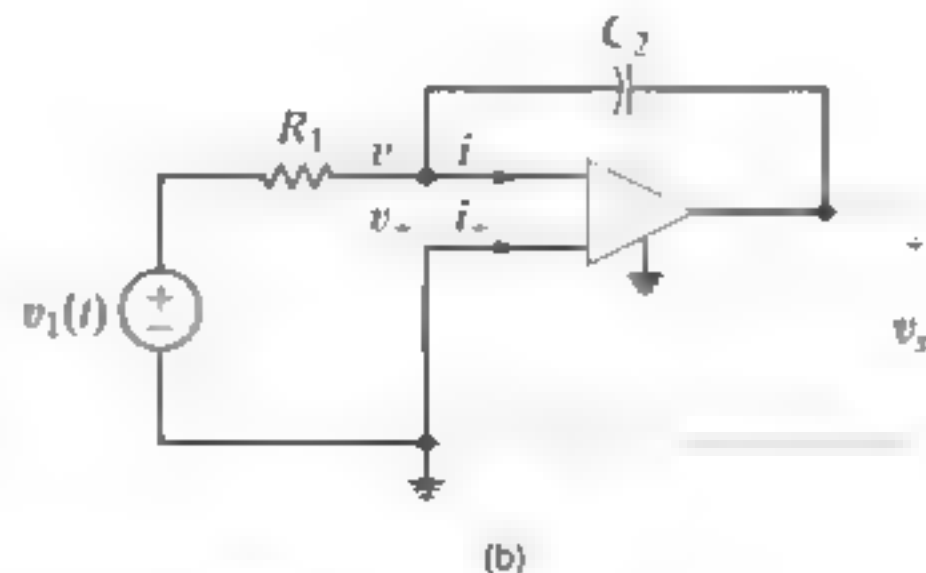


Figura 6.25 Circuitos derivador e integrador com amplificadores operacionais.

EXEMPLO 6.17

A forma de onda mostrada na Fig. 6.26a é aplicada na entrada do circuito derivador mostrado na Fig. 6.25a. Considerando $R_2 = 1 \text{ k}\Omega$ e $C_1 = 2 \text{ }\mu\text{F}$, determine a forma de onda na saída do op-amp.

SOLUÇÃO

Utilizando a Eq. (6.30), obtém-se que a saída no op-amp será

$$v_o(t) = -R_2 C_1 \frac{dv_i(t)}{dt}$$

$$(2)(10^{-3}) \frac{dv_i(t)}{dt}$$

$dv_i(t)/dt = (2)10^3$ para $0 \leq t < 5 \text{ ms}$ e, portanto,

$$v_o(t) = -4 \text{ V} \quad 0 \leq t < 5 \text{ ms}$$

$dv_i(t)/dt = -(2)10^3$ para $5 \leq t < 10 \text{ ms}$ e, portanto,

$$v_o(t) = 4 \text{ V} \quad 5 \leq t < 10 \text{ ms}$$

Assim, a forma de onda na saída do circuito diferenciador é a mostrada na Fig. 6.26b

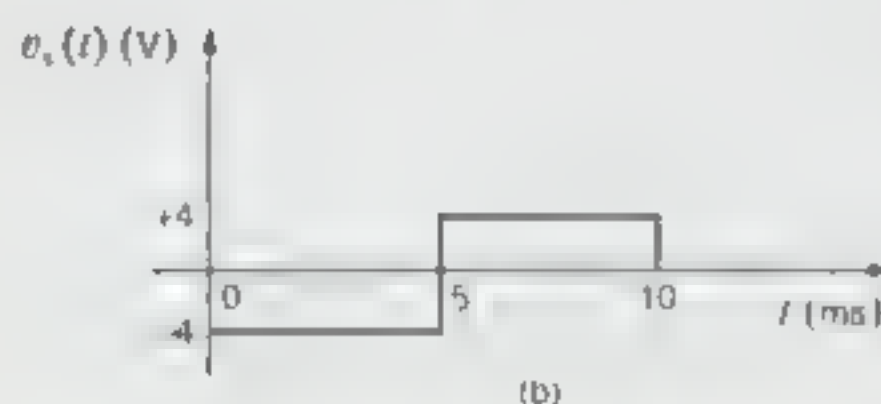
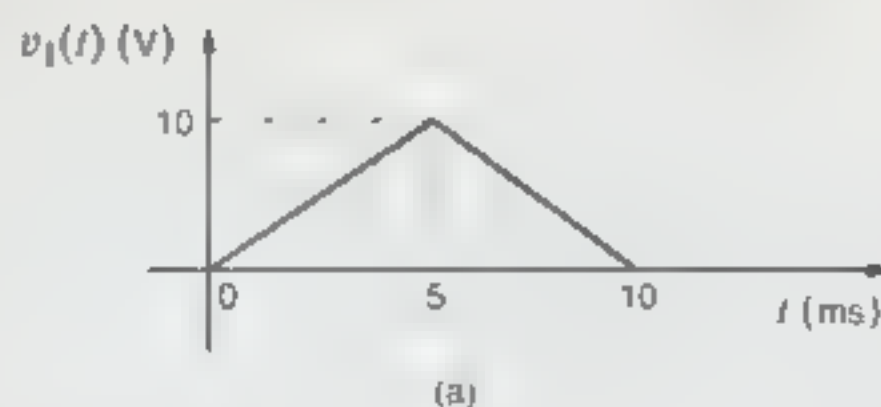


Figura 6.26 Formas de onda na entrada e na saída de um circuito derivador.

EXEMPLO 6.18

Se o circuito integrador mostrado na Fig. 6.25b possui os parâmetros $R_1 = 5 \text{ k}\Omega$ e $C_2 = 0,2 \text{ }\mu\text{F}$, obtenha a forma de onda na saída no op-amp considerando que a forma de onda na entrada é aquela mostrada na Fig. 6.27a e que o capacitor esteja inicialmente descarregado.

SOLUÇÃO

A saída do integrador é expressa por

$$v_o(t) = -\frac{1}{R_1 C_2} \int_0^t v_i(x) dx$$

que, com os parâmetros do circuito, fica

$$v_o(t) = -10^3 \int_0^t v_i(x) dx$$

No intervalo $0 \leq t < 0,1 \text{ s}$, $v_i(t) = 20 \text{ mV}$. Logo,

$$v_o(t) = -10^3(20)(10^{-3})t \quad 0 \leq t < 0,1 \text{ s}$$

$$= -20t$$

Em $t = 0,1 \text{ s}$, $v_o(t) = -2 \text{ V}$. No intervalo entre 0,1 e 0,2 s, o integrador produz uma saída com inclinação positiva de $20t$, partindo de $v_o(0,1) = -2 \text{ V}$ a $v_o(0,2) = 0 \text{ V}$. Essa forma de onda de $t = 0$ a $t = 0,2 \text{ s}$ é repetida no intervalo de $t = 0,2 \text{ s}$ a $t = 0,4 \text{ s}$ e, portanto, a forma de onda na saída é a mostrada na Fig. 6.27b.

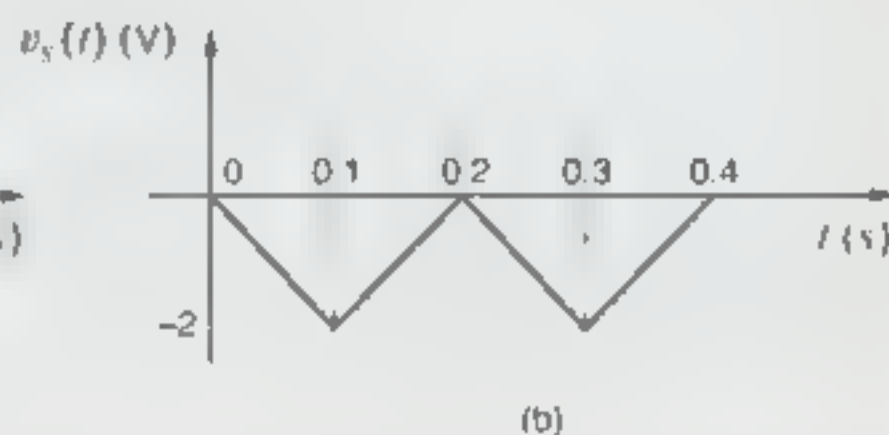
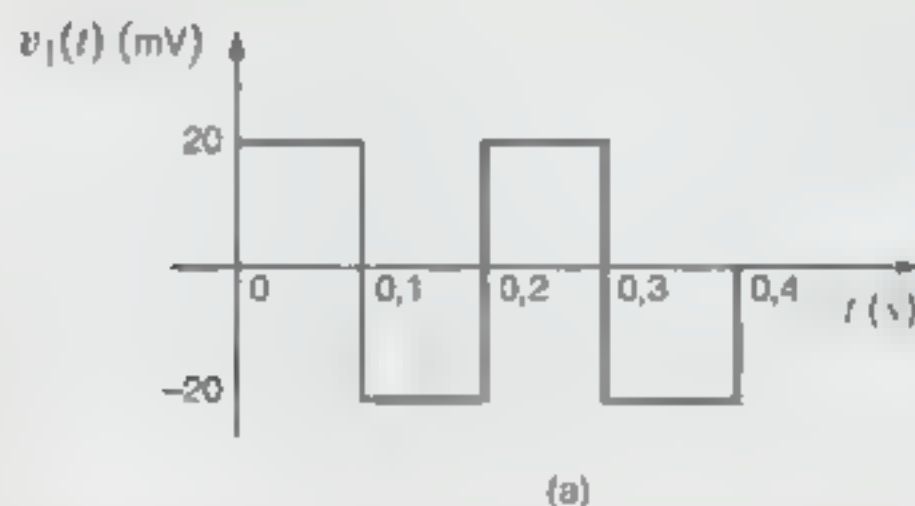


Figura 6.27 Formas de onda na entrada e na saída de um circuito integrador.

Avaliação do Aprendizado

E6.16 A forma de onda mostrada na Fig. E6.16 é aplicada aos terminais de entrada do circuito do op-amp derivador. Determine a forma de onda na saída do derivador considerando que os parâmetros do circuito do op-amp sejam $C = 2 \text{ F}$ e $R_2 = 2 \Omega$.

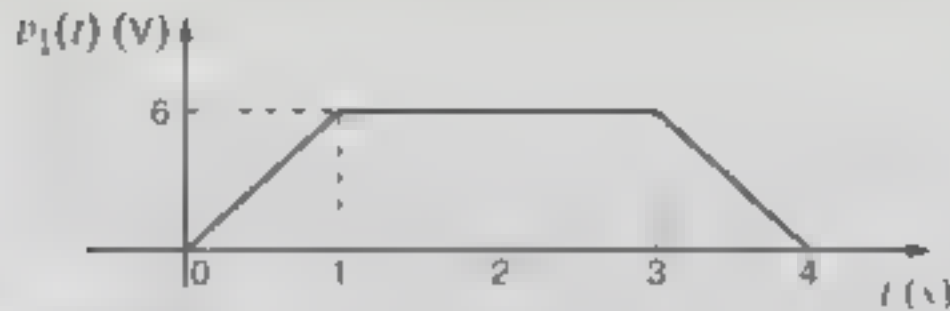
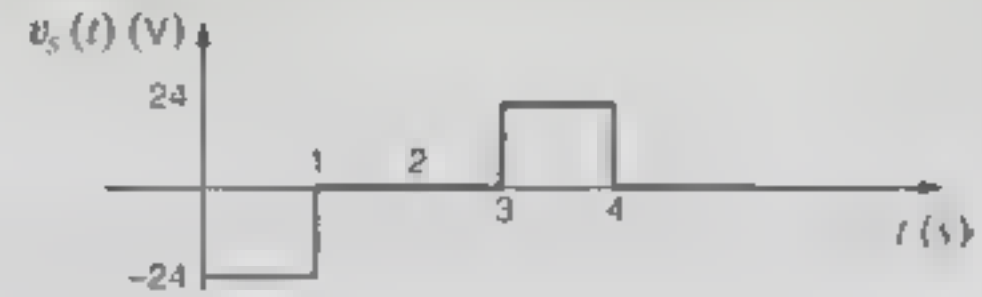


Figura E6.16

RESPOSTA:



6.5 Exemplos de Aplicação

EXEMPLO DE APLICAÇÃO 6.19

Nos circuitos integrados, os condutores conduzindo sinais com altas velocidades estão espaçados, porém são posicionados muito próximos um do outro, conforme ilustrado na micrografia da Fig. 6.28. Como resultado, o sinal de um condutor pode "misteriosamente" aparecer em outro condutor. Esse fenômeno é chamado de *diafonia*. Examina-se agora esse fenômeno e alguns métodos são propostos para reduzi-lo.

SOLUÇÃO

A origem da diafonia é a capacitância. Em particular, ela é uma capacitância indesejada, geralmente chamada de *capaci-*

tância parasita, que ocorre entre condutores muito próximos entre si. A Fig. 6.29 mostra um modelo simples que pode ser utilizado para se investigar a diafonia entre dois condutores longos paralelos. Um sinal é aplicado ao condutor 1. As capacitâncias C_1 e C_2 são as capacitâncias parasitas dos condutores em relação ao terra, enquanto C_{12} é a capacitância entre os condutores. Lembre-se de que o capacitor foi apresentado como duas placas condutoras com pequeno espaçamento entre elas. Ao se deformar essas placas formando condutores finos, certamente a geometria dos condutores será alterada e, assim, o valor da capacitância. Entretanto, seria ainda esperado algum efeito capacitivo entre os condutores.

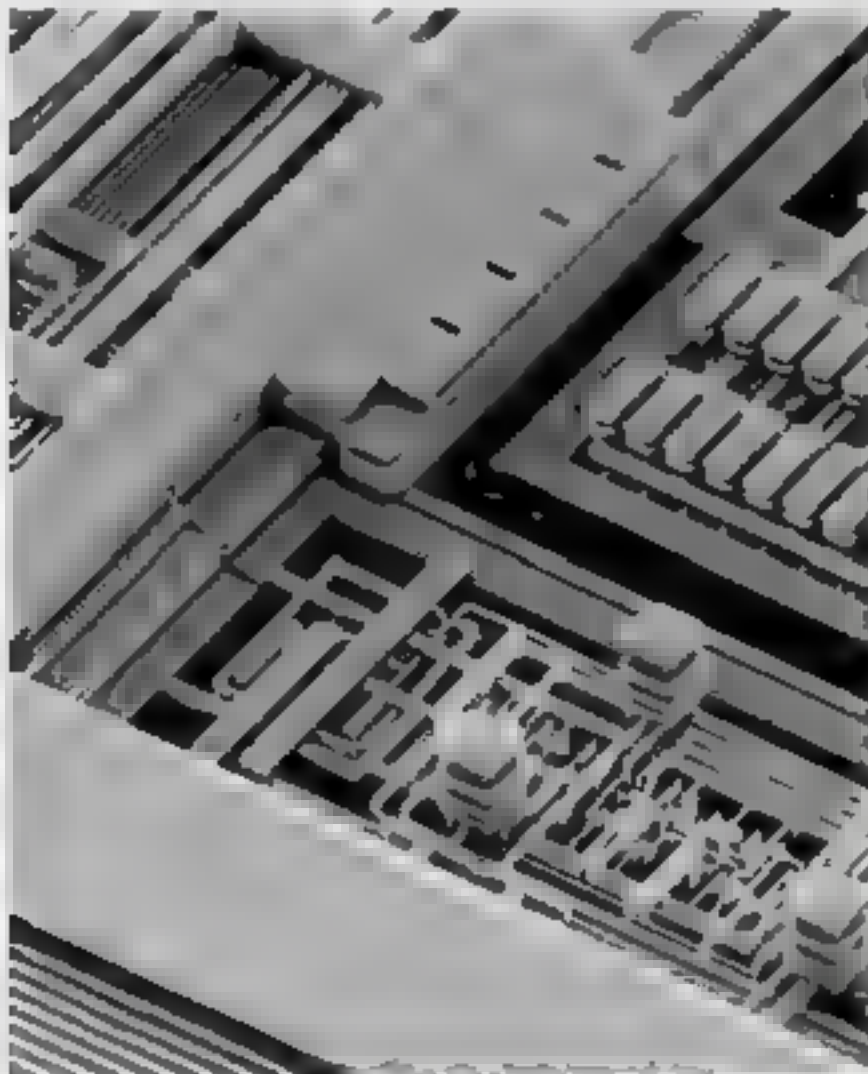


Figura 6.28 Imagem SEM. (Tom Way/Ginger Conly. Cortesia da International Business Machines Corporation. Não é permitido o uso sem autorização.)

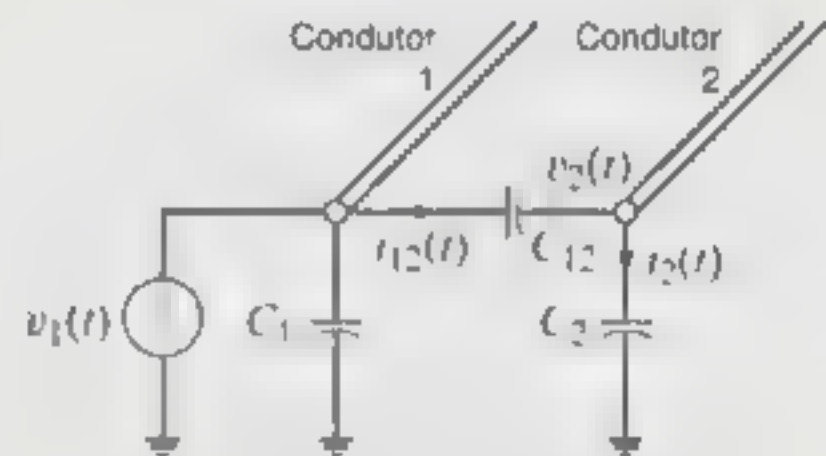


Figura 6.29 Um modelo simples para a investigação da diafonia.

De modo a se quantificar o nível de diafonia, deseja-se saber quanto da tensão do condutor 1 aparecerá no condutor 2. Uma análise nodal realizada no condutor 2 fornece

$$i_{12}(t) = C_{12} \left[\frac{dv_1(t)}{dt} - \frac{dv_2(t)}{dt} \right] = i_2(t) = C_2 \left[\frac{dv_2(t)}{dt} \right]$$

Resolvendo-se para $dv_2(t)/dt$, obtém-se

$$\frac{dv_2(t)}{dt} = \left[\frac{C_{12}}{C_{12} + C_2} \right] \frac{dv_1(t)}{dt}$$

A integração de ambos os lados dessa equação fornece

$$v_2(t) = \left[\frac{C_{12}}{C_{12} + C_2} \right] v_1(t)$$

Observe que a efetividade da “interferência” de $v_1(t)$ no condutor 2 é expressa por uma simples relação de capacitâncias. Naturalmente, a chave para se controlar a diafonia consiste em se assegurar que C_{12} seja bem inferior a C_2 . Como isso será feito? Inicialmente, pode-se fazer C_{12} tão pequena quanto possível aumentando-se o espaçamento entre os condutores. Como segunda opção, pode-se aumentar o capacitor C_2 posicionando-o mais próximo do condutor terra. Infelizmente, a primeira opção demanda maior espaço real, e a segunda diminui o sinal da tensão no condutor 1. Assim, parece que esse quadro caracteriza um dilema típico de engenharia; para melhorar um determinado aspecto, isto é, diminuir a diafonia, deve-se sacrificar outro, o espaço ou a velocidade. Uma forma de adequar o espaço seria inserir uma conexão terra entre os condutores que conduzem o sinal, conforme mostrado na Fig. 6.30. Entretanto, qualquer vantagem obtida com os condutores aterrados deve ser comparada com o aumento do espaço, uma vez que a inserção de condutores terra entre condutores adjacentes praticamente dobra a largura necessária em relação ao sistema sem eles.

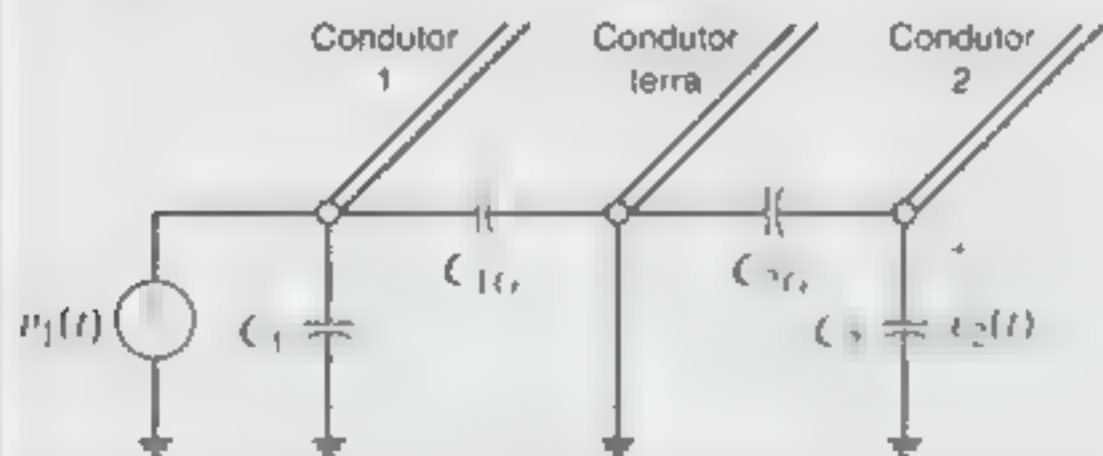


Figura 6.30 Utilização de um condutor terra no modelo de diafonia.

Redesenhando o circuito na Fig. 6.31, percebe-se imediatamente que os condutores 1 e 2 ficam, agora, eletricamente isolados, e não ocorreria qualquer diafonia – uma situação que é altamente improvável. Assim, esse cenário induz à seguinte questão: “O modelo proposto é suficientemente preciso para modelar a diafonia?” Um modelo mais representativo do esquema de redução da diafonia é mostrado na Fig. 6.32, na qual a capacitância entre os condutores de sinais 1 e 2 não é mais ignorada. Novamente, a diafonia é quantificada examinando-se a relação $v_2(t)/v_1(t)$. O emprego da análise nodal ao condutor 2 do circuito mostrado na Fig. 6.33 fornece

$$i_{12}(t) = C_{12} \left[\frac{dv_1(t)}{dt} - \frac{dv_2(t)}{dt} \right] \quad i_2(t) = (C_2 + C_{2G}) \left[\frac{dv_2(t)}{dt} \right]$$

Resolvendo para $dv_2(t)/dt$, obtém-se

$$\frac{dv_2(t)}{dt} = \left[\frac{C_{12}}{C_{12} + C_2 + C_{2G}} \right] \frac{dv_1(t)}{dt}$$

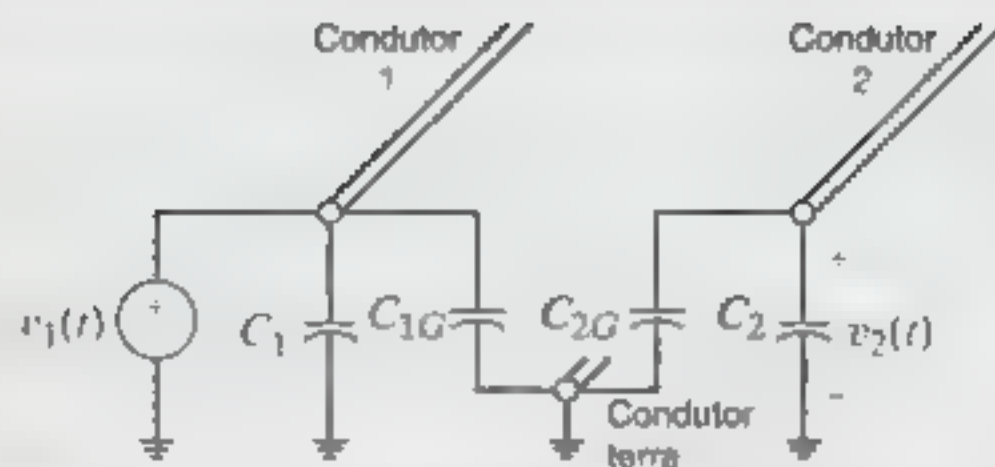


Figura 6.31 Isolamento elétrico utilizando um condutor terra no modelo de diafonia.

A integração de ambos os lados dessa equação fornece

$$v_2(t) = \left[\frac{C_{12}}{C_{12} + C_2 + C_{2G}} \right] v_1(t)$$

Note que esse resultado é bem similar ao obtido anteriormente com a inserção do termo C_{2G} . Dois benefícios dessa configuração reduzem a diafonia. Primeiro, C_{12} é menor porque a inserção do condutor terra afasta os condutores 1 e 2 entre si. Segundo, C_{2G} aumenta o denominador da equação de diafonia. Admitindo $C_{2G} = C_2$ e que a capacitância C_{12} tenha sido reduzida à metade, em função do espaçamento extra, pode-se esperar que a diafonia seja reduzida de um fator de aproximadamente 4.

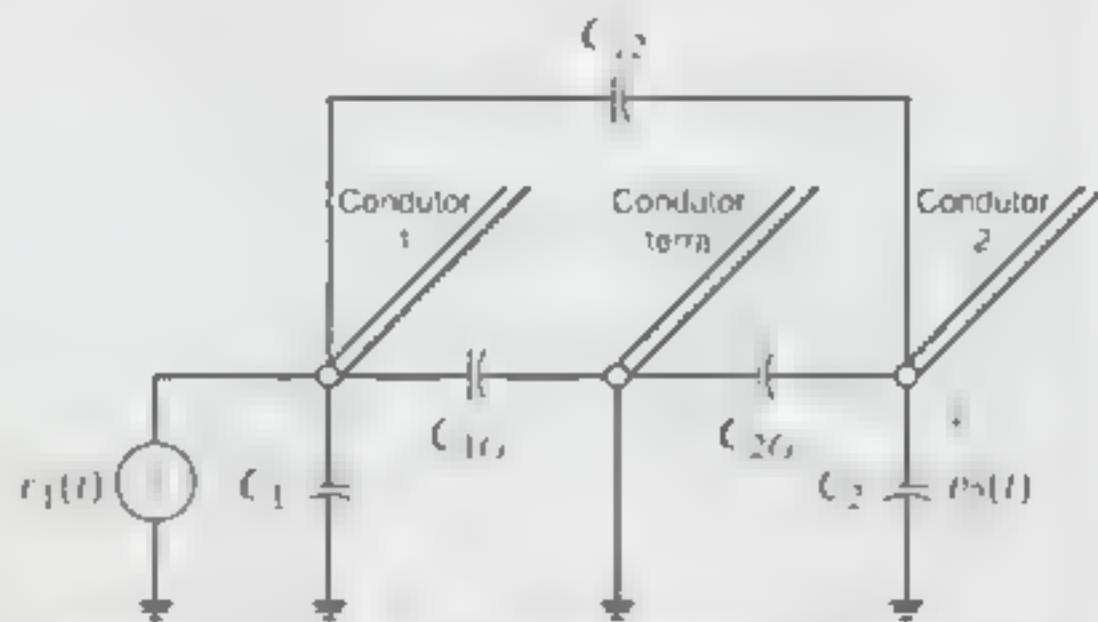


Figura 6.32 Um modelo mais representativo do fenômeno de diafonia.

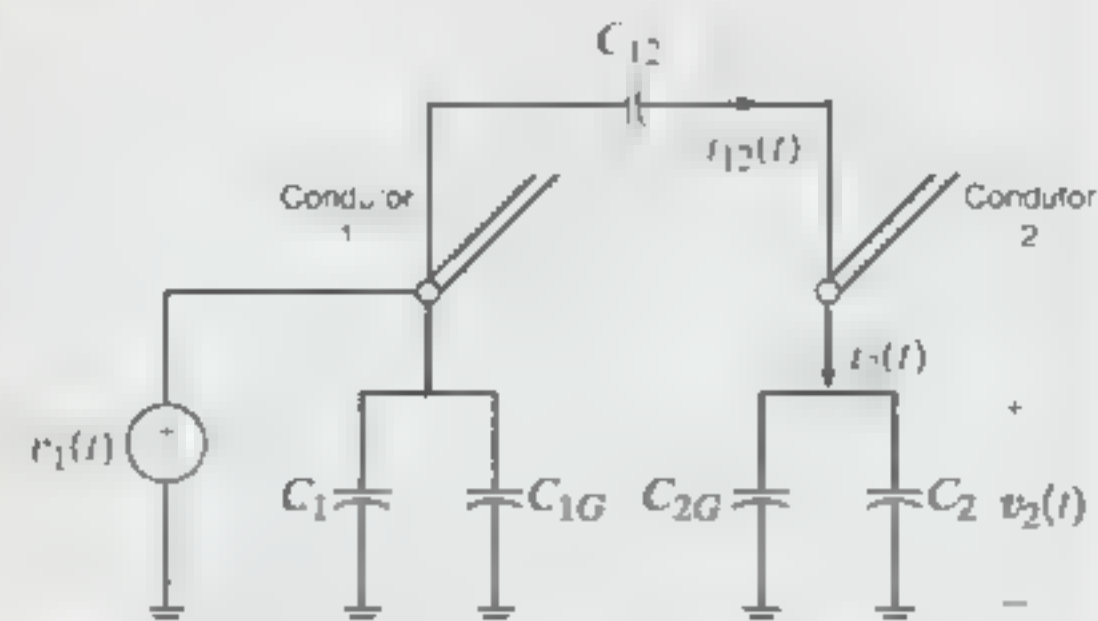


Figura 6.33 Versão redesenhada do modelo mais representativo do fenômeno de diafonia.

EXEMPLO DE APLICAÇÃO 6.20

Um excelente exemplo de operação do capacitor é a memória interna de um microcomputador. Essa memória, chamada de memória de acesso aleatório dinâmico (DRAM — *Dynamic Random Access Memory*), contém cerca de quatro bilhões de áreas de armazenamento de dados chamadas de células. Há uma expectativa de que esse número praticamente dobre a cada dois anos para as próximas duas décadas. Pode-se examinar com algum detalhe a operação de uma célula DRAM.

SOLUÇÃO

A Fig. 6.34a mostra um modelo simples para uma célula DRAM. Os dados são armazenados na célula capacitiva com o formato de verdadeiro/falso (ou 1/0), na qual uma grande tensão no capacitor representa uma condição verdadeira e uma baixa tensão representa uma condição falsa. A chave do circuito fecha para permitir o acesso do processador à célula DRAM. A fonte de corrente I_{fuga} representa uma corrente não intencional ou parasita, que modela a fuga de carga do capacitor. Outro modelo de componente parasita é a capacitância C_s , que representa a capacitância dos condutores conectados do lado da saída da célula. Tanto I_{fuga} quanto C_s apresentam grandes influências no desempenho e no projeto da célula DRAM.

Considere o armazenamento de uma condição verdadeira na célula. Uma alta tensão de 3,0 V é aplicada ao nó E/S e a chave é fechada, causando uma tensão no capacitor C_{cel} que rapidamente chega a 3,0 V. A chave então é aberta e os dados são armazenados. Durante a operação de armazenamento da carga, a energia e o número de elétrons, n , utilizados são

$$Q = CV = (50 \times 10^{-15})(3) = 150 \text{ fC}$$

$$W = \frac{1}{2} CV^2 = (0,5)(50 \times 10^{-15})(3^2) = 225 \text{ fJ}$$

$$n = Q/q = 150 \times 10^{-15} / (1,6 \times 10^{-19}) = 937.500 \text{ elétrons}$$

Uma vez escritos os dados, a chave é aberta e o capacitor começa a descarregar através da corrente I_{fuga} . Uma medida da qualidade da célula DRAM é o tempo necessário para a tensão associada aos dados cair para a metade, de 3,0 V para

1,5 V. Pode-se chamar esse tempo de t_M . Para o capacitor, sabe-se que

$$v_{\text{cel}}(t) = \frac{1}{C_{\text{cel}}} \int i_{\text{cel}} dt \text{ V}$$

em que, pela Fig. 6.34b, $i_{\text{cel}}(t) = -I_{\text{fuga}}$. Resolvendo-se a integral, tem-se

$$v_{\text{cel}}(t) = \frac{1}{C_{\text{cel}}} \int (-I_{\text{fuga}}) dt = -\frac{I_{\text{fuga}}}{C_{\text{cel}}} t + K$$

Sabe-se que em $t = 0$, $v_{\text{cel}} = 3 \text{ V}$. Assim, $K = 3$ e a tensão na célula pode ser expressa por

$$v_{\text{cel}}(t) = 3 - \frac{I_{\text{fuga}}}{C_{\text{cel}}} t \text{ V} \quad 6.33$$

Substituindo-se $t = t_M$ e $v_{\text{cel}}(t_M) = 1,5 \text{ V}$ na Eq. 6.33 e resolvendo-se para t_M tem-se que $t_M = 15 \text{ ms}$. Assim, os dados da célula são transmitidos em apenas alguns milissegundos! A solução para este problema é reescrever os dados antes de eles desaparecerem. Essa técnica, chamada de *refresh* (regeneração), é extremamente útil para todas as células DRAM que utilizam células transistorizadas.

Para verificar o efeito de C_s , considere a leitura de uma condição verdadeira — capacitor totalmente carregado ($v_{\text{cel}} = 3,0 \text{ V}$). A linha E/S é geralmente pré-carregada com metade da tensão dos dados. Nesse exemplo, seria 1,5 V, conforme visto na Fig. 6.34c. (Para isolar o efeito de C_s , deve-se remover I_{fuga} .) Em seguida, a chave é fechada. O que ocorre a seguir pode ser melhor compreendido como uma conservação da carga. Imediatamente antes do fechamento da chave, a carga total armazenada no circuito é

$$Q_T = Q_s + Q_{\text{cel}} = V_{\text{E/S}} C_s + V_{\text{cel}} C_{\text{cel}}$$

$$Q_T = (1,5)(450 \times 10^{-15}) + (3)(50 \times 10^{-15}) = 825 \text{ fC}$$

Quando a chave é fechada, as tensões nos capacitores são idênticas (pode-se chamá-la de V_s) e a carga total permanece inalterada:

$$Q_T = 825 \text{ fC} = V_s C_s + V_s C_{\text{cel}} = V_s (450 \times 10^{-15} + 50 \times 10^{-15})$$

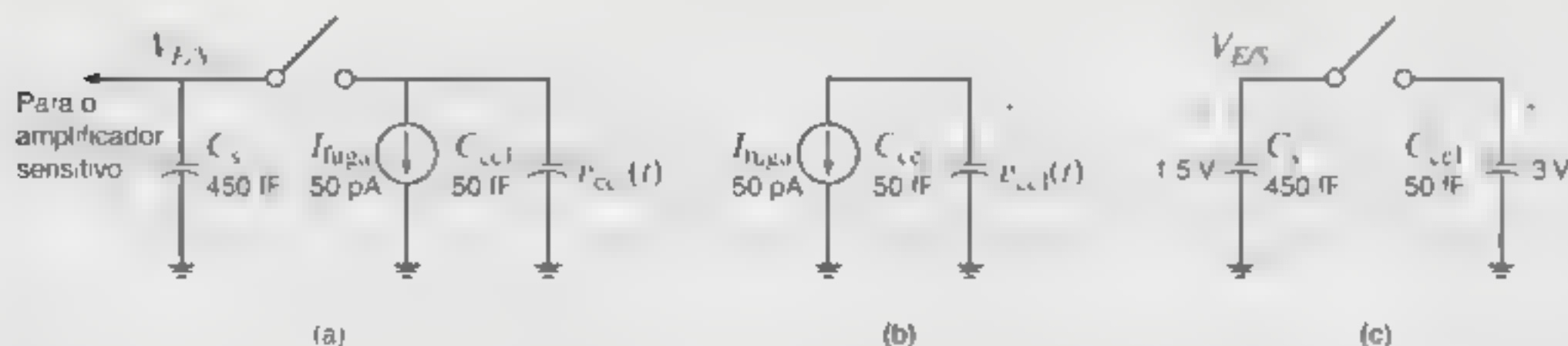


Figura 6.34 Modelo de um circuito simples mostrando (a) a célula de memória DRAM, (b) o efeito de fuga da carga do capacitor da célula, e (c) as condições da célula no início da operação de leitura.

e

$$V_x = 1,65 \text{ V}$$

Assim, a variação na tensão em $V_{E/S}$ durante a operação de leitura é de apenas 0,15 V. Um amplificador bastante sensível é necessário para detectar rapidamente essa pequena variação. Nas células DRAMs, esses amplificadores são chamados de *amplificadores sensíveis*. Como pode a tensão v_{cs} variar instantaneamente quando a chave é fechada? Ela não pode. Em uma célula DRAM real, um transistor, que possui uma pequena resistência equivalente, atua como chave. A constante de tempo resultante do circuito RC é muito pequena, indicando um circuito muito rápido. Lembre-se de que a velocidade da célula

não está sendo analisada — apenas o valor da tensão final, V_x . Da mesma forma que a perda de potência na chave é pequena se comparada com a energia do capacitor, pode-se tranquilamente desprezar a resistência da chave. A propósito, se uma condição falsa (zero volt) fosse lida pela célula, então, V_x cairia de seu valor de pré-carga de 1,5 V para 1,35 V — uma variação negativa de 0,15 V. Essa variação simétrica da tensão é a razão do pré-carregamento do nó E/S com a metade da tensão dos dados. Reveja os efeitos de I_{leak} e C_s . Você pode verificar que sua eliminação simplifica bastante a necessidade de regeneração e melhora a oscilação da tensão no nó E/S quando da leitura dos dados. Os projetistas das células DRAM ganharam uma experiência muito boa tentando fazer exatamente isso.

6.6 Exemplos de Projeto

EXEMPLO DE PROJETO 6.21

Certamente, todos nós já experimentamos uma perda de energia elétrica em nosso escritório ou em nossa residência. Quando isso ocorre, mesmo que apenas por alguns segundos, torna-se necessário o restabelecimento de todos os relógios digitais. Vamos admitir que o *hardware* digital interno de um desses relógios requer uma corrente de 1 mA a um nível de tensão típico de 3,0 V, porém, o *hardware* funcionará de forma apropriada a uma tensão inferior, de 2,4 V. Considerando essas hipóteses, deseja-se projetar um circuito que “mantenha” o nível de tensão durante um curto período de tempo, por exemplo, 1 segundo.

SOLUÇÃO

Sabe-se que a tensão entre os terminais de um capacitor não pode variar instantaneamente e, portanto, sua utilização parece ser viável nesta situação. Assim, modela-se esse problema utilizando o circuito mostrado na Fig. 6.35, em que o capacitor é empregado para manter a tensão e a fonte de 1 mA representa a carga de 1 mA.

Conforme indicado pelo próprio circuito, quando ocorrer uma falha no fornecimento de energia, o capacitor deverá prover toda a energia para o *hardware* digital. A carga, represen-

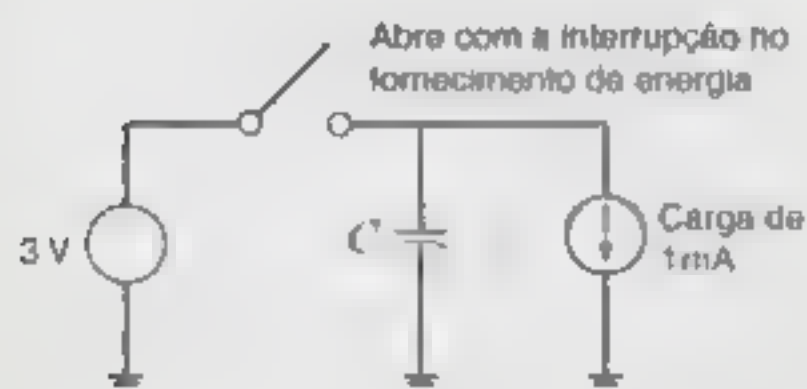


Figura 6.35 Um modelo simples de circuito compensador de uma interrupção no fornecimento de energia.

tada pela fonte de corrente, descarregará o capacitor linearmente, de acordo com a expressão

$$v(t) = 3,0 - \frac{1}{C} \int i(t) dt$$

Após 1 segundo, $v(t)$ deverá ser de no mínimo 2,4 V, isto é, a tensão mínima de funcionamento e, portanto,

$$2,4 = 3,0 - \frac{1}{C} \int_0^1 (0,001) dt$$

A solução dessa equação para a capacitância C fornece

$$C = 1670 \mu\text{F}$$

Desta forma, com base nos valores dos capacitores padronizados apresentados na Tabela 6.1, a conexão de três capacitores de 560 μF em paralelo produzirá 1680 μF . Embora três capacitores de 560 μF em paralelo satisfaçam os requisitos de projeto, esta solução pode requerer mais espaço do que o disponível. Uma solução alternativa envolve a utilização de “capacitores de dupla camada”, ou os que são conhecidos como Supercapacitores (*Supercaps*). Uma pesquisa na Internet sobre este tópico indicará a empresa com o nome de Elna America, Inc. como a maior fornecedora de capacitores de dupla camada. Uma investigação da relação de seus produtos indica que a série DCK de pequenos supercapacitores na forma de moedas é uma possível alternativa nessa situação. Em particular, o supercapacitor DCK3R3224 possui uma capacitância nominal de 220 mF a 3,3 V com um diâmetro de 7 mm, ou cerca de 1/4 de polegada, e uma espessura de 2,1 mm. Como necessita-se de apenas um desses componentes, essa é uma solução muito compacta do ponto de vista de espaço. Entretanto, ainda existe outro fator de importância, que é o custo. Para minimizar o custo, ainda pode ser necessário pesquisar por outras soluções alternativas.

EXEMPLO DE PROJETO 6.22

Seja o projeto de um circuito com op-amp para o qual a relação entre a tensão de saída e as duas tensões de entrada é

$$v_o(t) = 5 \int v_1(t) dt - 2v_2(t)$$

SOLUÇÃO

De modo a satisfazer a equação da tensão de saída, duas entradas devem ser adicionadas, uma das quais deverá ser integrada. Assim, a equação de projeto exige um integrador e um somador, conforme mostrado na Fig. 6.36.

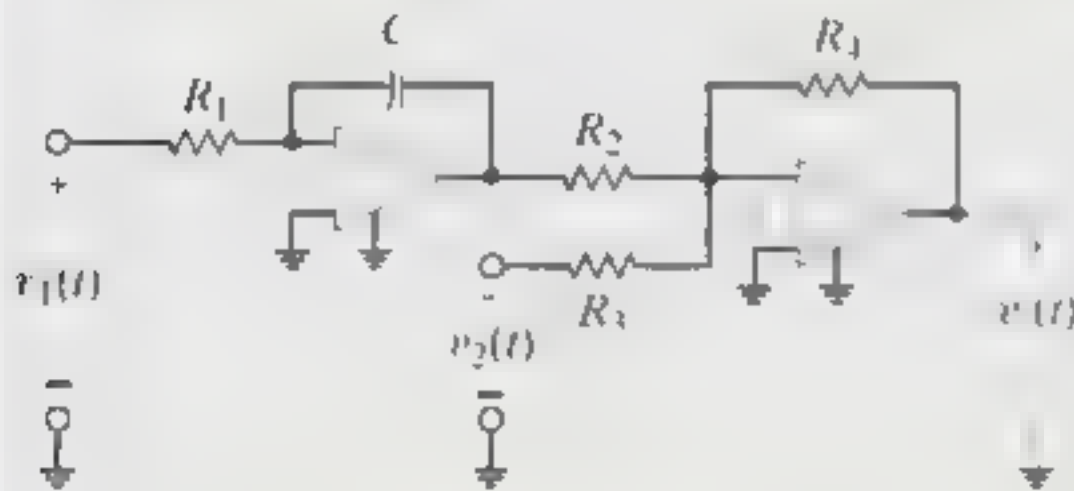


Figura 6.36 Circuito com op-amp estabelecendo um integrador e um somador.

Utilizando as equações conhecidas do integrador e do somador, pode-se expressar a tensão de saída como

$$\begin{aligned} v_o(t) &= -v_1(t) \left[\frac{R_4}{R_3} \right] - \left[\frac{R_4}{R_2} \right] \left\{ \frac{1}{RC} \int v_1(t) dt \right\} \\ &= \frac{R_4}{R_1 R_3 C} \int v_1(t) dt - \left[\frac{R_4}{R_2} \right] v_2(t) \end{aligned}$$

Ao se comparar agora essa equação ao requisito de projeto, verifica-se que as seguintes igualdades devem ser atendidas:

$$\frac{R_4}{R_1 R_3 C} = 5 \quad \frac{R_4}{R_2} = 2$$

Note que o problema se apresenta com cinco variáveis e duas equações de restrição. Assim, há uma certa flexibilidade para a escolha dos componentes. Inicialmente, seleciona-se $C = 2 \mu\text{F}$, um valor que não é nem muito grande, nem muito pequeno. Selecionando-se, arbitrariamente, $R_4 = 20 \text{ k}\Omega$, então R_3 deverá valer $10 \text{ k}\Omega$ e, além disso,

$$R_1 R_2 = 2 \times 10^8$$

Caso a terceira escolha seja $R_1 = 100 \text{ k}\Omega$, então, $R_2 = 20 \text{ k}\Omega$. Ao se empregar op-amps padronizados com fontes de tensão de aproximadamente $\pm 10 \text{ V}$, então, todas as correntes serão menores que 1 mA , o que representa valores razoáveis.

RESUMO

- As relações (duais) mais importantes para os capacitores e indutores são as seguintes:

$$q = Cv$$

$$i(t) = C \frac{dv(t)}{dt}$$

$$v(t) = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i(x) dx$$

$$p(t) = Cv(t) \frac{dv(t)}{dt}$$

$$w_C(t) = \frac{1}{2} Cv^2(t)$$

$$i(t) = L \frac{di(t)}{dt}$$

$$v(t) = \frac{1}{L} \int_{-\infty}^t v(x) dx$$

$$p(t) = Li(t) \frac{di(t)}{dt}$$

$$w_L(t) = \frac{1}{2} Li^2(t)$$

- A convenção passiva de sinais é utilizada com os capacitores e indutores.
- No regime estacionário CC, um capacitor se comporta como um circuito aberto e um indutor como um curto-circuito.

- A tensão entre os terminais de um capacitor e a corrente que flui por um indutor não podem sofrer variações instantâneas.
- Uma resistência de fuga estará sempre presente nos capacitores e indutores reais.
- Quando os capacitores são interconectados, sua capacitância equivalente é determinada como se segue: os capacitores em série se combinam como os resistores em paralelo e os capacitores em paralelo se combinam como os resistores em série.
- Quando os indutores são interconectados, sua indutância equivalente é determinada como se segue: os indutores em série se combinam como os resistores em série e os indutores em paralelo se combinam como os resistores em paralelo.
- Os circuitos RC com amplificadores operacionais podem ser utilizados para derivar ou integrar um sinal elétrico.

PROBLEMAS

- 6.1 Um capacitor descarregado cuja capacitância é de $100 \mu\text{F}$ é carregado por uma corrente constante de 1 mA . Determine a tensão entre os terminais desse capacitor após 4 s .
- 6.2 Um capacitor de $12 \mu\text{F}$ possui uma carga acumulada de $480 \mu\text{C}$. Determine a tensão entre os terminais desse capacitor.

6.3 Um capacitor possui uma carga acumulada de $600\ \mu\text{C}$ com $5\ \text{V}$ de tensão entre seus terminais. Qual é o valor de sua capacitância?

6.4 Um capacitor de $25\ \mu\text{F}$ inicialmente carregado com $-10\ \text{V}$ é carregado por uma corrente constante de $2,5\ \mu\text{A}$. Determine a tensão entre seus terminais após $2,5$ minutos.

6.5 A energia armazenada em um capacitor de $25\ \mu\text{F}$ é expressa por $w(t) = 12 \sin^2 377t$. Determine a corrente nesse capacitor.

6.6 Um capacitor é carregado por uma corrente constante de $2\ \text{mA}$, o que resulta em um aumento de $12\ \text{V}$ na tensão em um intervalo de tempo de $10\ \text{s}$. Qual é o valor da capacitância?

6.7 A corrente em um capacitor de $100\ \mu\text{F}$ é mostrada na Fig. P6.7. Determine a forma de onda da tensão entre seus terminais considerando que inicialmente ele esteja descarregado.

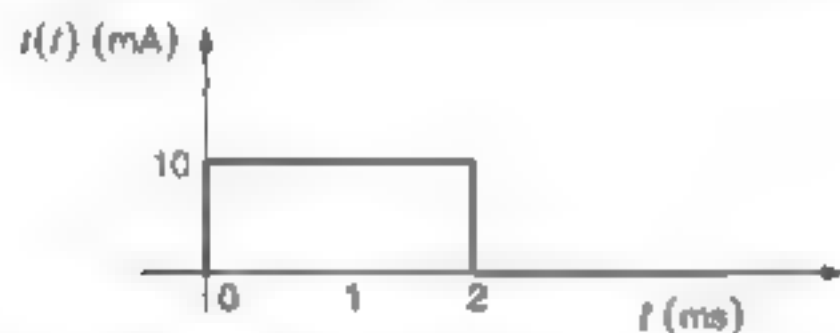


Figura P6.7

6.8 A curva da tensão entre os terminais de um capacitor de $10\ \mu\text{F}$ é mostrada na Fig. P6.8. Obtenha a forma de onda para a corrente nesse capacitor.

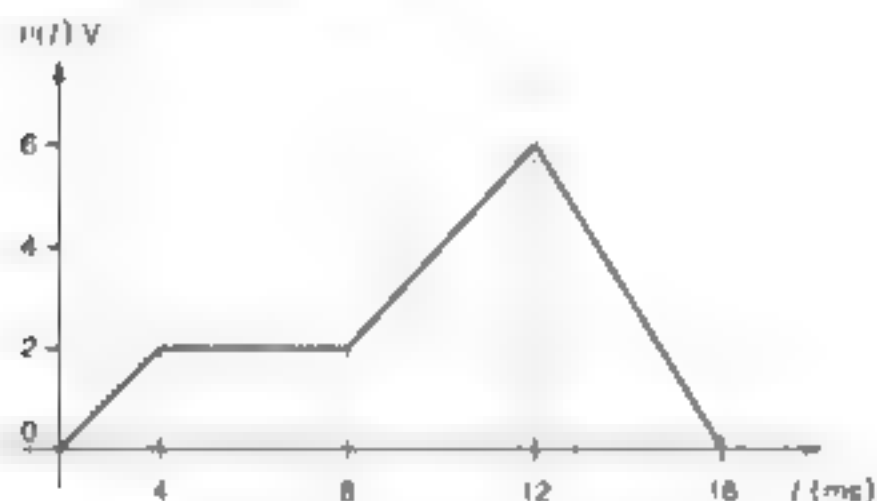


Figura P6.8

6.9 A curva da tensão entre os terminais de um capacitor de $20\ \mu\text{F}$ é mostrada na Fig. P6.9. Obtenha a forma de onda para a corrente nesse capacitor.

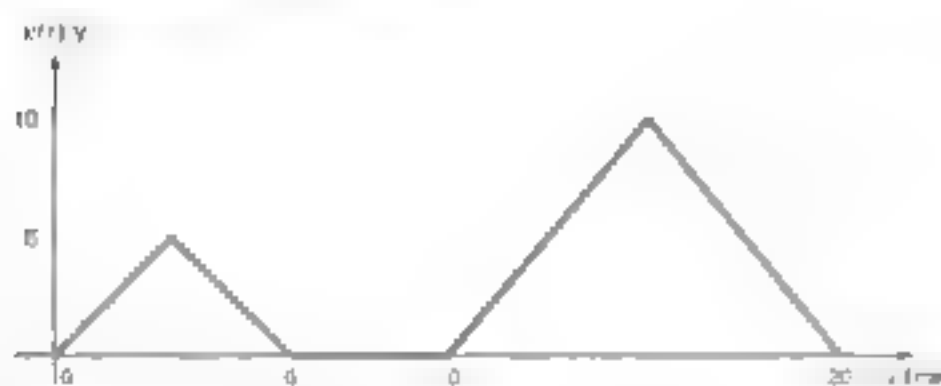


Figura P6.9

6.10 Obtenha a forma de onda da corrente de um capacitor de $50\ \mu\text{F}$ quando a tensão imposta entre seus terminais é a mostrada na Fig. P6.10.

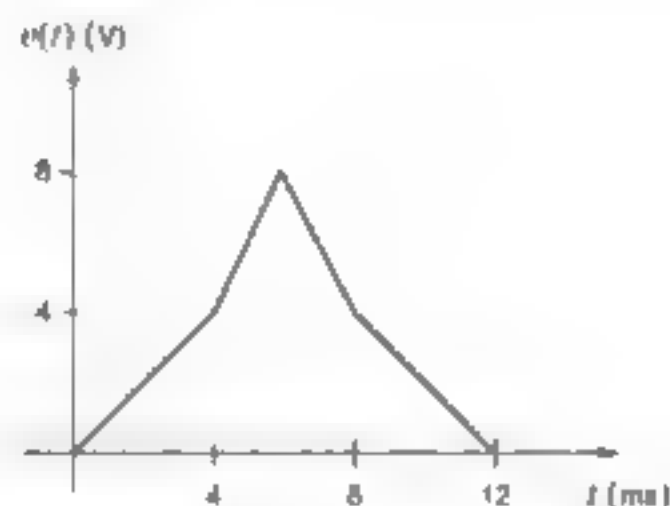


Figura P6.10

6.11 Se a forma de onda da tensão entre os terminais de um capacitor de $100\ \mu\text{F}$ é a mostrada na Fig. P6.11, obtenha a forma de onda da corrente.

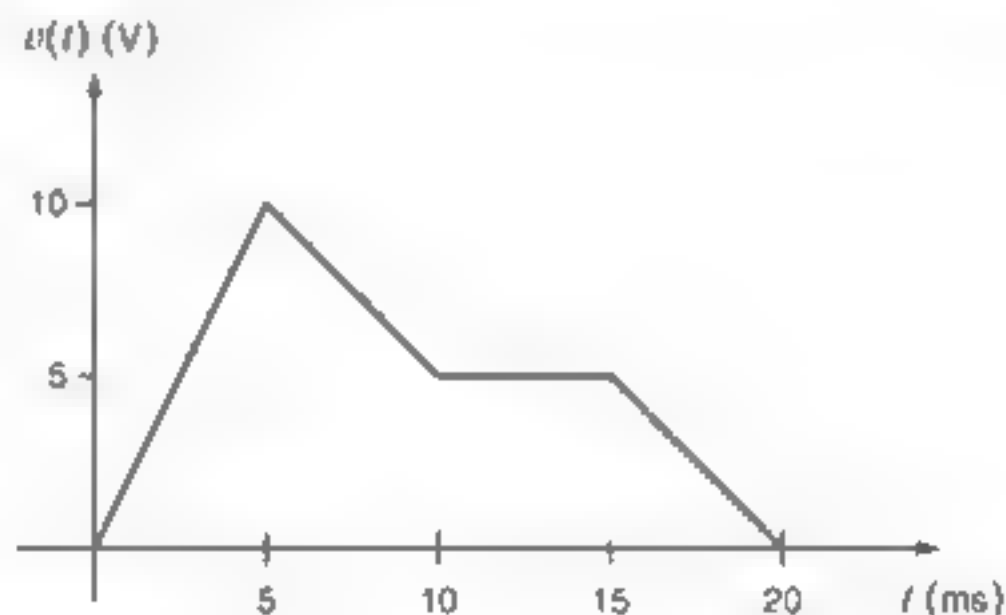


Figura P6.11

6.12 A forma de onda da tensão entre os terminais de um capacitor de $100\ \mu\text{F}$ é a mostrada na Fig. P6.12. Obtenha a forma de onda da corrente.

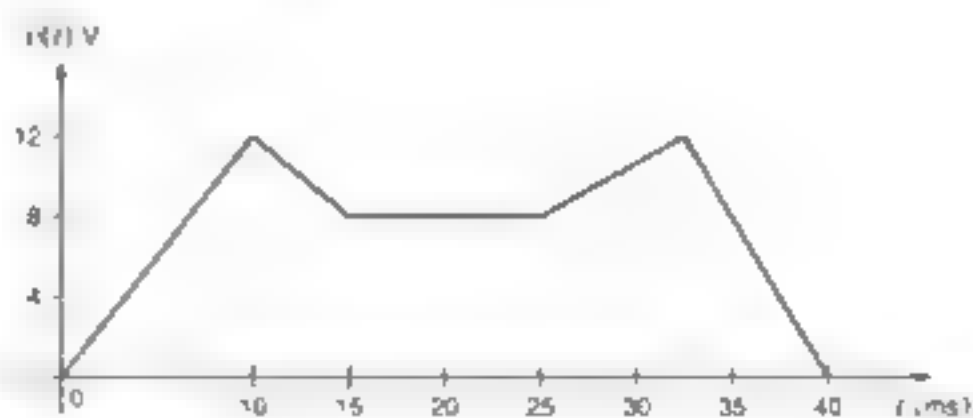


Figura P6.12

- 6.13** A corrente que flui por um capacitor de $5 \mu\text{F}$ tem o comportamento apresentado na Fig. P6.13. Determine a energia armazenada no capacitor em $t = 1,4 \text{ ms}$, $t = 3,3 \text{ ms}$, $t = 4,3 \text{ ms}$, $t = 6,7 \text{ ms}$ e $t = 8,5 \text{ ms}$.

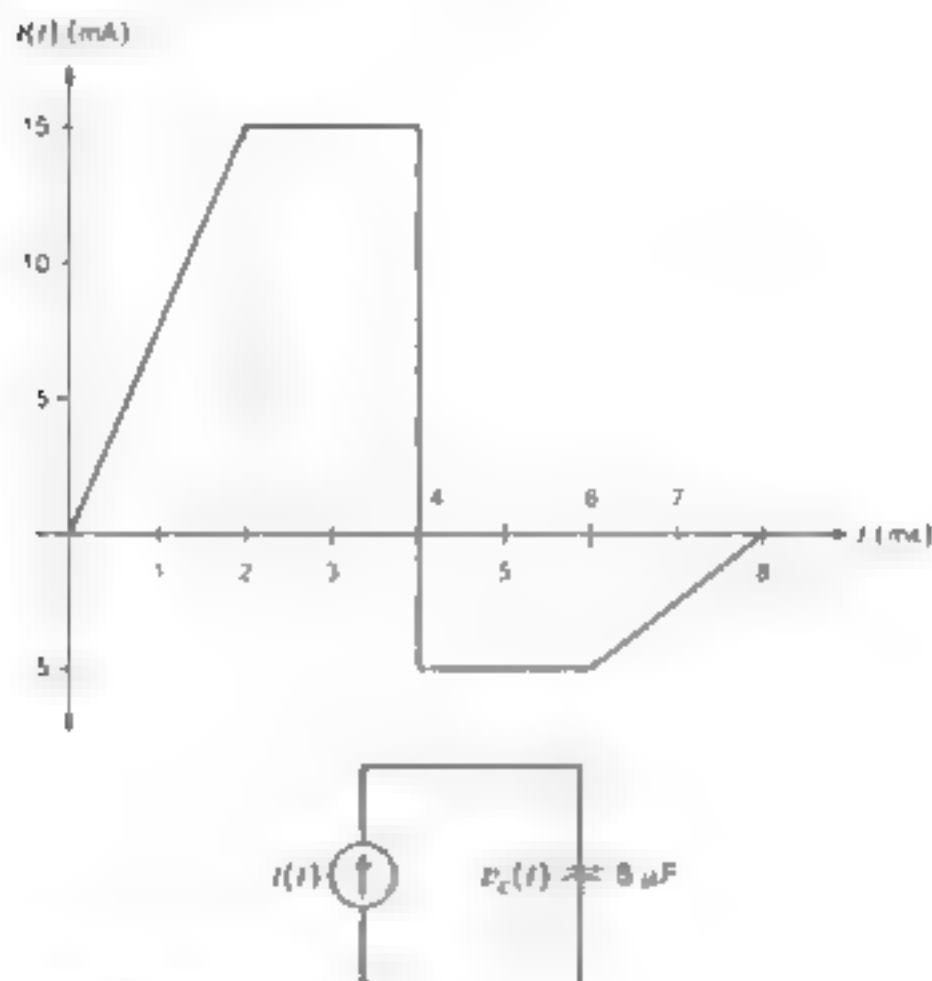


Figura P6.13

- 6.14** A Fig. P6.14 mostra o comportamento da tensão entre os terminais de um capacitor de $25 \mu\text{F}$. Obtenha a forma de onda da corrente nesse capacitor.

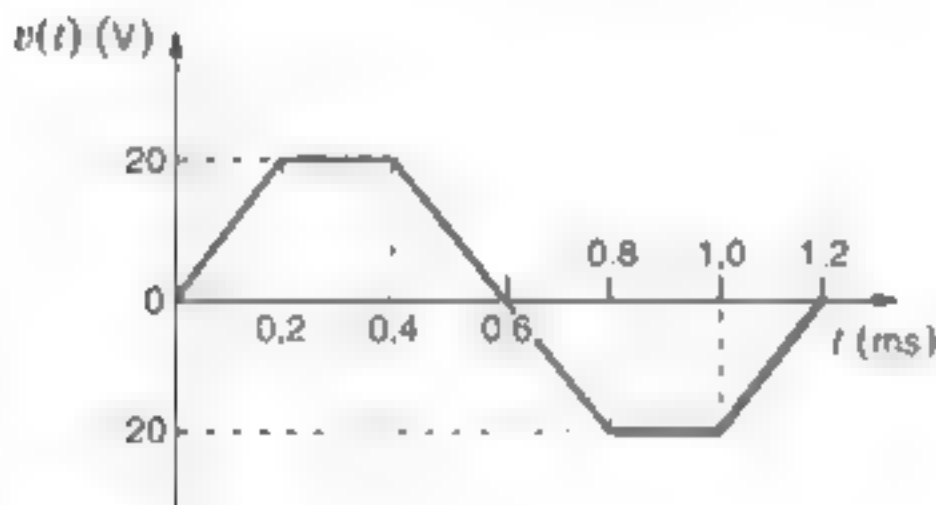


Figura P6.14

- 6.15** A tensão entre os terminais de um capacitor de 2 F possui a forma de onda mostrada na Fig. P6.15. Obtenha a forma de onda da corrente nesse capacitor.

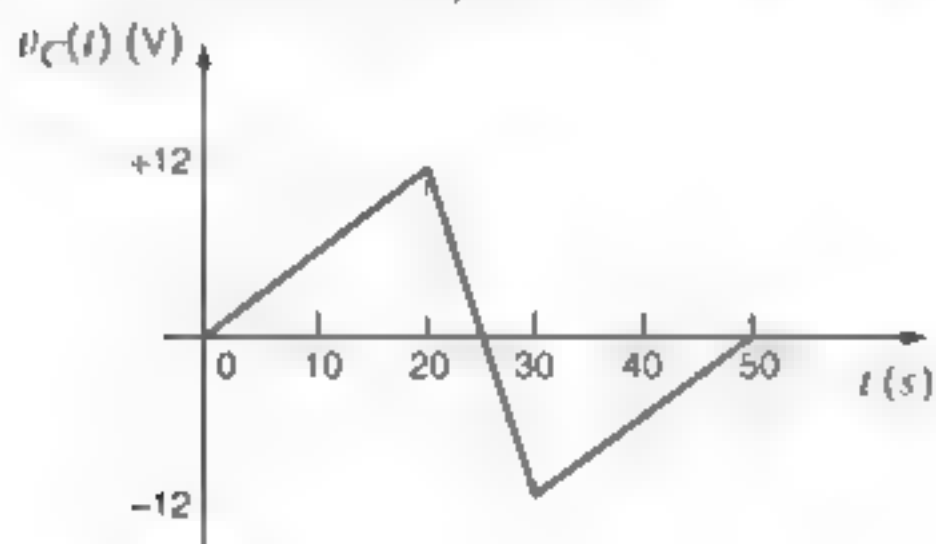


Figura P6.15

- 6.16** A tensão entre os terminais de um capacitor de $2 \mu\text{F}$ possui a forma de onda mostrada na Fig. P6.16. Obtenha a forma de onda da corrente nesse capacitor.

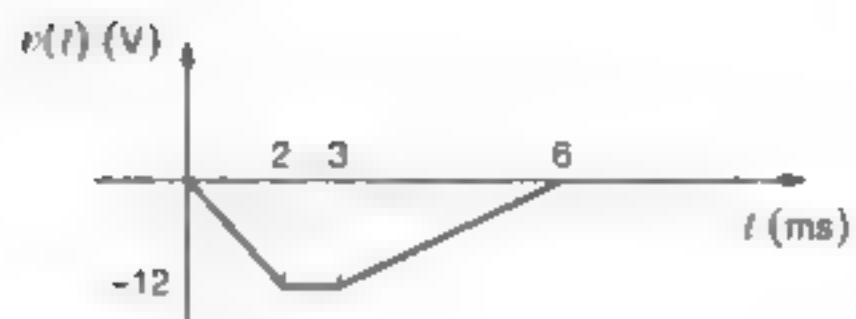


Figura P6.16

- 6.17** Faça um gráfico mostrando a forma de onda da corrente que flui por um capacitor de $24 \mu\text{F}$ quando a tensão entre seus terminais possui a forma descrita pela Fig. P6.17.

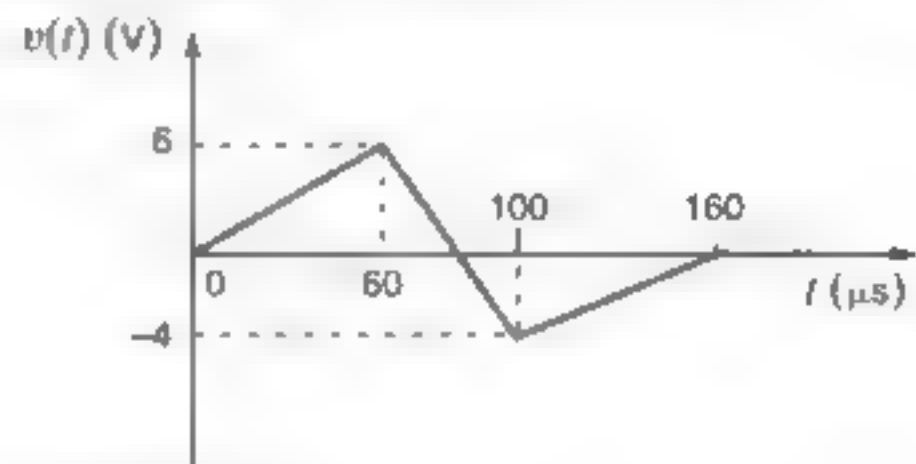


Figura P6.17

- 6.18** A tensão entre os terminais de um capacitor de $10 \mu\text{F}$ pode ser representada pela forma de onda mostrada na Fig. P6.18. Faça um gráfico mostrando a forma de onda associada à corrente que flui nesse capacitor.

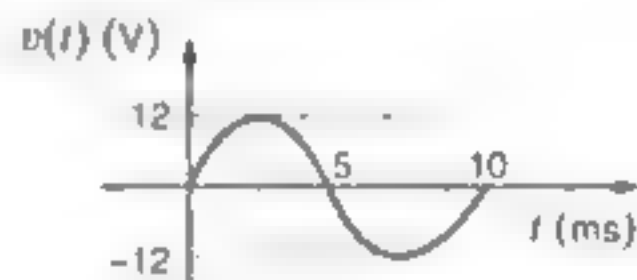


Figura P6.18

- 6.19** A forma de onda da corrente em um capacitor de $50 \mu\text{F}$ é a mostrada na Fig. P6.19. Determine a forma de onda da tensão entre os terminais desse capacitor.

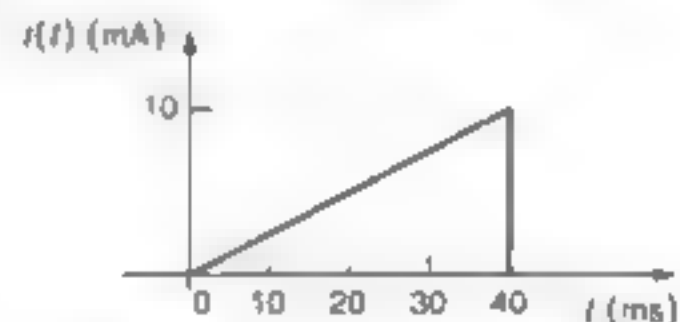


Figura P6.19

- 6.20** A forma de onda da corrente em um capacitor de $50 \mu\text{F}$ inicialmente descarregado é a mostrada na Fig. P6.20. Determine a forma de onda da tensão atuante entre os terminais desse capacitor.

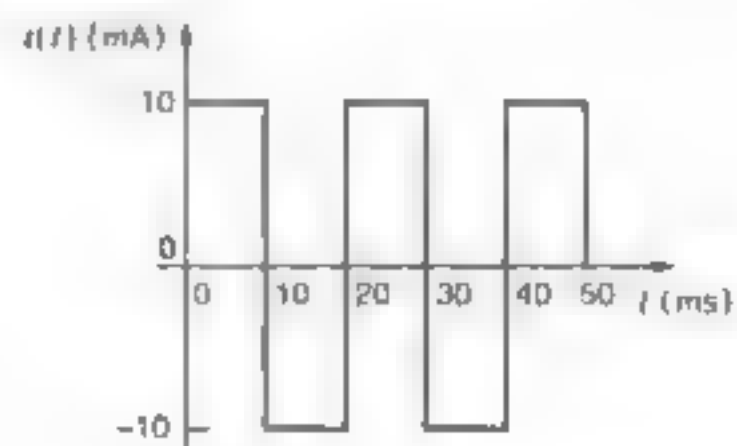


Figura P6.20

- 6.21** A forma de onda da tensão entre os terminais do capacitor de $100\ \mu\text{F}$ mostrado na Fig. P6.21a é apresentada na Fig. P6.21b. Determine as seguintes grandezas: (a) a energia armazenada no capacitor em $t = 2,5\ \text{ms}$, (b) a energia armazenada no capacitor em $t = 5,5\ \text{ms}$, (c) a corrente $i_c(t)$ em $t = 1,5\ \text{ms}$, (d) a corrente $i_c(t)$ em $t = 4,75\ \text{ms}$ e (e) a corrente $i_c(t)$ em $t = 7,5\ \text{ms}$.

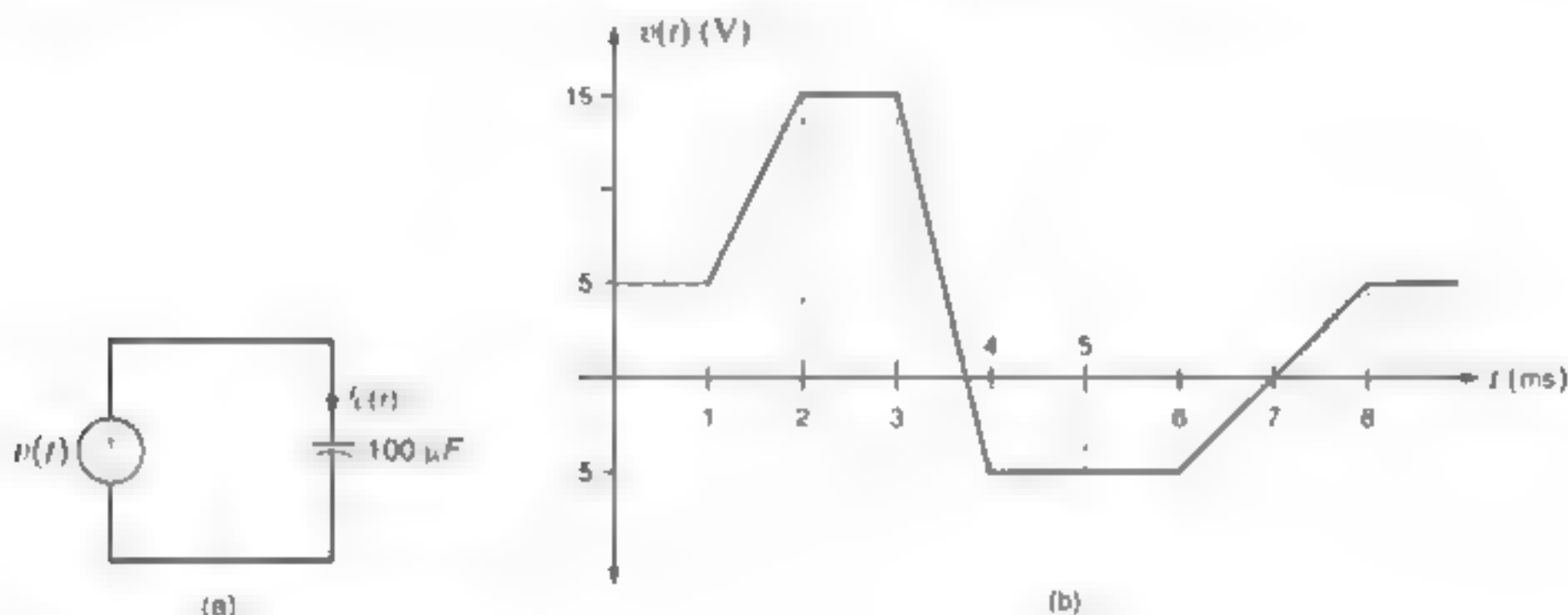


Figura P6.21

- 6.22** A corrente em um indutor varia de 0 a 200 mA em 4 ms e induz uma tensão de 100 mV entre seus terminais. Qual é o valor de sua indutância?
- 6.23** A corrente em um indutor de 100 mH pode ser expressa por $i(t) = 2 \sin 377t\ \text{A}$. Determine (a) a tensão entre os terminais do indutor e (b) a expressão para a energia armazenada nesse elemento.
- 6.24** Considerando que uma corrente expressa por $i(t) = 1,5t\ \text{A}$ flui por um indutor de 2 H, determine a energia nele armazenada em $t = 2\ \text{s}$.
- 6.25** A corrente em um indutor de 25 mH pode ser determinada pelas expressões

$$i(t) = 0 \quad t < 0$$

$$i(t) = 10(1 - e^{-t})\ \text{mA} \quad t > 0$$

Determine (a) a tensão entre os terminais do indutor e (b) a expressão para a energia nele armazenada.

- 6.26** Com as informações fornecidas no problema anterior, determine a tensão entre os terminais do indutor e a energia nele armazenada após 1 s.
- 6.27** A tensão entre os terminais de um indutor de 2 H é representada pela forma de onda mostrada na Fig. P6.27. Obtenha a forma de onda da corrente que flui nesse indutor.

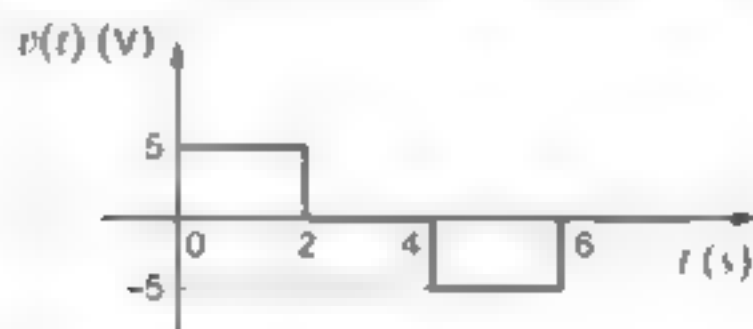


Figura P6.27

- 6.28** A tensão entre os terminais de um indutor de 4 H é representada pela forma de onda mostrada na Fig. P6.28. Obtenha a forma de onda da corrente que flui nesse indutor. Considere $v(t) = 0$ para $t < 0$.

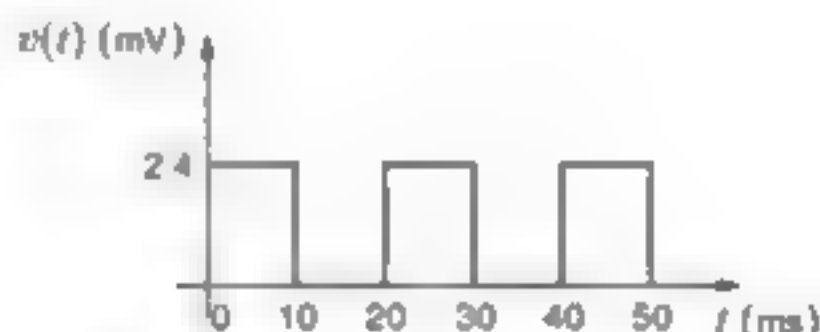


Figura P6.28

- 6.29** O gráfico da corrente que flui em um indutor de 30 mH é o mostrado na Fig. P6.29. Obtenha a forma de onda da tensão entre os terminais desse indutor.

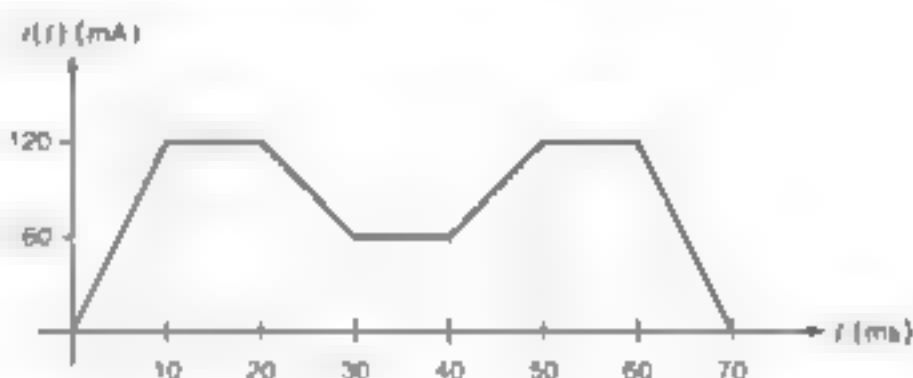


Figura P6.29

- 6.30** A forma de onda da corrente que flui em um indutor de 40 mH é a mostrada na Fig. P6.30. Obtenha a forma de onda da tensão entre os terminais desse indutor.

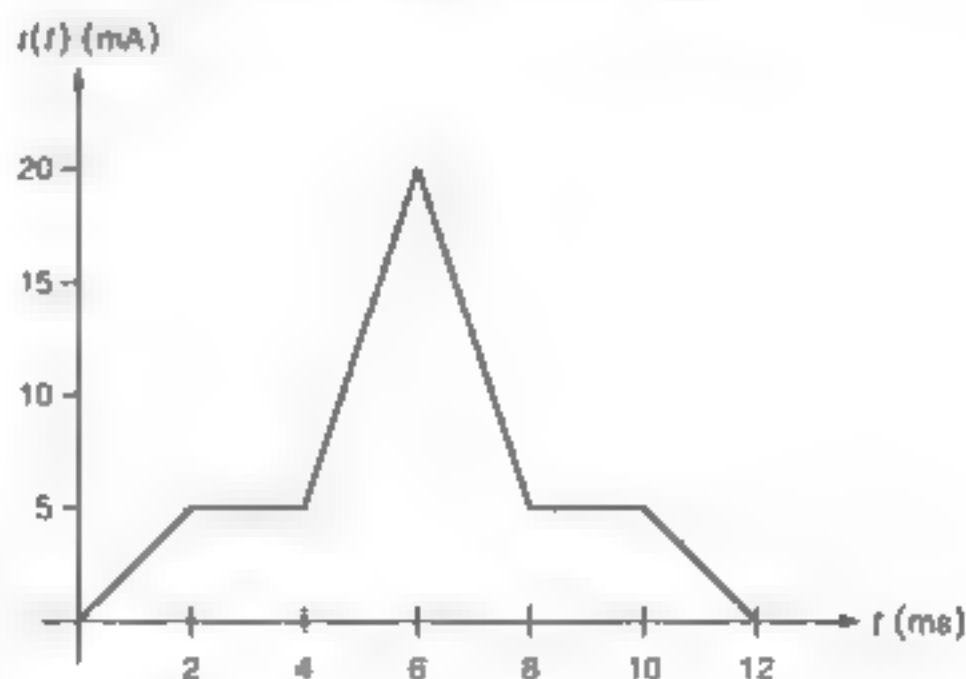


Figura P6.30

- 6.31** Se a corrente que flui por um indutor de 60 mH é representada pela forma de onda mostrada na Fig. P6.31, obtenha a forma de onda da tensão atuante entre os terminais desse indutor.

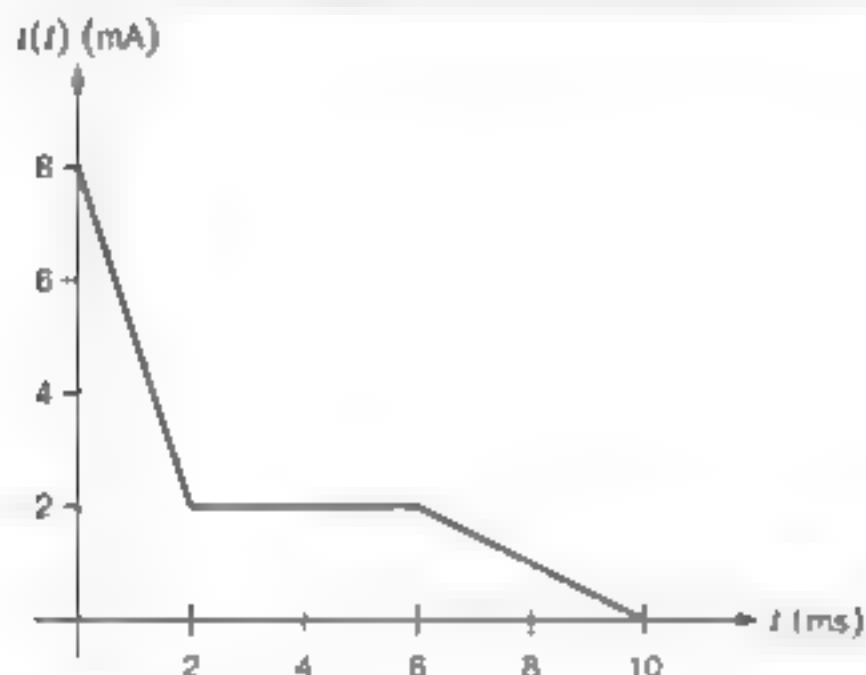


Figura P6.31

- 6.32** O gráfico da corrente que flui em um indutor de 200 mH é o mostrado na Fig. P6.32. Obtenha a forma de onda da tensão entre os terminais desse indutor.

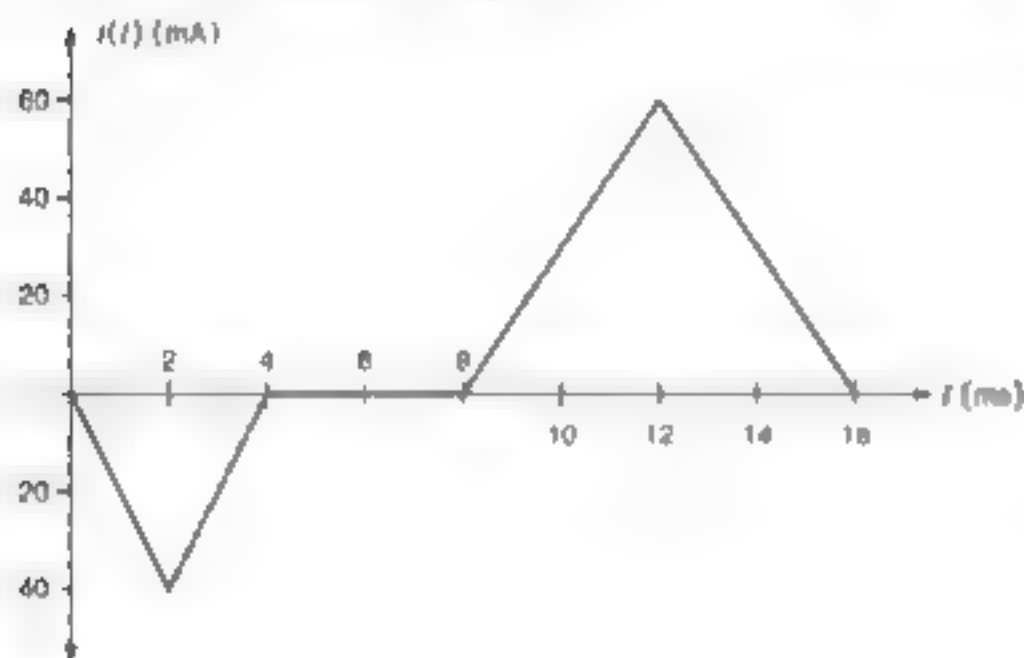


Figura P6.32

- 6.33** A forma de onda da corrente que flui através de um indutor de 0,5 H é a mostrada na Fig. P6.33. Esquematize precisamente em um gráfico a tensão entre os terminais do indutor em função do tempo. Determine as seguintes grandezas: (a) a energia armazenada no indutor em $t = 1,7$ ms, (b) a energia armazenada no indutor em $t = 4,2$ ms e (c) a potência absorvida pelo indutor em $t = 1,2$ ms, $t = 2,8$ ms e $t = 5,3$ ms.

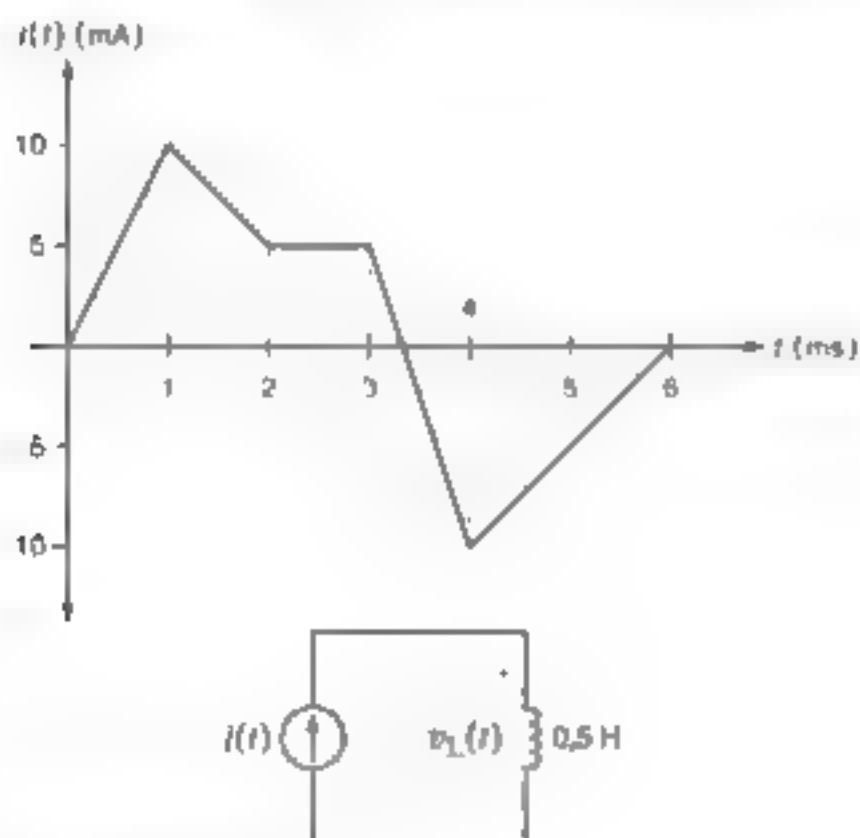


Figura P6.33

- 6.34** A corrente em um indutor de 10 mH é mostrada na Fig. P6.34. Determine a forma de onda da tensão entre os terminais desse indutor

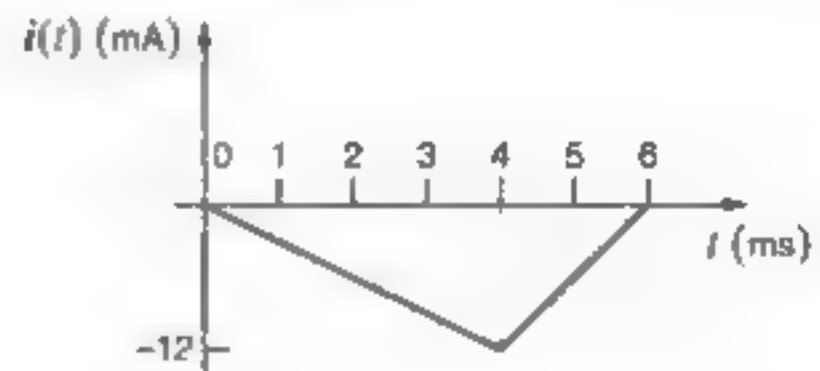


Figura P6.34

- 6.35** A corrente em um indutor de 50 mH é mostrada na Fig. P6.35. Esboce a curva da tensão entre os terminais desse indutor.

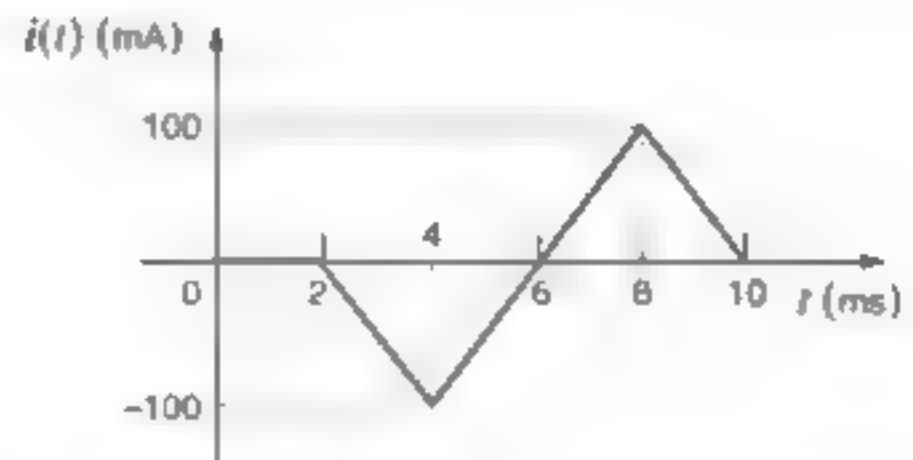


Figura P6.35

- 6.36** A corrente em um indutor de 50 mH é representada pela curva do gráfico mostrado na Fig. P6.36. Determine a tensão entre os terminais desse indutor.

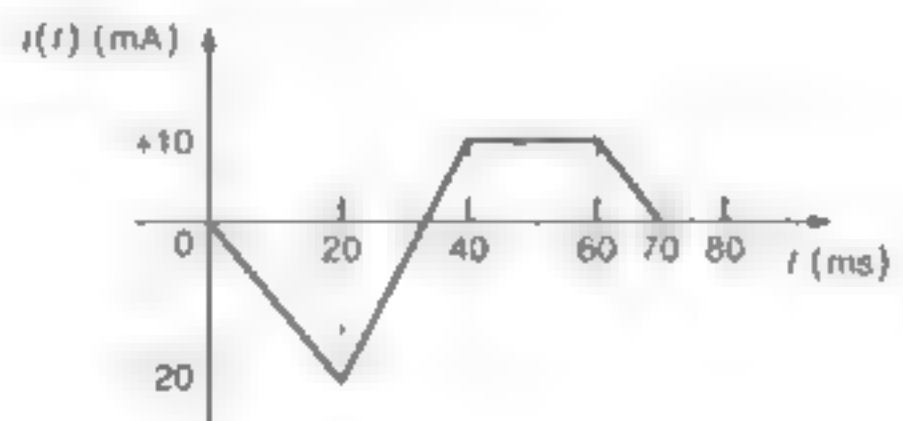


Figura P6.36

- 6.37** Faça um gráfico mostrando a forma de onda da tensão entre os terminais de um indutor de 24 mH, quando a corrente a ele associada é representada pela forma de onda mostrada na Fig. P6.37.

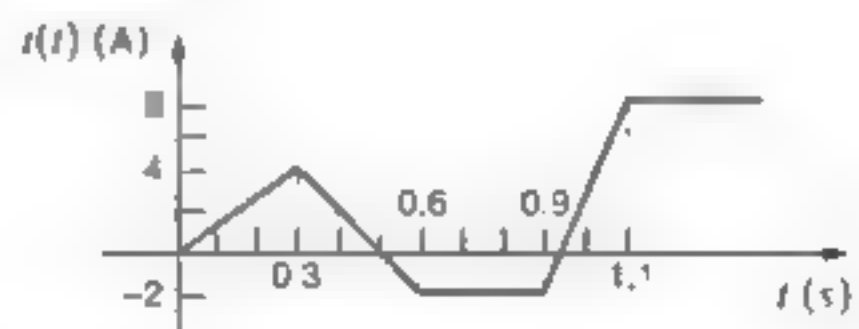


Figura P6.37

- 6.38** A corrente em um indutor de 4 mH é representada pela forma de onda mostrada na Fig. P6.38. Represente graficamente a tensão entre os terminais desse indutor.

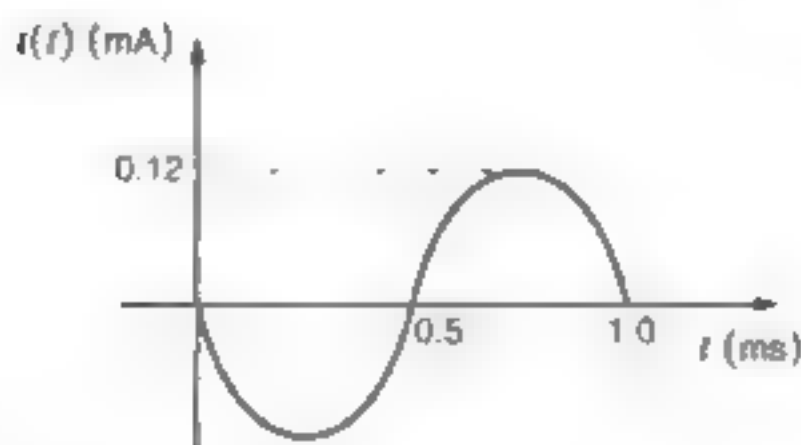
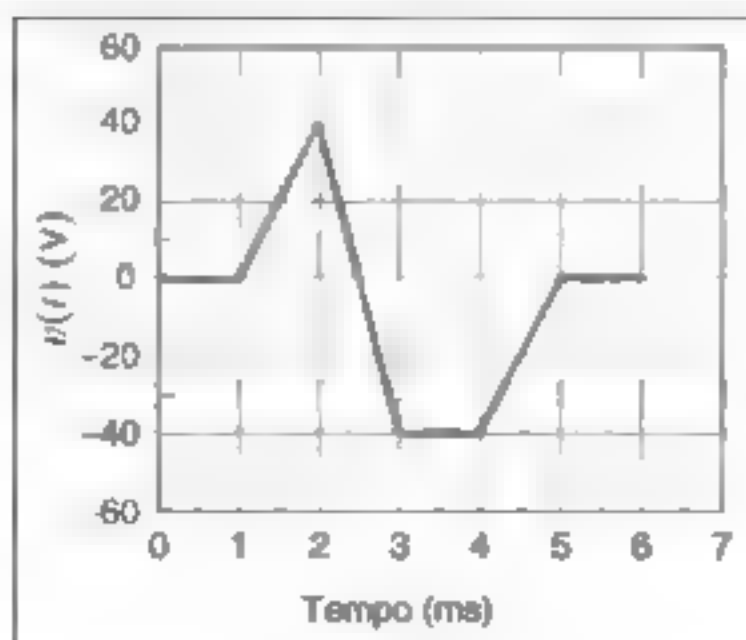
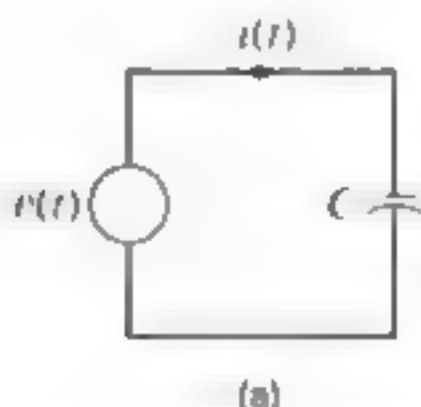


Figura P6.38

- 6.39** Obtenha a possível faixa de capacitâncias para os capacitores a seguir.
- 0,0068 μF com tolerância de 10%.
 - 120 pF com tolerância de 20%.
 - 39 μF com tolerância de 20%.

- 6.40** Obtenha a possível faixa de indutâncias para os indutores a seguir.
- 10 mH com tolerância de 10%.
 - 2,0 nH com tolerância de 5%.
 - 68 μH com tolerância de 10%.

- 6.41** O capacitor mostrado na Fig. P6.41a possui 51 nF com tolerância de 10%. Considerando que a forma de onda da tensão entre seus terminais seja a mostrada na Fig. P6.41b, construa o gráfico da corrente $i(t)$ para os valores mínimo e máximo da capacitância.

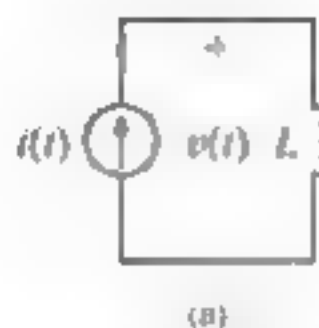


(b)

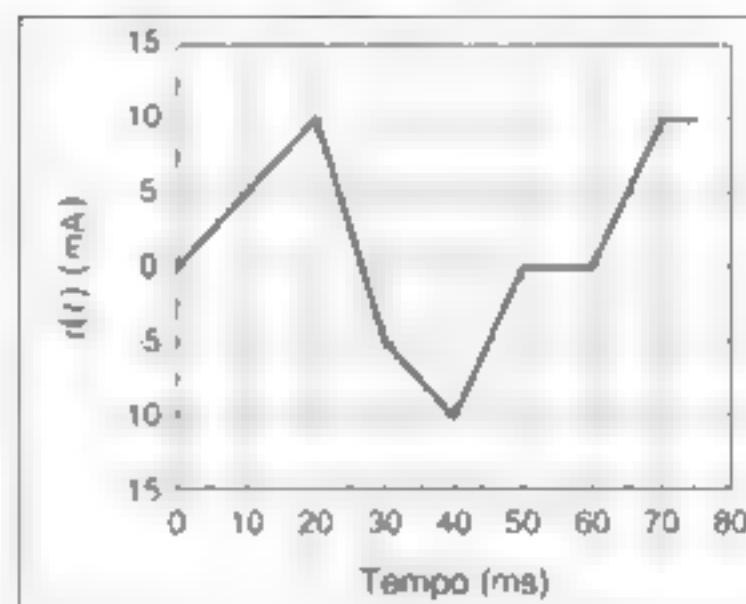
Figura P6.41

- 6.42** O indutor mostrado na Fig. P6.42a possui 4,7 μH com tolerância de 20%. Considerando que a forma de onda da corrente seja a mostrada na Fig. P6.42b, construa o gráfico da

tensão $v(t)$ entre seus terminais para os valores mínimo e máximo da indutância.



(a)



(b)

Figura P6.42

- 6.43** Considerando que a energia total armazenada no circuito mostrado na Fig. P6.43 é de 80 mJ, qual é o valor de L ?

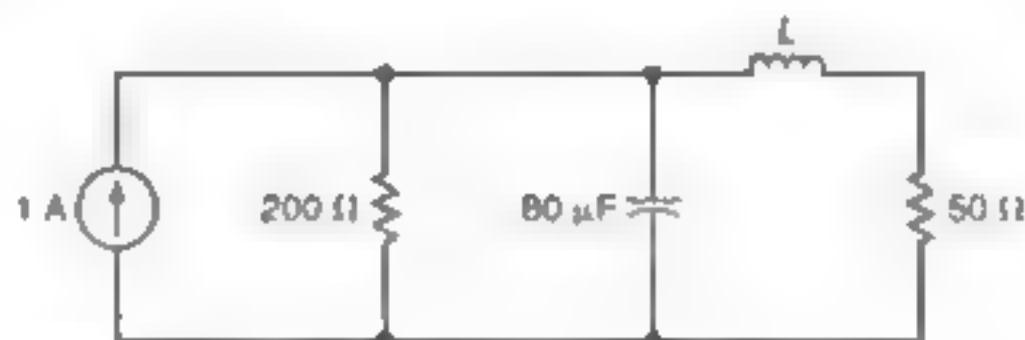


Figura P6.43

- 6.44** Determine o valor de C considerando que a energia armazenada no capacitor do circuito mostrado na Fig. P6.44 é igual à energia armazenada no indutor.

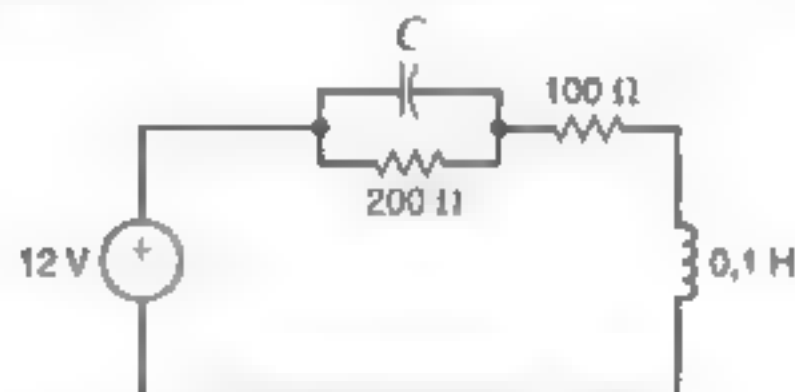


Figura P6.44

- 6.45** Dada a rede mostrada na Fig. P6.45, obtenha a potência dissipada no resistor de 3 Ω e a energia armazenada no capacitor.

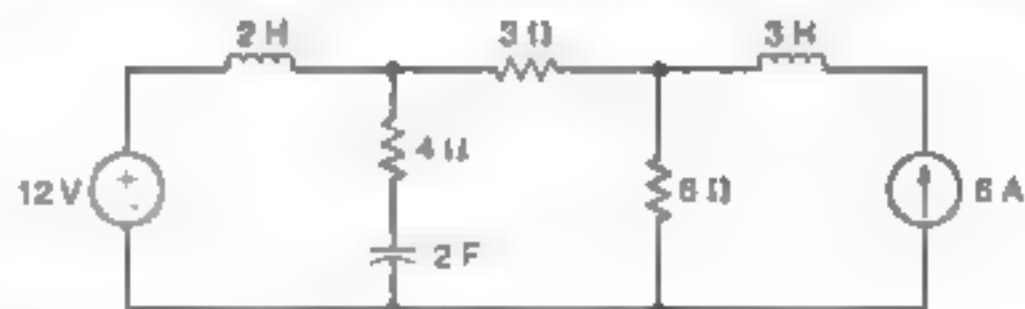


Figura P6.45

- 6.46** Calcule a energia armazenada no indutor do circuito mostrado na Fig. P6.46

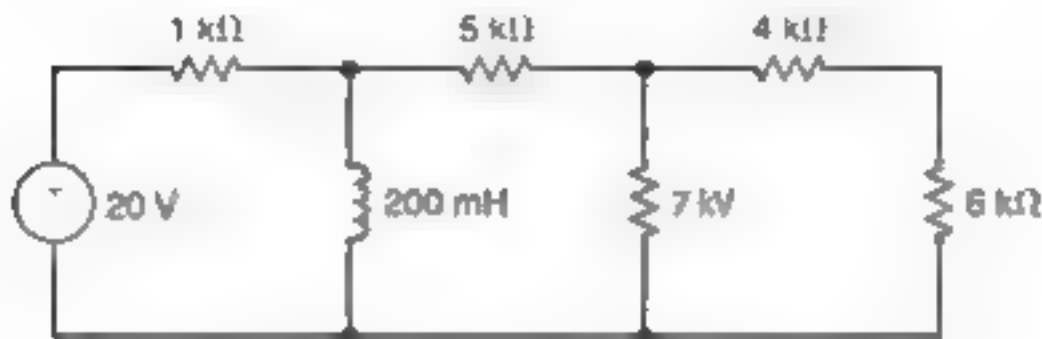


Figura P6.46

- 6.47** Calcule a energia armazenada no indutor e no capacitor do circuito mostrado na Fig. P6.47.

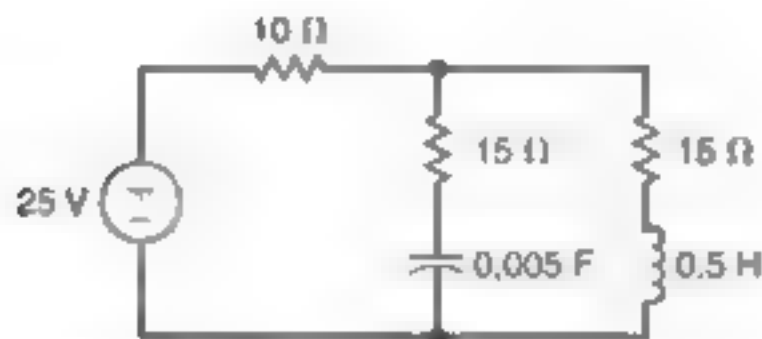


Figura P6.47

- 6.48** Dados os capacitores de $1 \mu\text{F}$, $3 \mu\text{F}$ e $4 \mu\text{F}$, poderiam eles ser interconectados de forma a se obter um capacitor equivalente de $2 \mu\text{F}$?

- 6.49** Determine a capacitância total C_T da rede mostrada na Fig. P6.49.

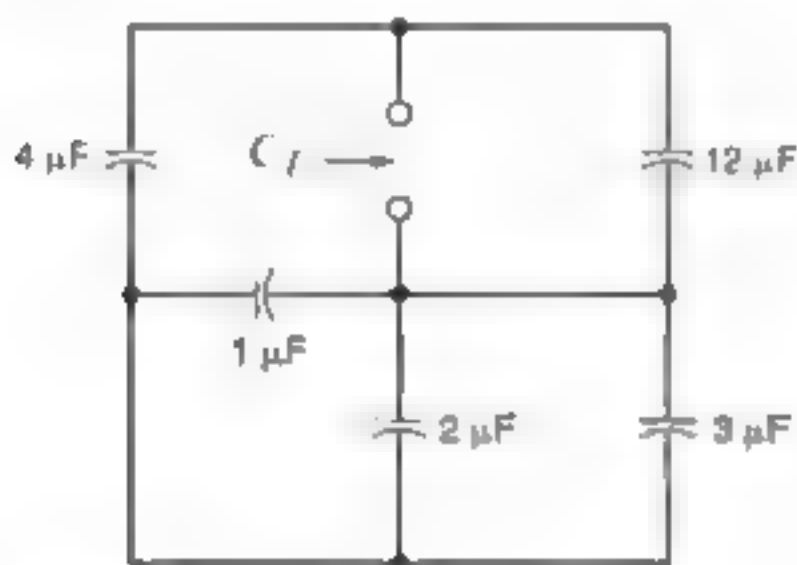


Figura P6.49

- 6.50** Determine a capacitância total C_T da rede mostrada na Fig. P6.50.

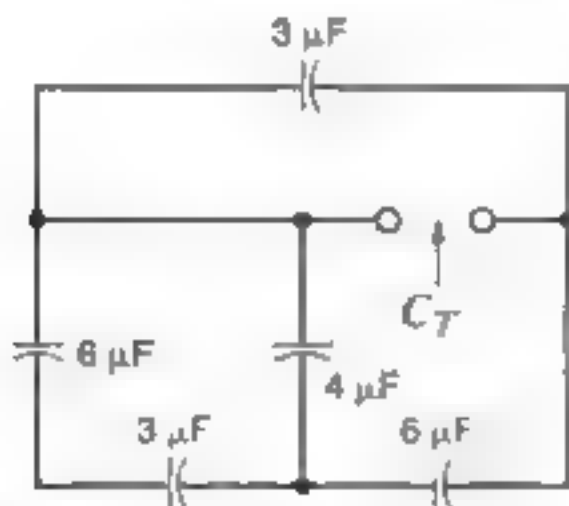


Figura P6.50

- 6.51** Determine a capacitância C_T da rede mostrada na Fig. P6.51.

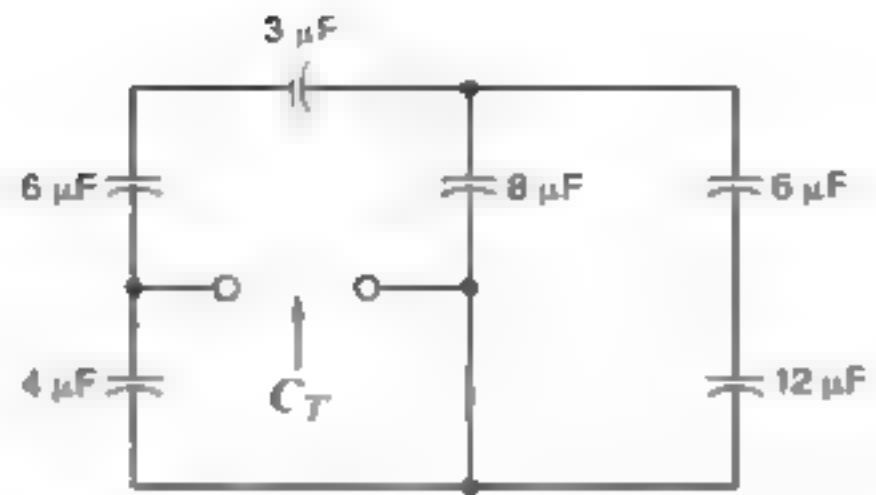


Figura P6.51

- 6.52** Determine a capacitância C_T do circuito mostrado na Fig. P6.52.

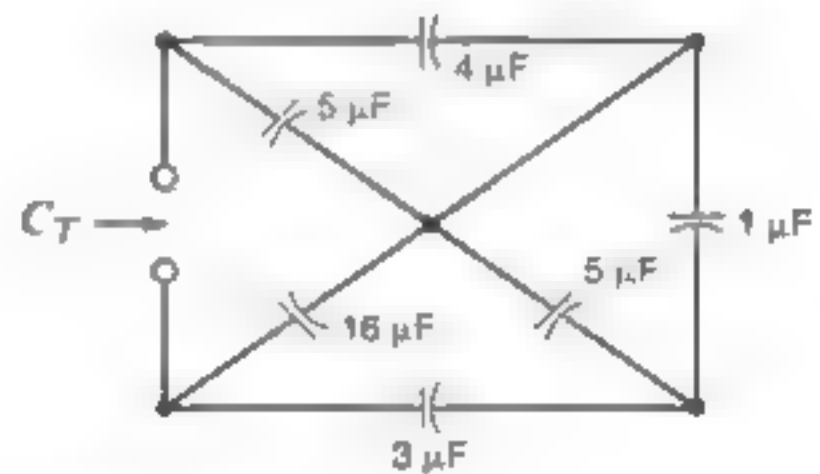


Figura P6.52

- 6.53** Determine o valor da capacitância C_T do circuito mostrado na Fig. P6.53.

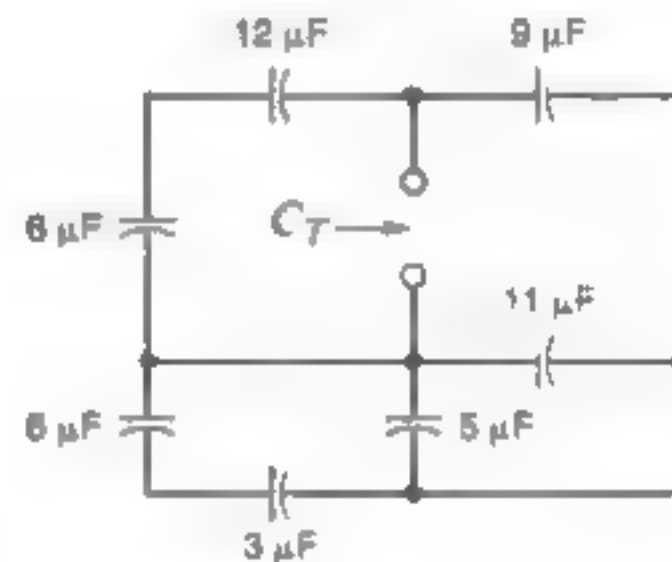


Figura P6.53

- 6.54** Determine o valor da capacitância C_T da rede mostrada na Fig. P6.54.

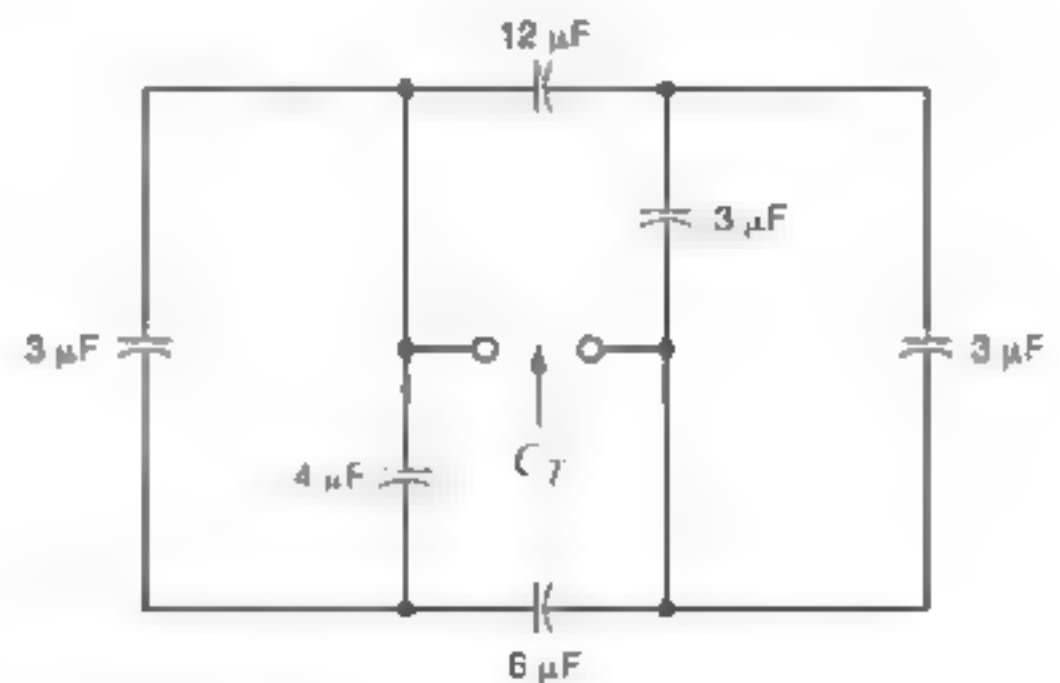


Figura P6.54

- 6.55** Determine o valor da capacitância C_T do circuito mostrado na Fig. P6.55 considerando que todos os capacitores da rede sejam iguais a $6\ \mu\text{F}$.

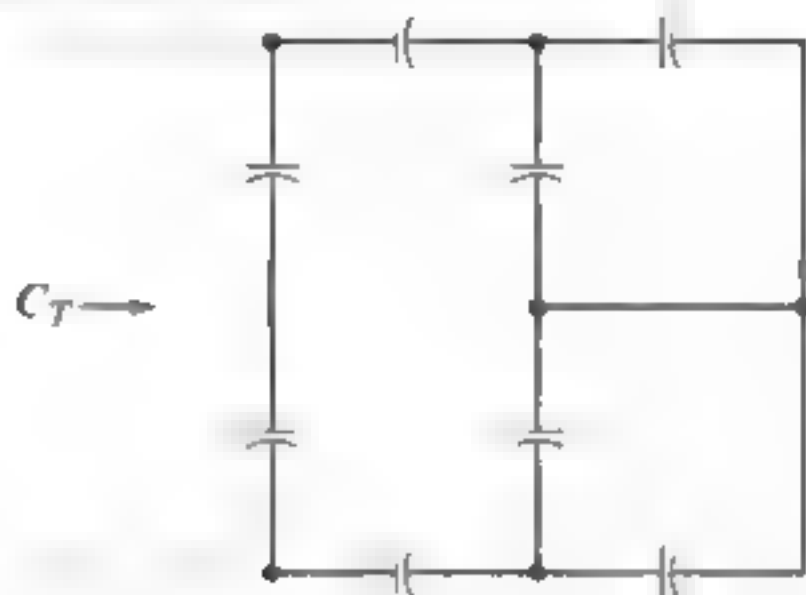


Figura P6.55

- 6.56** Determine o valor da capacitância C_T do circuito mostrado na Fig. P6.56 considerando que todos os capacitores sejam de $6\ \mu\text{F}$.

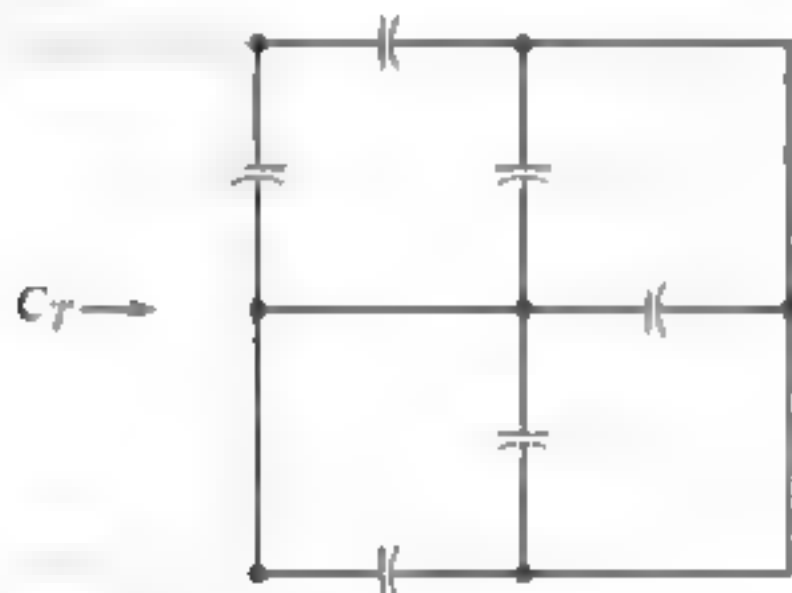


Figura P6.56

- 6.57** Determine o valor da capacitância C_T do circuito mostrado na Fig. P6.57 considerando que todos os capacitores sejam de $12\ \mu\text{F}$.

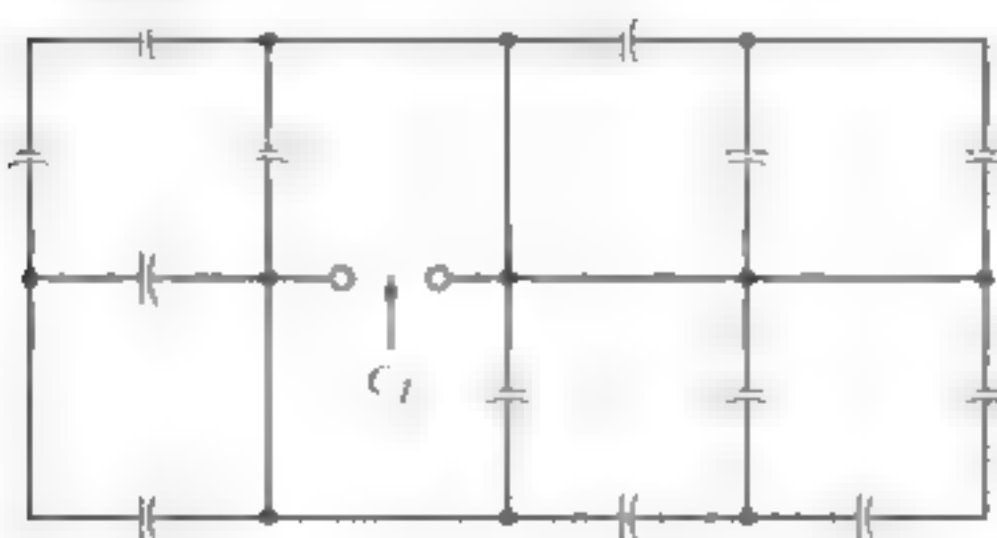


Figura P6.57

- 6.58** Considerando que a capacitância total da rede mostrada na Fig. P6.58 seja de $10\ \mu\text{F}$, determine o valor da capacitância C_T .

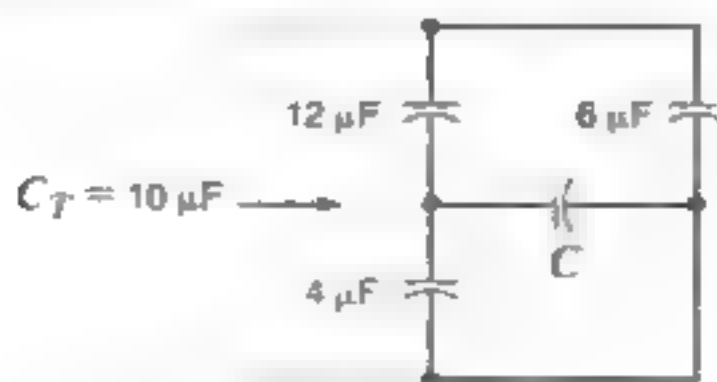


Figura P6.58

- 6.59** Na rede mostrada na Fig. P6.59, determine o valor da capacitância C_T .

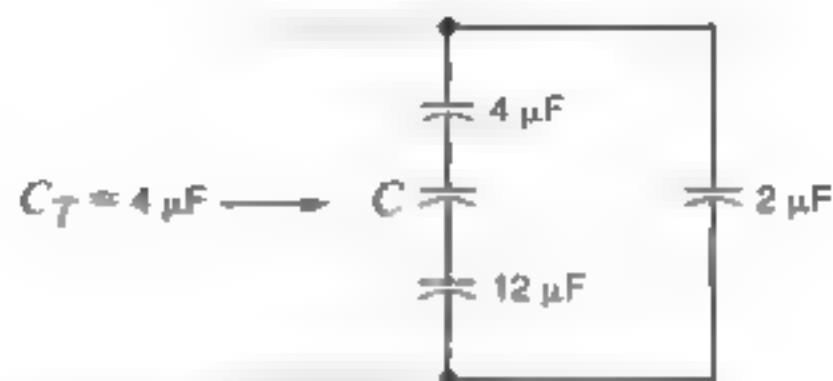


Figura P6.59

- 6.60** Determine o valor da capacitância C do circuito mostrado na Fig. P6.60.

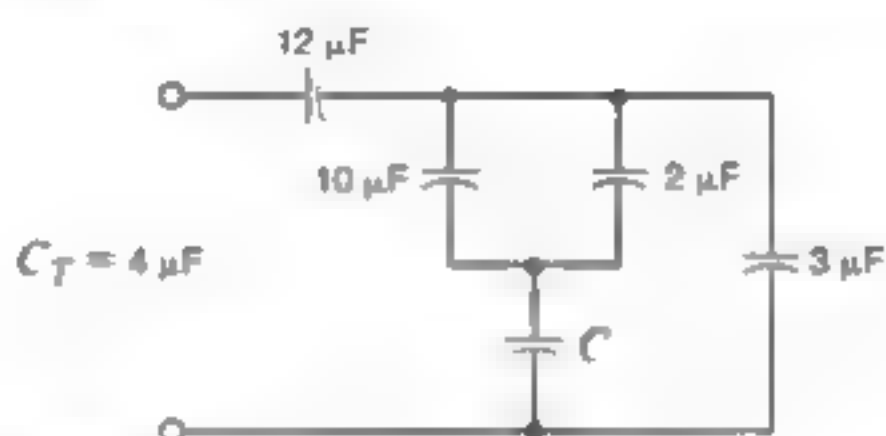


Figura P6.60

- 6.61** Se a capacitância do circuito mostrado na Fig. P6.61 é $C_{eq} = 4\ \mu\text{F}$, calcule o valor de C .

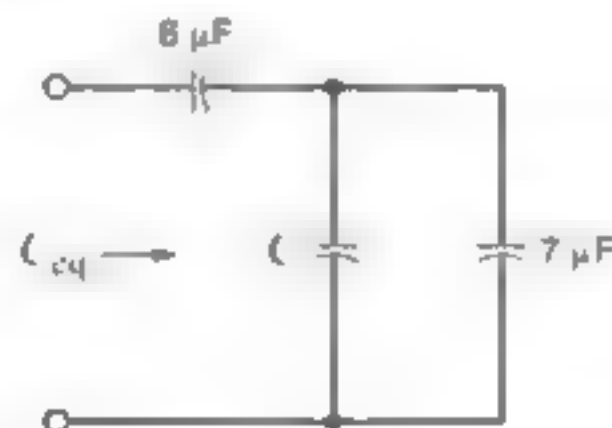


Figura P6.61

- 6.62** Determine a capacitância total C_T mostrada na rede na Fig. P6.62.

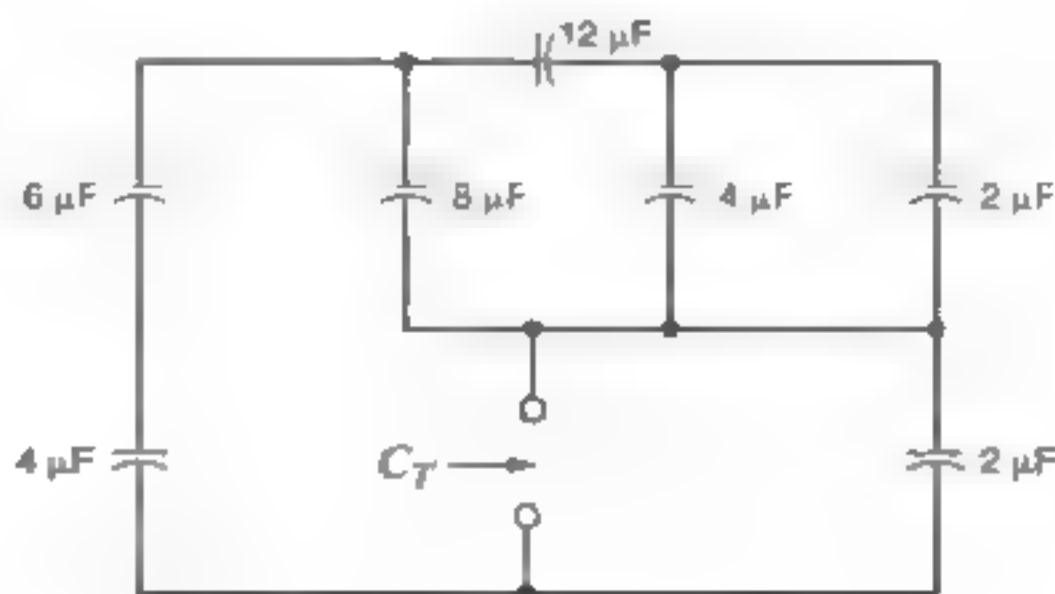


Figura P6.62

- 6.63** Determine a capacitância C_T da rede mostrada na Fig. P6.63 se (a) a chave estiver aberta e (b) a chave estiver fechada.

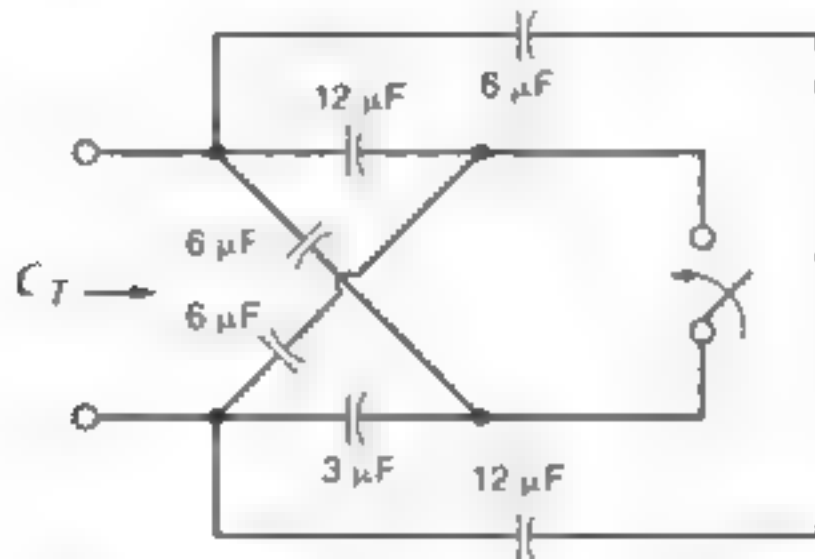


Figura P6.63

- 6.64** Selecione o valor de C que produz a capacitância total desejada $C_T = 10 \mu\text{F}$ no circuito mostrado na Fig. P6.64.

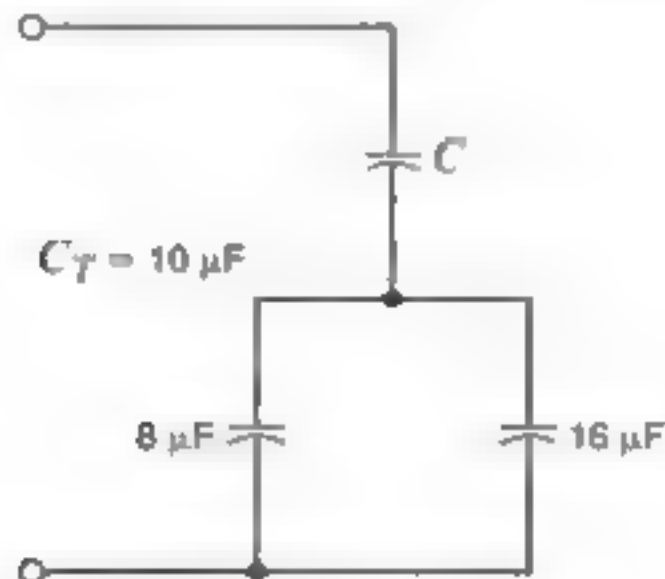


Figura P6.64

- 6.65** Selecione o valor de C que produz a capacitância total desejada $C_T = 1 \mu\text{F}$ no circuito mostrado na Fig. P6.65.

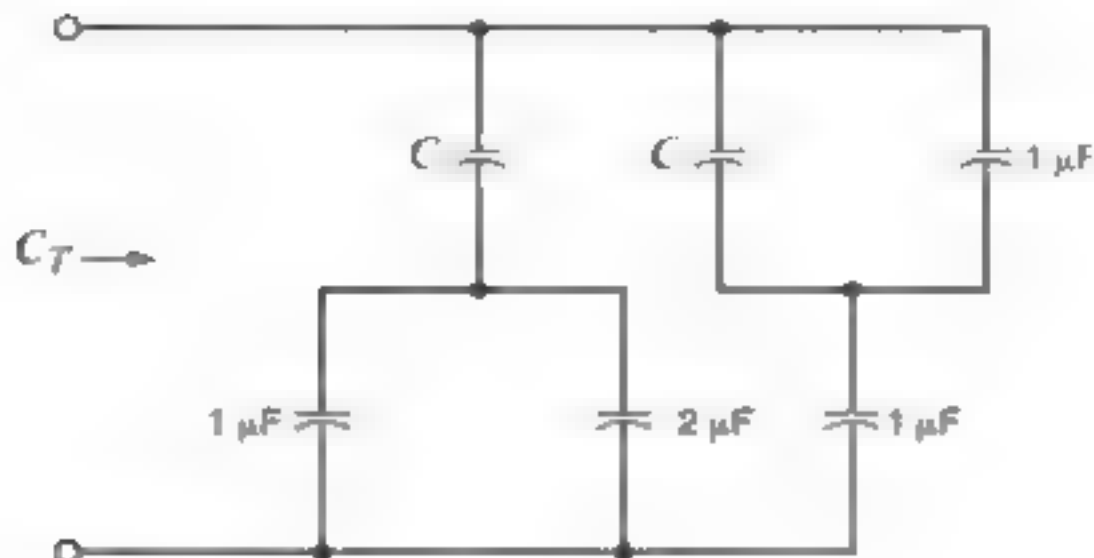


Figura P6.65

- 6.66** Os dois capacitores mostrados na Fig. P6.66 foram carregados e, em seguida, conectados conforme indicado. Determine a capacitância equivalente, a tensão inicial entre os terminais e a energia total armazenada na rede.

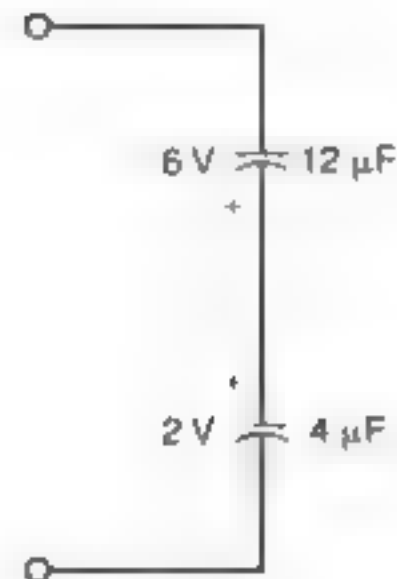


Figura P6.66

- 6.67** Os dois capacitores mostrados na Fig. P6.67 foram conectados por algum tempo e atingiram os valores indicados. Determine V_1 .

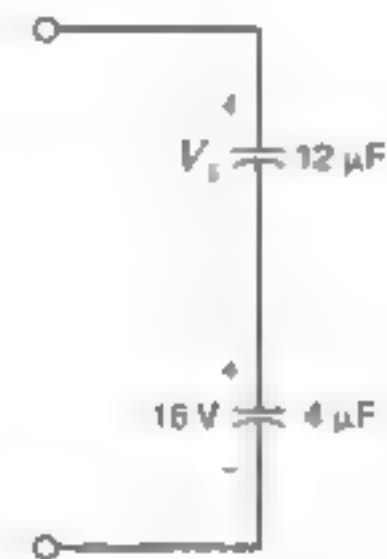


Figura P6.67

- 6.68** Os três capacitores mostrados na Fig. P6.68 foram conectados por algum tempo e atingiram os valores indicados. Determine V_1 e V_2 .

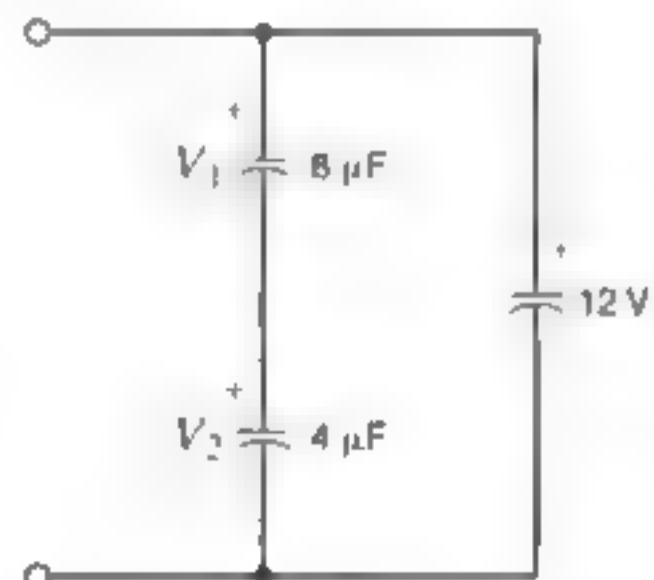


Figura P6.68

- 6.69** Determine a indutância nos terminais A-B da rede mostrada na Fig. P6.69.

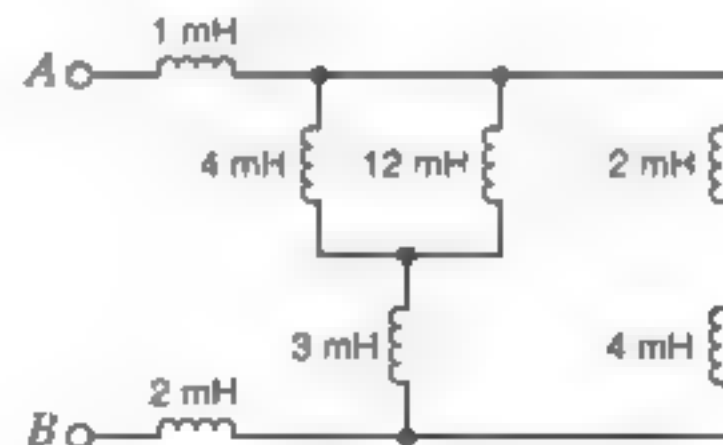


Figura P6.69

- 6.70 Determine a indutância total nos terminais da rede mostrada na Fig. P6.70.

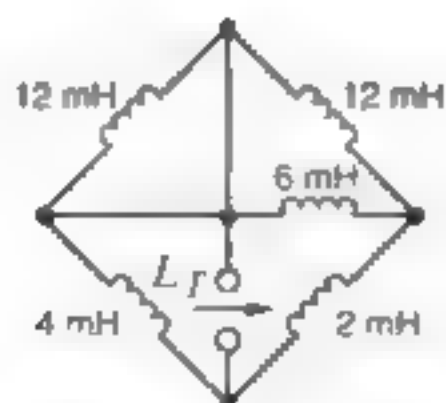


Figura P6.70

- 6.71 Determine a indutância L_T do circuito mostrado na Fig. P6.71.

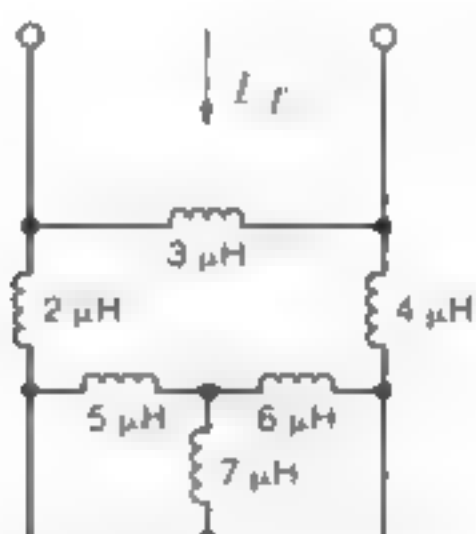


Figura P6.71

- 6.72 Determine a indutância L_T do circuito mostrado na Fig. P6.72.

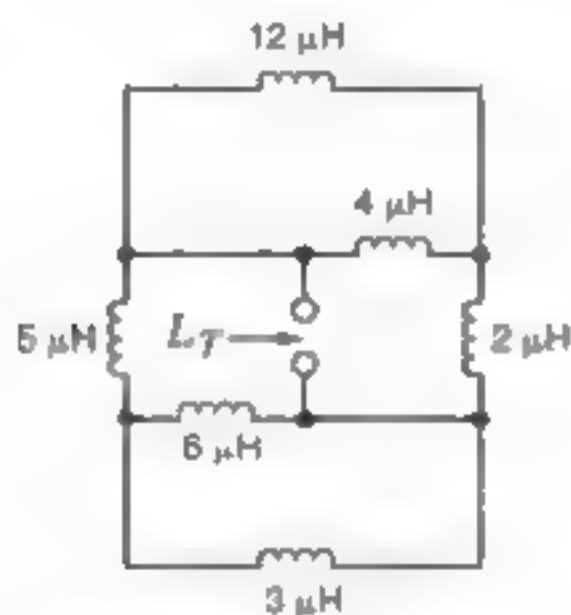


Figura P6.72

- 6.73 Determine a indutância L_T do circuito mostrado na Fig. P6.73. Todos os indutores são de 12 μH.

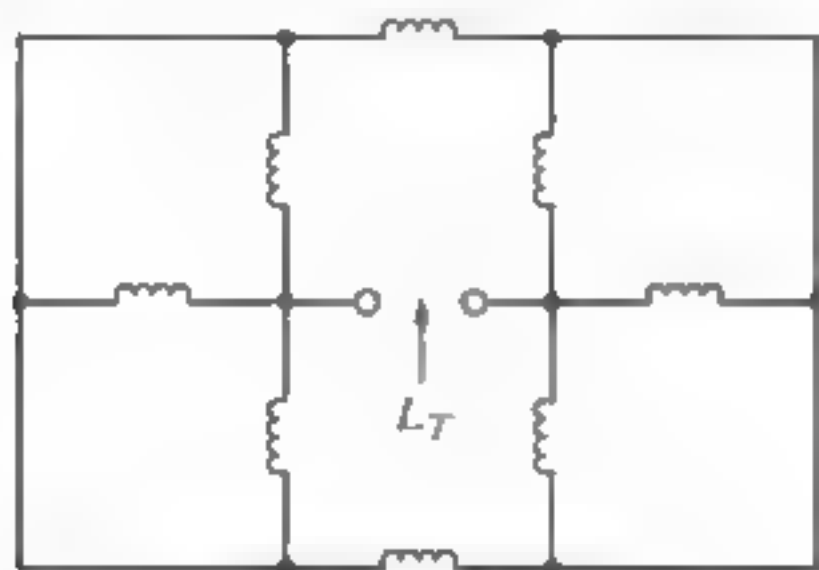


Figura P6.73

- 6.74 Determine a indutância L_T do circuito mostrado na Fig. P6.74.

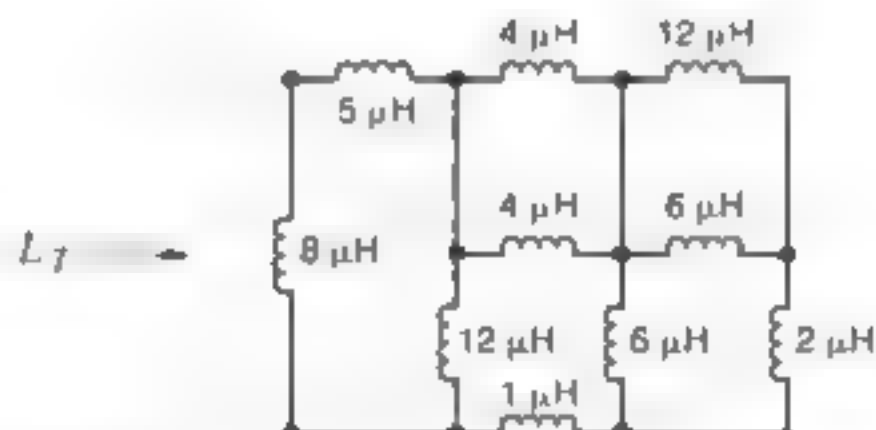


Figura P6.74

- 6.75 Determine a indutância L_T do circuito mostrado na Fig. P6.75.

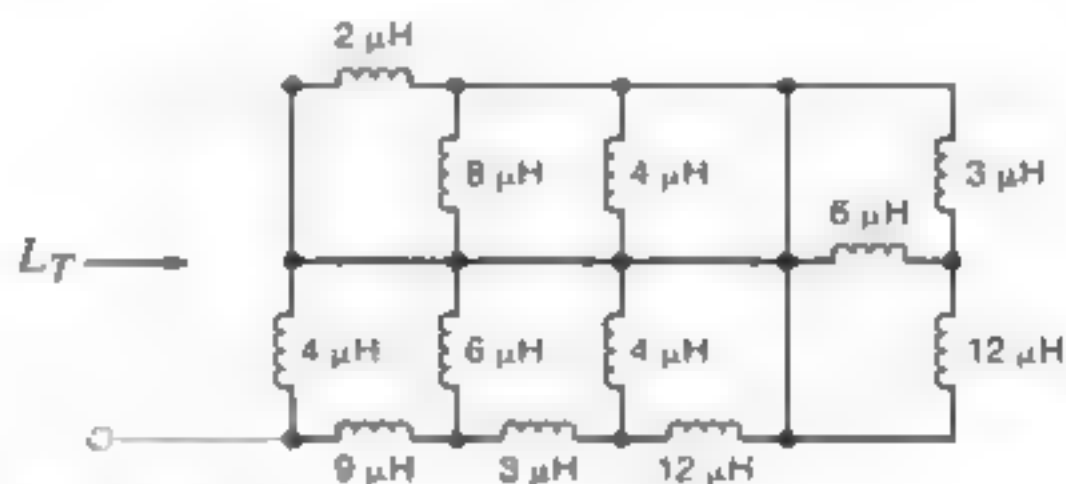


Figura P6.75

- 6.76 Considerando que a indutância total, L_T , da rede mostrada na Fig. P6.76 é de 5 μH, determine o valor de L .

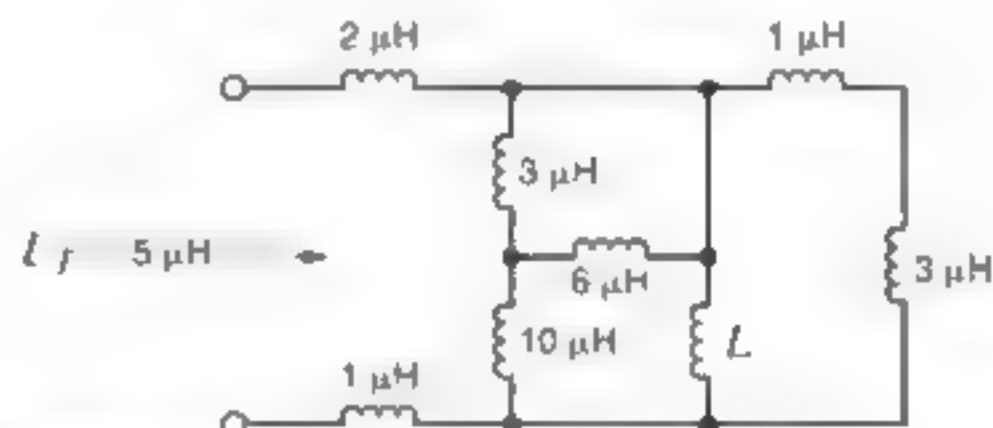


Figura P6.76

- 6.77 Considerando que a indutância total, L_T , da rede mostrada na Fig. P6.77 é de 6 μH, determine o valor de L .

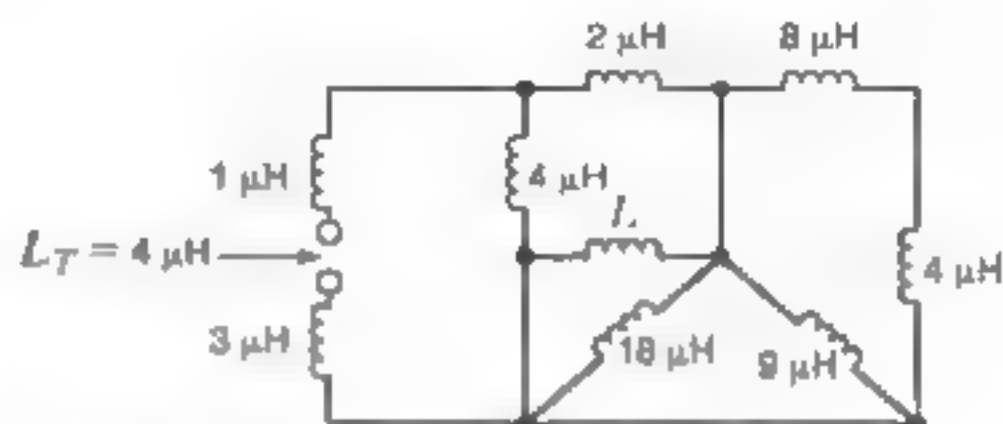


Figura P6.77

- 6.78** Determine a indutância L_T da rede mostrada na Fig. P6.78 (a) com a chave aberta e (b) com a chave fechada. Todos os indutores são idênticos e valem 12 mH.

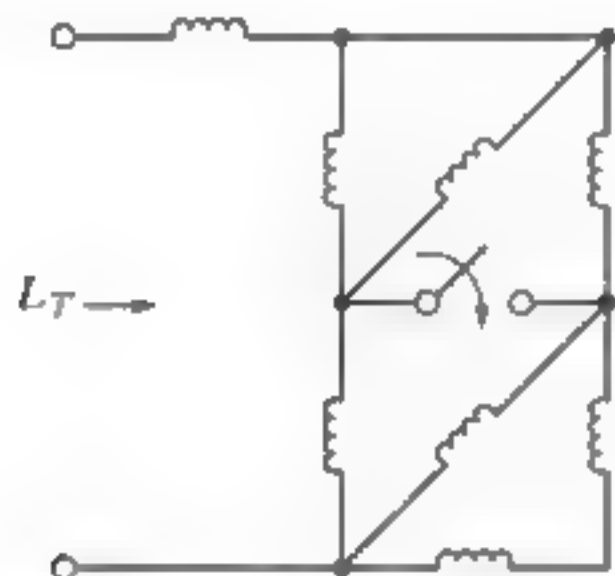


Figura P6.78

- 6.79** Considerando a rede mostrada na Fig. P6.79, determine (a) a indutância equivalente nos terminais $A-B$ com os terminais $C-D$ em curto-circuito e (b) a indutância equivalente nos terminais $C-D$ com os terminais $A-B$ em circuito aberto.

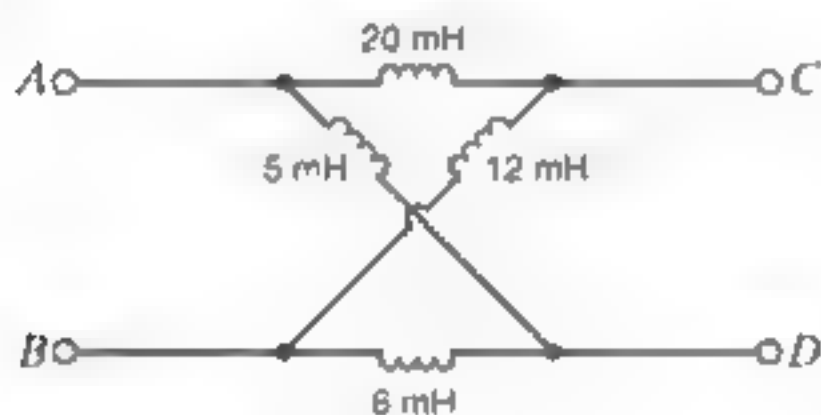


Figura P6.79

- 6.80** Determine o valor do indutor L da rede mostrada na Fig. P6.80 de modo que a indutância total, L_T , seja de 2 mH.

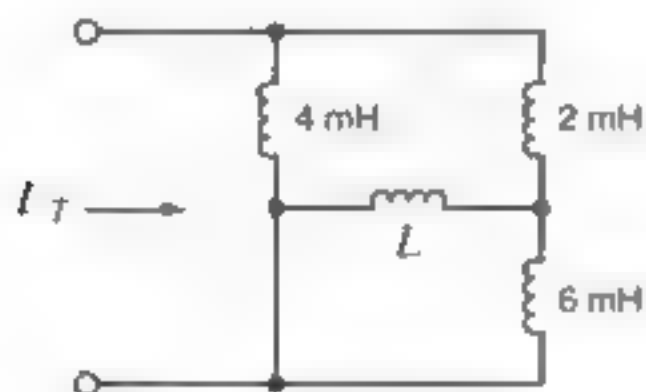


Figura P6.80

- 6.81** Um indutor de 20 mH e outro de 12 mH são conectados em série com uma fonte de corrente de 1 A. Determine (a) a indutância equivalente e (b) a energia total armazenada.

- 6.82** Considerando que os capacitores mostrados na rede mostrada na Fig. P6.82 foram conectados por algum tempo e as correspondentes tensões atingiram os valores indicados, determine (a) a tensão V_1 e (b) a energia total armazenada nos capacitores.

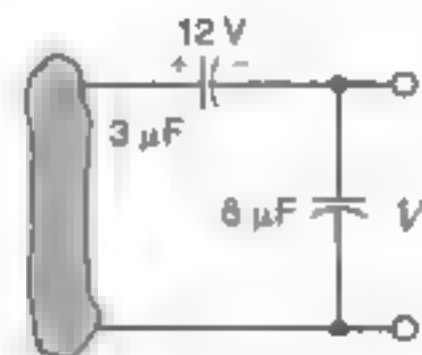


Figura P6.82

- 6.83** Considerando que os capacitores mostrados na rede mostrada na Fig. P6.83 foram conectados por algum tempo e as correspondentes tensões atingiram os valores indicados, determine (a) a tensão V_1 e (b) a energia total armazenada nos capacitores.

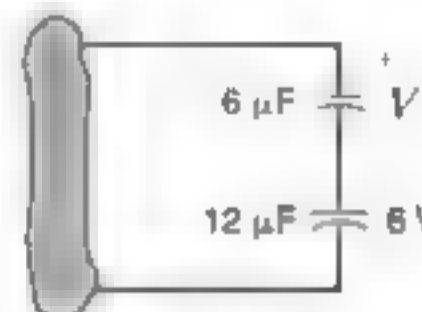


Figura P6.83

- 6.84** Considerando que os capacitores mostrados na rede mostrada na Fig. P6.84 foram conectados por algum tempo e as correspondentes tensões atingiram os valores indicados, determine (a) as tensões V_1 e V_2 e (b) a energia total armazenada nos capacitores.

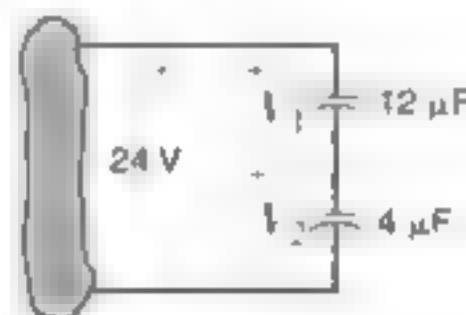


Figura P6.84

- 6.85** Considerando que os capacitores mostrados na rede mostrada na Fig. P6.85 foram conectados por algum tempo e as correspondentes tensões atingiram os valores indicados, determine (a) as tensões V_1 e V_2 e (b) a energia total armazenada nos capacitores.

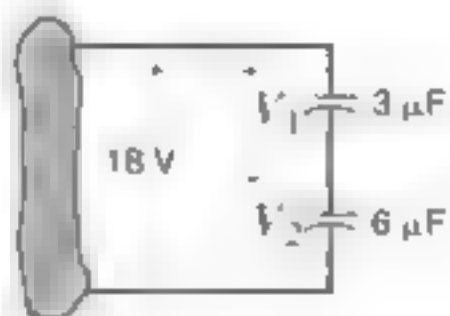


Figura P6.85

- 6.86** Considerando que os capacitores mostrados no circuito mostrado na Fig. P6.86 foram conectados por algum tempo e as correspondentes tensões atingiram os valores indicados, determine (a) as tensões V_1 e V_2 e (b) a energia total armazenada nos capacitores.

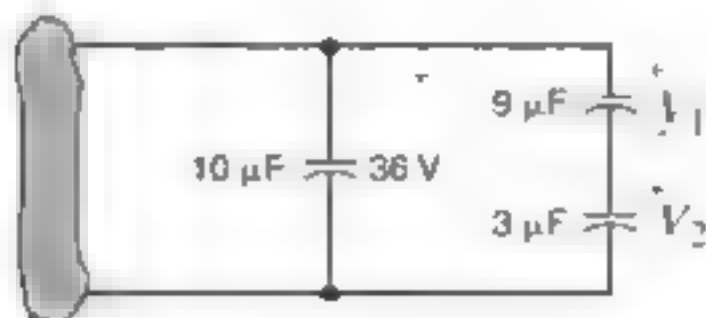


Figura P6.86

- 6.87** Para a rede mostrada na Fig. P6.87, $v_{F_1}(t) = 80 \cos 377t$ V e $v_{F_2}(t) = 40 \cos 377t$ V. Determine a tensão $v_s(t)$.

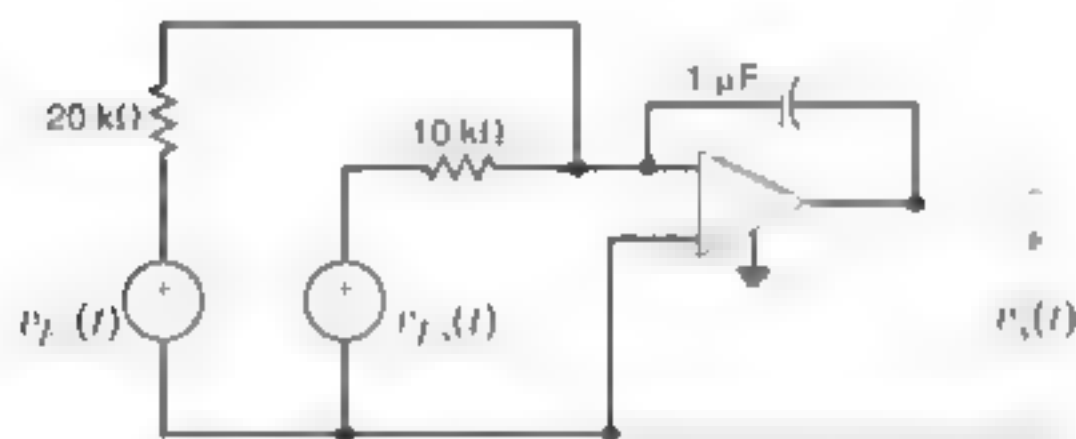
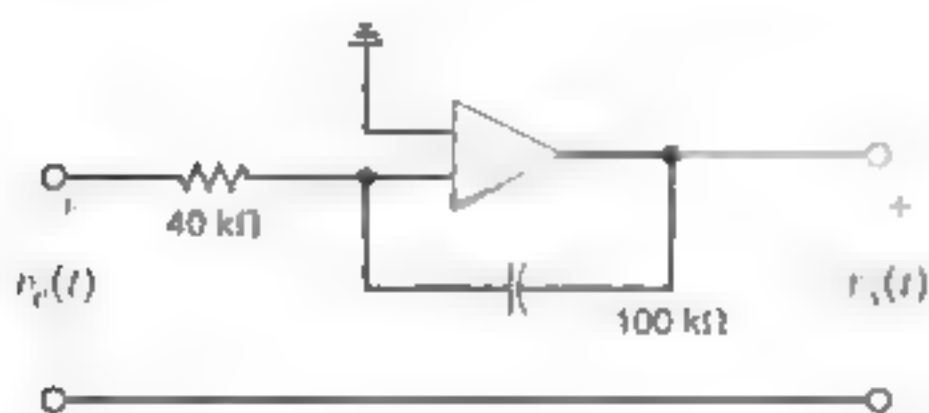
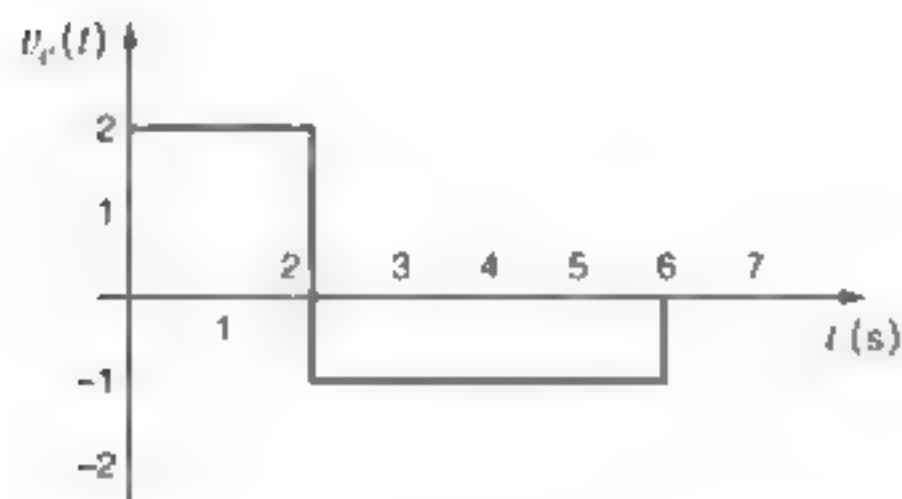


Figura P6.87

- 6.88** Se a tensão de entrada da rede mostrada na Fig. P6.88a for representada pela forma de onda da Fig. P6.88b, determine a forma de onda da tensão de saída $v_s(t)$ considerando que $v_s(0) = 0$.



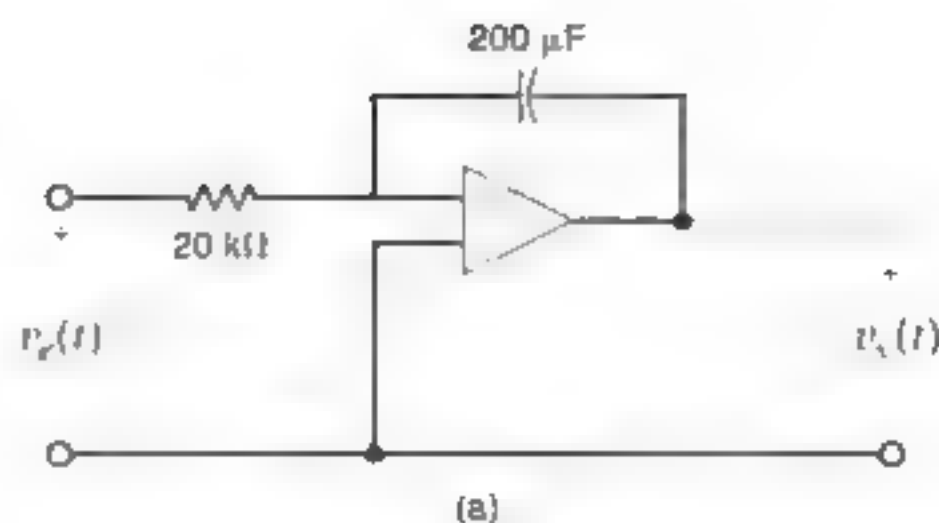
(a)



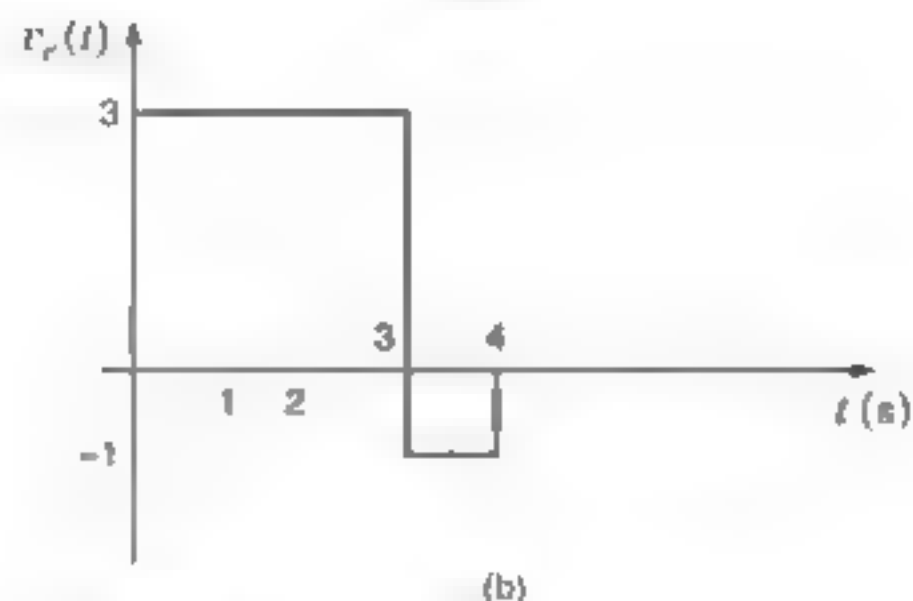
(b)

Figura P6.88

- 6.89** A Fig. P6.89b mostra a tensão de entrada da rede da Fig. P6.89a. Obtenha a forma de onda da tensão de saída $v_s(t)$ considerando que $v_s(0) = 0$.



(a)



(b)

Figura P6.89

- 6.90** Mostre que o circuito na Fig. P6.90 opera como um derivador com tensão de saída expressa por $v_s(t) = -RC \frac{dv_e(t)}{dt}$. Admita um op-amp ideal.

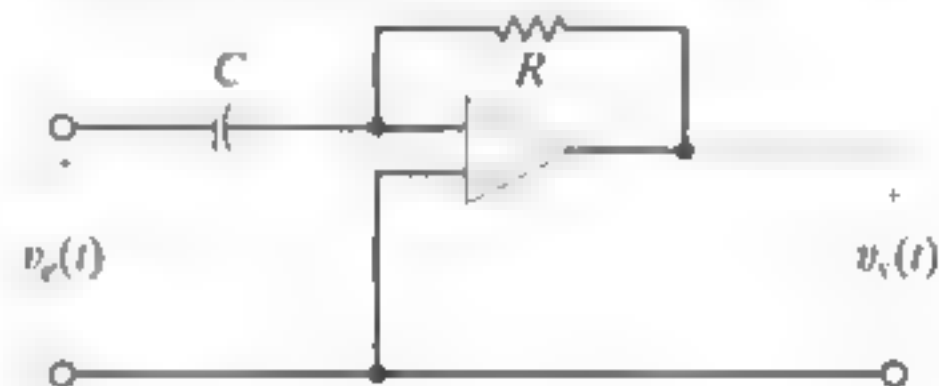
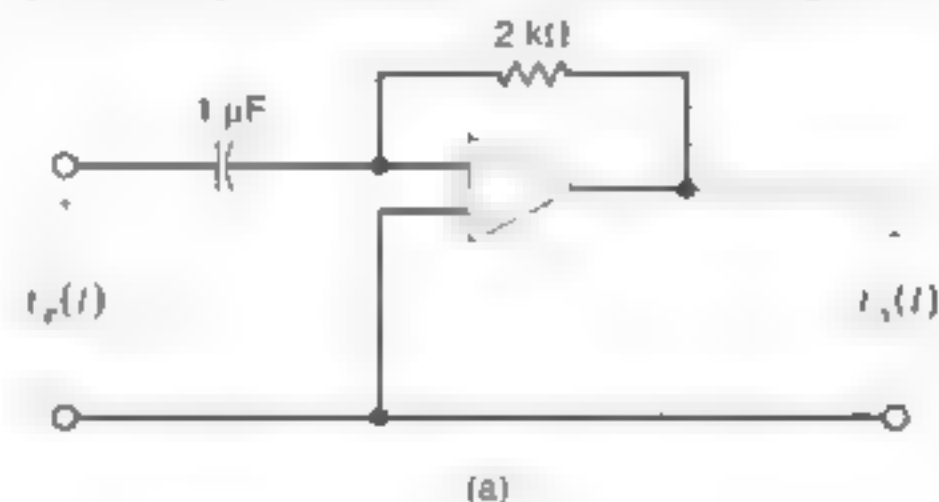
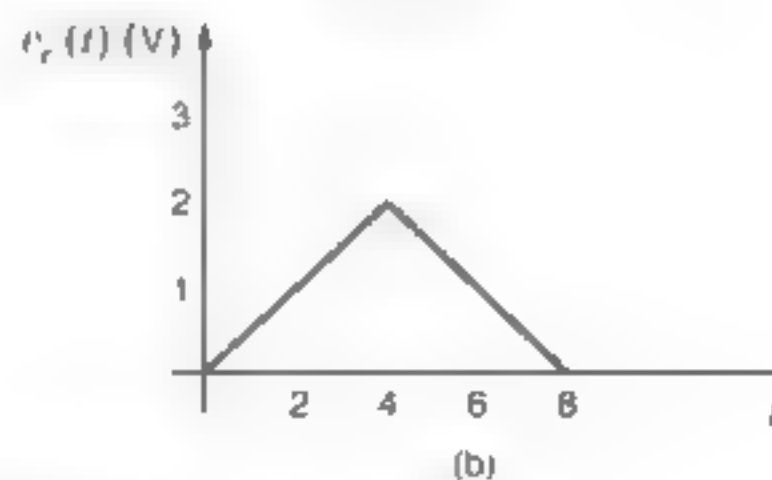


Figura P6.90

- 6.91** Represente esquematicamente a tensão de saída da rede mostrada na Fig. P6.91a considerando que a entrada seja representada pela forma de onda mostrada na Fig. P6.91b.



(a)



(b)

Figura P6.91

- 6.92** Represente esquematicamente a tensão de saída da rede mostrada na Fig. P6.92a considerando que a entrada seja representada pela forma de onda mostrada na Fig. P6.92b.

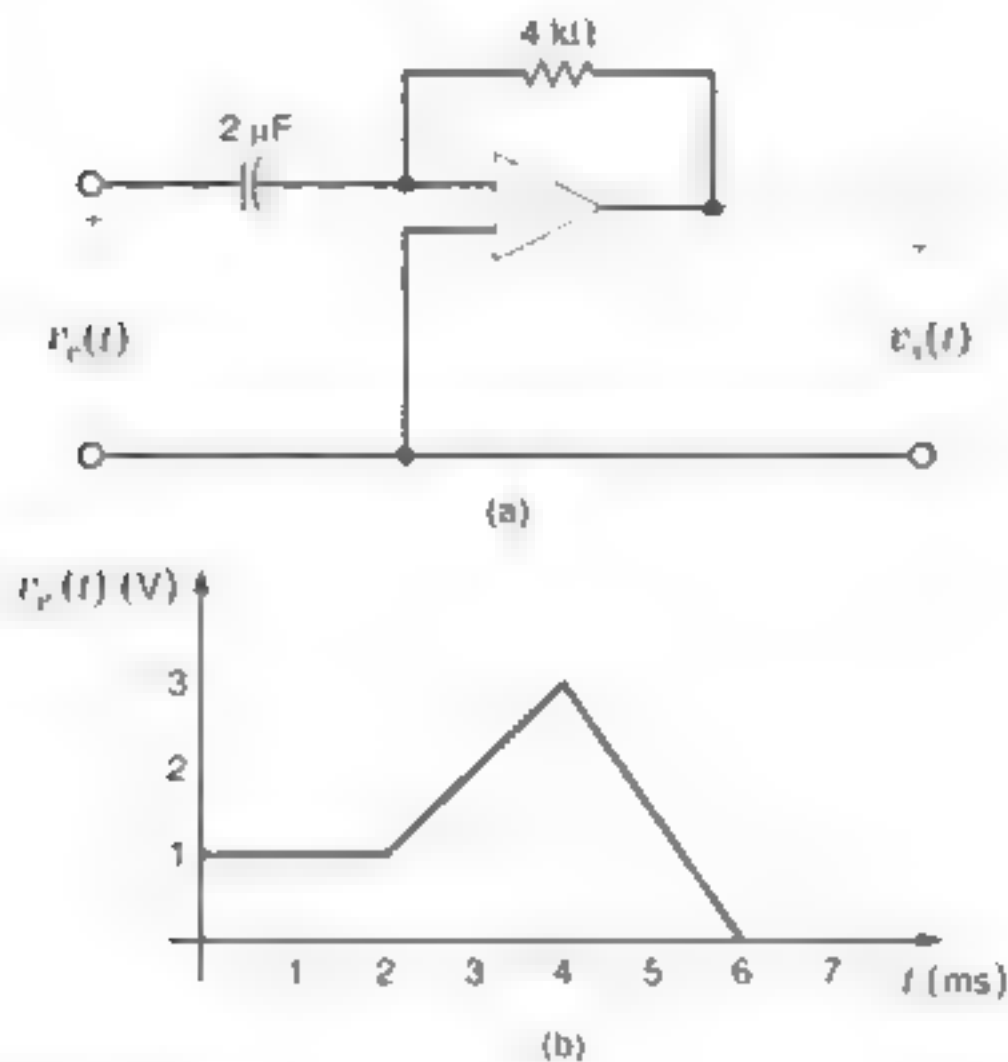


Figura P6.92

- 6.93** Dada a rede mostrada na Fig. P6.93a,

(a) Determine a equação para o ganho de malha fechada

$$|G| = \left| \frac{v_o}{v_i} \right|.$$

(b) Construa um gráfico indicando a magnitude do ganho em malha fechada em função da frequência se $R = 1 \text{ k}\Omega$, $R_2 = 10 \text{ k}\Omega$ e $C = 2 \text{ }\mu\text{F}$.

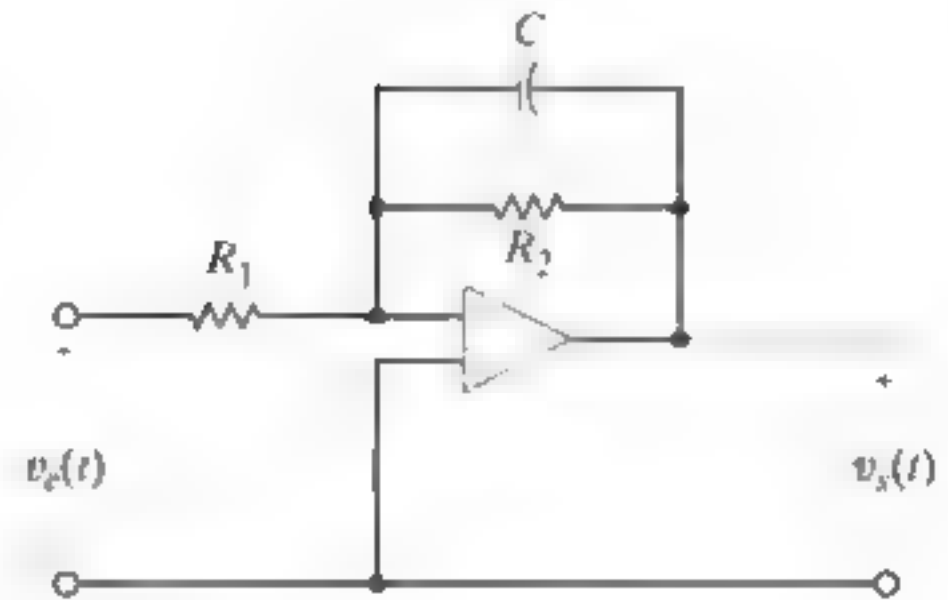


Figura P6.93

- 6.94** Necessita-se de um integrador que apresente o seguinte comportamento

$$v_o(t) = 10^6 \int v_i dt$$

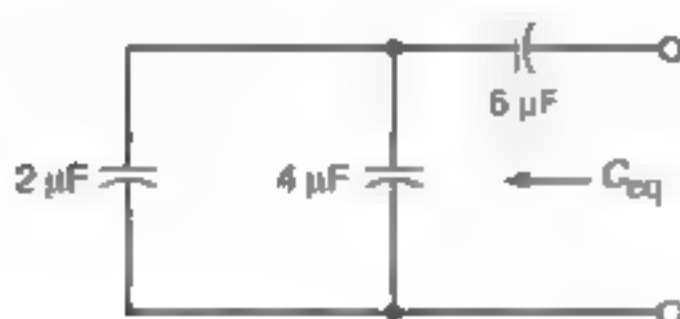
em que os valores dos capacitores devem ser superiores a 10 nF e os valores dos resistores devem ser superiores a $10 \text{ k}\Omega$.

- (a) Projete o integrador.
 (b) Se forem utilizadas fontes de $\pm 10 \text{ V}$, quais serão os valores máximo e mínimo de v_i ?
 (c) Suponha que $v_i = 1 \text{ V}$. Qual será a taxa de variação de v_o ?

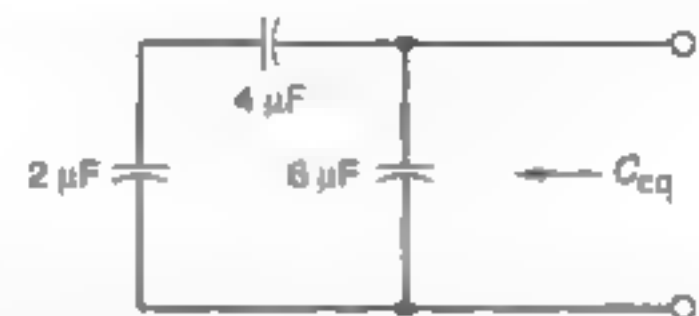
PROBLEMAS TÍPICOS DE EXAMES PROFISSIONAIS DE ENGENHARIA

- 6PEP-1** Dados três capacitores com valores de $2 \text{ }\mu\text{F}$, $4 \text{ }\mu\text{F}$ e $6 \text{ }\mu\text{F}$, poderiam os capacitores ser interconectados de modo que a combinação resulte em um capacitor equivalente de $3 \text{ }\mu\text{F}$?

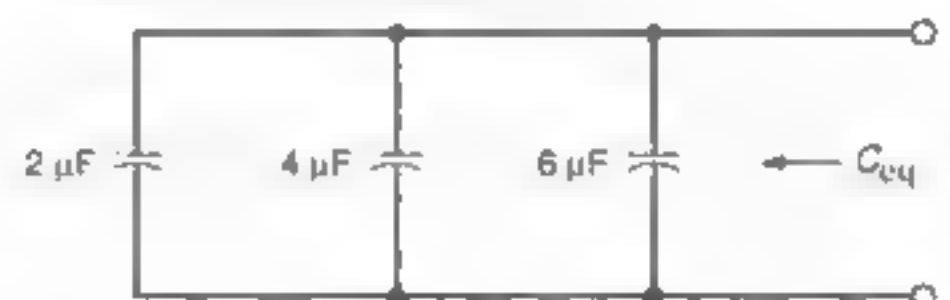
a. Sim. Os capacitores devem ser conectados conforme mostrado na figura.



b. Sim. Os capacitores devem ser conectados conforme mostrado na figura.



c. Sim. Os capacitores devem ser conectados conforme mostrado na figura.



d. Não. Não é possível obter uma capacitância equivalente de $3 \text{ }\mu\text{F}$ com os capacitores fornecidos.

6PEP-2 O pulso de corrente mostrado na Fig. 6PEP-2 é aplicado a um capacitor de $1 \mu\text{F}$. Qual é a energia armazenada no campo elétrico do capacitor?

a. $w(t) = \begin{cases} 0 \text{ J}, t \leq 0 \\ 10 \times 10^6 t^2 \text{ J}, 0 < t \leq 1 \mu\text{s} \\ 10 \mu\text{J}, t > 1 \mu\text{s} \end{cases}$

b. $w(t) = \begin{cases} 0 \text{ J}, t \leq 0 \\ 6 \times 10^6 t^2 \text{ J}, 0 < t \leq 1 \mu\text{s} \\ 6 \mu\text{J}, t > 1 \mu\text{s} \end{cases}$

c. $w(t) = \begin{cases} 0 \text{ J}, t \leq 0 \\ 18 \times 10^6 t^2 \text{ J}, 0 < t \leq 1 \mu\text{s} \\ 18 \mu\text{J}, t > 1 \mu\text{s} \end{cases}$

d. $w(t) = \begin{cases} 0 \text{ J}, t \leq 0 \\ 30 \times 10^6 t^2 \text{ J}, 0 < t \leq 1 \mu\text{s} \\ 30 \mu\text{J}, t > 1 \mu\text{s} \end{cases}$

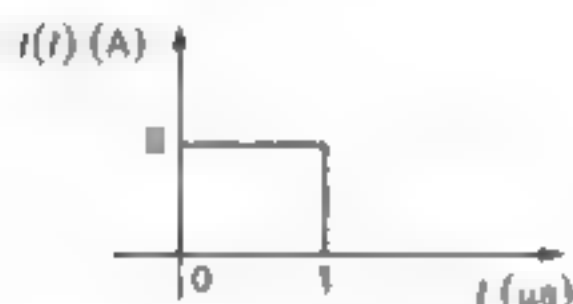


Figura 6PEP-2

6PEP-3 Os dois capacitores mostrados na Fig. 6PEP-3 ficaram conectados durante um certo intervalo de tempo e atingiram os valores apresentados. Determine o capacitor incógnito C_x .

- a. $20 \mu\text{F}$
- b. $30 \mu\text{F}$
- c. $10 \mu\text{F}$
- d. $90 \mu\text{F}$

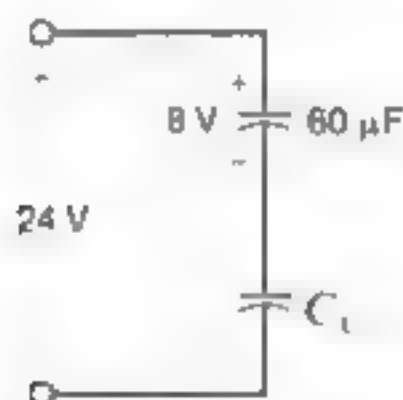


Figura 6PEP-3

6PEP-4 Qual é o valor da indutância equivalente da rede mostrada na Fig. 6PEP-4?

- a. $9,5 \text{ mH}$
- b. $2,5 \text{ mH}$
- c. $6,5 \text{ mH}$
- d. $3,5 \text{ mH}$

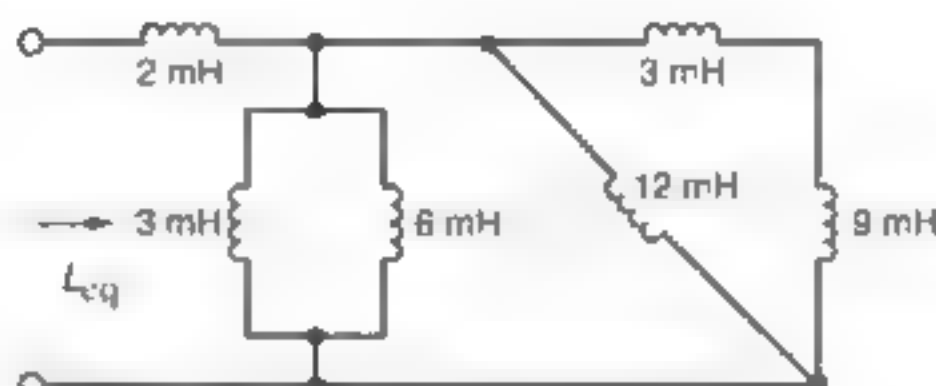


Figura 6PEP-4

6PEP-5 A fonte de corrente do circuito mostrado na Fig. 6PEP-5 possui a seguinte característica de operação:

$$i(t) = \begin{cases} 0 \text{ A}, t < 0 \\ 20te^{-2t} \text{ A}, t > 0 \end{cases}$$

Qual é o valor da tensão entre os terminais do indutor de 10 mH expressa em função do tempo?

a. $v(t) = \begin{cases} 0 \text{ V}, t < 0 \\ 0,2e^{-2t} - 4te^{-2t} \text{ V}, t > 0 \end{cases}$

b. $v(t) = \begin{cases} 0 \text{ V}, t < 0 \\ 2e^{-2t} + 4te^{-2t} \text{ V}, t > 0 \end{cases}$

c. $v(t) = \begin{cases} 0 \text{ V}, t < 0 \\ -0,2te^{-2t} + 0,4e^{-2t} \text{ V}, t > 0 \end{cases}$

d. $v(t) = \begin{cases} 0 \text{ V}, t < 0 \\ -2te^{-2t} \text{ V}, t > 0 \end{cases}$

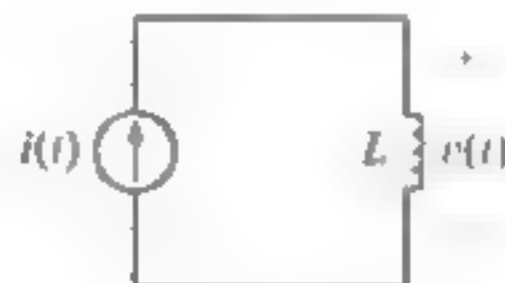
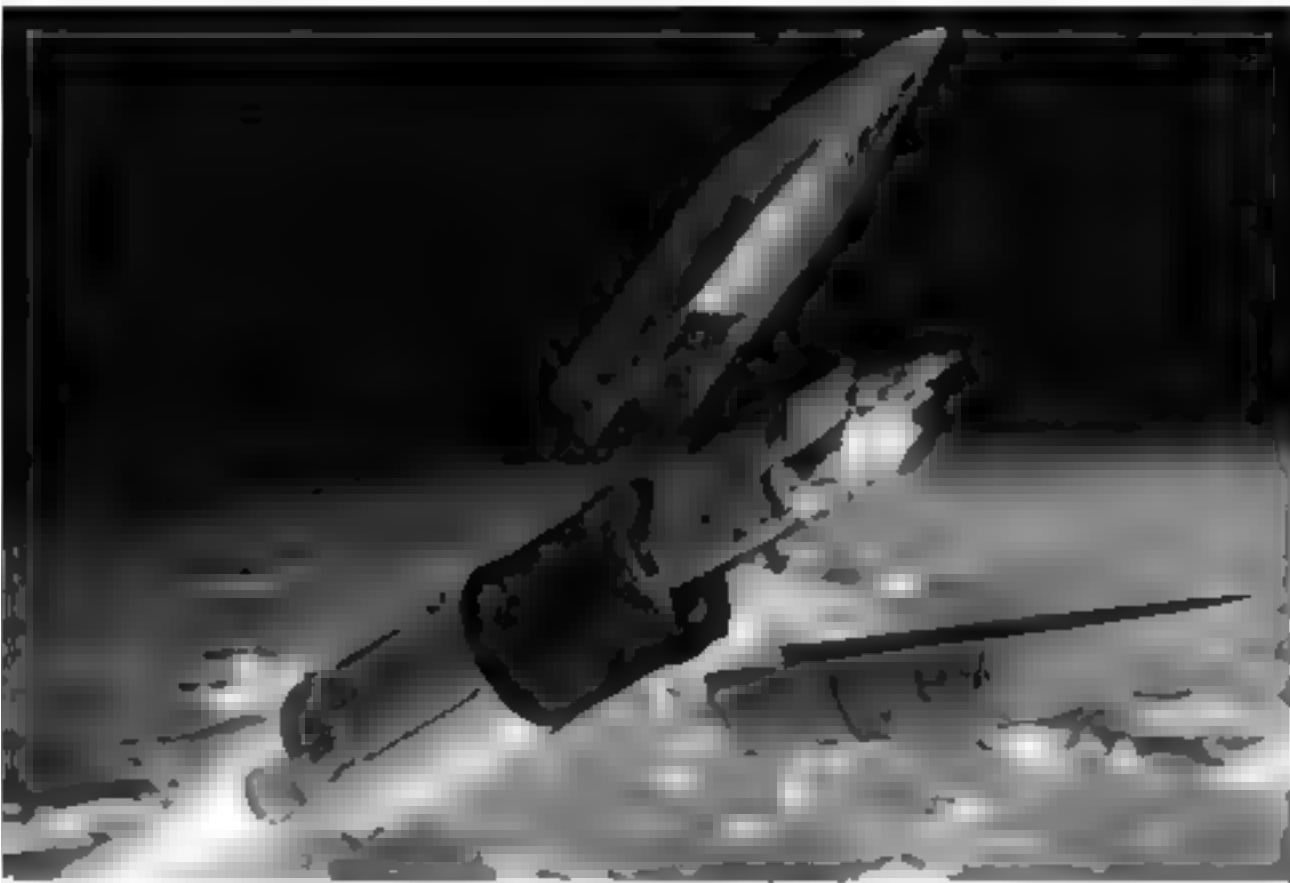


Figura 6PEP-5

ANÁLISE TRANSIENTE DOS CIRCUITOS DE PRIMEIRA E SEGUNDA ORDENS



E.S.A./SIPA/NewsCom

AS METAS DE APRENDIZAGEM DESTE CAPÍTULO SÃO:

- Ser capaz de calcular os valores iniciais das correntes nos indutores e das tensões nos capacitores para os circuitos transientes
- Saber como calcular as tensões e as correntes no regime transiente dos circuitos de primeira ordem
- Saber como calcular as tensões e as correntes no regime transiente dos circuitos de segunda ordem

Medições do Gelo Presente nas Águas do Mar Os dados disponíveis atualmente registram um processo crescente de aumento da temperatura global. O Instituto Goddard da NASA para Estudos Espaciais (GISS – *Goddard Institute for Space Studies*) tem reportado, por meio de seus registros, que estamos vivenciando o maior aquecimento da década (2000 a 2009). As medições do impacto ambiental dessa mudança – e a decisão de como responder a ela – é o principal desafio dos cientistas e pesquisadores da atualidade e dos anos vindouros.

Os dispositivos elétricos são essenciais no esforço para a medição de impactos como a redução do gelo polar. Esse gelo regula o clima global, uma vez que reflete cerca de 80% da luz solar que chega à Terra. Os dados da altimetria por radar via satélite estão sendo utilizados para medir o efeito do aquecimento nas geleiras polares. Aviões realizam voos rasos repetidos cruzando a camada de gelo Ártico, Antártico e da Groenlândia, utilizando radares de dispersão realimentados para mapear as transições

na espessura do gelo do mar. As medidas do crescimento e derretimento do gelo do mar por meio de radares durante todas as estações, do verão até o inverno, confirmam que o gelo está desaparecendo.

Este capítulo descreve as variações das tensões e das correntes nos circuitos resultantes da alimentação por meio de fontes de níveis constantes de um valor para outro. Os capacitores, os indutores e os resistores são conectados em série ou em paralelo, modelando-se, assim, as transições desde circuitos simples até os mais complexos. A extensão para fontes de tensão em pulsos de ondas quadradas demonstra a dinâmica de múltiplos chaveamentos. As transições ocorrentes nas tensões e nas correntes de um circuito, as quais serão estudadas neste capítulo, representam princípios que podem ser aplicados em uma grande variedade de dispositivos. Enquanto alguns parecem óbvios, outros, como aqueles utilizados na medição do gelo no mar, apresentam um impacto maior em nosso futuro.

7.1 Introdução

Neste capítulo discute-se o que normalmente é conhecido como análise transiente. Inicia-se a análise com os circuitos de primeira ordem – isto é, aqueles que contêm apenas um único elemento armazenador de energia. Quando apenas um desses elementos está presente na rede, esta pode ser descrita por uma equação diferencial de primeira ordem.

A análise aqui apresentada envolve a descrição e a avaliação do comportamento de um circuito em função do tempo após a ocorrência de uma variação brusca na rede pela abertura ou pelo fechamento de uma chave. Devido à presença de um ou mais elementos armazenadores, a resposta de um circuito a uma variação brusca passa por um período de acomodação antes de o circuito se estabilizar em uma configuração de regime estacionário. Este período de transição será examinado cuidadosamente na análise transiente aqui abordada.

Um dos parâmetros mais importantes que serão examinados nessa análise transiente é a constante de tempo do circuito. Este é um parâmetro muito importante da rede, uma vez que fornece a informação de quão rápido o circuito responderá às variações a ele impostas. Pode-se confrontar dois sistemas bastante diferentes para se obter um sentimento sobre esse parâmetro. Por exemplo, considere o modelo de um sistema de condicionamento de ar de uma sala e o modelo do estágio de amplificação de um simples transistor em um chip de computador. Ao se ajustar o seletor do termostato do ar-condicionado de 70°F (21°C) para 60°F (15°C), o compressor do aparelho passará a funcionar continuamente, e a temperatura da sala começará a diminuir. Todavia, a temperatura medida por um termômetro no interior da sala irá diminuir muito lentamente e, assim, o tempo necessário para a indicação da temperatura desejada será longo. Entretanto, se um sinal de disparo for enviado a um transistor para alterar seu estado, a ação pode levar apenas alguns nanossegundos. Esses dois sistemas possuem constantes de tempo significativamente distintas.

A análise dos circuitos de primeira ordem começa com a apresentação de duas técnicas de abordagem para a análise transiente: o procedimento da equação diferencial, em que uma equação diferencial é escrita e resolvida para cada rede, e uma aproximação passo a passo, em que se aproveita da vantagem do conhecimento da forma da solução em cada caso. No caso de circuitos de segunda ordem, um indutor e um capacitor estão presentes simultaneamente, e a rede é descrita por uma equação diferencial de segunda ordem. Embora os circuitos *RLC* sejam mais complexos que os circuitos armazenadores simples de primeira ordem, será utilizado um desenvolvimento similar àquele empregado para os sistemas de primeira ordem.

O desenvolvimento aqui apresentado trata apenas de circuitos muito simples, uma vez que a análise pode se tornar bastante complexa quando as redes contêm mais de um laço ou mais de um nó que não seja nó de referência. Além disso, será mostrado um método muito mais simples de tratamento desses circuitos quando a transformada de Laplace for apresentada mais adiante neste livro. Serão analisadas várias redes nas quais os parâmetros são escolhidos para ilustrar os diferentes tipos de resposta

do circuito. Finalmente, diversos exemplos de aplicações orientadas são apresentados e discutidos.

A discussão deve ser iniciada lembrando-se que, no Capítulo 6, foi mostrado que os capacitores e os indutores são capazes de armazenar energia elétrica. No caso de um capacitor carregado, a energia é armazenada no campo elétrico que existe entre as placas carregadas positiva e negativamente. Essa energia armazenada pode ser liberada se um circuito for, de alguma forma, conectado entre os terminais do capacitor, o que fornecerá um caminho pelo qual as cargas negativas se moverão em direção às cargas positivas. Como se sabe, esse movimento de cargas estabelece uma corrente. A taxa de descarga dessa energia é uma função direta dos parâmetros dos componentes presentes no circuito que é conectado entre as placas do capacitor.

Como exemplo, considere o circuito do flash de uma câmera fotográfica. Lembre-se de que a operação do circuito do flash, do ponto de vista do usuário, envolve o apertado de um botão na câmera que dispara tanto o obturador quanto o flash e que, em seguida, deve-se aguardar alguns segundos antes de repetir o processo para que uma nova fotografia seja tirada. Essa operação pode ser modelada utilizando-se o circuito mostrado na Fig. 7.1a. A fonte de tensão e o resistor R_f modelam a bateria que alimenta a câmera e o flash. O capacitor modela a energia armazenada, a chave modela o botão de acionamento e, finalmente, o resistor R modela a lâmpada de xenônio do flash. Assim, se o capacitor está carregado quando a chave é fechada, a tensão no capacitor cai e a energia é liberada para a lâmpada de xenônio, produzindo o flash. Na prática, a liberação dessa energia ocorre em poucos milissegundos, e o tempo de descarga é uma função dos componentes do circuito. Quando o botão é liberado e a chave é aberta, a bateria começa a recarregar o capacitor. Mais uma vez, o tempo necessário para carregar o capacitor depende dos componentes presentes no circuito. Os ciclos de carga e descarga são ilustrados graficamente na Fig. 7.1b. Embora a descarga ocorra em um curto espaço de tempo, ela não é instantânea. Para uma melhor compreensão do significado desse fenômeno, considere o que se pode chamar de *diagrama de corpo livre* da metade direita da rede mostrada na Fig. 7.1a, conforme mostrado na Fig. 7.1c (ou seja, um capacitor que é descarregado por meio de um resistor). Quando a chave é fechada, a LKC para o circuito fornece

$$C \frac{dv_C(t)}{dt} + \frac{v_C(t)}{R} = 0$$

ou

$$\frac{dv_C(t)}{dt} + \frac{1}{RC} v_C(t) = 0$$

Na próxima seção, será demonstrado que a solução dessa equação é

$$v_C(t) = V_0 e^{-t/RC}$$

Note que essa função é uma exponencial decrescente, e a taxa de seu decaimento depende dos valores de R e C . O produto RC é um parâmetro muito importante e, na discussão a seguir, será atribuído a ele um nome específico.

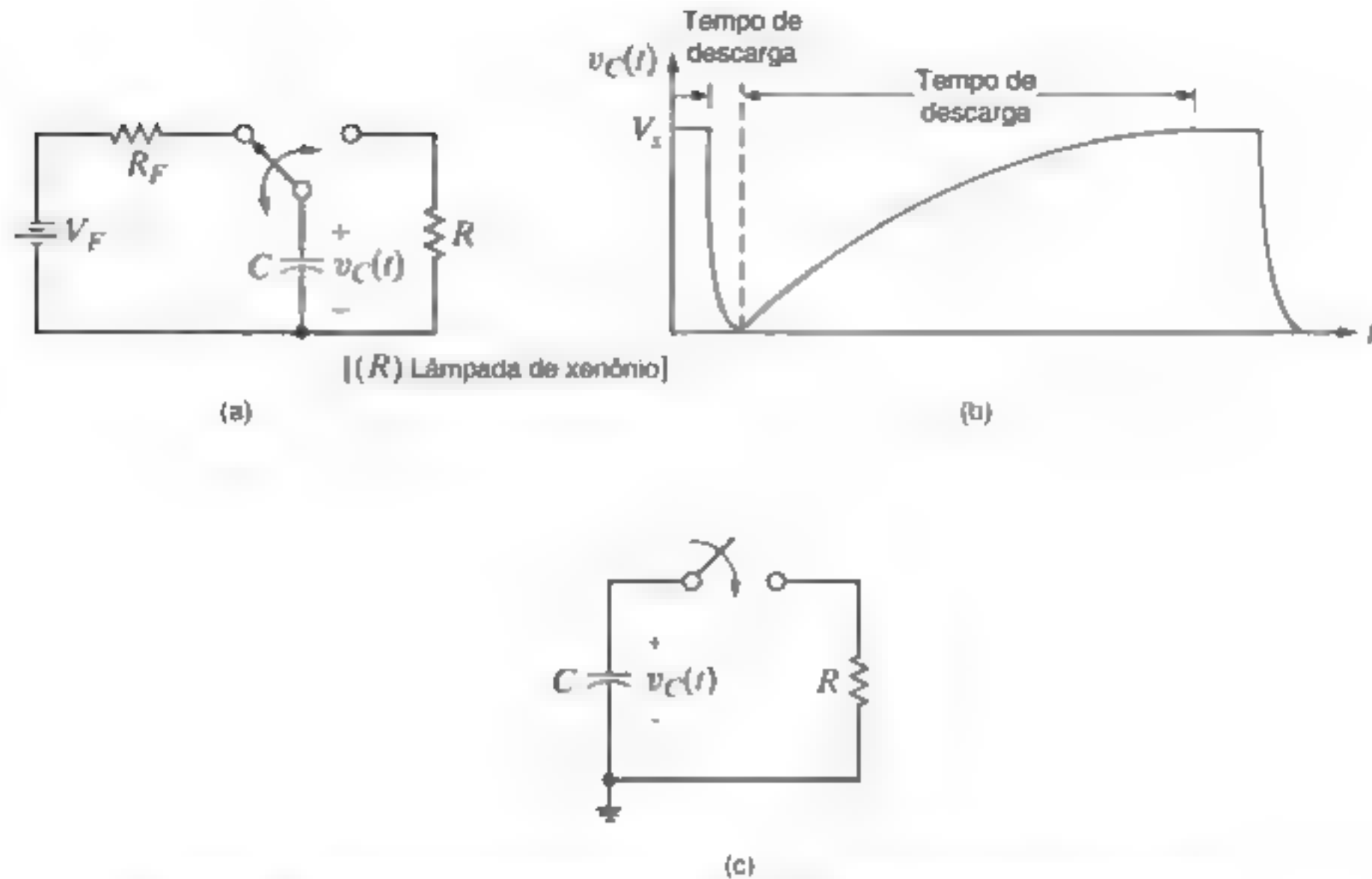


Figura 7.1 Diagramas utilizados para descrever o circuito do flash de uma câmera.

7.2 Circuitos de Primeira Ordem

FORMA GERAL DAS EQUAÇÕES DE RESPOSTA No estudo dos circuitos transientes de primeira ordem, será mostrado que a solução desses circuitos (isto é, a determinação da tensão ou da corrente) requer a solução de uma equação diferencial de primeira ordem na forma

$$\frac{dx(t)}{dt} + ax(t) = f(t) \quad 7.1$$

Embora existam várias técnicas para a solução de uma equação desse tipo, será obtida uma solução geral a ser empregada em dois diferentes procedimentos da análise transiente.

Um teorema fundamental das equações diferenciais estabelece que se $x(t) = x_p(t)$ é uma solução particular da Eq. (7.1), e $x(t) = x_c(t)$ é uma solução qualquer para a equação homogênea

$$\frac{dx(t)}{dt} + ax(t) = 0 \quad 7.2$$

então,

$$x(t) = x_p(t) + x_c(t) \quad 7.3$$

é uma solução da Eq. (7.1) original. O termo $x_p(t)$ é chamado de *solução particular*, ou resposta forçada, e o termo $x_c(t)$ é chamado de *solução complementar*, ou resposta natural.

Até agora nos restringimos à situação em que $f(t) = A$ (isto é, uma constante). A solução geral da equação diferencial consiste, portanto, em duas partes que são obtidas pela solução das duas equações

$$\frac{dx_p(t)}{dt} + ax_p(t) = A \quad 7.4$$

$$\frac{dx_c(t)}{dt} + ax_c(t) = 0 \quad 7.5$$

Como o lado direito da Eq. (7.4) é uma constante, é razoável admitir-se que a solução $x_p(t)$ deve também ser uma constante. Portanto, admite-se que

$$x_p(t) = K_1 \quad 7.6$$

A substituição dessa constante na Eq. (7.4) fornece

$$A = aK_1 \quad 7.7$$

Examinando a Eq. (7.5), nota-se que

$$\frac{dx_c(t)/dt}{x_c(t)} = -a \quad 7.8$$

Essa equação é equivalente a

$$\frac{d}{dt} [\ln x_c(t)] = -a$$

Assim,

$$\ln x_c(t) = -at + c$$

e, portanto,

$$x_c(t) = K_2 e^{-at} \quad 7.9$$

Logo, uma solução da Eq. (7.1) é

$$\begin{aligned} x(t) &= x_p(t) + x_c(t) \\ &= \frac{A}{a} + K_2 e^{-at} \end{aligned} \quad 7.10$$

A constante K_2 pode ser obtida se o valor da variável independente $x(t)$ for conhecido para um determinado instante de tempo.

A Eq. (7.10) pode, em geral, ser expressa na forma

$$x(t) = K_1 + K_2 e^{-t/\tau} \quad 7.11$$

Uma vez obtida a solução da Eq. (7.11), a certos elementos da equação são dados nomes comumente empregados em engenharia elétrica. Por exemplo, o termo K_1 é conhecido como *solução do regime estacionário*: o valor da variável $x(t)$ quando $t \rightarrow \infty$, fazendo com que o segundo termo se torne desprezível. A constante τ é chamada de *constante de tempo* do circuito. Note que, sendo $\tau > 0$, o segundo termo da Eq. (7.11) representa um decaimento exponencial que possui o valor K_2 para $t = 0$, e o valor 0 para $t \rightarrow \infty$. A taxa do decaimento exponencial é determinada pela constante de tempo τ . Um gráfico representativo desse efeito é mostrado na Fig. 7.2a. Como pode ser percebido com base na figura, o valor de $x_c(t)$ apresenta uma queda de K_2 para um valor de $0,368K_2$ em uma constante de tempo, isto é, uma queda de 63,2%. Em duas constantes de tempo, o valor de $x_c(t)$ cai para $0,135K_2$, uma queda de 63,2% do valor no tempo $t = \tau$. Isto significa que a diferença entre um ponto sobre a curva e o valor final da curva é de 63,2% para cada constante de tempo. Finalmente, após cinco constantes de tempo, $x_c(t) = 0,0067K_2$, que é inferior a 1%.

Uma propriedade interessante da função exponencial mostrada na Fig. 7.2a é que a inclinação inicial da curva intercepta o eixo dos tempos em um valor $t = \tau$. De fato, pode-se considerar qualquer ponto sobre a curva, não necessariamente o valor inicial, e determinar a constante de tempo obtendo o tempo necessário para se atingir uma diferença de 63,2%. Finalmente, a diferença entre uma constante de tempo baixa (isto é, uma resposta rápida) e uma constante de tempo alta (isto é, uma resposta lenta) é mostrada na Fig. 7.2b. Essas curvas indicam que, se o circuito possui uma constante de tempo baixa, ele atinge rapidamente o valor do regime estacionário. Ao contrário, se a constante de tempo é alta, um tempo maior será necessário para o circuito atingir o regime estacionário. Em qualquer caso, note que, basicamente, a resposta do circuito atinge o regime estacionário após um tempo igual a cinco constantes de tempo (isto é, 5τ).

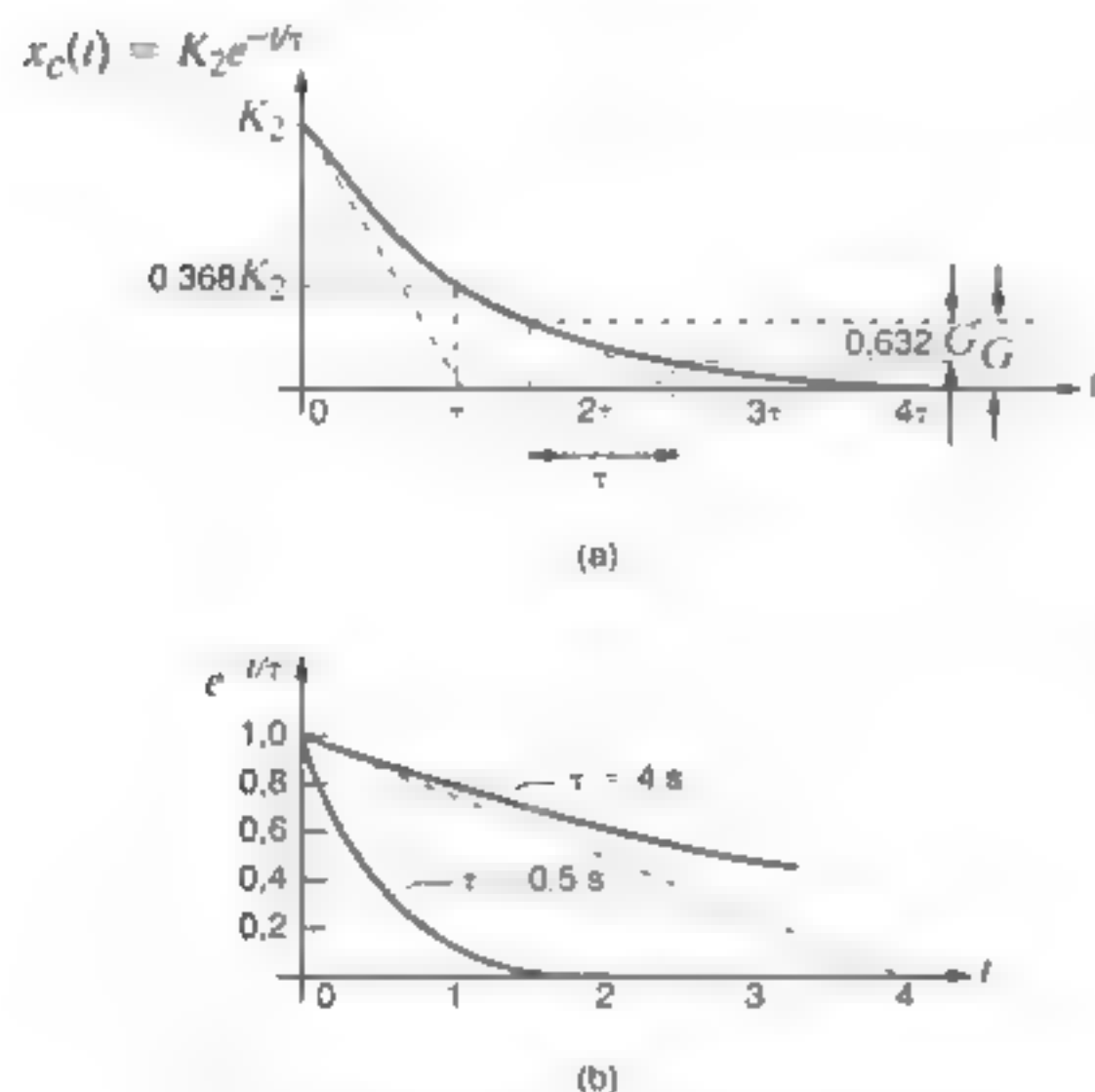


Figura 7.2 Ilustração da constante de tempo.

Observe que a discussão anterior é bastante genérica, uma vez que nenhuma forma específica de circuito foi considerada — admitiu-se apenas que a equação que o representa é uma equação diferencial de primeira ordem.

TÉCNICAS DE ANÁLISE

O Procedimento da Equação Diferencial A Eq. (7.11) define a forma geral da solução dos circuitos transientes de primeira ordem; isto é, ela representa a solução da equação diferencial que descreve uma corrente ou uma tensão incógnita *em qualquer posição da rede*. Uma das formas de se chegar a essa solução é resolver a equação que descreve o comportamento da rede utilizando o que é frequentemente chamado de *procedimento da variável de estado*. Nessa técnica, escreve-se a equação da tensão entre os terminais do capacitor e/ou a equação da corrente que passa pelo indutor. Lembre-se do Capítulo 6 que essas grandezas não podem variar instantaneamente. Inicialmente, ilustra-se essa técnica no sentido geral e, em seguida, são examinados dois exemplos específicos.

Considere o circuito mostrado na Fig. 7.3a. No tempo $t = 0$, a chave é fechada. A equação da LKC que descreve a tensão no capacitor para um tempo $t > 0$ é

$$C \frac{dv(t)}{dt} + \frac{v(t) - V_F}{R} = 0$$

ou

$$\frac{dv(t)}{dt} + \frac{v(t)}{RC} = \frac{V_F}{RC}$$

Pelo desenvolvimento anterior, admite-se que a solução dessa equação diferencial de primeira ordem tem a forma

$$v(t) = K_1 + K_2 e^{-t/\tau}$$

A substituição dessa solução na equação diferencial fornece

$$-\frac{K_2}{\tau} e^{-t/\tau} + \frac{K_1}{RC} + \frac{K_2}{RC} e^{-t/\tau} = \frac{V_F}{RC}$$

Igualando-se os termos constantes e os termos exponenciais, obtém-se

$$K = V_F$$

$$\tau = RC$$

Portanto,

$$v(t) = V_F + K_2 e^{-t/\tau}$$

em que V_F é o valor da tensão em regime estacionário, e RC é a constante de tempo da rede. A constante K_2 é determinada pela condição inicial do capacitor. Por exemplo, se o capacitor está inicialmente descarregado (isto é, a tensão entre seus terminais é nula em $t = 0$), tem-se

$$0 = V_F + K_2$$

ou

$$K_2 = -V_F$$

Logo, a solução completa para a tensão $v(t)$ é

$$v(t) = V_F - V_F e^{-t/\tau}$$

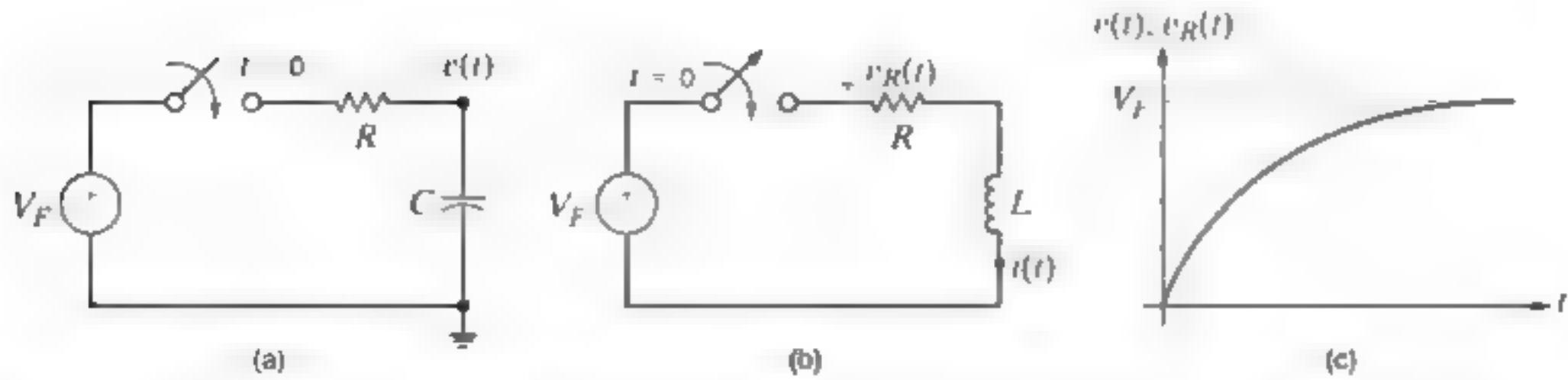


Figura 7.3 (a) Circuito RC, (b) circuito RL, (c) representação gráfica da tensão no capacitor em (a) e da tensão no resistor em (b).

O circuito mostrado na Fig. 7.3b pode ser examinado de forma similar. A equação da LKT que descreve a corrente no indutor para $t > 0$ é

$$L \frac{di(t)}{dt} + Ri(t) = V_F$$

Um desenvolvimento idêntico ao empregado anteriormente fornece

$$i(t) = \frac{V_F}{R} + K_1 e^{-(\frac{R}{L})t}$$

em que V_F/R é o valor da corrente em regime estacionário e L/R é a constante de tempo do circuito. Caso não exista corrente inicial no indutor, tem-se, para $t = 0$,

$$0 = \frac{V_F}{R} + K_1$$

c

$$K_1 = -\frac{V_F}{R}$$

Portanto,

$$i(t) = \frac{V_F}{R} - \frac{V_F}{R} e^{-\frac{t}{\tau}}$$

é a solução completa. Note que o cálculo da tensão entre os terminais do resistor pode ser obtido por

$$v_R(t) = Ri(t) = V_F (1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$$

Portanto, verifica-se que a tensão entre os terminais do capacitor no circuito RC e a tensão entre os terminais do resistor no circuito RL apresentam a mesma forma geral. Uma representação gráfica dessas funções é mostrada na Fig. 7.3c.

EXEMPLO 7.1

Considere o circuito mostrado na Fig. 7.4a. Admita que a chave fique na posição 1 por um longo tempo e que no tempo $t = 0$ ela seja acionada para a posição 2. Deseja-se calcular a corrente $i(t)$ para $t > 0$.

SOLUÇÃO

Em $t = 0^-$ o capacitor está completamente carregado e não conduz qualquer corrente, uma vez que ele funciona como um circuito aberto com tensão CC. A tensão inicial entre os terminais do capacitor pode ser obtida utilizando a divisão de tensão. Conforme mostrado na Fig. 7.4b, tem-se

$$v_C(0^-) = 12 \left(\frac{3k}{6k + 3k} \right) = 4 \text{ V}$$

Para $t > 0$ a rede é a mostrada na Fig. 7.4c. A equação decorrente da aplicação da LKC para a tensão entre os terminais do capacitor é

$$\frac{v(t)}{R} + C \frac{dv(t)}{dt} + \frac{v(t)}{R} = 0$$

Utilizando os valores dos componentes, a equação fica

$$\frac{dv(t)}{dt} + 5v(t) = 0$$

A forma da solução dessa equação homogênea é

$$v(t) = K_1 e^{-t/\tau}$$

Substituindo essa solução na equação diferencial, obtém-se $\tau = 0,2$ s. Assim,

$$v(t) = K_1 e^{-t/0,2} \text{ V}$$

Utilizando a condição inicial $v_C(0^-) = v_C(0^+) = 4$ V, obtém-se a solução completa, qual seja,

$$v(t) = 4e^{-t/0,2} \text{ V}$$

Assim, a corrente $i(t)$ pode ser expressa por

$$i(t) = \frac{v(t)}{R}$$

ou

$$i(t) = \frac{4}{3} e^{-t/0,2} \text{ mA}$$

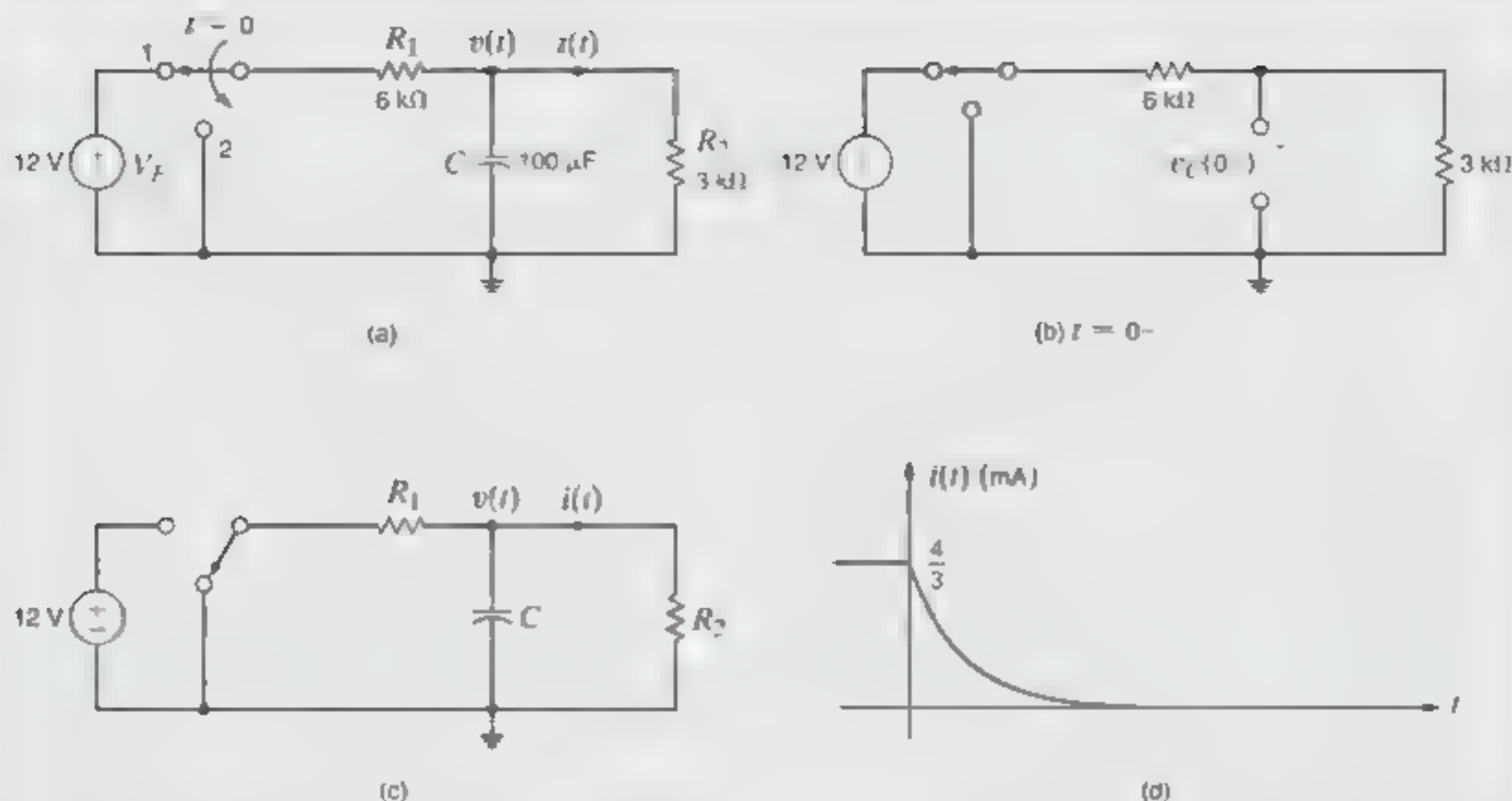


Figura 7.4 Análise dos circuitos RC.

EXEMPLO 7.2

A chave da rede mostrada na Fig. 7.5a abre em $t = 0$. Seja a determinação da tensão de saída $v_o(t)$ para $t > 0$.

SOLUÇÃO

Em $t = 0^-$ o circuito está no regime estacionário e o indutor atua como um curto-circuito. A corrente inicial que passa pelo indutor pode ser obtida de várias formas; todavia, será obtida a equivalência de Thévenin da parte da rede à esquerda do indutor, conforme mostrado na Fig. 7.5b. Com base nessa rede, obtém-se $I_1 = 4$ A e $V_{oc} = 4$ V. Além disso, $R_{Th} = 1$ Ω. Assim, pela Fig. 7.5c, obtém-se $i_L(0^-) = 4/3$ A.

A rede para $t > 0$ é mostrada na Fig. 7.5d. Observe que a fonte independente de 4 V e o resistor de 2 Ω em série com ela não produzem qualquer impacto no circuito resultante. A equação da LKT referente ao circuito é

$$-V_F + R_1 i(t) + L \frac{di(t)}{dt} + R_2 i(t) = 0$$

que, após a substituição dos valores dos componentes, reduz-se a

$$\frac{di(t)}{dt} + 2i(t) = 6$$

A solução dessa equação possui a forma

$$i(t) = K_1 + K_2 e^{-2t}$$

a qual, quando substituída na equação diferencial, fornece

$$\begin{aligned} K_1 &= 3 \\ K_2 &= -1,2 \end{aligned}$$

Portanto,

$$i(t) = \left(3 - 1,2 e^{-2t}\right) \text{ A}$$

Avaliando-se essa função na condição inicial, que é

$$i_L(0^-) = i_L(0^+) = i(0) = 4/3 \text{ A}$$

obtem-se

$$K_2 = -\frac{5}{3}$$

Logo,

$$i(t) = \left(3 - \frac{5}{3} e^{-2t}\right) \text{ A}$$

e, portanto,

$$v_o(t) = 6 - \frac{10}{3} e^{-2t} \text{ V}$$

Um gráfico da curva referente à tensão $v_o(t)$ é mostrado na Fig. 7.5e.

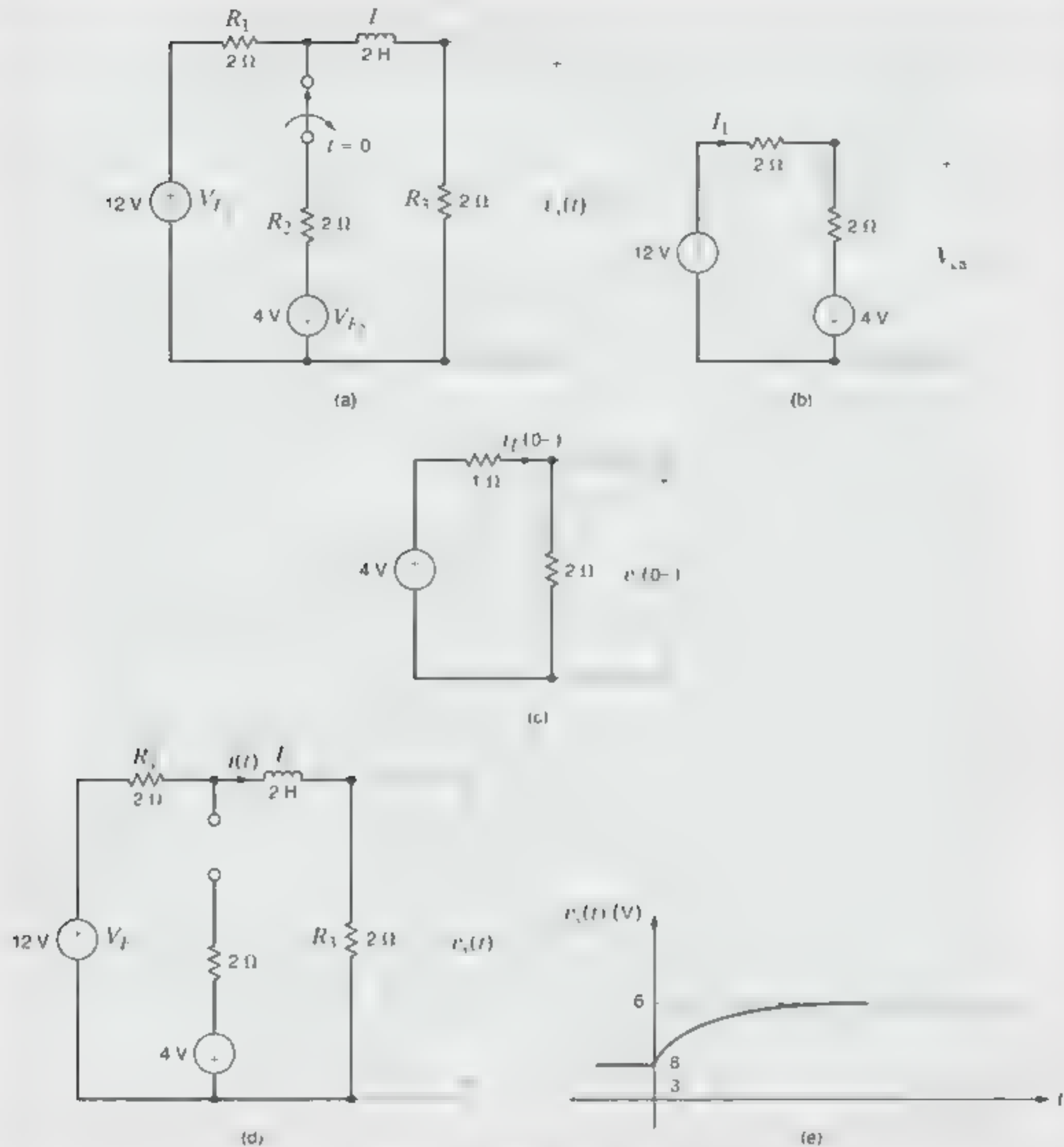


Figura 7.5 Análise de um circuito RL.

Avaliação do Aprendizado

E7.1 Determine a tensão $v_C(t)$ do circuito mostrado na Fig. E7.1 para $t > 0$.

RESPOSTA: $v_C(t) = 8e^{-t/0,5}\text{ V}$

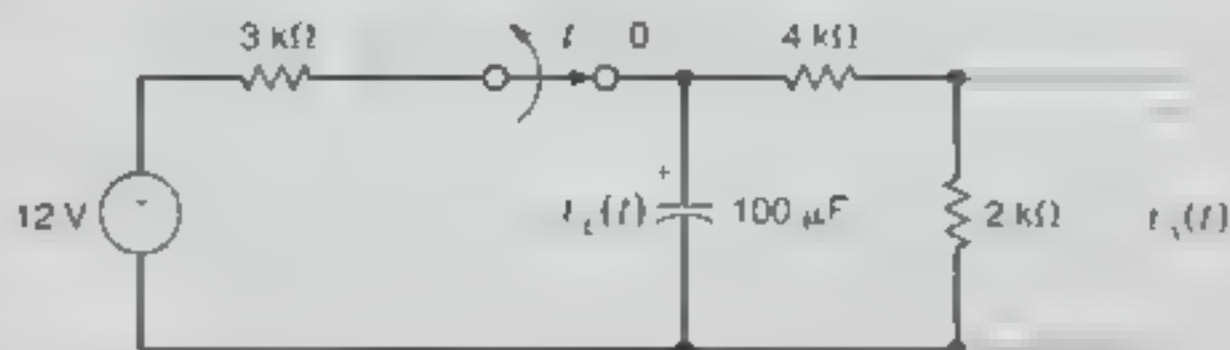


Figura E7.1

E7.2 Utilize o procedimento da equação diferencial para determinar a tensão $v_x(t)$ do circuito mostrado na Fig. E7.2 para $t > 0$. Represente graficamente a curva da resposta.

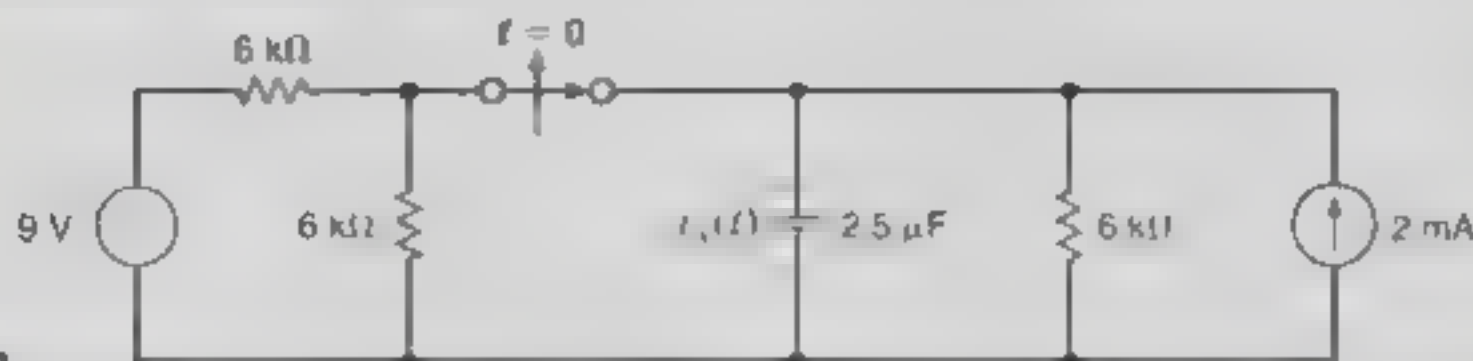


Figura E7.2

RESPOSTA:

$$v_x(t) = 12 - 5e^{-t/0.05} \text{ V}$$

E7.3 No circuito mostrado na Fig. E7.3, a chave abre no tempo $t = 0$. Determine $i_1(t)$ para $t > 0$.

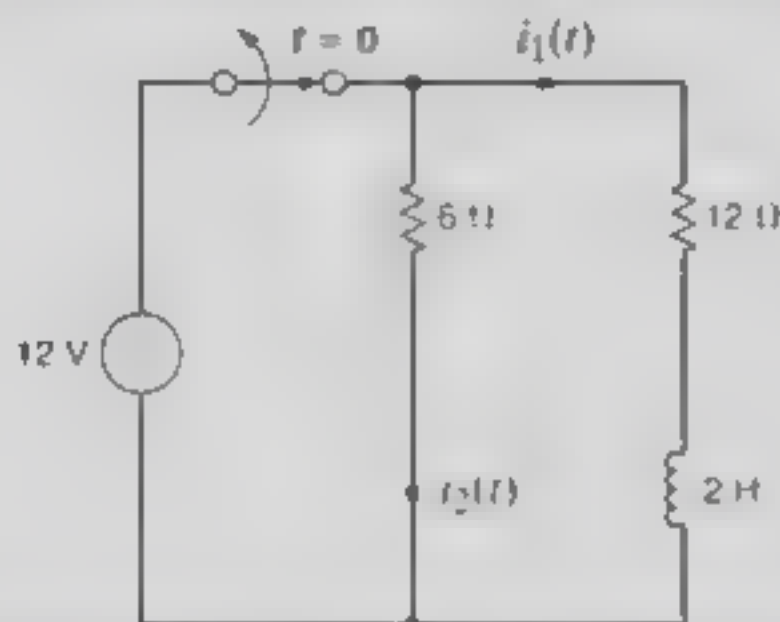


Figura E7.3

RESPOSTA: $i_1(t) = 1e^{-9t} \text{ A}$.

E7.4 Utilize o procedimento da equação diferencial para determinar a corrente $i(t)$ do circuito mostrado na Fig. E7.4 para $t > 0$.

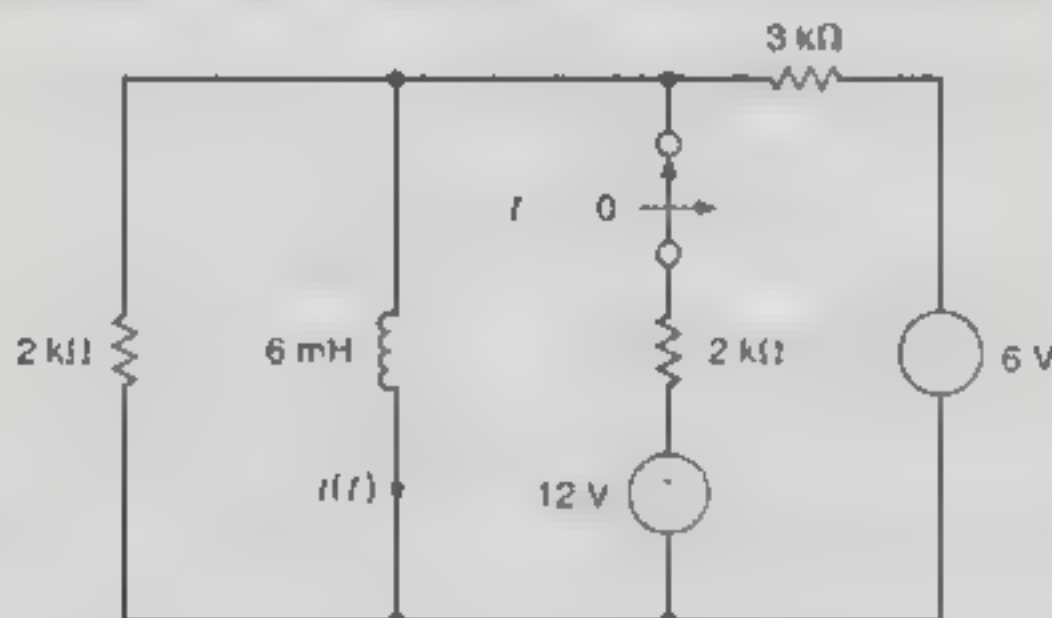


Figura E7.4

RESPOSTA:

$$i(t) = -2 + 6e^{-t/0.001} \text{ mA}$$

O Procedimento Passo a Passo Na técnica de análise anterior, deduziu-se a equação diferencial para a tensão no capacitor ou a corrente no indutor, resolveu-se a equação diferencial e utilizou-se a solução na determinação da variável incógnita do circuito. Por meio de um procedimento bastante metódico, que será apresentado agora, utiliza-se o fato de a Eq. (7.11) representar a forma da solução e emprega-se a análise de circuitos para determinar as constantes K_1 , K_2 e τ .

A partir da Eq. (7.11) pode-se observar que, quando $t \rightarrow \infty$, $e^{-at} \rightarrow 0$ e $x(t) = K_1$. Portanto, se o circuito é resolvido para a variável $x(t)$ no regime estacionário (isto é, quando $t \rightarrow \infty$) com o capacitor substituído por um circuito aberto [v é constante e, portanto, $i = C(dv/dt) = 0$] ou o indutor substituído por um curto-circuito [i é constante e, portanto, $v = L(di/dt) = 0$], então a variável $x(t) = K_1$. Note que, sendo removido o capacitor ou o indutor, o circuito passa a ser um circuito CC

com fontes constantes e resistores, e, portanto, apenas uma análise CC é necessária para se obter sua solução no regime estacionário.

A constante K_2 na Eq. (7.11) também pode ser obtida pela solução de um circuito CC no qual um capacitor é substituído por uma fonte de tensão ou um indutor é substituído por uma fonte de corrente. O valor da fonte de tensão para o capacitor ou da fonte de corrente para o indutor é conhecido para um determinado instante de tempo. Em geral, será utilizado o valor da condição inicial, uma vez que este é, geralmente, o valor conhecido, todavia, pode ser utilizado o valor referente a qualquer instante. Esse valor pode ser obtido de várias formas e, frequentemente, é especificado como um dado de entrada no enunciado do problema. Entretanto, a situação mais comum é aquela em que uma chave do circuito é acionada e o valor inicial da tensão no capacitor ou da corrente no indutor é determinado a partir do

circuito anterior (isto é, o circuito antes de a chave ser acionada). Normalmente, admite-se que o circuito inicial já atingiu o regime estacionário e, portanto, a tensão entre os terminais do capacitor ou a corrente pelo indutor pode ser obtida exatamente da mesma forma utilizada para se obter K_1 .

Finalmente, o valor da constante de tempo pode ser obtido determinando-se a resistência equivalente de Thévenin entre os terminais do elemento armazenador. Assim, $\tau = R_{Th}C$ para um circuito RC e $\tau = L/R_{Th}$ para um circuito RL .

Reitera-se agora este procedimento passo a passo.

Estratégia para Solução de Problemas

Utilização do Procedimento Passo a Passo

- Etapa 1.** Admite-se uma solução para a variável $x(t)$ da forma $x(t) = K_1 + K_2 e^{-t/\tau}$.
- Etapa 2.** Admitindo que o circuito original já tenha atingido o estado estacionário antes de uma chave ser acionada (produzindo, portanto, um novo circuito), construa esse circuito original com o capacitor substituído por um circuito aberto ou o indutor substituído por um curto-circuito. Resolva o circuito para a tensão entre os terminais do capacitor, $v_C(0^-)$, ou para a corrente que passa pelo indutor, $i_L(0^-)$, antes de acionar a chave.
- Etapa 3.** Lembre-se, do Capítulo 6, que a tensão entre os terminais de um capacitor e a corrente que flui por um indutor não podem variar instantaneamente. Construa o circuito, válido apenas em $t = 0^+$ com as chaves em suas novas posições. Substitua um capacitor por uma fonte de tensão com um valor $v_C(0^+) = v_C(0^-)$ ou um indutor por uma fonte de corrente com um valor $i_L(0^+) = i_L(0^-)$. Resolva para o valor inicial da variável $x(0^+)$.
- Etapa 4.** Admitindo que o regime estacionário tenha sido atingido após as chaves serem acionadas, construa o circuito equivalente, válido para $t > 5\tau$, substituindo o capacitor por um circuito aberto ou o indutor por um curto-circuito. Resolva para o valor em regime estacionário da variável

$$x(t)|_{t \gg 5\tau} \approx x(\infty)$$

- Etapa 5.** Uma vez que a constante de tempo é a mesma para todas as tensões e correntes no circuito, ela pode ser obtida pela redução do circuito como um todo a um simples circuito em série contendo uma fonte de tensão, um resistor e um elemento armazenador (isto é, um capacitor ou um indutor) formando um circuito equivalente de Thévenin nos terminais do elemento armazenador. Este circuito equivalente de Thévenin é obtido pela observação do circuito a partir dos terminais do elemento armazenador. A constante de tempo para um circuito contendo um capacitor é $\tau = R_{Th}C$, e para um circuito contendo um indutor é $\tau = L/R_{Th}$.
- Etapa 6.** Utilizando os resultados dos passos 3, 4 e 5, pode-se calcular as constantes da etapa 1 como

$$x(0^+) = K_1 + K_2$$

$$x(\infty) = K_1$$

Portanto, $K_1 = x(\infty)$, $K_2 = x(0^+) - x(\infty)$, e assim a solução fica

$$x(t) = x(\infty) + [x(0^+) - x(\infty)]e^{-t/\tau}$$

Tenha sempre em mente que essa forma de solução apenas se aplica a circuitos de primeira ordem contendo fontes CC. Caso as fontes não sejam CC, a resposta forçada será diferente. Geralmente, a resposta forçada possui a mesma forma das funções de forçamento (fontes) e suas derivadas.

EXEMPLO 7.3

Considere o circuito mostrado na Fig. 7.6a. O circuito está no regime estacionário antes do tempo $t = 0$, instante em que a chave é fechada. Seja o cálculo da corrente $i(t)$ para $t > 0$.

SOLUÇÃO

- Passo 1.** A corrente $i(t)$ possui a forma $K_1 + K_2 e^{-t/\tau}$.
- Passo 2.** A tensão inicial entre os terminais do capacitor pode ser calculada com base na Fig. 7.6b, isto é,

$$v_C(0^-) = 36 - (2)(2) \\ = 32 \text{ V}$$

- Passo 3.** O novo circuito, válido apenas para $t = 0^+$, é mostrado na Fig. 7.6c. O valor da fonte de tensão que

substitui o capacitor é $v_C(0^-) = v_C(0^+) = 32 \text{ V}$. Logo,

$$i(0^+) = \frac{32}{6k} \\ = \frac{16}{3} \text{ mA}$$

- Passo 4.** O circuito equivalente, válido para $t > 5\tau$, é mostrado na Fig. 7.6d. A corrente $i(\infty)$ causada pela fonte de 36 V é

$$i(\infty) = \frac{36}{2k + 6k} \\ = \frac{9}{2} \text{ mA}$$

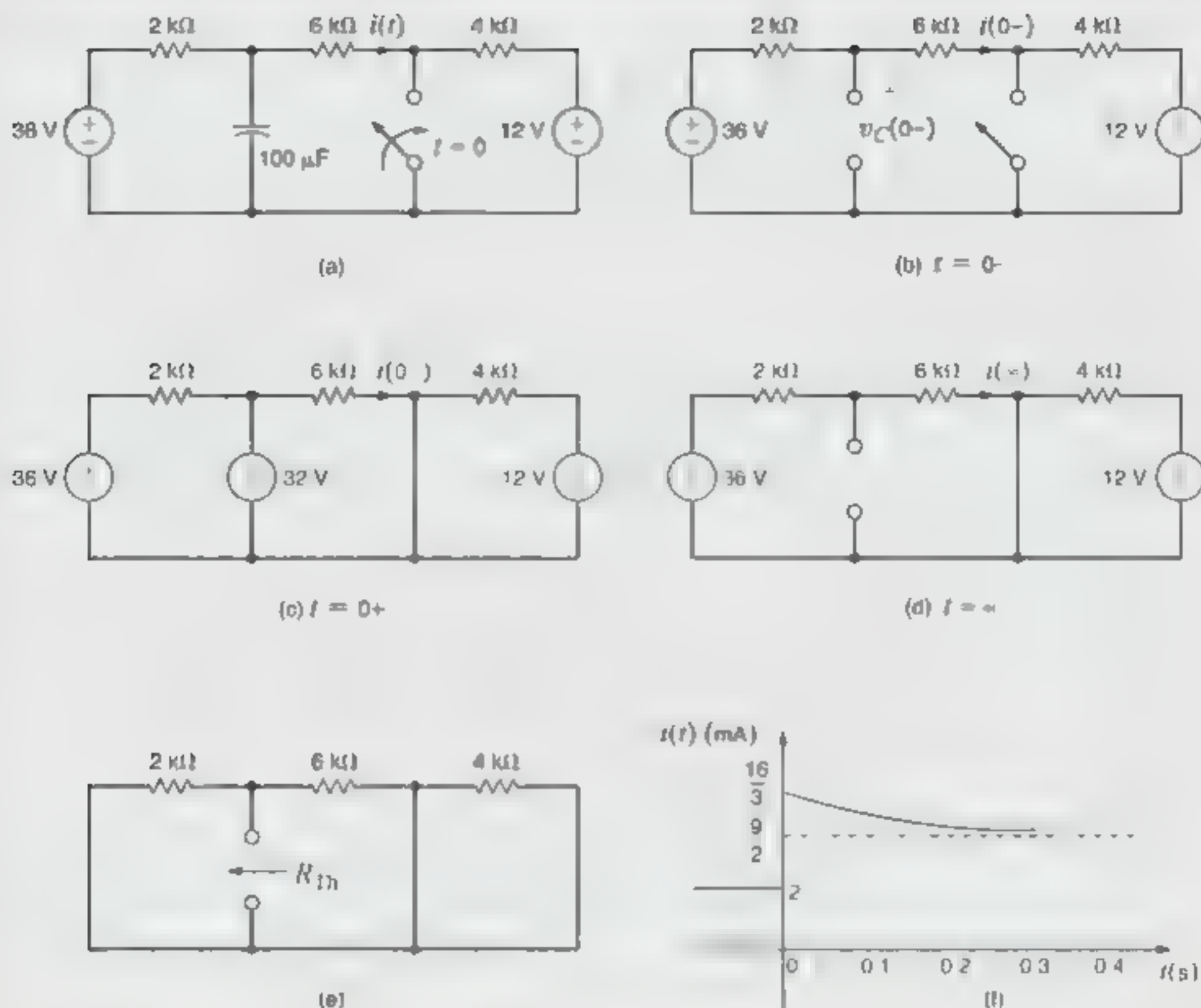


Figura 7.6 Análise do transiente de um circuito RC sujeito a uma função forçamento constante.

Passo 5. A resistência equivalente de Thévenin, obtida pela observação dos terminais do capacitor em circuito aberto na Fig. 7.6e, é

$$R_{th} = \frac{(2k)(6k)}{2k + 6k} = \frac{3}{2} k\Omega$$

Portanto, a constante de tempo do circuito é

$$\begin{aligned} \tau &= R_{th}C \\ &= \left(\frac{3}{2}\right)(10^3)(100)(10^{-6}) \\ &= 0,15 \text{ s} \end{aligned}$$

Passo 6.

$$K_1 = i(\infty) = \frac{9}{2} \text{ mA}$$

$$\begin{aligned} A &= i(0+) - i(\infty) = i(0+) - K_1 \\ &= \frac{16}{3} - \frac{9}{2} \\ &= \frac{5}{6} \text{ mA} \end{aligned}$$

Portanto,

$$i(t) = \frac{36}{8} + \frac{5}{6} e^{-t/0,15} \text{ mA}$$

O gráfico gerado por essa equação é mostrado na Fig. 7.7 e pode ser comparado ao gráfico esquemático apresentado na Fig. 7.6f. Uma análise da Fig. 7.6f indica novamente que, embora a tensão entre os terminais do capacitor seja contínua em $t=0$, a corrente $i(t)$ no resistor de $6 k\Omega$ sofre um salto de 2 mA para $5 \frac{1}{3}$ mA em $t=0$ e, finalmente, decai para $4 \frac{1}{2}$ mA.

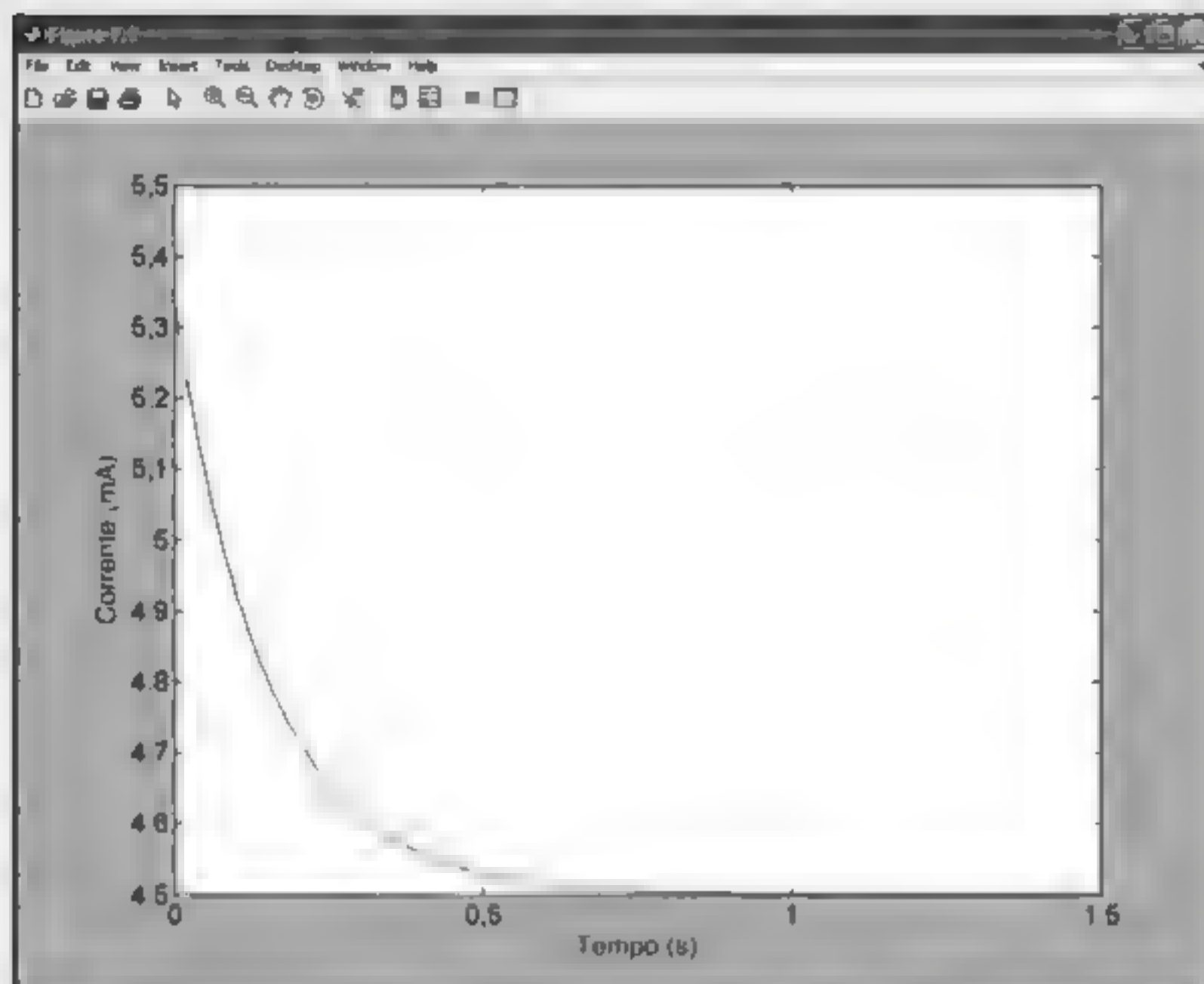


Figura 7.7 Gráfico gerado para o Exemplo 7.3.

EXEMPLO 7.4

Admite-se que o circuito mostrado na Fig. 7.8a esteja na condição de regime estacionário antes de a chave ser fechada em $t = 0$. Deseja-se calcular a tensão $v(t)$ para $t > 0$.

SOLUÇÃO

Passo 1. A tensão $v(t)$ possui a forma $K_1 + K_2 e^{-\alpha t}$.

Passo 2. Com base na Fig. 7.8b pode-se verificar que

$$i_L(0^-) = \frac{24}{4 + \frac{(6)(3)}{6+3}} \left(\frac{6}{6+3} \right) = \frac{8}{3} \text{ A}$$

Passo 3. O novo circuito, válido apenas para $t = 0^+$, é mostrado na Fig. 7.8c, o qual é equivalente ao circuito mostrado na Fig. 7.8d. O valor da fonte de corrente que substitui o indutor é $i_L(0^-) = i_L(0^+) = 8/3 \text{ A}$. A tensão nodal $v_1(0^+)$ pode ser determinada a partir do circuito mostrado na Fig. 7.8d utilizando-se a equação de um único nó, e $v(0^+)$ é igual à dife-

rença entre a tensão da fonte e $v_1(0^+)$. A equação para $v_1(0^+)$ é

$$\frac{v_1(0^+)}{4} + \frac{v_1(0^+)}{6} + \frac{8}{3} + \frac{v_1(0^+)}{12} = 0$$

ou

$$v_1(0^+) = -\frac{20}{3} \text{ V}$$

Portanto,

$$v(0^+) = 24 - v_1(0^+) = \frac{52}{3} \text{ V}$$

Passo 4. O circuito equivalente para a condição de regime estacionário após a chave ser fechada é mostrado na Fig. 7.8e. Note que os resistores de 6Ω , 12Ω , 1Ω e 2Ω ficam em curto e, portanto, $v(\infty) = 24 \text{ V}$.

Passo 5. A resistência equivalente de Thévenin é obtida observando-se o circuito a partir dos terminais do indutor. Esse circuito é mostrado na Fig. 7.8f. Uma análise cuidadosa mostra que R_{th} é igual à combinação em paralelo dos resistores de 4Ω ,

$6\ \Omega$ e $12\ \Omega$. Portanto, $R_{Th} = 2\ \Omega$, e a constante de tempo do circuito é

$$\tau = \frac{L}{R_{Th}} = \frac{4}{2} = 2\text{ s}$$

Passo 6. Considerando a análise anterior, obtêm-se

$$K_1 = v(\infty) = 24$$

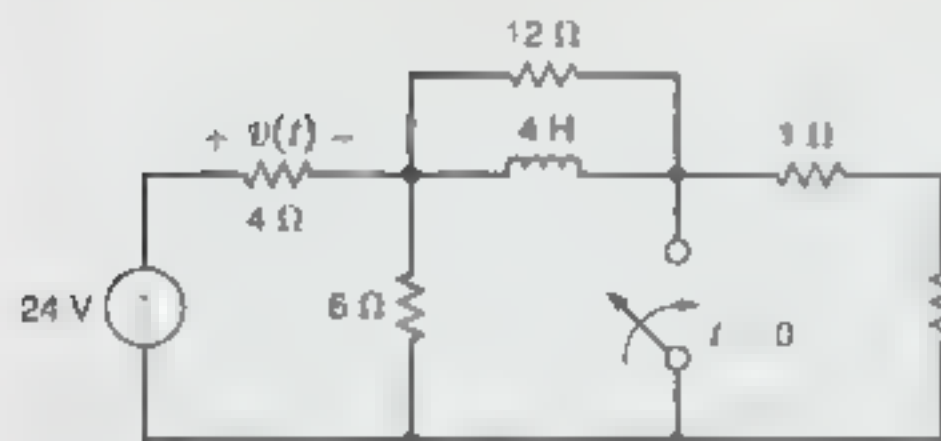
$$K_2 = v(0+) - v(\infty) = -\frac{20}{3}$$

e, assim,

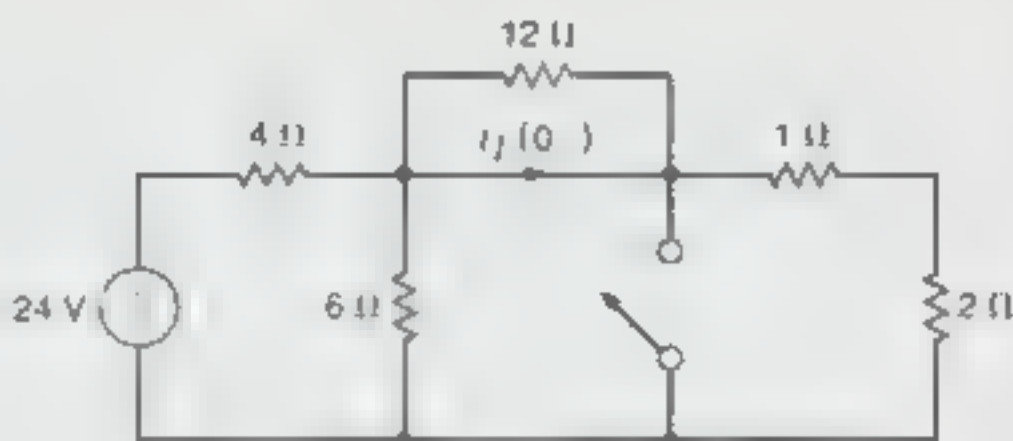
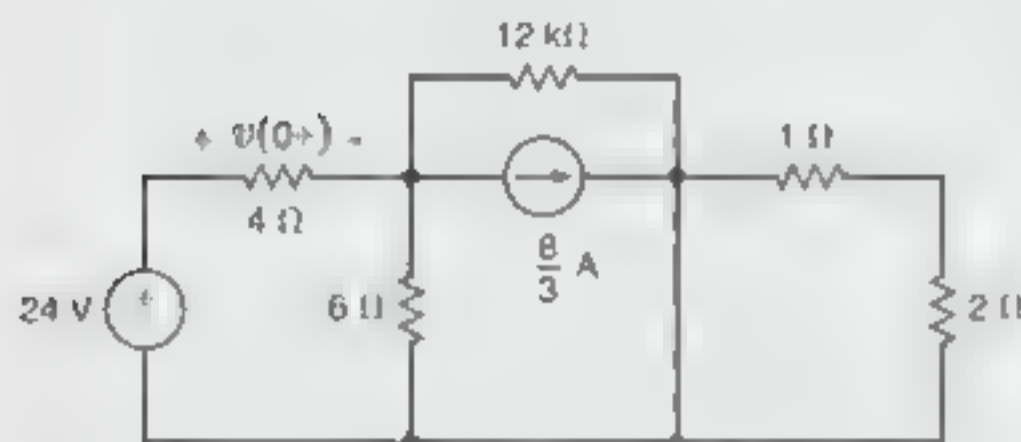
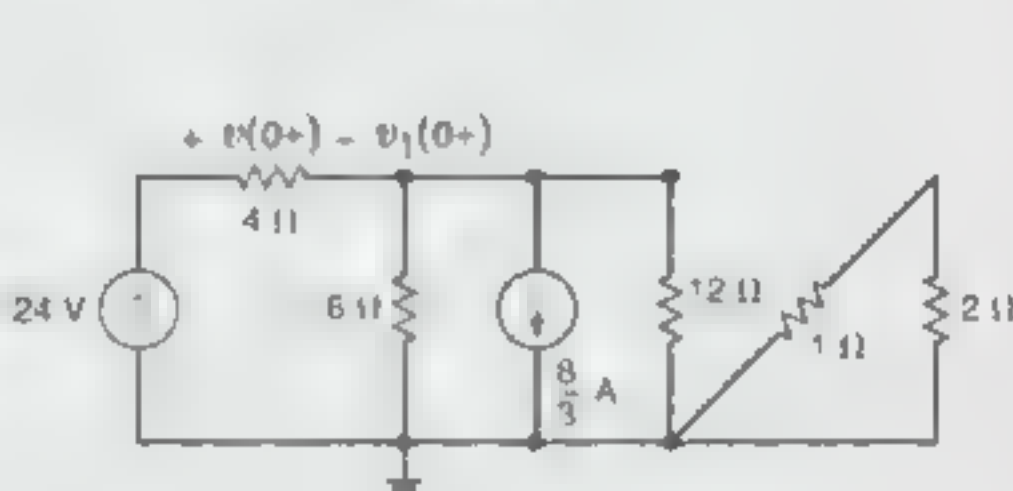
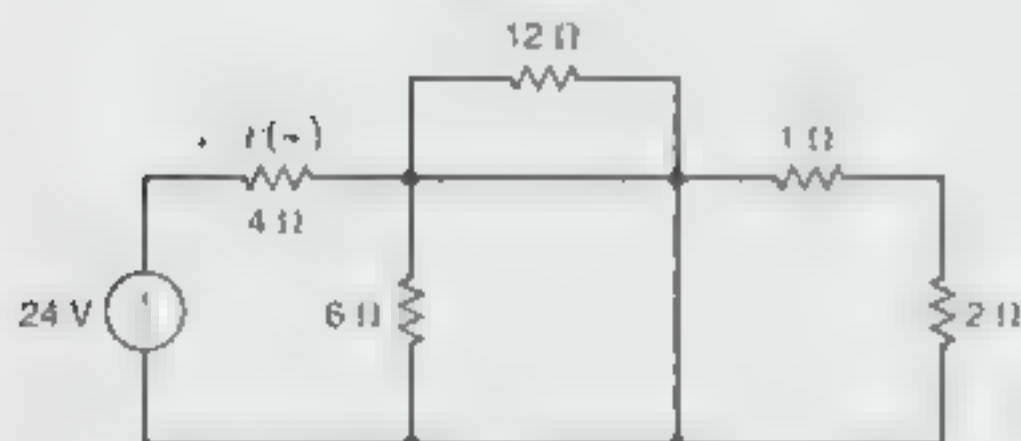
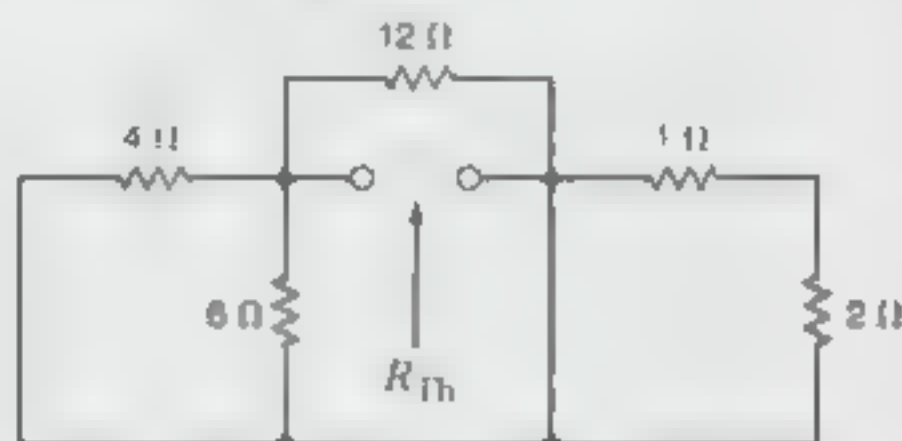
$$v(t) = 24 - \frac{20}{3}e^{-t/2}\text{ V}$$

Com base na Fig. 7.8b pode-se perceber que o valor de $v(t)$ antes de a chave ser fechada é de 16 V. Esse valor salta para 17,33 V em $t = 0$.

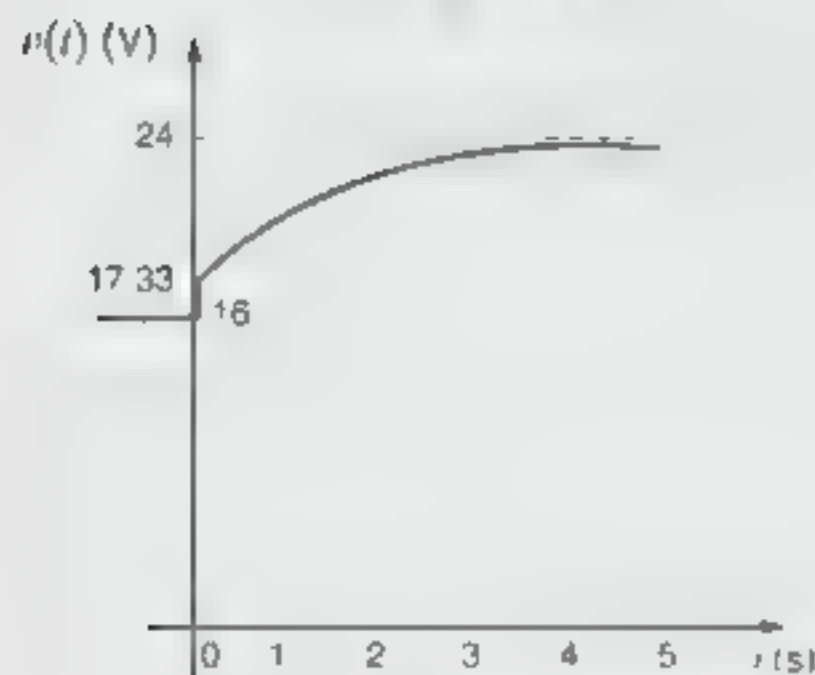
A Fig. 7.9 mostra o gráfico representativo dessa função para $t > 0$.



(a)

(b) $t = 0$ (c) $t = 0+$ (d) $t = 0+$ (e) $t = \infty$ 

(f)



(g)

Figura 7.8 Análise do transiente de um circuito RL sujeito a uma função forçamento constante.

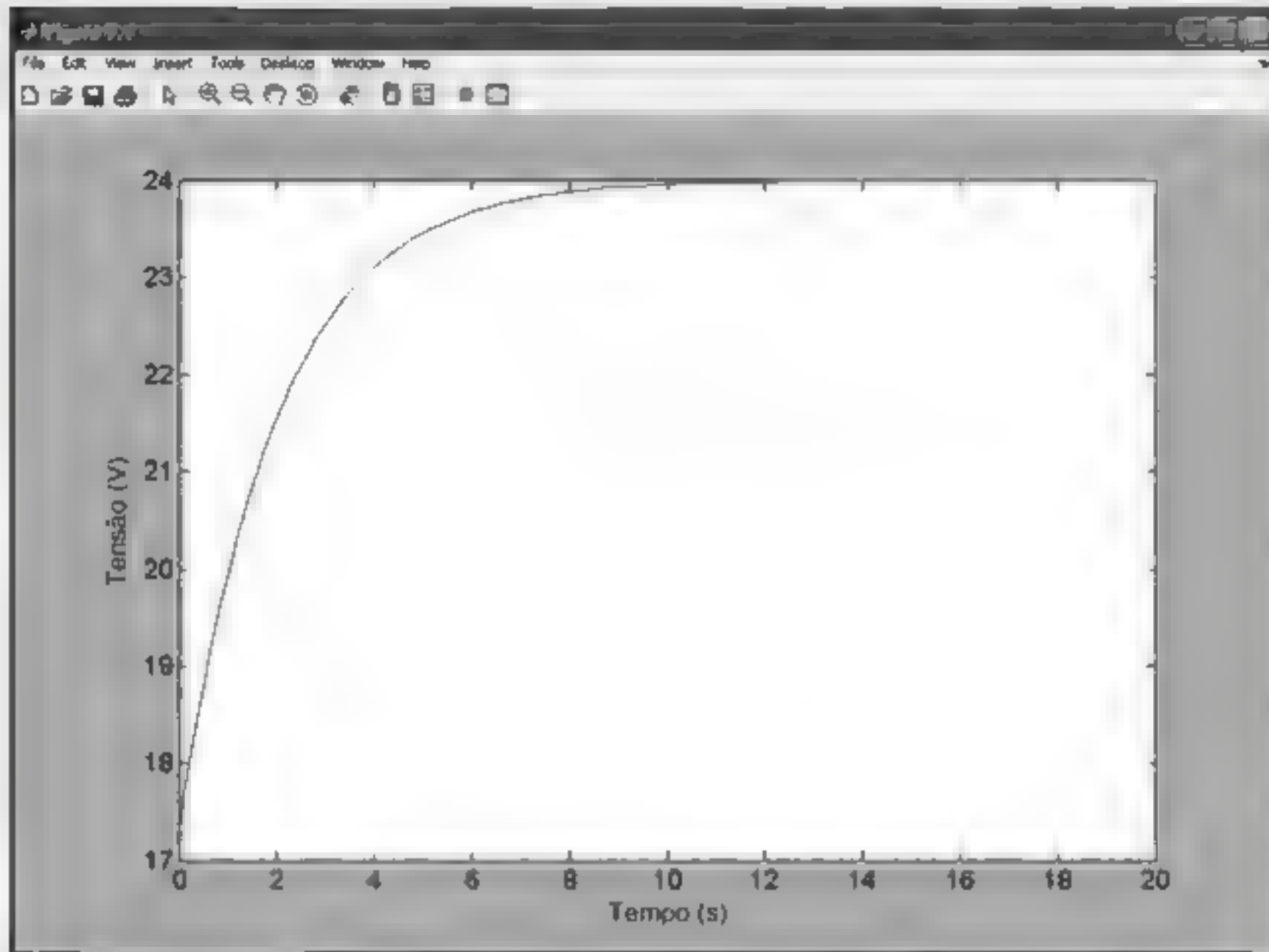
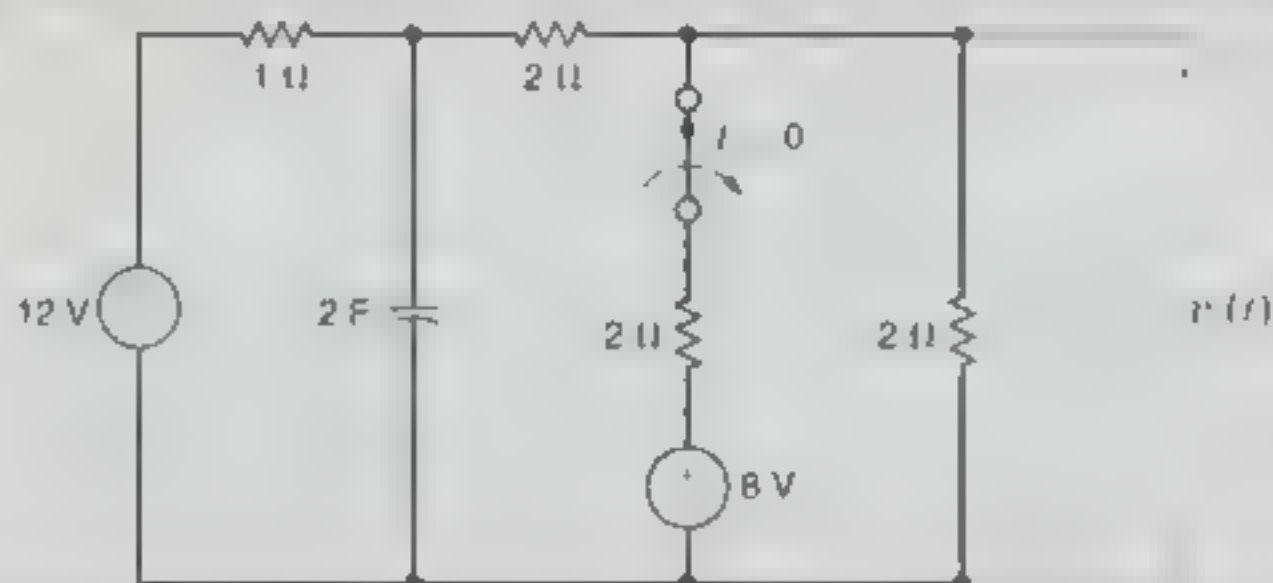


Figura 7.9 Gráfico gerado para o Exemplo 7.4.

Avaliação do Aprendizado

E7.5 Considere a rede mostrada na Fig. E7.5. A chave é aberta em $t = 0$. Obtenha a expressão de $v_o(t)$ para $t > 0$.

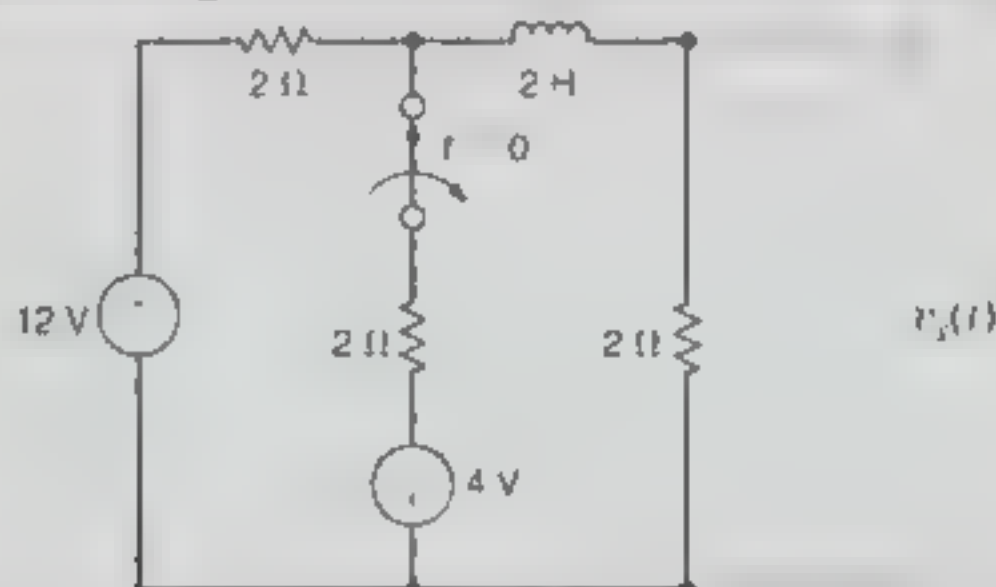


RESPOSTA:

$$v_o(t) = \frac{24}{5} + \frac{1}{5} e^{-(5/8)t} \text{ V.}$$

Figura E7.5

E7.6 Considere a rede mostrada na Fig. E7.6. Se a chave é aberta em $t = 0$, obtenha a expressão da tensão de saída $v_o(t)$ para $t > 0$.

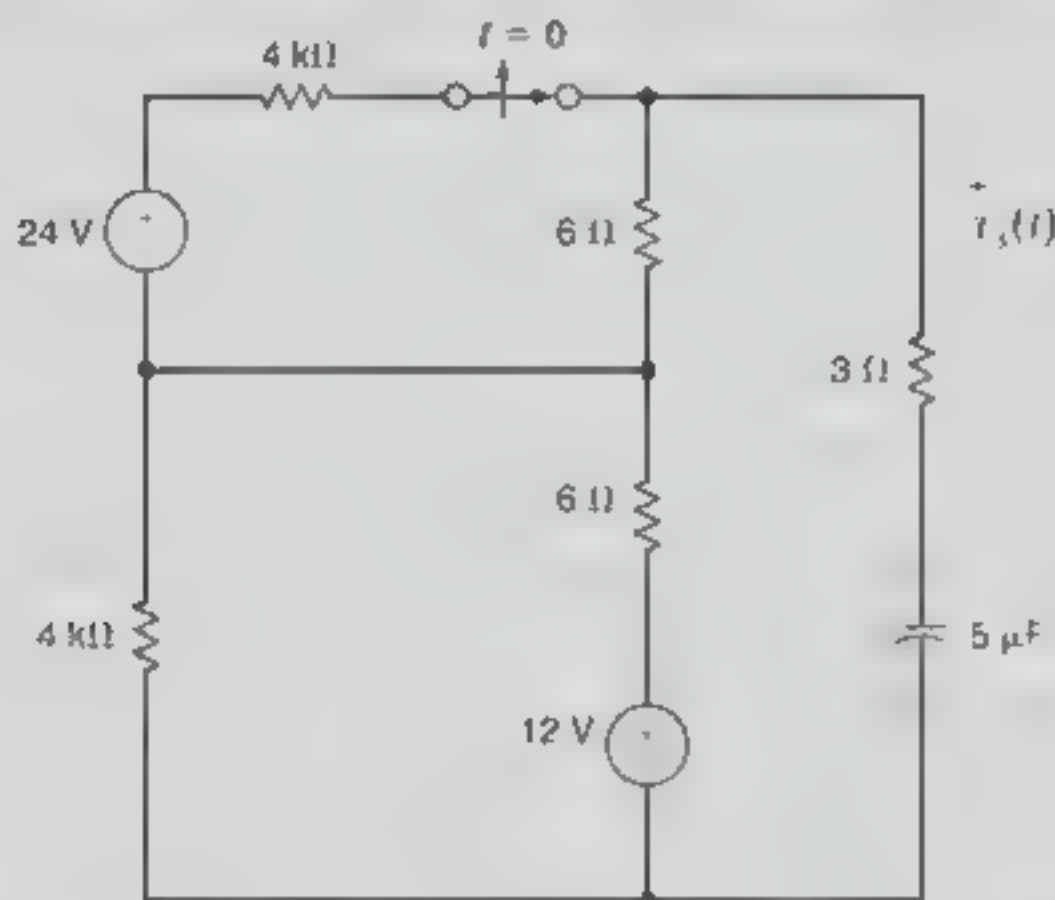


RESPOSTA:

$$v_o(t) = 6 - \frac{10}{3} e^{-2t} \text{ V.}$$

Figura E7.6

E7.7 Determine a tensão v_s do circuito mostrado na Fig. E7.7 para $t > 0$ utilizando o procedimento passo a passo.

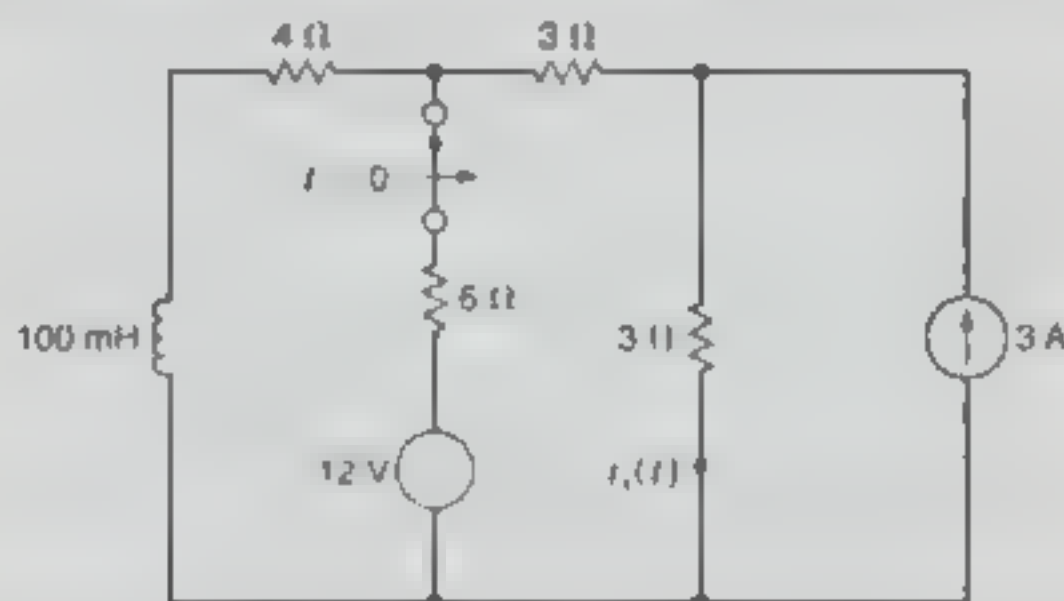


RESPOSTA:

$$v_s(t) = -3,33e^{-t/0,06} \text{ V.}$$

Figura E7.7

E7.8 Determine a corrente i_s do circuito mostrado na Fig. E7.8 para $t > 0$ utilizando o procedimento passo a passo.



RESPOSTA:

$$i_s(t) = 2,1 - 0,6e^{-t/0,04} \text{ A.}$$

Figura E7.8

EXEMPLO 7.5

O circuito mostrado na Fig. 7.10a atingiu a condição de regime estacionário com a chave na posição 1. No tempo $t = 0$, a chave foi acionada da posição 1 para a posição 2. Deseja-se calcular a tensão $v_s(t)$ para $t > 0$.

SOLUÇÃO

Passo 1. A tensão $v_s(t)$ possui a forma $K_1 + K_2e^{-\alpha t}$.

Passo 2. Utilizando o circuito mostrado na Fig. 7.10b, pode-se calcular $i_L(0^-)$

$$i_L = \frac{12}{4} = 3 \text{ A}$$

Assim,

$$i_L(0^-) = \frac{12 - 2i_L}{6} = \frac{18}{6} = 3 \text{ A}$$

Passo 3. O novo circuito, válido apenas para $t = 0^+$, é mostrado na Fig. 7.10c. O valor da fonte de corrente que substitui o indutor é $i_L(0^-) = i_L(0^+) = 3 \text{ A}$. Tendo em vista a fonte de corrente,

$$v_s(0^+) = (3)(6) = 18 \text{ V}$$

Passo 4. O circuito equivalente para a condição de regime estacionário, após o fechamento da chave, é mostrado na Fig. 7.10d. Utilizando as tensões e correntes definidas na figura, pode-se calcular $v_s(\infty)$ de várias formas. Por exemplo, utilizando as equações dos nós pode-se obter $v_s(\infty)$ a partir da equação

$$\frac{v_B}{2} + \frac{v_B}{4} + \frac{v_B + 2i_A}{6} = 0$$

$$i_A = \frac{v_B}{4}$$

$$v_s(\infty) = v_B + 2i_A$$

ou, utilizando as equações dos laços,

$$36 = 2(i_1 + i_2) + 4i_1$$

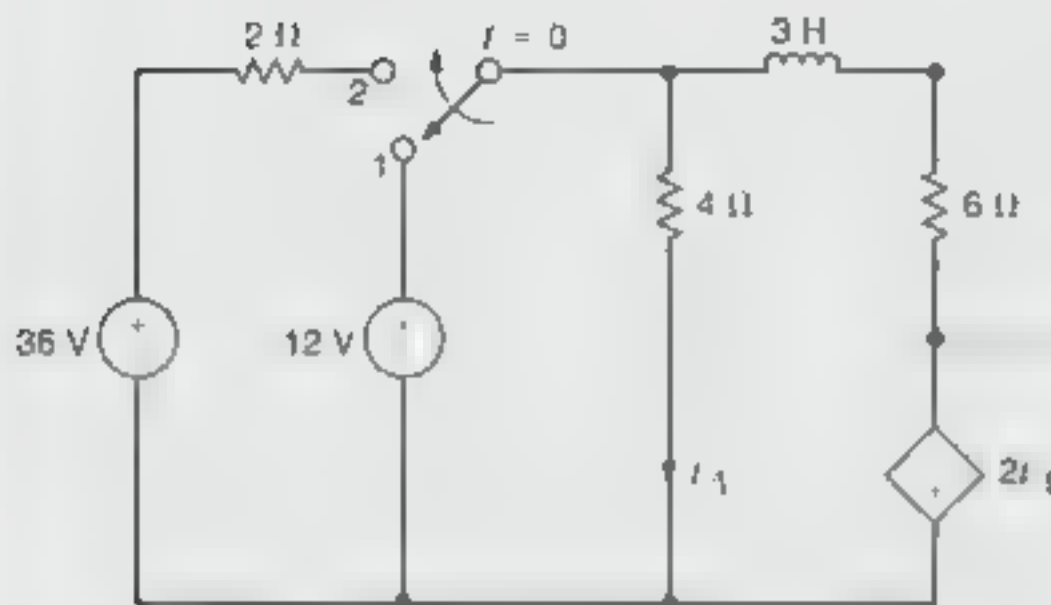
$$36 = 2(i_1 + i_2) + 6i_2 - 2i_1$$

$$v_s(\infty) = 6i_1$$

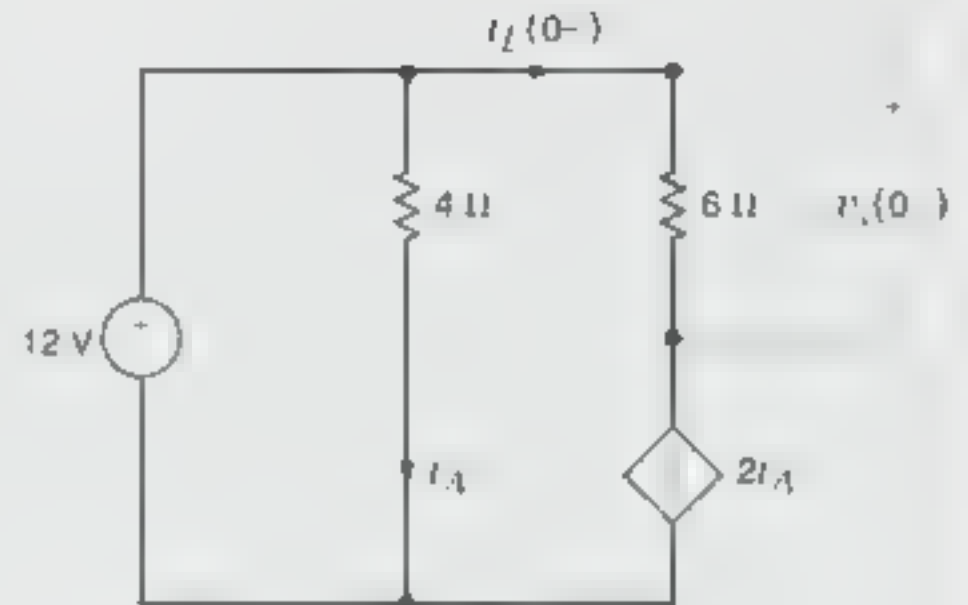
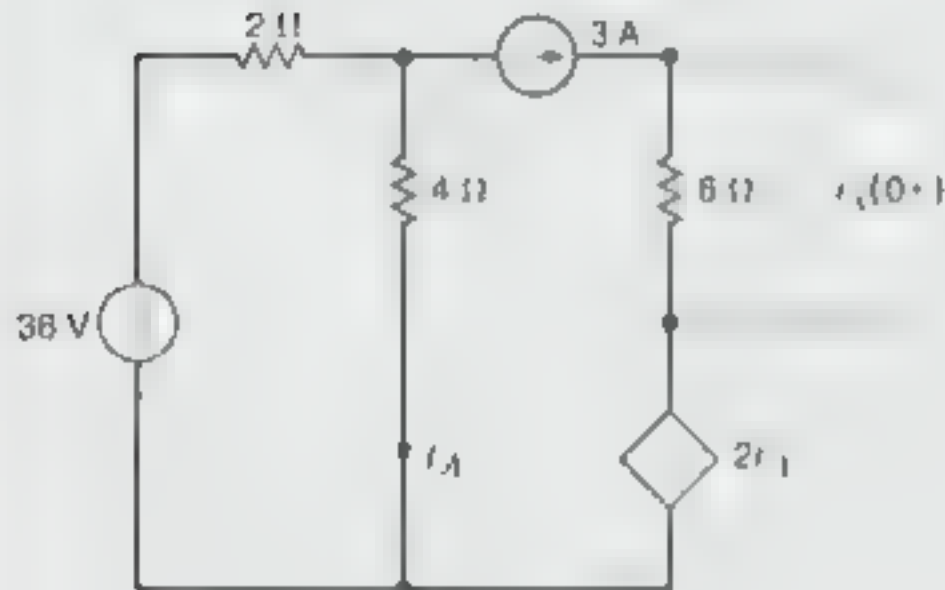
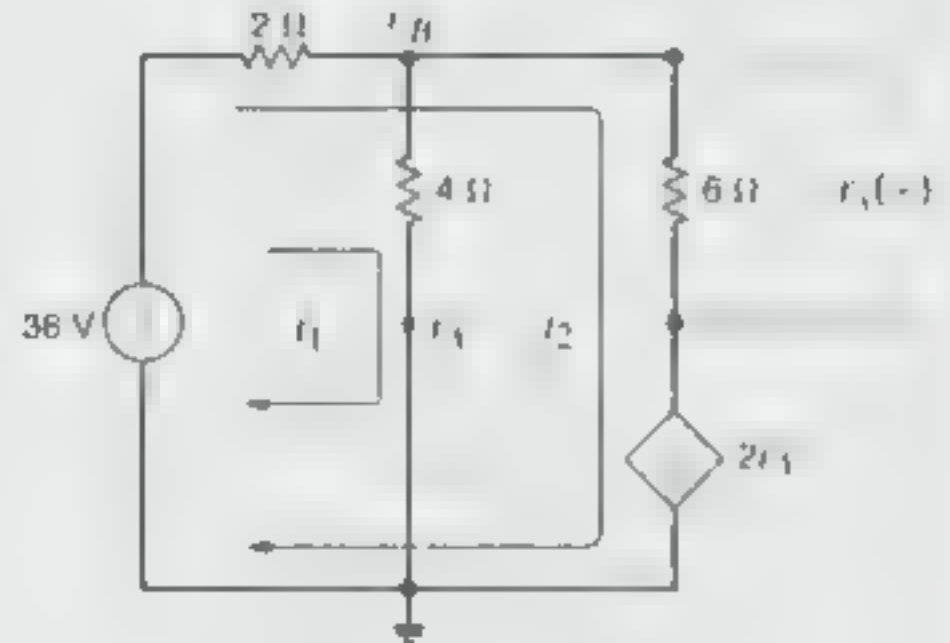
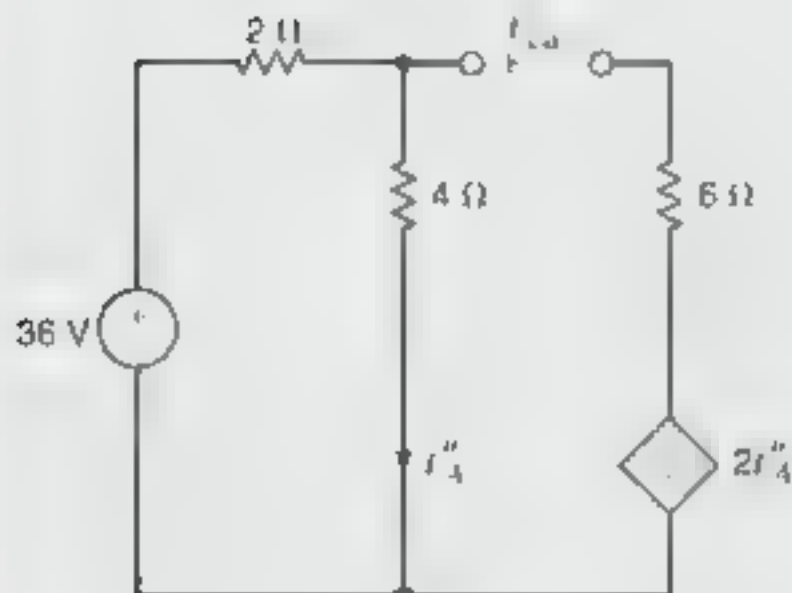
Para qualquer dessas formas, obtém-se $v_s(\infty) = 27 \text{ V}$.

Passo 5. A resistência equivalente de Thévenin pode ser obtida determinando-se v_{oc} e i_{sc} tendo em vista a presença da fonte dependente. Com base na Fig. 7.10e, nota-se que

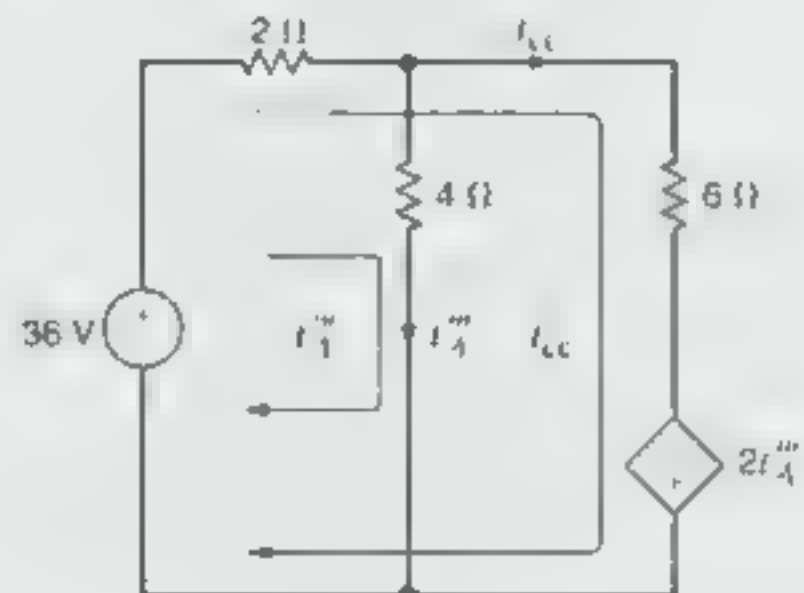
$$i_A'' = \frac{36}{2 + 4} = 6 \text{ A}$$



(a)

(b) $t = 0^-$ (c) $t = 0^+$ (d) $t = 0^-$ 

(e)



(f)

Figura 7.10 Análise do transiente de um circuito RL contendo uma fonte dependente.

Portanto,

$$v_{ca} = (4)(6) + 2(6) \\ = 36 \text{ V}$$

Com base na Fig. 7.10f, as seguintes equações podem ser escritas para os laços:

$$36 = 2(i_A'' + i_{cc}) + 4i_A'' \\ 36 = 2(i_A'' + i_{cc}) + 6i_{cc} - 2i_A''$$

A solução dessas equações para i_{cc} fornece

$$i_{cc} = \frac{9}{2} \text{ A}$$

Portanto,

$$R_{Th} = \frac{v_{ca}}{i_{cc}} = \frac{36}{9/2} = 8 \Omega$$

Assim, a constante de tempo do circuito é

$$\tau = \frac{L}{R_{Th}} = \frac{3}{8} \text{ s}$$

Passo 6. Utilizando os valores que acabaram de ser determinados, pode-se obter a equação final para $v_A(t)$:

$$K_1 = v_A(\infty) = 27$$

$$K_2 = v_A(0^+) - v_A(\infty) = 18 - 27 = -9$$

Portanto,

$$v_A(t) = 27 - 9e^{-t/(3/8)} \text{ V}$$

Avaliação do Aprendizado

E7.9 Se a chave da rede mostrada na Fig. E7.9 é fechada em $t = 0$, obtenha a equação de $v_A(t)$ para $t > 0$.

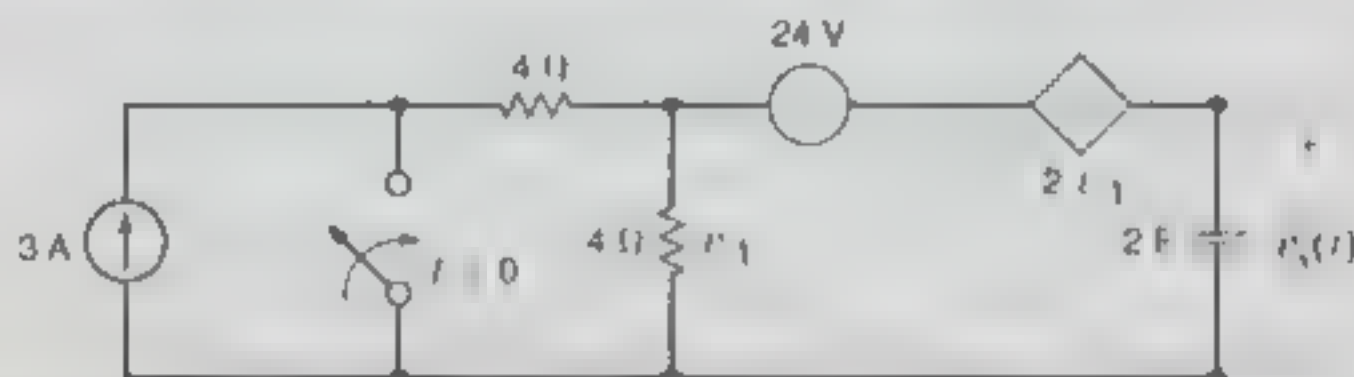


Figura E7.9

RESPOSTA:

$$v_A(t) = 24 + 36e^{-t/(2/3)} \text{ V.}$$

E7.10 Determine a corrente i_A do circuito mostrado na Fig. E7.10 para $t > 0$ utilizando o procedimento passo a passo.

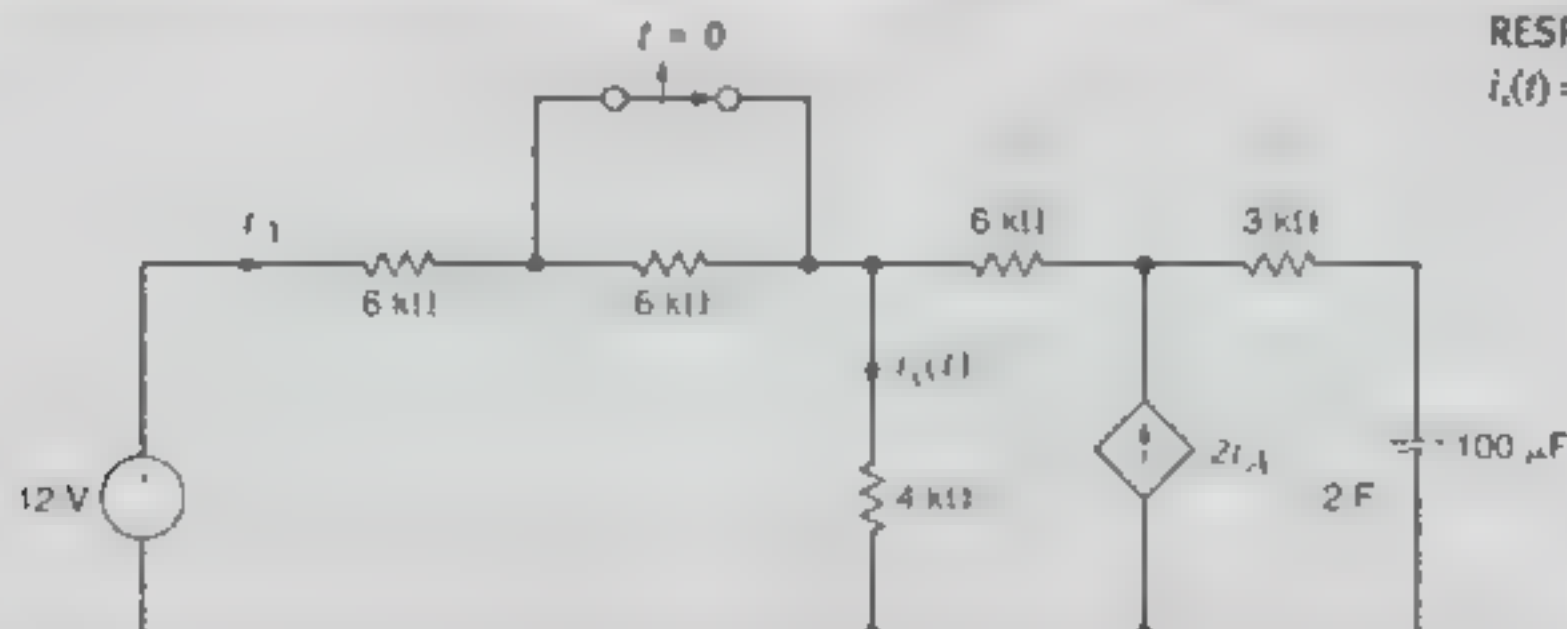


Figura E7.10

RESPOSTA:

$$i_A(t) = 1,5 + 0,2143e^{-(t/0,7)} \text{ mA.}$$

Neste ponto, deve-se alertar para o fato de que o acionamento da chave em um circuito nem sempre ocorre no tempo $t = 0$. A chave pode ser acionada em um tempo t_0 qualquer. Neste caso, o resultado da análise passo a passo fornece as seguintes equações.

$$x(t_0) = K_1 + K_2$$

$$x(\infty) = K_1$$

e

$$x(t) = x(\infty) + [x(t_0) - x(\infty)]e^{-(t-t_0)/\tau} \quad t > t_0$$

Basicamente, a função é defasada no tempo em t_0 segundos.

Finalmente, note que, caso a rede possua mais de uma fonte independente, pode-se simplesmente empregar o princípio da superposição de efeitos para obter a resposta total.

RESPOSTA AO PULSO Examinam-se agora as redes em que a fonte de tensão ou de corrente é bruscamente aplicada. Como resultado da aplicação repentina de uma fonte, as tensões ou correntes do circuito são forçadas a mudar abruptamente. Uma função forçamento cujo valor varia de forma descontínua ou apresenta uma derivada descontínua é chamada de *função singular*. Duas dessas funções singulares de grande importância

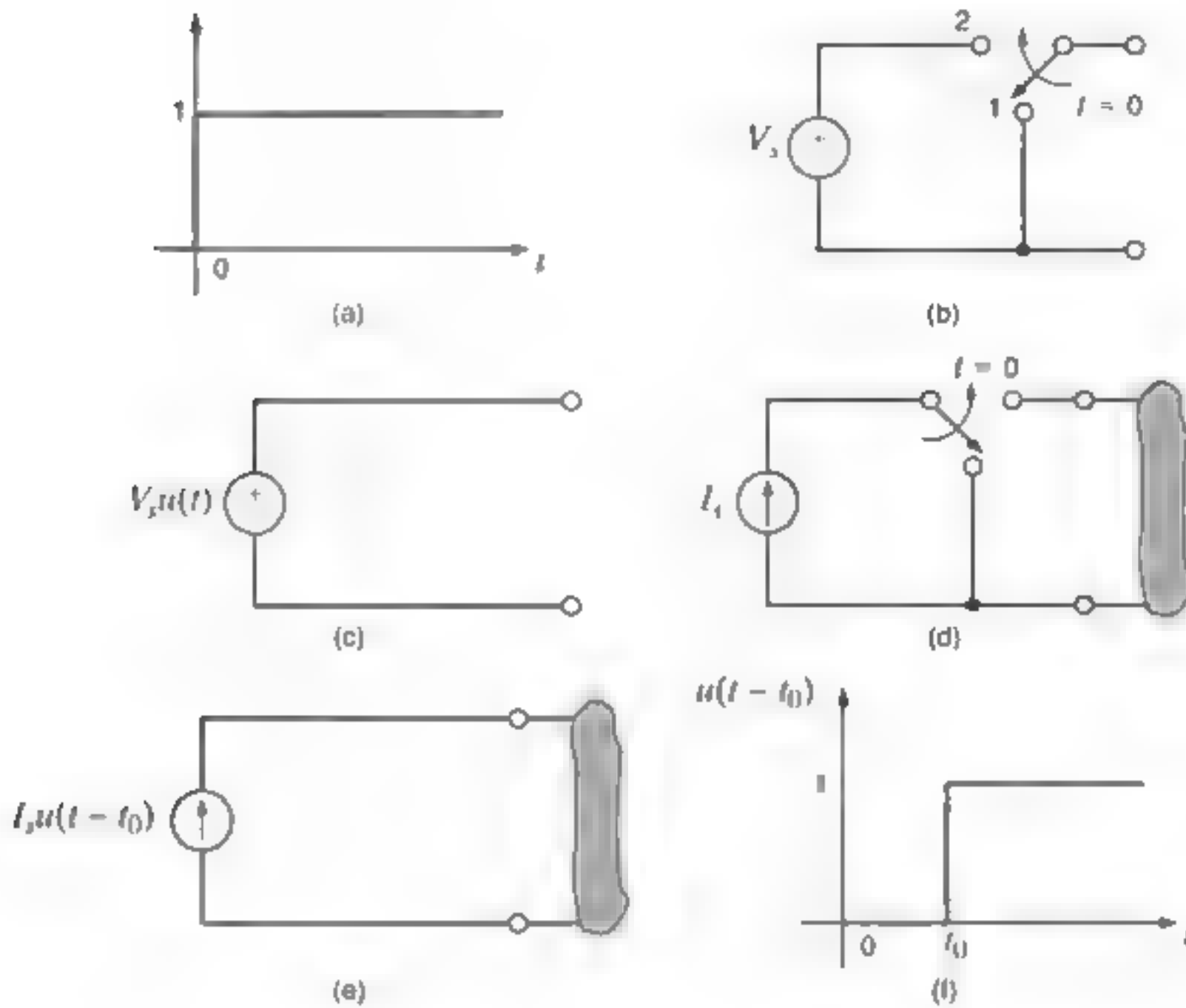


Figura 7.11 Gráficos e modelos da função degrau unitário.

na análise de circuitos são a função impulso unitário e a função degrau unitário. A discussão da primeira será adiada para um capítulo posterior e a segunda será apresentada a seguir.

A *função degrau unitário* é definida pelas seguintes relações matemáticas:

$$u(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t > 0 \end{cases}$$

Em outras palavras, essa função, que é adimensional, é igual a zero para valores negativos do argumento e igual a 1 para valores positivos do argumento. Ela é indefinida para o argumento nulo, no qual a função é descontínua. A Fig. 7.11a mostra um gráfico do degrau unitário. O degrau unitário é adimensional e, portanto, um degrau em tensão de V_s volts e um degrau em corrente de I_s ampères devem ser escritos como $V_s u(t)$ e $I_s u(t)$, respectivamente. Circuitos equivalentes de um degrau em tensão são mostrados nas Figs. 7.11b e c. Circuitos equivalentes de um degrau em corrente são mostrados nas Figs. 7.11d e e. Utilizando a definição do degrau unitário, fica fácil generalizar essa função substituindo-se o argumento t por $t - t_0$. Nesse caso,

$$u(t - t_0) = \begin{cases} 0 & t < t_0 \\ 1 & t > t_0 \end{cases}$$

Um gráfico dessa função é mostrado na Fig. 7.11f. Note que $u(t - t_0)$ é equivalente a um atraso de t_0 segundos em $u(t)$, de forma que a variação abrupta ocorra no tempo $t = t_0$.

As funções degrau podem ser utilizadas na construção de um ou mais pulsos. Por exemplo, o pulso de tensão mostrado na Fig. 7.12a pode ser obtido iniciando-se um degrau em $t = 0$ e subtraindo-se um degrau que se inicia em $t = T$, conforme mostrado na Fig. 7.12b. A equação para o pulso fica

$$v(t) = A[u(t) - u(t - T)]$$

Caso o pulso deva iniciar em $t = t_0$ e possuir uma largura T , a equação deve ser escrita como

$$v(t) = A\{u(t - t_0) - u[t - (t_0 + T)]\}$$

Utilizando esse procedimento, pode-se escrever a equação para um pulso com início em qualquer tempo e término em qualquer tempo. Analogamente, por essa sistemática, poder-se-ia escrever a equação para uma série de pulsos, o chamado *trem de pulsos*, simplesmente formando-se um somatório de pulsos obtidos conforme descrito anteriormente.

O exemplo a seguir servirá para ilustrar muitos dos conceitos que acabam de ser apresentados.

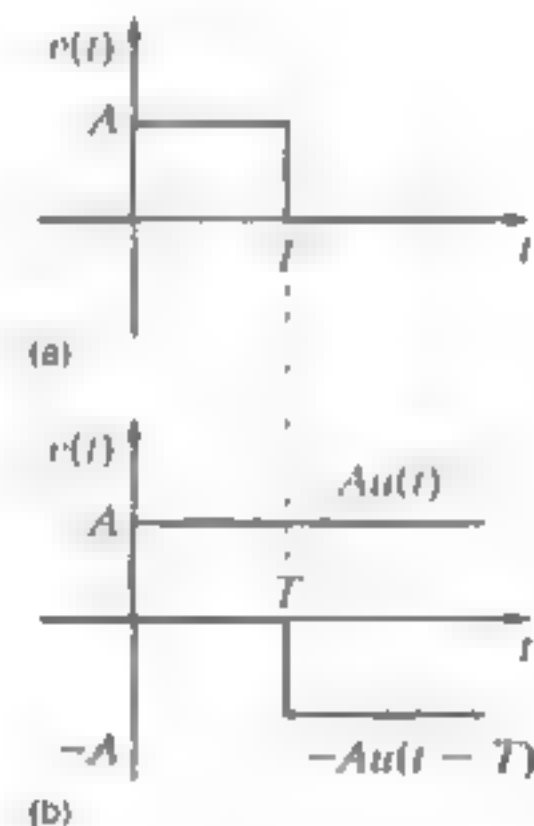


Figura 7.12 Construção de um pulso por meio de duas funções degrau.

EXEMPLO 7.6

Considere o circuito mostrado na Fig. 7.13a. A função de entrada é o pulso de tensão mostrado na Fig. 7.13b. Como a fonte é nula para qualquer tempo negativo, as condições iniciais da rede são nulas (isto é, $v_C(0^-) = 0$). A resposta $v_x(t)$ para $0 < t < 0,3$ s deve-se à aplicação da fonte constante em $t = 0$ e não é influenciada por qualquer variação que nela ocorra posteriormente. Em $t = 0,3$ s, a função forçamento se torna nula e, portanto, $v_x(t)$ para $t > 0,3$ s é a resposta devida a uma fonte livre, isto é, a resposta natural da rede.

Seja a determinação de uma expressão para a tensão $v_x(t)$.

SOLUÇÃO

Uma vez que a tensão de saída $v_x(t)$ é uma parcela da tensão do capacitor, e como a tensão inicial entre os terminais do capacitor é nula, tem-se que $v_x(0^+) = 0$, como mostra a Fig. 7.13c.

Caso não houvesse nenhuma variação na fonte após $t = 0$, o valor de $v_x(t)$ em regime estacionário (isto é, $v_x(\infty)$) devido à aplicação do degrau unitário em $t = 0$ seria

$$v_x(\infty) = \frac{9}{6k + 4k + 8k} (8k) = 4 \text{ V}$$

conforme mostrado na Fig. 7.13d.

A resistência equivalente de Thévenin vale

$$R_{Th} = \frac{(6k)(12k)}{6k + 12k} = 4 \text{ k}\Omega$$

conforme ilustrado na Fig. 7.13e.

Portanto, a constante de tempo τ do circuito é

$$\begin{aligned} \tau &= R_{Th}C \\ &= (4)(10^3)(100)(10^{-6}) \\ &= 0,4 \text{ s} \end{aligned}$$

Logo, a resposta $v_x(t)$ para o período $0 < t < 0,3$ s, fica

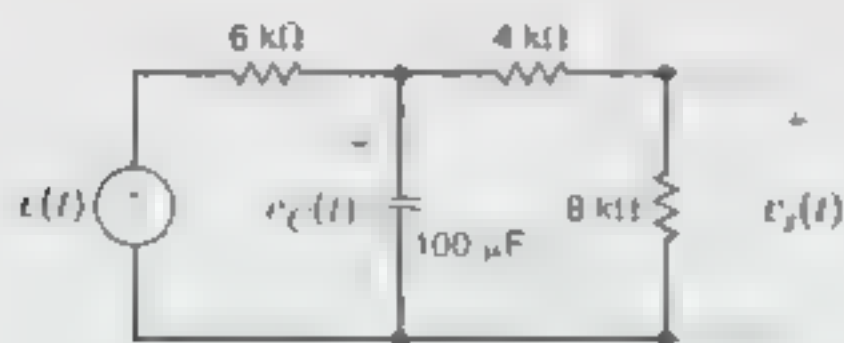
$$v_x(t) = 4 - 4e^{-t/0,4} \text{ V} \quad 0 < t < 0,3 \text{ s}$$

A tensão no capacitor pode ser calculada lembrando-se que, em decorrência da divisão de tensão, $v_C(t) = 2/3 v_x(t)$. Portanto,

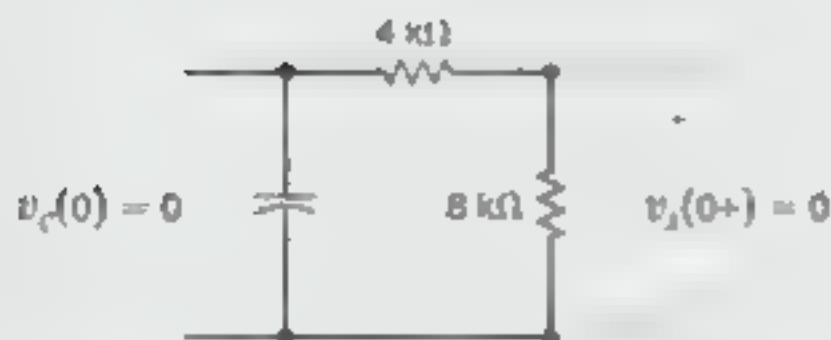
$$v_C(t) = \frac{2}{3}(4 - 4e^{-t/0,4}) \text{ V}$$

Uma vez que a tensão no capacitor é contínua,

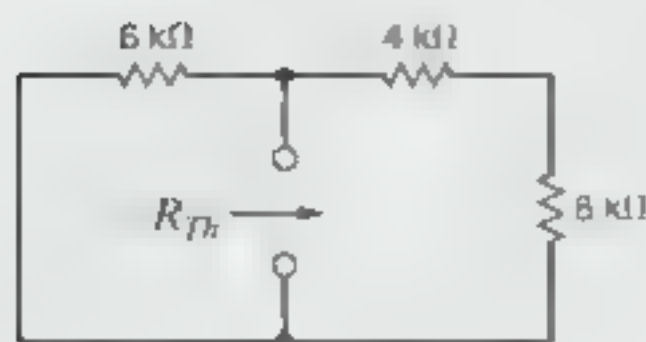
$$v_C(0,3^-) = v_C(0,3^+)$$



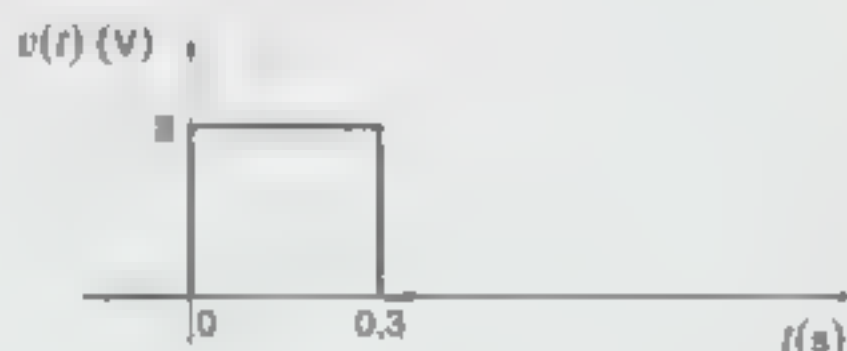
(a)



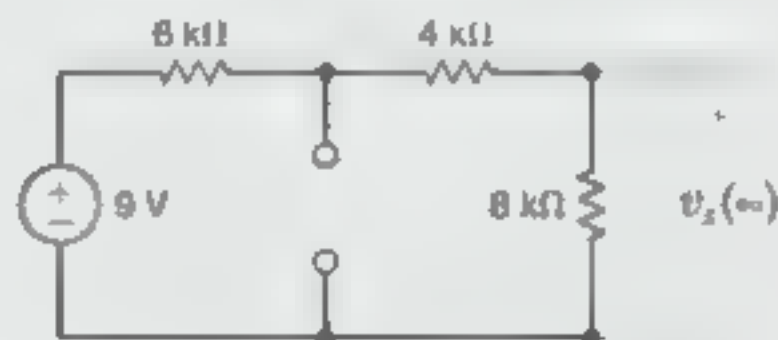
(c) $t = 0$



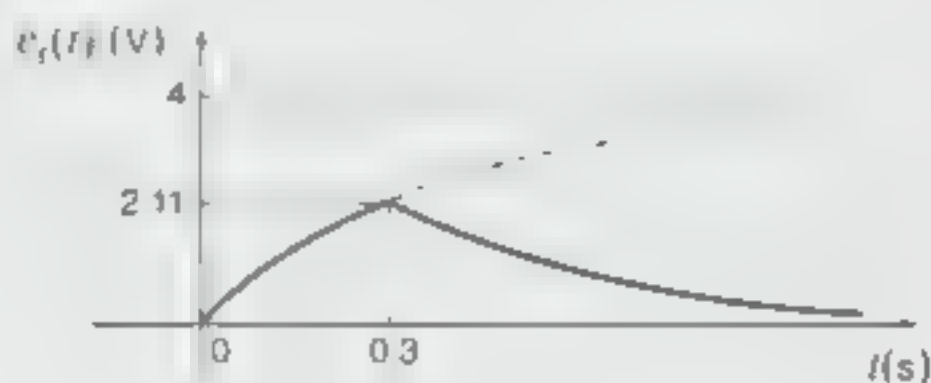
(e)



(b)



(d)



(f)

Figura 7.13 Resposta da rede a um pulso.

e, portanto,

$$\begin{aligned} v_s(0,3+) &= \frac{2}{3} v_c(0,3-) \\ &= 4(1 - e^{-0,3/0,4}) \\ &= 2,11 \text{ V} \end{aligned}$$

Sendo a fonte nula para $t > 0,3$ s, o valor final de $v_s(t)$ quando $t \rightarrow \infty$ é igual a zero. Assim, a expressão de $v_s(t)$ para $t > 0,3$ s é

$$v_s(t) = 2,11 e^{-(t-0,3)/0,4} \text{ V} \quad t > 0,3 \text{ s}$$

O termo $e^{-(t-0,3)/0,4}$ indica que o decaimento exponencial começa em $t = 0,3$ s. A solução completa pode ser escrita utilizando-se o princípio da superposição, isto é,

$$v_s(t) = 4(1 - e^{-t/0,4})u(t) - 4(1 - e^{-(t-0,3)/0,4})u(t - 0,3) \text{ V}$$

ou, de forma equivalente, a solução completa fica

$$v_s(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 4(1 - e^{-t/0,4}) \text{ V} & 0 < t < 0,3 \text{ s} \\ 2,11 e^{-(t-0,3)/0,4} \text{ V} & 0,3 \text{ s} < t \end{cases}$$

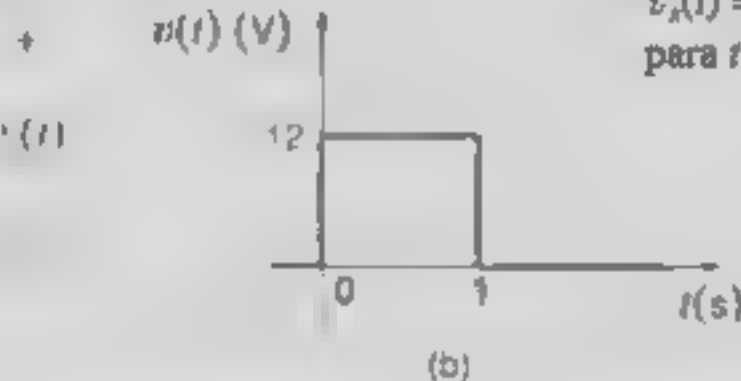
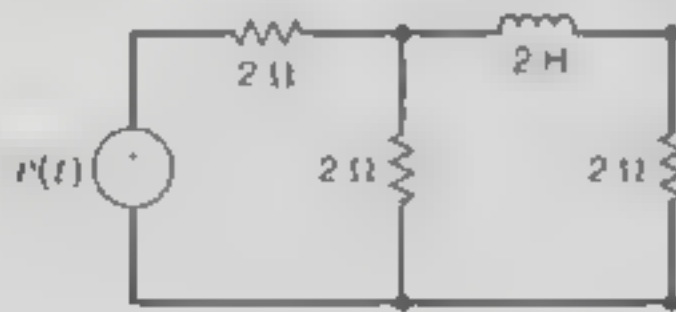
que pode também ser expressa, matematicamente, como

$$v_s(t) = 4(1 - e^{-t/0,4})[u(t) - u(t - 0,3)] + 2,11 e^{-(t-0,3)/0,4} u(t - 0,3) \text{ V}$$

Note que o termo $[u(t) - u(t - 0,3)]$ atua como uma função comutadora que captura apenas a parte da resposta ao degrau situada no intervalo de tempo $0 < t < 0,3$ s. A saída em função do tempo é mostrada na Fig. 7.13f.

Avaliação do Aprendizado

E7.11 A fonte de tensão da rede mostrada na Fig. E7.11a é mostrada na Fig. E7.11b. A corrente inicial no indutor deve ser nula. (Por quê?) Determine a tensão de saída $v_s(t)$ para $t > 0$.



RESPOSTA: $v_s(t) = 0$ para $t < 0$, $v_s(t) = 4(1 - e^{-t/0,4})$ V para $0 \leq t \leq 1$ e $v_s(t) = 3,11 e^{-t/0,4}$ V para $t > 1$ s.

Figura E7.11

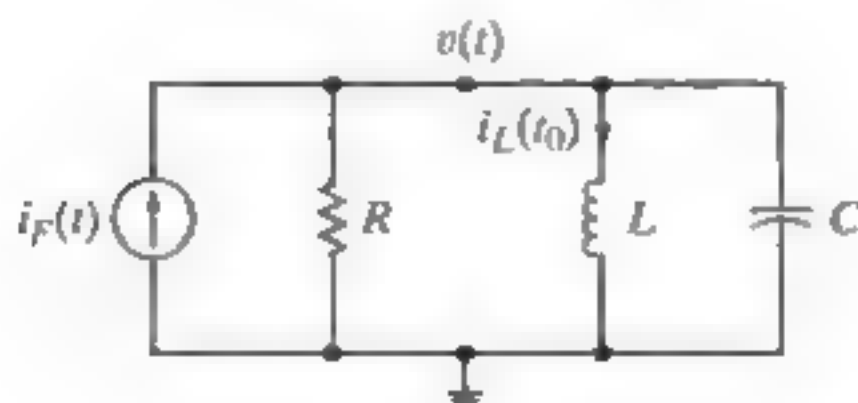
(a)

(b)

7.3 Circuitos de Segunda Ordem

A EQUAÇÃO BÁSICA DO CIRCUITO Para iniciar o desenvolvimento da equação diferencial do sistema, são considerados os dois circuitos básicos *RLC* mostrados na Fig. 7.14. Admita-se que a energia possa inicialmente estar armazenada tanto no indutor quanto no capacitor. A equação nodal para o circuito *RLC* em paralelo é

$$\frac{v}{R} + \frac{1}{L} \int_{t_0}^t v(x) dx + i_L(t_0) + C \frac{dv}{dt} = i_s(t)$$



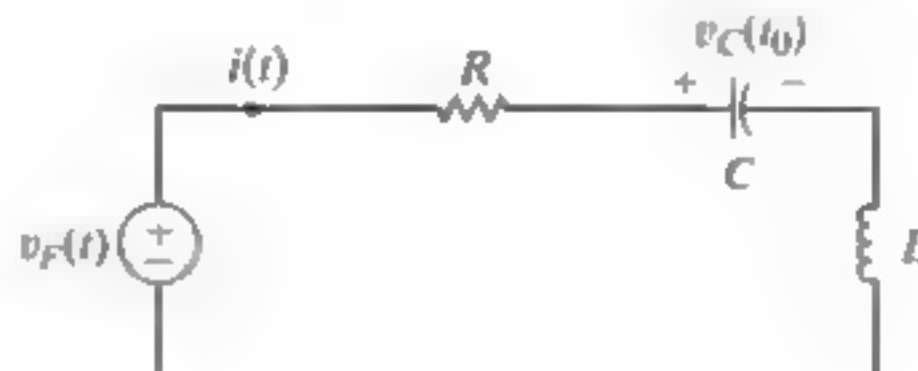
(a)

Analogamente, a equação do laço para o circuito *RLC* em série fica

$$Ri + \frac{1}{C} \int_{t_0}^t i(x) dx + v_C(t_0) + L \frac{di}{dt} = v_s(t)$$

Note que a equação para a tensão nodal no circuito em paralelo é da mesma forma que a equação da corrente do laço no circuito em série. Portanto, a solução desses dois circuitos é dependente da solução de apenas uma equação matemática. Se as duas equações precedentes forem derivadas relativamente ao tempo, o resultado fica expresso por

$$C \frac{d^2 v}{dt^2} + \frac{1}{R} \frac{dv}{dt} + \frac{v}{L} = \frac{di_F}{dt}$$



(b)

Figura 7.14 Circuitos *RLC* em paralelo e em série.

e

$$L \frac{di}{dt} + R i + \frac{1}{C} \int i dt = v_f$$

Uma vez que ambos os circuitos conduzem a uma equação diferencial de segunda ordem com coeficientes constantes, pode-se concentrar a análise nesse tipo de equação

EQUAÇÕES DE RESPOSTAS Em conformidade com o desenvolvimento da solução da equação diferencial de primeira ordem, que resultou da análise de um circuito RL ou de um circuito RC , apresentado anteriormente, o mesmo procedimento é agora empregado para se obter a solução da equação diferencial de segunda ordem, que resulta da análise dos circuitos RLC . Como regra geral, nesse caso tem-se uma equação da forma

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + a_1 \frac{dx(t)}{dt} + a_2 x(t) = f(t) \quad 7.12$$

Novamente, considera-se o fato de $x(t) = x_p(t)$ ser uma solução da Eq. (7.12), e se $x(t) = x_c(t)$ é uma solução da equação homogênea

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + a_1 \frac{dx(t)}{dt} + a_2 x(t) = 0$$

então,

$$x(t) = x_p(t) + x_c(t)$$

é uma solução da Eq. (7.12) original. Considerando-se, novamente, uma função forçamento constante (isto é, $f(t) = A$), o desenvolvimento apresentado no início deste capítulo mostra que a solução da Eq. (7.12) será da forma

$$x(t) = \frac{A}{a_2} + x_c(t) \quad 7.13$$

Pode-se, agora, analisar a solução da equação homogênea

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + a_1 \frac{dx(t)}{dt} + a_2 x(t) = 0$$

em que a_1 e a_2 são constantes. Por simplicidade, reescreve-se a equação na forma

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + 2\zeta\omega_0 \frac{dx(t)}{dt} + \omega_0^2 x(t) = 0 \quad 7.14$$

Nesta forma matemática as constantes foram definidas por: $a_1 = 2\zeta\omega_0$ e $a_2 = \omega_0^2$

Segundo o desenvolvimento da solução utilizado para a equação diferencial homogênea de primeira ordem no início deste capítulo, a solução da Eq. (7.14) deve ser uma função cuja primeira e segunda derivadas possuam a mesma forma, de modo que o lado esquerdo da Eq. (7.14) se tornará identicamente nulo para qualquer tempo t . Admite-se novamente que

$$x(t) = Ke^{st}$$

A substituição dessa expressão na Eq. (7.14) fornece

$$s^2 Ke^{st} + 2\zeta\omega_0 s Ke^{st} + \omega_0^2 Ke^{st} = 0$$

Dividindo ambos os lados da equação por Ke^{st} tem-se

$$s^2 + 2\zeta\omega_0 s + \omega_0^2 = 0 \quad 7.15$$

Essa equação é comumente chamada de *equação característica*; ζ é chamada de *fração de amortecimento*, e ω_0 é conhecida como *frequência natural não amortecida*. A importância dessa terminologia será melhor compreendida no decorrer desse desenvolvimento. Se essa equação for satisfeita, a solução admitida $x(t) = Ke^{st}$ estará correta. Empregando-se a solução genérica de uma equação algébrica de segunda ordem, conclui-se que a Eq. (7.15) será satisfeita se

$$s = \frac{-2\zeta\omega_0 \pm \sqrt{4\zeta^2\omega_0^2 - 4\omega_0^2}}{2} = -\zeta\omega_0 \pm \omega_0 \sqrt{\zeta^2 - 1} \quad 7.16$$

Portanto, existem dois valores de s , s_1 e s_2 , que satisfazem a Eq. (7.15):

$$\begin{aligned} s_1 &= -\zeta\omega_0 + \omega_0 \sqrt{\zeta^2 - 1} \\ s_2 &= -\zeta\omega_0 - \omega_0 \sqrt{\zeta^2 - 1} \end{aligned} \quad 7.17$$

Assim, em geral, a solução complementar da Eq. (7.14) é da forma

$$x_c(t) = K_1 e^{s_1 t} + K_2 e^{s_2 t} \quad 7.18$$

As constantes K_1 e K_2 podem ser calculadas pelas condições iniciais do problema, $x(0)$ e $dx(0)/dt$. Por exemplo, uma vez que

$$x(t) = K_1 e^{s_1 t} + K_2 e^{s_2 t}$$

então,

$$x(0) = K_1 + K_2$$

e

$$\left. \frac{dx(t)}{dt} \right|_{t=0} = \frac{dx(0)}{dt} = s_1 K_1 + s_2 K_2$$

Assim, $x(0)$ e $dx(0)/dt$ produzem duas equações simultâneas que, ao serem resolvidas, fornecem os valores das constantes K_1 e K_2 .

Uma análise detalhada das Eqs. (7.17) e (7.18) indica que a forma da solução da equação homogênea depende do valor de ζ . Por exemplo, se $\zeta > 1$, as raízes da equação característica, s_1 e s_2 , também chamadas de *frequências naturais* porque determinam a resposta natural (não forçada) da rede, são números reais e distintos; se $\zeta < 1$, as raízes são números complexos; e, finalmente, se $\zeta = 1$, as raízes são números reais e iguais.

Consideram-se, agora, as três formas distintas da resposta não forçada — isto é, a resposta devida a uma tensão inicial no capacitor ou uma corrente inicial no indutor.

Caso 1, $\zeta > 1$ Esse caso é normalmente chamado de *superamortecido*. As frequências naturais s_1 e s_2 são reais e distintas e, portanto, a resposta natural da rede descrita pela equação diferencial de segunda ordem tem a forma

$$x(t) = K_1 e^{s_1 t} + K_2 e^{s_2 t} \quad 7.19$$

em que K_1 e K_2 são obtidas a partir das condições iniciais. Essa solução indica que a resposta natural é a soma de duas exponenciais decrescentes.

Caso 2, $\zeta < 1$ Esse caso é chamado de *subamortecido*. Sendo $\zeta < 1$, as raízes da equação característica, mostradas na Eq. (7.17), podem ser escritas como

$$\begin{aligned}s_1 &= -\zeta\omega_0 + j\omega_0\sqrt{1-\zeta^2} = -\sigma + j\omega_d \\s_2 &= -\zeta\omega_0 - j\omega_0\sqrt{1-\zeta^2} = -\sigma - j\omega_d\end{aligned}$$

em que $j = \sqrt{-1}$, $\sigma = \zeta\omega_0$ e $\omega_d = \omega_0\sqrt{1-\zeta^2}$. Assim, as frequências naturais são números complexos (discutidos brevemente no Apêndice). A resposta natural pode, portanto, ser expressa por

$$x_c(t) = e^{-\zeta\omega_0 t} (A_1 \cos \omega_d \sqrt{1-\zeta^2} t + A_2 \sin \omega_d \sqrt{1-\zeta^2} t) \quad 7.20$$

em que A_1 e A_2 , da mesma forma que K_1 e K_2 , são constantes a serem determinadas a partir das condições iniciais $x(0)$ e $dx(0)/dt$. Essa equação mostra que a resposta natural é representada por uma curva oscilatória exponencialmente amortecida.

Caso 3, $\zeta = 1$ Esse caso, chamado de *criticamente amortecido*, resulta em

$$s_1 = s_2 = -\zeta\omega_0$$

No caso em que a equação característica possui raízes repetidas, a solução geral é da forma

$$x_c(t) = B_1 e^{-\zeta\omega_0 t} + B_2 t e^{-\zeta\omega_0 t} \quad 7.21$$

em que B_1 e B_2 são constantes a serem determinadas a partir das condições iniciais.

É interessante verificar a resposta natural para os três casos aqui discutidos: superamortecido, Eq. (7.19); subamortecido, Eq. (7.20); e criticamente amortecido, Eq. (7.21). A Fig. 7.15 ilustra graficamente os três casos para as situações em que $x_c(0) = 0$. Note que a resposta do sistema criticamente amortecido atinge seu ponto de máximo e decai mais rapidamente do que a resposta do sistema superamortecido. A resposta do sistema subamortecido é uma senoide amortecida exponencialmente cuja taxa de decaimento depende do fator ζ . Na realidade, o termo $\pm e^{-\zeta\omega_0 t}$ define o chamado *envelope* da resposta, e as oscilações amortecidas (isto é, as oscilações com amplitudes decrescentes) representadas pela forma de onda na Fig. 7.15b estão confinadas aos limites desse envelope.

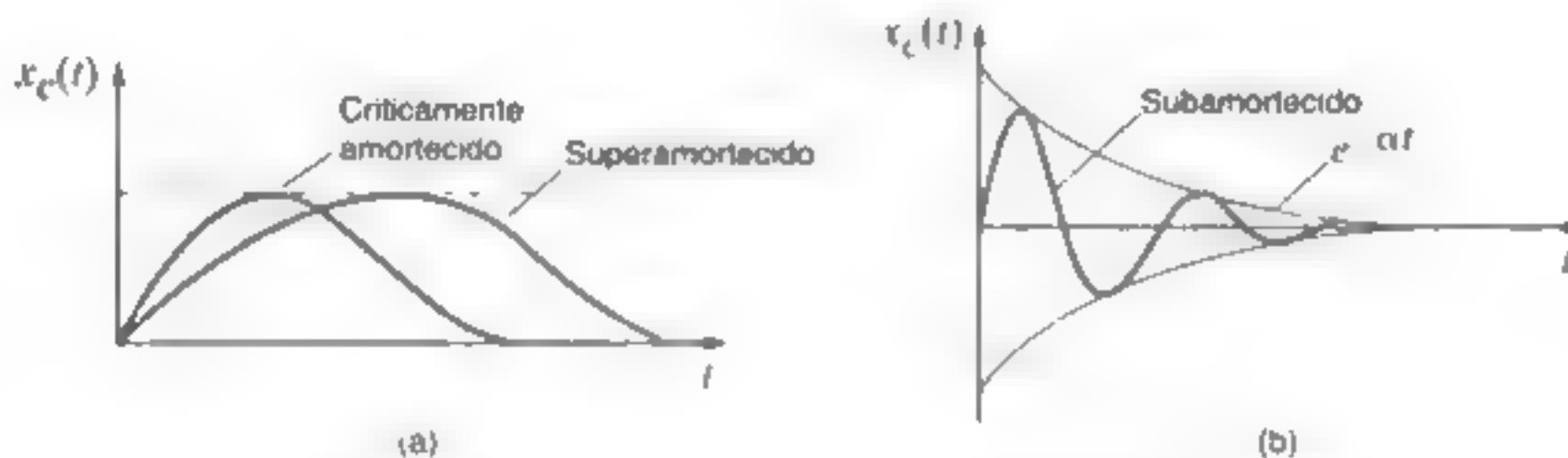


Figura 7.15 Comparações entre as respostas de sistemas superamortecidos, criticamente amortecidos e subamortecidos.

Avaliação do Aprendizado

E7.12 Os componentes de um circuito *RLC* em paralelo possuem os seguintes parâmetros. $R = 1 \, \Omega$, $L = 2 \, \text{H}$ e $C = 2 \, \text{F}$. Calcule a fração de amortecimento e a frequência natural não amortecida dessa rede

RESPOSTA: $\zeta = 0,5$,
 $\omega_0 = 0,5 \, \text{rad/s}$

E7.13 Um circuito *RLC* em série consiste em um resistor, $R = 2 \, \Omega$, um indutor, $L = 1 \, \text{H}$ e um capacitor. Determine o tipo de resposta a ser apresentada pela rede se (a) $C = 1/2 \, \text{F}$, (b) $C = 1 \, \text{F}$ e (c) $C = 2 \, \text{F}$

RESPOSTAS:
(a) subamortecido,
(b) criticamente amortecido e
(c) superamortecido

RESPOSTA DE UMA REDE Analisam-se agora várias redes *RLC* simples que contêm tanto condições iniciais não nulas quanto funções de forçamento constantes. Serão considerados

os circuitos que apresentam respostas superamortecidas, subamortecidas e criticamente amortecidas.

Estratégia para Solução de Problemas

Transiente dos Circuitos de Segunda Ordem

- Etapa 1.** Escreva a equação diferencial que descreve o circuito.
- Etapa 2.** Obtenha a equação característica, que pode ser escrita na forma $s^2 + 2\zeta\omega_0 s + \omega_0^2 = 0$ onde ζ é a fração de amortecimento e ω_0 é a frequência natural não amortecida.
- Etapa 3.** As duas raízes da equação característica determinarão o tipo de resposta. Se as raízes forem reais e distintas (isto é, $\zeta > 1$), a resposta da rede será superamortecida. Se as raízes forem reais e iguais (isto é, $\zeta = 1$), a resposta da rede será criticamente amortecida. Se as raízes forem complexas (isto é, $\zeta < 1$), a resposta da rede será subamortecida.

- Etapa 4.** As condições de amortecimento e as correspondentes respostas para os três casos mencionados são:
- Superamortecido:

$$v(t) = K_1 e^{(\sigma_1 + j\omega_d)t} + K_2 e^{(\sigma_1 - j\omega_d)t}$$

Criticamente amortecido:

$$v(t) = B_1 e^{\sigma_1 t} + B_2 t e^{\sigma_1 t}$$

Subamortecido:

$$v(t) = e^{\sigma t} (A_1 \cos \omega_d t + A_2 \sin \omega_d t),$$

em que $\sigma = -\zeta\omega_0$ e $\omega_d = \omega_0 \sqrt{1 - \zeta^2}$.

- Etapa 5.** Para se determinar os dois coeficientes incógnitos na equação da resposta são necessárias duas condições iniciais, fornecidas ou deduzidas.

Os exemplos a seguir servirão para ilustrar os procedimentos de análise.

EXEMPLO 7.7

Considere o circuito RLC em paralelo mostrado na Fig. 7.16. A equação diferencial de segunda ordem que descreve a tensão $v(t)$ é

$$\frac{d^2 v}{dt^2} + \frac{1}{RC} \frac{dv}{dt} + \frac{v}{LC} = 0$$

Uma comparação dessa equação com as Eqs. (7.14) e (7.15) indica que para o circuito RLC em paralelo o termo amortecido é igual a $1/2 RC$ e que a frequência natural não amortecida é expressa por $1/\sqrt{LC}$. Considerando que os parâmetros do circuito sejam $R = 2 \Omega$, $C = 1/5 \text{ F}$ e $L = 5 \text{ H}$, a equação diferencial fica

$$\frac{d^2 v}{dt^2} + 2,5 \frac{dv}{dt} + v = 0$$

Admita que as condições iniciais nos elementos armazenadores sejam $i_L(0) = -1 \text{ A}$ e $v_C(0) = 4 \text{ V}$. Deseja-se determinar a tensão nodal $v(t)$ e a corrente no indutor.

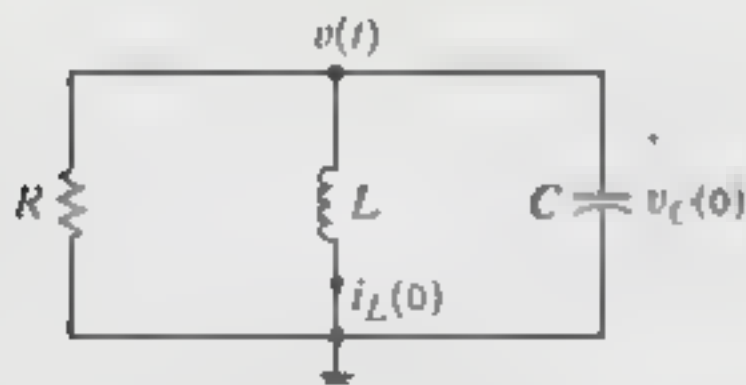


Figura 7.16 Circuito RLC em paralelo.

SOLUÇÃO

A equação característica da rede fica

$$s^2 + 2,5s + 1 = 0$$

e suas raízes são

$$s_1 = -2$$

$$s_2 = -0,5$$

Uma vez que as raízes são reais e distintas, o circuito é superamortecido e $v(t)$ possui a forma

$$v(t) = K_1 e^{-2t} + K_2 e^{-0,5t}$$

As condições iniciais são agora empregadas na determinação das constantes K_1 e K_2 . Como $v(t) = v_C(t)$,

$$v_C(0) = v(0) = 4 = K_1 + K_2$$

A segunda equação necessária para a determinação de K_1 e K_2 é normalmente obtida pela expressão

$$\frac{dv(t)}{dt} = -2K_1 e^{-2t} - 0,5K_2 e^{-0,5t}$$

Todavia, a segunda condição inicial não se refere a $dv(0)/dt$. Se assim fosse, simplesmente avaliar-se-ia a equação em $t = 0$. Esta condição produziria uma segunda equação relacionando as incógnitas K_1 e K_2 . Pode-se, entretanto, contornar esse problema notando que a equação nodal do circuito pode ser escrita como

$$C \frac{dv(t)}{dt} + \frac{v(t)}{R} + i_L(t) = 0$$

ou

$$\frac{dv(t)}{dt} + \frac{1}{RC} v(t) = -\frac{i_L(t)}{C}$$

Em $t = 0$

$$\begin{aligned}\frac{dv(0)}{dt} &= \frac{-1}{RC} v(0) - \frac{1}{C} i_L(0) \\ &= -2.5(4) - 5(-1) \\ &= -5\end{aligned}$$

Todavia, uma vez que

$$\frac{dv(t)}{dt} = -2K_1 e^{-2t} - 0.5K_2 e^{-0.5t}$$

então, quando $t = 0$,

$$-5 = -2K_1 - 0.5K_2$$

Essa equação juntamente com a equação

$$4 = K_1 + K_2$$

fornece $K_1 = 2$ e $K_2 = 2$. Portanto, a equação final para a tensão é

$$v(t) = 2e^{-2t} + 2e^{-0.5t} \text{ V}$$

Note que a equação da tensão satisfaz a condição inicial $v(0) = 4 \text{ V}$. A curva de resposta dessa tensão $v(t)$ é mostrada na Fig. 7.17.

A corrente no indutor está relacionada à $v(t)$ pela equação

$$i_L(t) = \frac{1}{L} \int v(t) dt$$

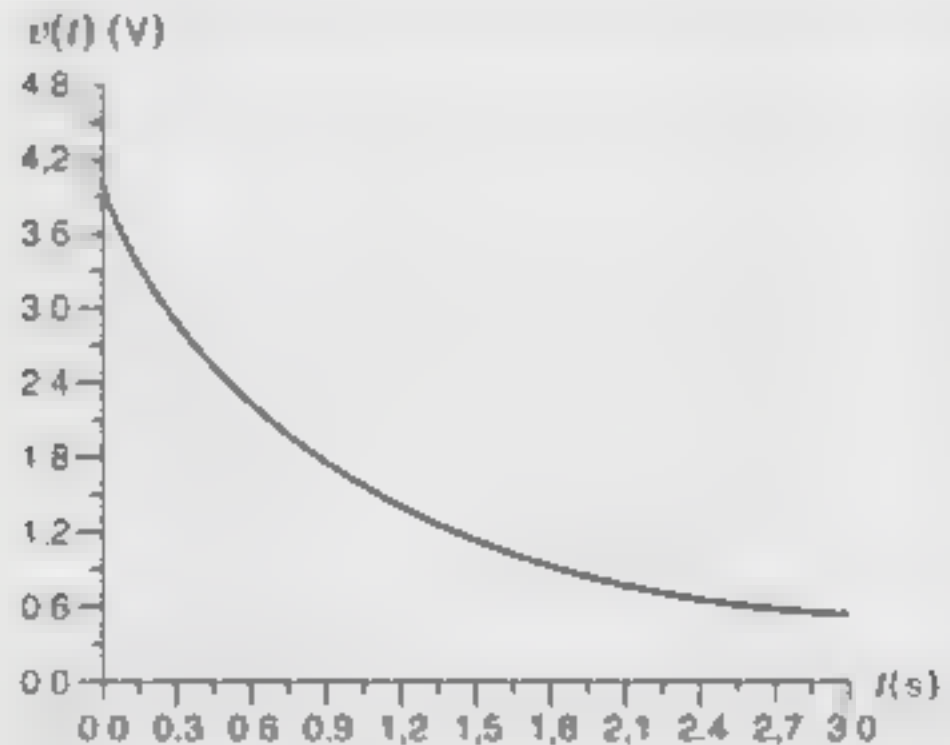


Figura 7.17 Resposta superamortecida.

A substituição da expressão de $v(t)$ nessa equação fornece

$$i_L(t) = \frac{1}{5} \int [2e^{-2t} + 2e^{-0.5t}] dt$$

ou

$$i_L(t) = -\frac{1}{5} e^{-2t} - \frac{4}{5} e^{-0.5t} \text{ A}$$

Note que, em comparação com os circuitos RL e RC , a resposta desse circuito RLC é controlada por duas constantes de tempo. O primeiro termo possui uma constante de tempo de $1/2 \text{ s}$ e o segundo termo possui uma constante de tempo de 2 s .

EXEMPLO 7.8

O circuito RLC em série mostrado na Fig. 7.18 possui os seguintes parâmetros: $C = 0,04 \text{ F}$, $L = 1 \text{ H}$ e $R = 6 \Omega$. As condições iniciais são $i_L(0) = 4 \text{ A}$ e $v_C(0) = -4 \text{ V}$. A equação para a corrente no circuito pode ser expressa por

$$\frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{di}{dt} + \frac{1}{LC} i = 0$$

Uma comparação dessa equação com as Eqs. (7.14) e (7.15) mostra que, para um circuito RLC em série, o termo de amortecimento vale $R/2L$ e a frequência natural não amortecida é igual a $1/\sqrt{LC}$. A substituição dos valores dos componentes do circuito na equação precedente fornece

$$\frac{d^2 i}{dt^2} + 6 \frac{di}{dt} + 25 i = 0$$

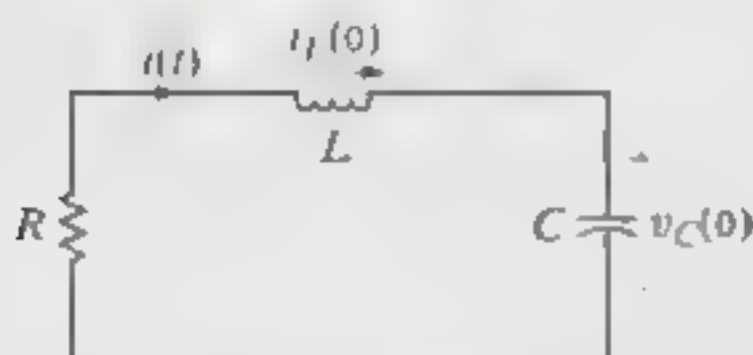


Figura 7.18 Circuito RLC em série.

Seja a determinação das expressões que representam a corrente e a tensão no capacitor.

SOLUÇÃO

A equação característica é

$$s^2 + 6s + 25 = 0$$

e suas raízes são

$$s_1 = -3 + j4$$

$$s_2 = -3 - j4$$

Uma vez que as raízes são complexas, o circuito é subamortecido e a corrente $i(t)$ pode ser expressa por

$$i(t) = K_1 e^{-3t} \cos 4t + K_2 e^{-3t} \sin 4t$$

Utilizando as condições iniciais, obtém-se

$$i(0) = 4 = K_1$$

e

$$\begin{aligned}\frac{di}{dt} &= -4K_1 e^{-3t} \sin 4t - 3K_1 e^{-3t} \cos 4t + 4K_2 e^{-3t} \cos 4t - \\ &\quad 3K_2 e^{-3t} \sin 4t\end{aligned}$$

e, portanto,

$$\frac{di(0)}{dt} = -3K_1 + 4K_2$$

Embora não se conheça o valor de $di(0)/dt$, pode-se obtê-lo através da LKT. Observando o circuito pode-se notar que

$$Ri(0) + L \frac{di(0)}{dt} + v_C(0) = 0$$

ou

$$\begin{aligned} \frac{di(0)}{dt} &= -\frac{R}{L}i(0) - \frac{v_C(0)}{L} \\ &= -\frac{6}{1} \cdot 4 - \frac{4}{1} \\ &= -20 \end{aligned}$$

Portanto,

$$-3K_1 + 4K_2 = -20$$

e, como $K_1 = 4$, $K_2 = -2$, a expressão de $i(t)$ fica

$$i(t) = 4e^{-3t} \cos 4t - 2e^{-3t} \sin 4t \text{ A}$$

Note que essa expressão satisfaz a condição inicial $i(0) = 4 \text{ A}$. A tensão entre os terminais do capacitor pode ser determinada aplicando a LKT e utilizando essa corrente, ou seja,

$$Ri(t) + L \frac{di(t)}{dt} + v_C(t) = 0$$

ou

$$v_C(t) = -Ri(t) - L \frac{di(t)}{dt}$$

A substituição da expressão precedente de $i(t)$ nessa equação fornece

$$v_C(t) = -4e^{-3t} \cos 4t + 22e^{-3t} \sin 4t \text{ V}$$

Observe que essa expressão atende à condição inicial $v_C(0) = -4 \text{ V}$. A Fig. 7.19 mostra o gráfico representativo dessa função.

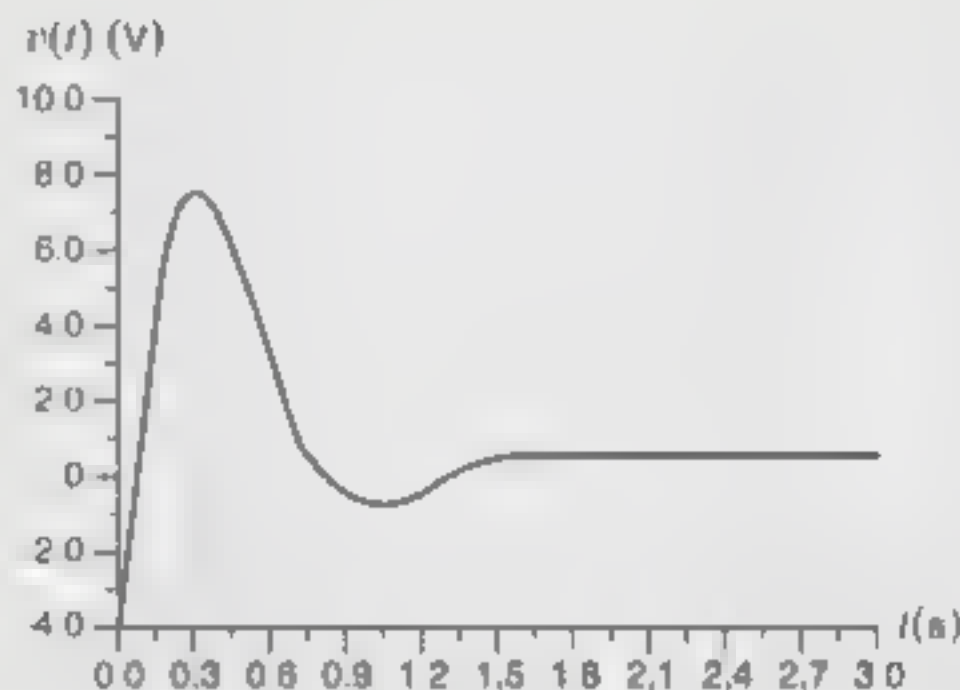


Figura 7.19 Resposta subamortecida.

EXEMPLO 7.9

Seja a análise do circuito mostrado na Fig. 7.20, o qual é um pouco mais complexo do que os dois circuitos considerados anteriormente.

SOLUÇÃO

As duas equações que descrevem a rede são

$$L \frac{di(t)}{dt} + R_1 i(t) + v(t) = 0$$

$$i(t) = C \frac{dv(t)}{dt} + \frac{v(t)}{R_2}$$

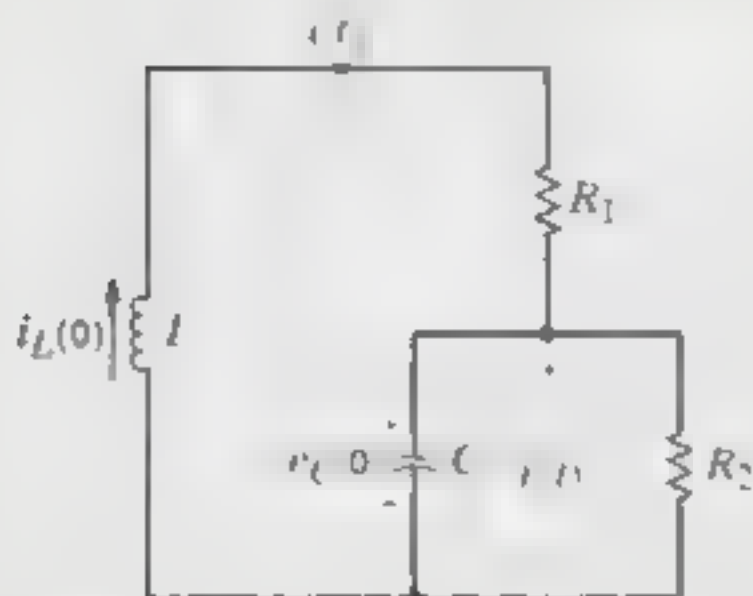


Figura 7.20 Circuito RLC série-paralelo.

A substituição da equação de segunda ordem na de primeira ordem fornece

$$\frac{d^2 v}{dt^2} + \left(\frac{1}{R_2 C} + \frac{R_1}{L} \right) \frac{dv}{dt} + \frac{R_1 + R}{R_2 L C} v = 0$$

Considerando que os parâmetros do circuito e as condições iniciais sejam

$$R_1 = 10 \, \Omega \quad C = \frac{1}{8} \text{ F} \quad v_C(0) = 1 \text{ V}$$

$$R_2 = 8 \, \Omega \quad L = 2 \text{ H} \quad i_L(0) = \frac{1}{2} \text{ A}$$

a equação diferencial fica

$$\frac{d^2 v}{dt^2} + 6 \frac{dv}{dt} + 9v = 0$$

Deseja-se obter as expressões da corrente $i(t)$ e da tensão $v(t)$.

A equação característica pode ser expressa por

$$s^2 + 6s + 9 = 0$$

e, portanto, suas raízes são

$$\begin{aligned} s_1 &= -3 \\ s_2 &= -3 \end{aligned}$$

Uma vez que as raízes são reais e iguais, o circuito é criticamente amortecido. A tensão $v(t)$ será, então, expressa por

$$v(t) = K_1 e^{-3t} + K_2 t e^{-3t}$$

Uma vez que $v(t) = v_C(t)$,

$$v(0) = v_C(0) = 1 = K_1$$

Além disso,

$$\frac{dv(t)}{dt} = -3K_1 e^{-3t} + K_2 e^{-3t} - 3K_2 t e^{-3t}$$

Entretanto,

$$\frac{dv(t)}{dt} = \frac{i(t)}{C} - \frac{v(t)}{R_2 C}$$

Igualando essas duas expressões e calculando o valor da equação resultante em $t = 0$, tem-se

$$\begin{aligned} \frac{1/2}{1/8} &= \frac{1}{1} = -3K_1 + K_2 \\ 3 &= -3K_1 + K_2 \end{aligned}$$

Como $K_1 = 1$ e $K_2 = 6$, a expressão para $v(t)$ fica

$$v(t) = e^{-3t} + 6te^{-3t} \text{ V}$$

Note que essa expressão atende à condição inicial $v(0) = 1$.

A corrente $i(t)$ pode ser determinada a partir da equação da análise nodal em $v(t)$:

$$i(t) = C \frac{dv(t)}{dt} + \frac{v(t)}{R_2}$$

Substituindo a expressão de $v(t)$ da equação precedente, obtém-se

$$i(t) = \frac{1}{8} [-3e^{-3t} + 6e^{-3t} - 18te^{-3t}] + \frac{1}{8} [e^{-3t} + 6te^{-3t}]$$

ou

$$i(t) = \frac{1}{8} e^{-3t} - \frac{3}{2} t e^{-3t} \text{ A}$$

Se essa expressão da corrente for empregada na equação do circuito,

$$v(t) = L \frac{di(t)}{dt} + R_1 i(t)$$

obter-se-á

$$v(t) = e^{-3t} + 6te^{-3t} \text{ V}$$

que é idêntica à expressão deduzida anteriormente.

A Fig. 7.21 mostra, graficamente, essa função criticamente amortecida

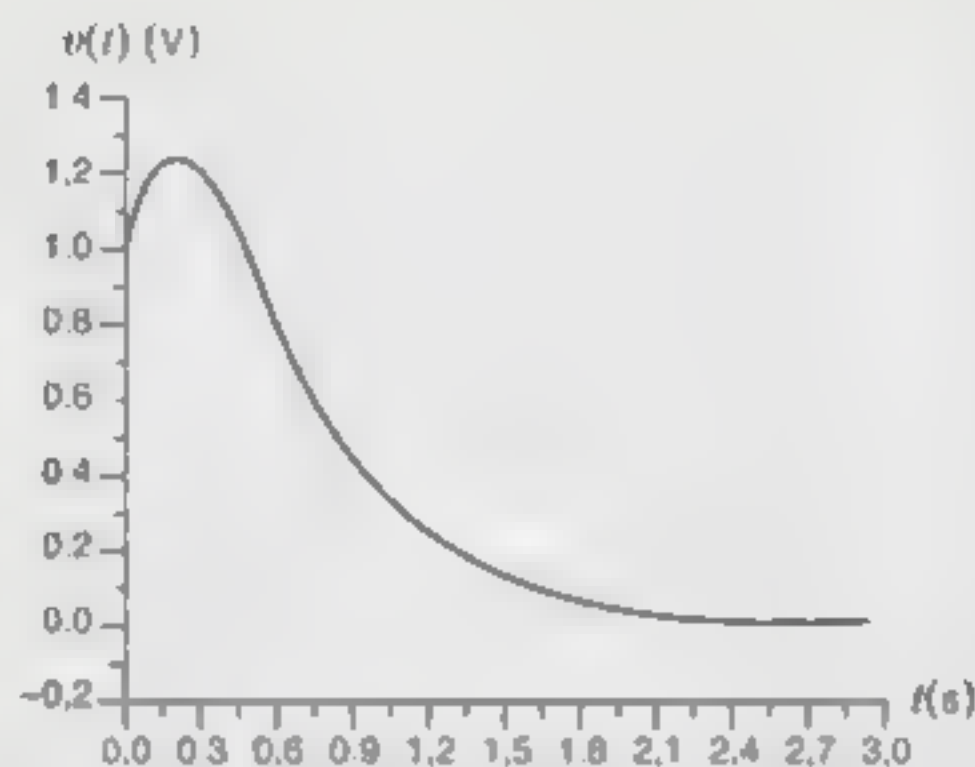
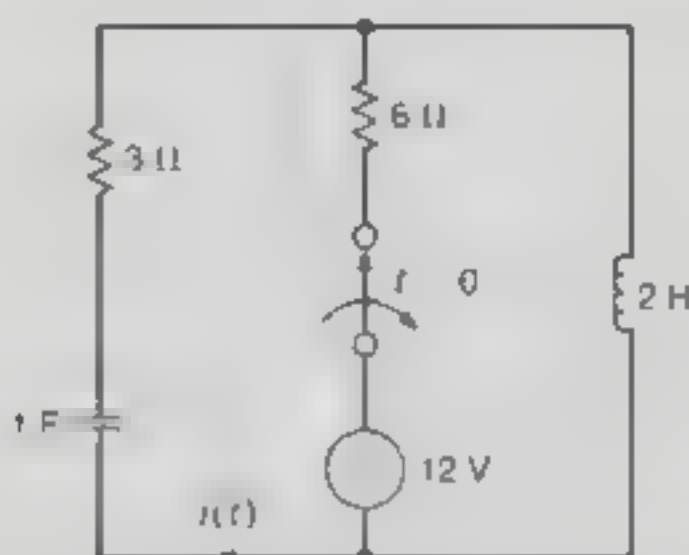


Figura 7.21 Resposta criticamente amortecida.

Avaliação do Aprendizado

E7.14 A chave da rede mostrada na Fig. E7.14 abre em $t = 0$. Determine a corrente $i(t)$ para $t > 0$.

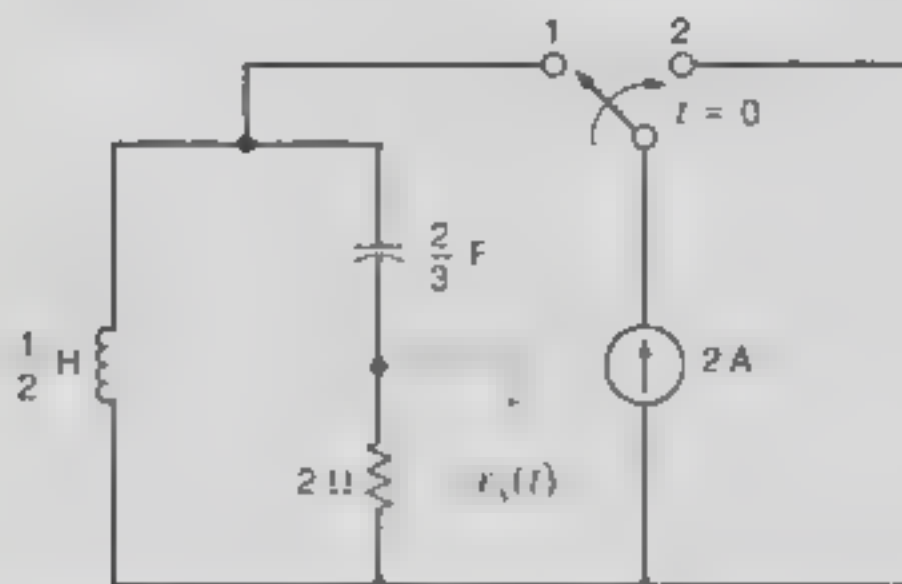


RESPOSTA:

$$i(t) = -2e^{-t/2} + 4e^{-t} \text{ A.}$$

Figura E7.14

E7.15 A chave da rede mostrada na Fig. E7.15 é movimentada da posição 1 para a posição 2 em $t = 0$. Determine a tensão $v_x(t)$ para $t > 0$.

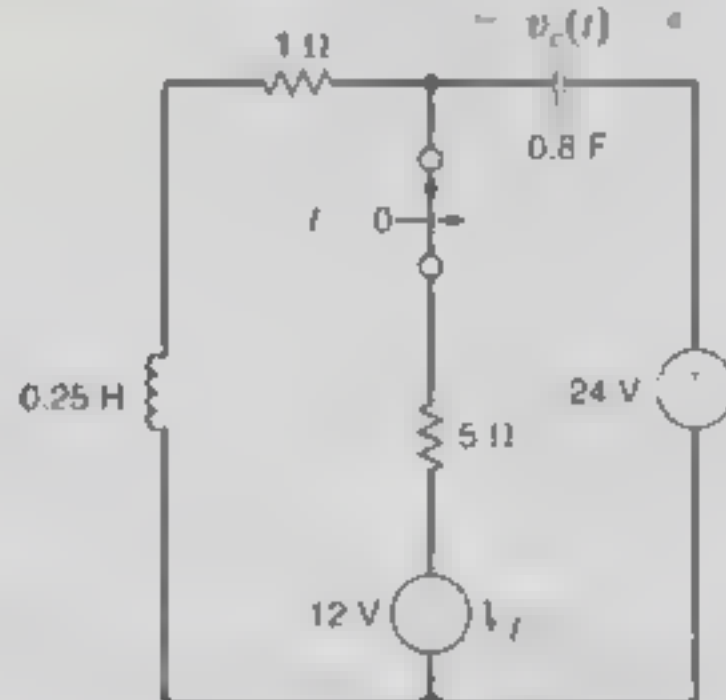


RESPOSTA:

$$v_x(t) = 2(e^{-t} - 3e^{-3t}) \text{ V.}$$

Figura E7.15

E7.16 Determine a tensão $v_C(t)$ do circuito mostrado na Fig. E7.16, para $t > 0$.



RESPOSTA: $v_C(t) = -2e^{-2t} \cos t - 1,5e^{-2t} \sin t + 24 \text{ V.}$

Figura E7.16

EXEMPLO 7.10

Considere o circuito mostrado na Fig. 7.22. Esse circuito é idêntico àquele analisado no Exemplo 7.8, exceto pela presença de uma função forçamento constante. Os parâmetros do circuito são iguais àqueles utilizados no Exemplo 7.8.

$$\begin{aligned} C &= 0,04 \text{ F} & i_L(0) &= 4 \text{ A} \\ L &= 1 \text{ H} & v_C(0) &= -4 \text{ V} \\ R &= 6 \Omega \end{aligned}$$

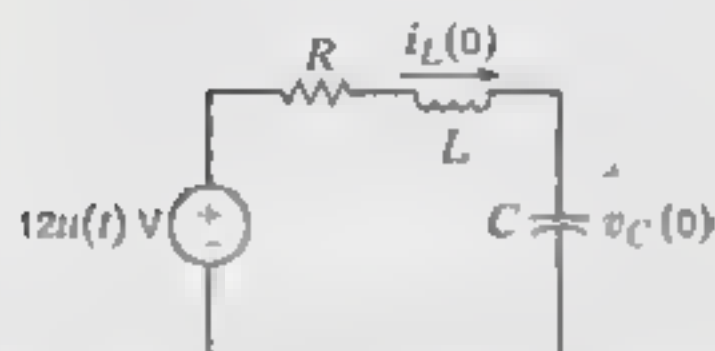


Figura 7.22 Circuito RLC em série sujeito a uma entrada em degrau.

Deseja-se obter uma expressão para a tensão $v_C(t)$ para $t > 0$.

SOLUÇÃO

Sabe-se, pelo desenvolvimento matemático realizado anteriormente, que a solução geral desse problema consiste em uma solução particular superposta a uma solução complementar. Pelo Exemplo 7.8, verificou-se que a solução complementar possui a forma $K_1 e^{-3t} \cos 4t + K_2 e^{-3t} \sin 4t$. A solução particular é uma constante, uma vez que a entrada é uma constante e, portanto, a solução geral será

$$v_C(t) = K_1 e^{-3t} \cos 4t + K_2 e^{-3t} \sin 4t + K_3$$

Uma análise do circuito mostra que, no regime estacionário, o valor final de $v_C(t)$ é igual a 12 V, uma vez que, nesta condição, o indutor representa um curto-circuito e o capacitor um circuito aberto. Assim, $K_3 = 12$. O valor no regime estacionário também poderia ser calculado de imediato a partir da equação diferencial. Portanto, a forma da solução geral é,

$$v_C(t) = K_1 e^{-3t} \cos 4t + K_2 e^{-3t} \sin 4t + 12$$

As condições iniciais podem agora ser utilizadas na determinação das constantes K_3 e K_4 :

$$v_C(0) = -4 = K_3 + 12$$

$$-16 = K_3$$

Como a derivada de uma constante é igual a zero, os resultados do Exemplo 7.8 mostram que

$$\frac{dv_C(0)}{dt} = \frac{i(0)}{C} = 100 = -3K_3 + 4K_4$$

e como $K_3 = -16$, $K_4 = 13$. Portanto, a solução geral para a tensão $v_C(t)$ é

$$v_C(t) = 12 - 16e^{-3t} \cos 4t + 13e^{-3t} \sin 4t \text{ V}$$

Note que essa equação atende à condição inicial $v_C(0) = -4 \text{ V}$ e à condição final $v_C(\infty) = 12 \text{ V}$.

EXEMPLO 7.11

Seja a análise do circuito mostrado na Fig. 7.23. Uma observação mais detalhada desse circuito indicará que ele é idêntico àquele mostrado no Exemplo 7.9, exceto pelo fato de a função forçamento, neste caso, ser constante. Admite-se que o circuito esteja em regime estacionário em $t = 0^-$. As equações que descrevem o circuito para $t > 0$ são

$$L \frac{di(t)}{dt} + R_1 i(t) + v(t) = 24$$

$$i(t) = C \frac{dv(t)}{dt} + \frac{v(t)}{R_2}$$

Combinando essas equações, obtém-se

$$\frac{d^2 v(t)}{dt^2} + \left(\frac{1}{R_2 C} + \frac{R_1}{L} \right) \frac{dv(t)}{dt} + \frac{R_1 + R_2}{R_2 LC} v(t) = \frac{24}{LC}$$

Considerando que os parâmetros do circuito sejam $R_1 = 10 \Omega$, $R_2 = 2 \Omega$, $L = 2 \text{ H}$ e $C = 1/4 \text{ F}$, a equação diferencial da tensão de saída reduz-se a

$$\frac{d^2 v(t)}{dt^2} + 7 \frac{dv(t)}{dt} + 12v(t) = 48$$

Seja a determinação da tensão de saída $v(t)$.

SOLUÇÃO

A equação característica é

$$s^2 + 7s + 12 = 0$$

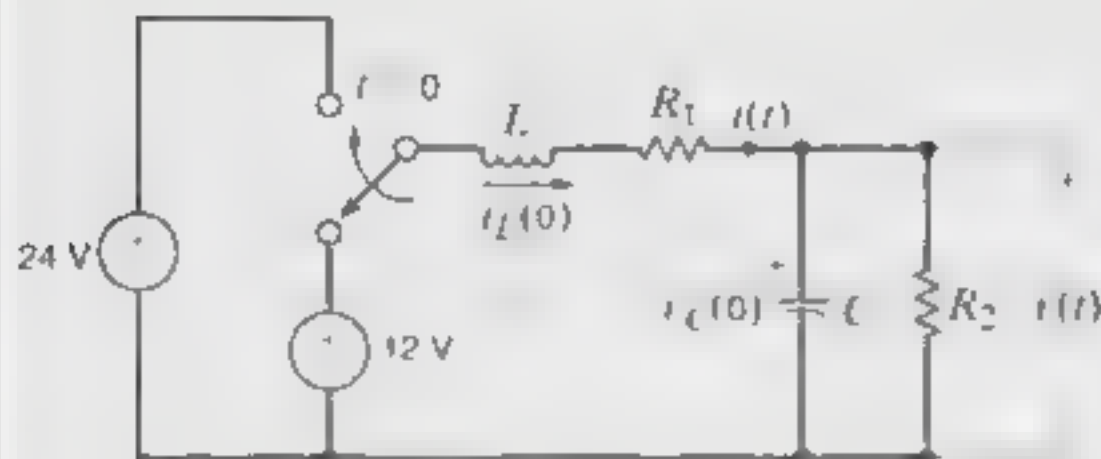


Figura 7.23 Circuito RLC série-paralelo sujeito a uma função forçamento constante.

e, portanto, suas raízes são

$$s_1 = -3$$

$$s_2 = -4$$

A resposta do circuito é superamortecida e, assim, a solução geral é da forma

$$v(t) = K_1 e^{-3t} + K_2 e^{-4t} + K_3$$

O valor da tensão em regime estacionário, K_3 , pode ser determinado com base na Fig. 7.24a. Note que

$$v(\infty) = 4 \text{ V} = K_3$$

As condições iniciais podem ser calculadas a partir das Figs. 7.24b e c, as quais são válidas em $t = 0^-$ e $t = 0^+$, respectivamente. Note que $v(0^+) = 2 \text{ V}$ e, portanto, pela equação de resposta,

$$v(0^+) = 2 \text{ V} = K_1 + K_2 + 4$$

$$-2 = K_1 + K_2$$

A Fig. 7.24c mostra que $i(0^+) = 1$. Pela equação de resposta, percebe-se que

$$\frac{dv(t)}{dt} = -3K_1 - 4K_2$$

e, portanto,

$$\frac{dv(0)}{dt} = \frac{i(0)}{C} = \frac{v(0)}{R_2 C}$$

$$4 = 4$$

$$0$$

logo,

$$0 = -3K_1 - 4K_2$$

Resolvendo as duas equações para K_1 e K_2 , tem-se $K_1 = -8$ e $K_2 = 6$. Assim, a solução geral da resposta em tensão é

$$v(t) = 4 - 8e^{-3t} + 6e^{-4t} \text{ V}$$

Note que essa equação atende aos valores inicial e final de $v(t)$.

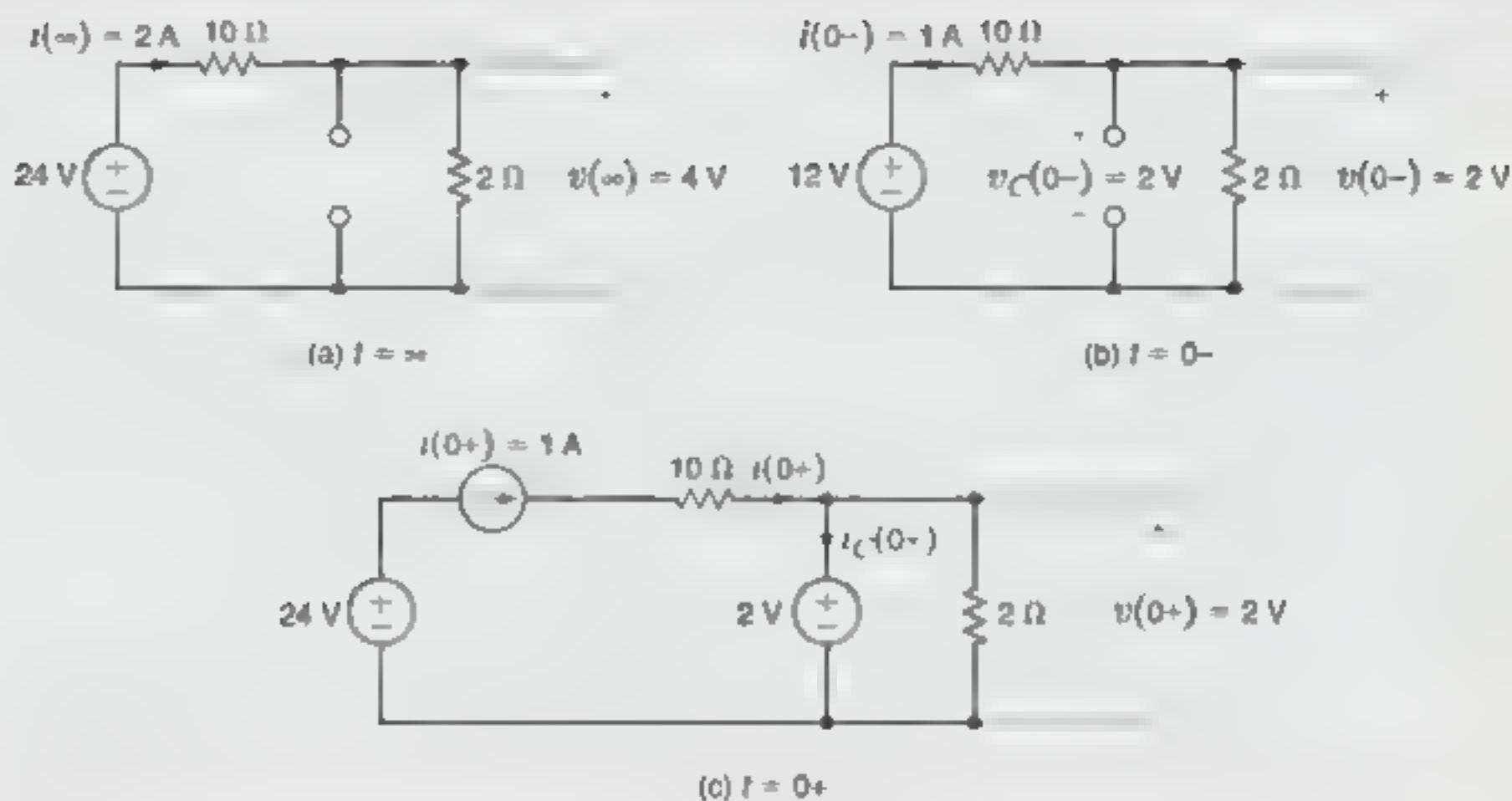


Figura 7.24 Circuitos equivalentes em $t = \infty$, $t = 0^-$ e $t = 0^+$ para o circuito mostrado na Fig. 7.23.

Avaliação do Aprendizado

E7.17 A chave da rede mostrada na Fig. E7.17 se move da posição 1 para a posição 2 em $t = 0$. Obtenha a corrente $i_s(t)$ para $t > 0$ e utilize essa corrente para determinar $v_s(t)$ para $t > 0$.

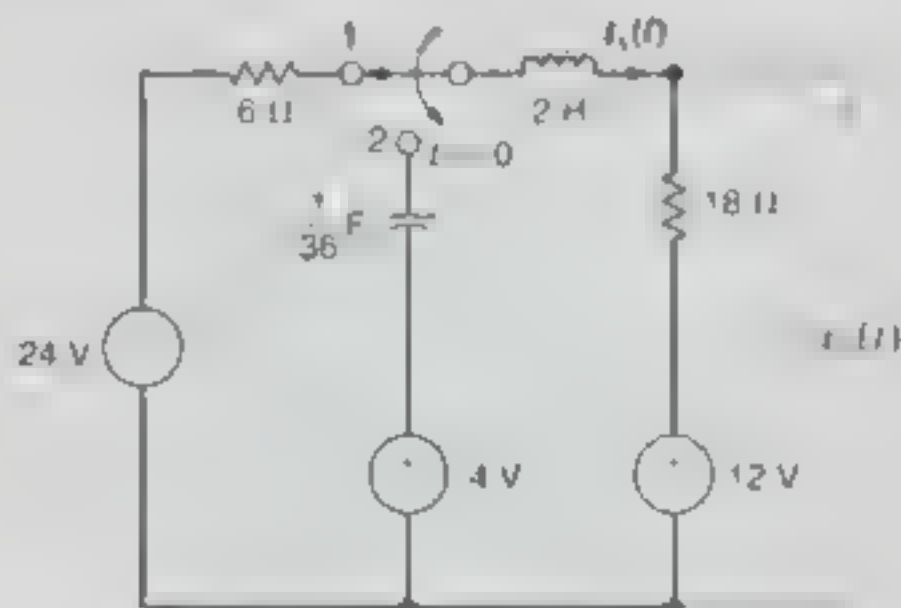


Figura E7.17

RESPOSTA:

$$i_s(t) = -\frac{11}{6}e^{-3t} + \frac{14}{6}e^{-6t}\text{ A};$$

$$v_s(t) = 12 + 18i_s(t)\text{ V}$$

E7.18 Determine a corrente $i(t)$ do circuito mostrado na Fig. E7.18 para $t > 0$.

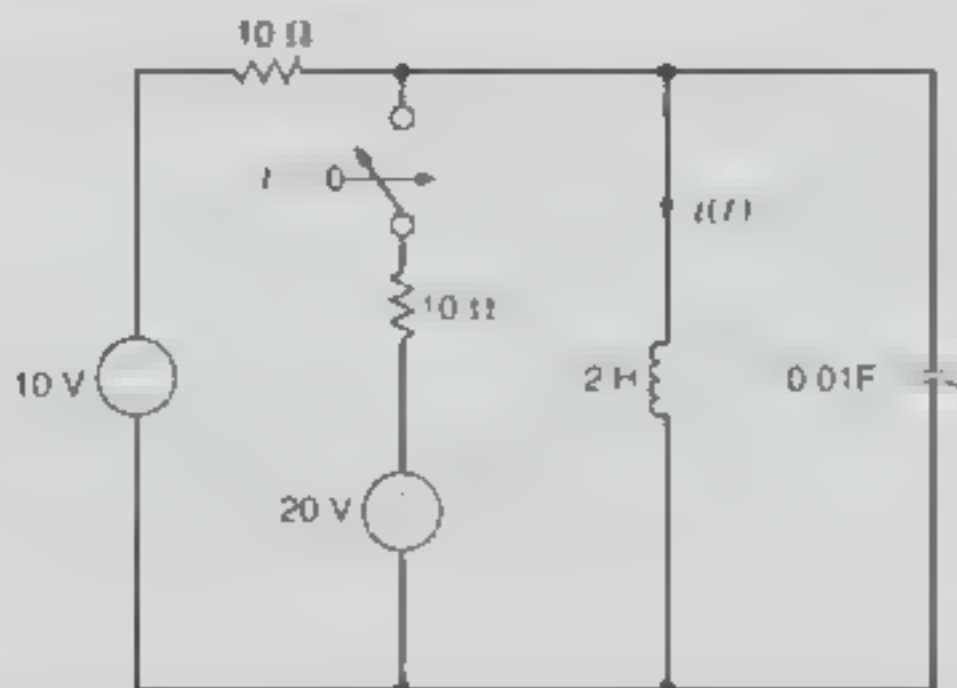


Figura E7.18

RESPOSTA: $i(t) = 0,4144e^{-17,07t} - 2,414e^{-293t} + 3\text{ A}$.

7.4 Exemplos de Aplicação

Existe uma grande variedade de aplicações nas quais os circuitos são utilizados em seu regime transiente. Os exemplos a seguir servirão para demonstrar algumas delas.

EXEMPLO DE APLICAÇÃO 7.12

Retorna-se agora ao circuito do flash de uma câmera, redesenhado na Fig. 7.25, o qual foi discutido na introdução desse capítulo. A lâmpada de xenônio do flash possui as seguintes especificações:

Tensão necessária para a operação adequada do flash: mínima de 50 V
máxima de 70 V

Resistência equivalente: 80 Ω

Para essa aplicação específica, a constante de tempo necessária durante o tempo de operação do flash é de 1 ms. Além disso, para minimizar a dimensão física do circuito, o resistor R_1 deve dissipar uma potência cujo pico não deve ultrapassar a 10 mW. Deseja-se determinar os valores de V_F , C_F e R_1 . Além disso, pretende-se determinar o tempo de recarga, a tensão na lâmpada do flash, a corrente, a potência e a energia total dissipada durante a operação do flash.

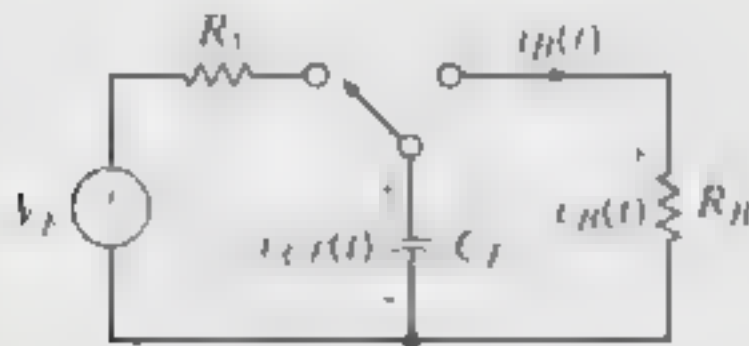


Figura 7.25 Modelo do circuito de carregamento do flash de uma câmera.

SOLUÇÃO

Inicia-se selecionando a fonte de tensão, V_F . Como o capacitor estará conectado diretamente à lâmpada de xenônio durante a operação do flash, e como o flash requer uma tensão de pelo menos 50 V, a fonte V_F deve fornecer pelo menos 50 V. A tensão necessária à operação adequada do flash será selecionada arbitrariamente como a média entre as tensões máxima e mínima de operação, isto é, será atribuída uma tensão de 60 V para a fonte V_F .

Considera-se agora a constante de tempo durante o intervalo de operação do flash. Com base na Fig. 7.25, durante o flash a constante de tempo será

$$\tau_F = R_H C_F \quad 7.22$$

Dado que $t_F = 1$ ms e $R_H = 80 \Omega$, obtém-se $C_F = 12,5 \mu\text{F}$.

Em seguida, analisa-se o valor de R_1 . No início do tempo de carga, a tensão do capacitor é nula e tanto a corrente quanto a potência em R_1 estarão com seus valores máximos.

Considerando a potência em seu valor máximo admissível de 100 mW, pode-se escrever

$$P_{R_{\max}} = \frac{V_F^2}{R_1} = \frac{V_F(t)^2}{R_1} = 0,1 \quad 7.23$$

e obtém-se $R_1 = 36 \text{ k}\Omega$. O tempo de recarga é o tempo necessário para o capacitor carregar de zero até o valor mínimo de 50 V. Com esse valor o flash pode ser descarregado com sucesso. O tempo $t = 0$ será definido como o tempo no qual a chave será acionada no sentido da lâmpada para R_1 . No tempo $t = 0$, a tensão no capacitor é nula, e em $t = \infty$, a tensão no capacitor é de 60 V; a constante de tempo será simplesmente igual a $R_1 C_F$. A equação resultante para a tensão no capacitor durante a recarga é

$$v_{CF}(t) = K_1 + K_2 e^{-t/\tau} = 60 - 60 e^{-t/(R_1 C_F)} \text{ V} \quad 7.24$$

Em $t = t_{\text{carga}}$, $v_{CF}(t) = 50$ V. A substituição dessas condições e dos valores de R_1 e C_F na Eq. (7.24) fornece o tempo de carga $t_{\text{carga}} = 806$ ms – um pouco menos de um segundo. Como ponto de interesse para discussão, considere a escolha de V_F . O que acontece se V_F diminuir para apenas 51 V? Primeiro, pela Eq. (7.23), R_1 passa a ser de 26,01 k Ω . Segundo, pela Eq. (7.24), o tempo de carga apenas aumenta ligeiramente para 1,28 s. Portanto, aparentemente, a seleção de V_F não afeta de forma significativa o desempenho da unidade de flash e, assim, existe alguma flexibilidade em seu projeto.

Finalmente, considera-se a forma de onda na própria lâmpada do flash. A tensão na lâmpada é idêntica à tensão no capacitor durante a operação do flash e ambas são expressas pela função de decaimento exponencial

$$v_H(t) = 60 e^{-1000t} \text{ V} \quad 7.25$$

em que a constante de tempo é definida pela Eq. (7.22), e admitiu-se que o capacitor fica completamente carregado pela fonte V_F (isto é, 60 V). Como a resistência equivalente da lâmpada é de 80 Ω , a corrente que flui dela será expressa por

$$i_H(t) = \frac{60 e^{-1000t}}{80} = 750 e^{-1000t} \text{ mA} \quad 7.26$$

Como sempre, a potência é calculada pelo produto $v \cdot i$. Assim,

$$p_H(t) = v_H(t) i_H(t) = 45 e^{-2000t} \text{ W} \quad 7.27$$

Finalmente, a energia total consumida pela lâmpada durante o flash será de apenas

$$w_H(t) = \int_0^\infty p_H(t) dt = \int_0^\infty 45 e^{-2000t} dt = \left. \frac{45}{2000} e^{-2000t} \right|_0^\infty = \frac{45}{2000} = 22,5 \text{ mJ} \quad 7.28$$

EXEMPLO DE APLICAÇÃO 7.13

Uma aplicação muito comum dos indutores é o armazenamento de energia no presente para uso no futuro. Essa energia fica armazenada na forma de um campo magnético e é necessária uma corrente para manter o campo. Em uma situação análoga, o capacitor armazena energia em um campo elétrico e é necessário o estabelecimento de um diferencial de tensão entre seus terminais para mantê-la. Como aplicação da capacidade de armazenamento de energia do indutor, considera-se o circuito gerador de pulso de alta tensão mostrado na Fig. 7.26. Esse circuito é capaz de produzir pulsos de alta tensão a partir de uma pequena tensão CC. Pode-se verificar se é possível esse circuito produzir um pico de tensão de 500 V a cada 2 ms, isto é, 500 vezes por segundo.

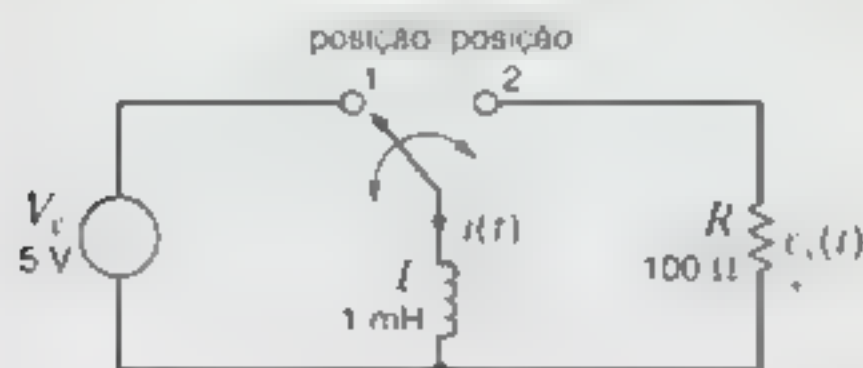


Figura 7.26 Gerador de pulso de alta tensão.

SOLUÇÃO

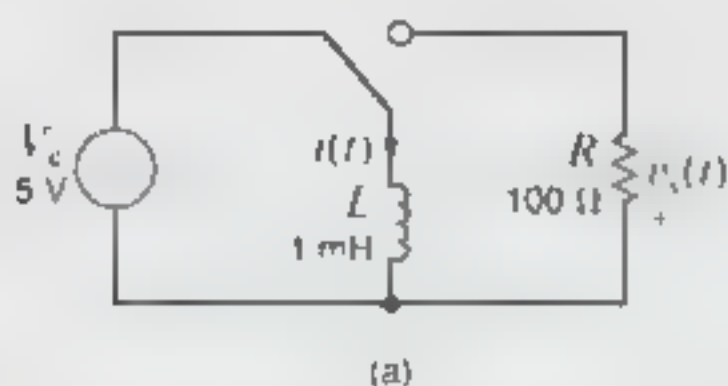
No centro desse circuito existe um polo simples, uma chave comutadora, isto é, uma chave simples (um único polo) com duas posições eletricamente conectadas (duas posições, 1 e 2). Conforme mostrado na Fig. 7.27a, quando na posição 1, a corrente no indutor aumenta linearmente de acordo com a equação

$$i(t) = \frac{1}{L} \int_0^t V_c dt$$

Em seguida a chave é movimentada da posição 1 para a posição 2 no tempo T_1 . A corrente de pico no indutor é obtida por

$$i_p(t) = \frac{V_c T_1}{L}$$

Enquanto na posição 1, o resistor é isolado eletricamente e, portanto, a tensão nele atuante é nula.



No tempo $t > T_1$, quando a chave está na posição 2, conforme mostrado na Fig. 7.27b, a corrente do indutor flui para o resistor produzindo a tensão

$$v_s(t - T_1) = i(t - T_1)R \quad t > T_1$$

Até aqui, sabe-se que a forma da tensão $v_s(t)$, para um tempo $t > T_1$, é

$$v_s(t) = K e^{-t/\tau} \quad t > T_1$$

E $\tau = L/R$. O valor inicial de $v_s(t)$ no intervalo de tempo $t > T_1$ é K , uma vez que no tempo T_1 o valor da exponencial é 1. De acordo com as especificações de projeto, esse valor inicial é de 500 e, portanto, $K = 500$.

Como essa tensão é criada pela corrente de pico I_p do indutor fluindo para o resistor R ,

$$K = 500 = (V_c T_1 R)/L = 5T_1(100)/10^{-3}$$

e, assim, T_1 é igual a 1 ms e I_p vale 5 A.

A equação da tensão no intervalo de tempo $t > T_1$, ou $t > 1$ ms, é

$$v_s(t - 1 \text{ ms}) = 500 e^{-100(t - 1 \text{ ms})} \text{ V}$$

Ao término do período de 2 ms, isto é, em $t = 2$ ms, a tensão vale $500e^{-100}$, ou seja, praticamente zero. A forma de onda completa da tensão é mostrada na Fig. 7.28.

É interessante considerar agora a potência nominal dos diversos componentes utilizados nesse circuito gerador de pulso. Inicialmente, 500 V é uma tensão relativamente alta e, portanto, a tensão nominal de cada componente deve ser de pelo menos 600 V, de modo a propiciar uma margem de segurança. O pico nominal da corrente no indutor também deve ser de no mínimo 6 A. Finalmente, na corrente de pico, a perda de potência no resistor é de 2.500 W! Esse resistor deverá apresentar dimensões relativamente grandes de modo a atender a esta potência da carga sem apresentar um aquecimento significativo. Felizmente, a potência do resistor é pulsante e não contínua; assim, um resistor de potência nominal menor operará de forma adequada, talvez 500 W. Nos capítulos a seguir as características associadas à potência serão discutidas com muito mais detalhes.

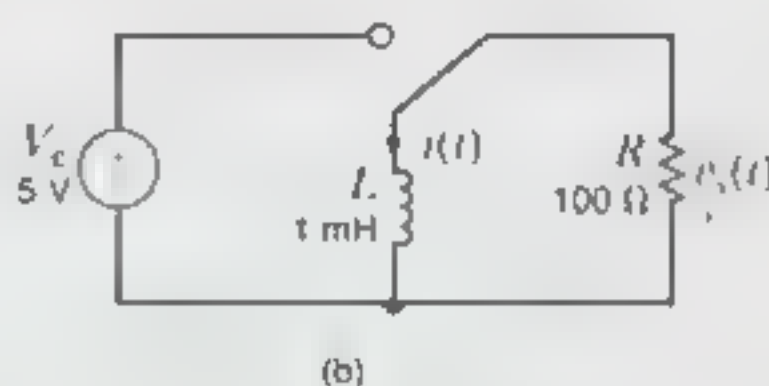


Figura 7.27 (a) Gerador de pulso com a chave na posição 1. O indutor é energizado. (b) Chave na posição 2. Quando a energia é drenada do indutor, a tensão e a corrente decaem para zero.

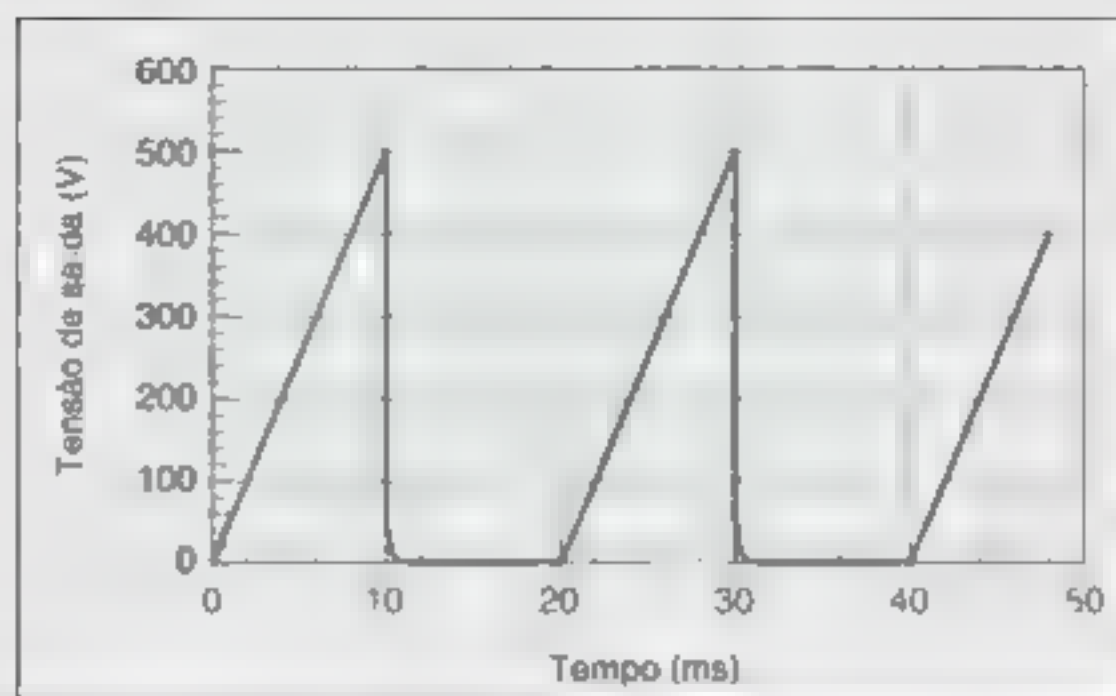


Figura 7.28 Tensão de saída do gerador de pulso.

EXEMPLO DE APLICAÇÃO 7.14

A Fig. 7.29 mostra o circuito do marca-passo de um coração. O SCR (*silicon-controlled rectifier* — retificador controlado de silício) é um dispositivo no estado sólido que possui dois modos distintos de operação. Quando a tensão entre os terminais do SCR aumenta, porém mantendo-se menor que 5 V, o SCR se comporta como um circuito aberto, conforme mostrado na Fig. 7.30a. Quando a tensão entre os terminais do SCR atinge 5 V, o dispositivo funciona como uma fonte de corrente, conforme mostrado na Fig. 7.30b. Esse comportamento continua enquanto a tensão no SCR permanece acima de 0,2 V. Nessa tensão, o SCR é interrompido e, novamente, passa a funcionar em circuito aberto.

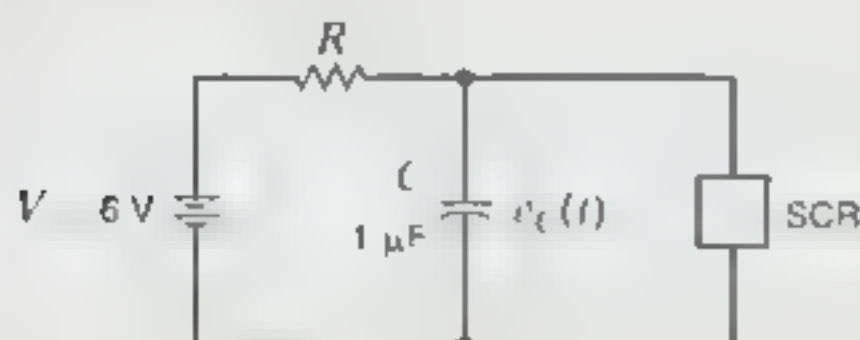


Figura 7.29 Circuito equivalente de um marca-passo de coração.

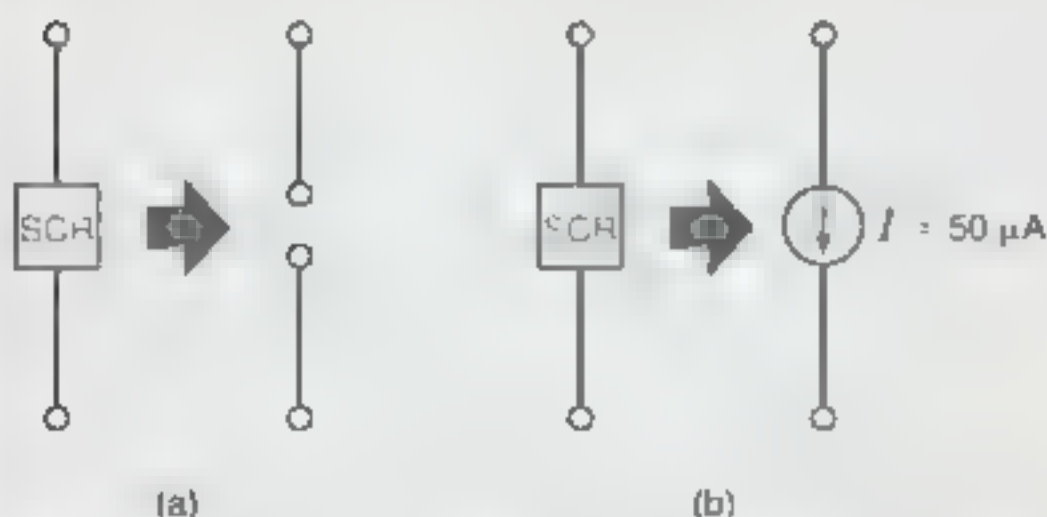


Figura 7.30 Circuitos equivalentes de um retificador controlado de silício.

Admita que em $t = 0$, a tensão $v_C(t)$ seja nula e que o capacitor de $1 \mu\text{F}$ comece a ser carregado pela fonte de tensão de 6 V. Determine um valor para o resistor de modo que $v_C(t)$ seja igual a 5 V (a tensão de acionamento do SCR) em 1 s. Em $t = 1 \text{ s}$, o SCR é acionado e começa a descarregar o capacitor. Determine o tempo necessário para que a tensão $v_C(t)$ caia de 5 V para 0,2 V. Finalmente, construa o gráfico de $v_C(t)$ para três ciclos.

SOLUÇÃO

Para $t < 1 \text{ s}$, o circuito equivalente do marca-passo é o mostrado na Fig. 7.31. Conforme indicado anteriormente, a tensão do capacitor tem a forma

$$v_C(t) = 6 - 6e^{-t/RC} \text{ V}$$

A tensão de 0,2 V ocorre em

$$t_1 = 0,034RC$$

enquanto a tensão de 5 V ocorre em

$$t_2 = 1,792RC$$

Deseja-se que $t_2 - t_1 = 1 \text{ s}$. Portanto,

$$1,758RC = 1 \text{ s}$$

e

$$RC = 0,569 \text{ s} \quad \text{e} \quad R = 569 \text{ k}\Omega$$

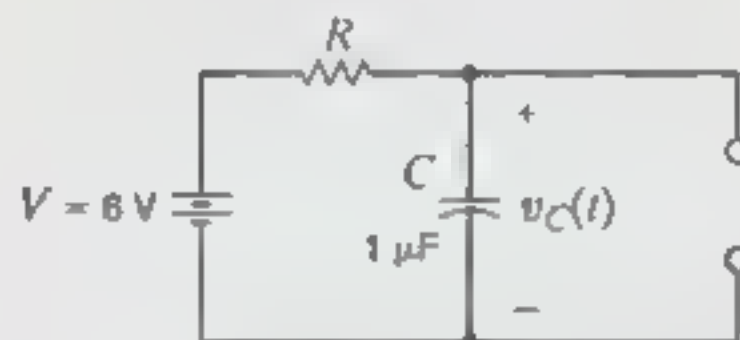


Figura 7.31 Rede equivalente do marca-passo durante o ciclo de carga do capacitor.

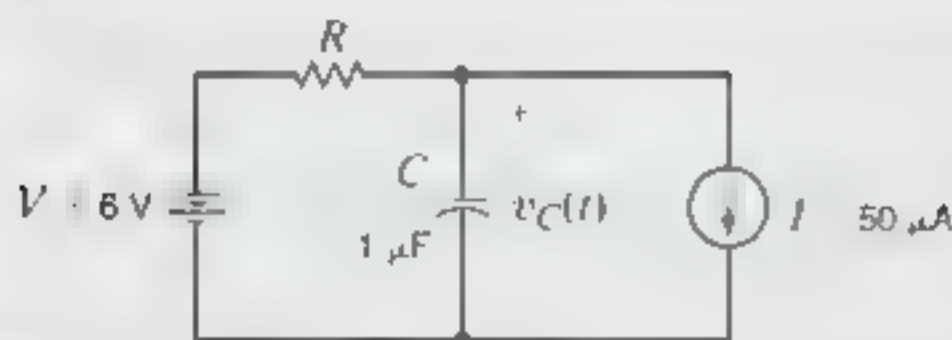


Figura 7.32 Rede equivalente do marca-passo durante o ciclo de descarga do capacitor

Em $t = 1$ s, o SCR é acionado e o marca-passo é modelado pelo circuito mostrado na Fig. 7.32. A forma da onda durante a descarga é

$$v(t) = K_1 + K_2 e^{-(t-1)/RC}$$

O termo $(t - 1)$ aparece na exponencial para defasar a função em 1 s, uma vez que durante esse tempo o capacitor estava sendo carregado. Imediatamente após o acionamento do SCR, em $t = 1^+$ s, a tensão $v_C(t)$ ainda é de 5 V, enquanto em $t = \infty$, $v_C(t) = 6 - IR$. Portanto,

$$K_1 + K_2 = 5 \quad \text{e} \quad K_1 = 6 - IR$$

A solução, então, possui a forma

$$v_C(t) = 6 - IR + (IR - 1)e^{-(t-1)/RC}$$

Seja T o tempo além de 1 s necessário para que $v(t)$ caia para 0,2 V. Pode-se, assim, escrever

$$0,2(T + 1) = 6 - IR + (IR - 1)e^{-T/RC} = 0,2$$

A substituição dos valores de I , R e C fornece

$$T = 0,11 \text{ s}$$

A forma de onda da saída é mostrada na Fig. 7.33.

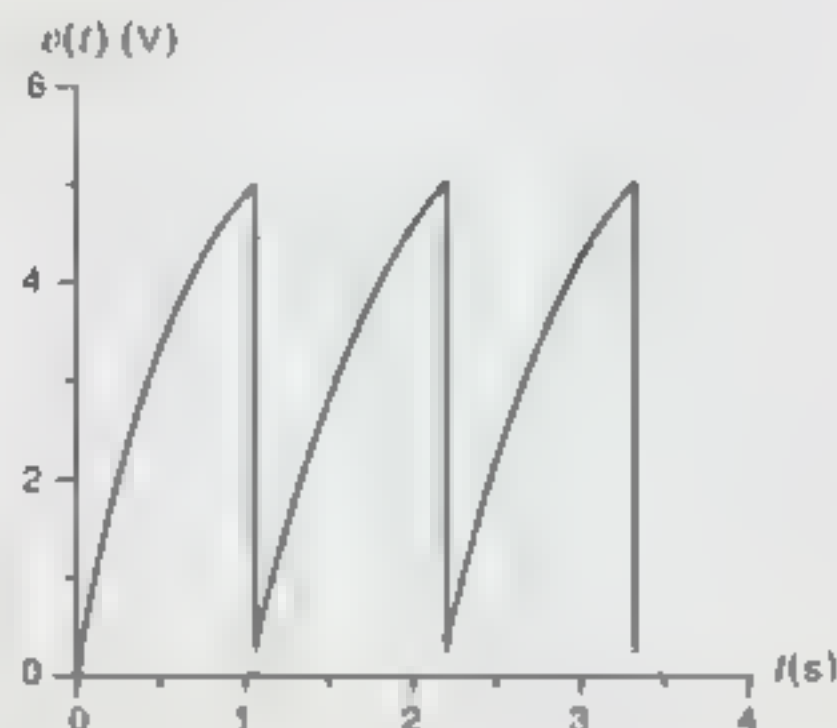


Figura 7.33 Forma de onda da tensão de saída do marca-passo de coração.

EXEMPLO DE APLICAÇÃO 7.15

Considere o circuito RL mostrado na Fig. 7.34, o qual, em sua essência, forma a base de todas as fontes de potência no mundo. A chave abre em $t = 0$. A fonte V_F e o resistor R são escolhidos simplesmente para gerar uma corrente de 1 A no indutor antes do acionamento da chave. Seja a determinação da tensão de pico entre os terminais do indutor e entre os terminais da chave.

SOLUÇÃO

A análise se inicia com a expressão da corrente no indutor. No tempo $t = 0$, a corrente no indutor é de 1 A. No tempo $t = \infty$, a corrente é nula. A constante de tempo é simplesmente L/R , porém, quando a chave é aberta, a resistência R é infinita e a constante de tempo é nula! Como resultado, a corrente no indutor é

$$i_L(t) = 1e^{-\infty t} \text{ A} \quad 7.29$$

onde ∞ é infinito. A tensão resultante no indutor é

$$v_L(t) = L \frac{di_L(t)}{dt} = -\infty e^{-\infty t} \quad 7.30$$

Em $t = 0$, a tensão de pico no indutor é infinita e negativa! Esse nível de tensão é causado pela tentativa de se desconectar a corrente no indutor instantaneamente, levando di/dt a valores extremamente altos. Empregando-se a LKT, a tensão de

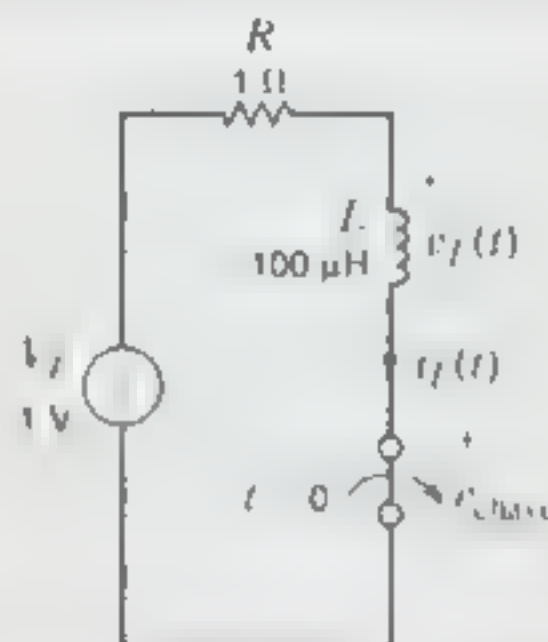


Figura 7.34 Rede com indutor presente nas modernas fontes de potência. Chave ligada.

pico na chave deve ser infinita e positiva (gerando a tensão de suprimento). Este fenômeno é chamado de *salto indutivo* e é um obstáculo aos projetistas de fontes de potência.

Diante dessa situação, procura-se, naturalmente, uma forma de reduzir essa tensão excessiva e, mais oportunamente, prevê-la e controlá-la. Analisa-se agora o que se tem e o que se conhece. Tem-se uma tensão transiente que aumenta muito rapidamente e sem limites. Tem-se também uma corrente inicial no indutor que deve fluir para algum lugar. Sabe-se que as tensões no capacitor não podem variar rapidamente e que os resistores

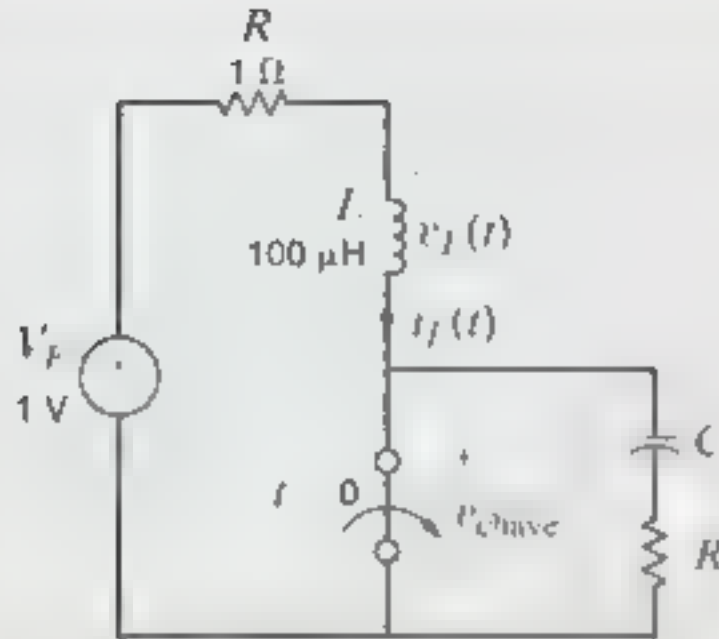


Figura 7.35 Conversão de um circuito indutivo chaveado em uma rede RLC na tentativa de controlar o salto indutivo.

consomem energia. Portanto, posiciona-se uma rede RC no entorno da chave, conforme mostrado na Fig. 7.35, e examina-se o desempenho dos resultados a partir desta alteração.

A colocação da rede RC gera um circuito em série. Para a situação de chave aberta, precisa-se da equação característica da rede RLC em série. Com base na Eq. (7.15), sabe-se que a equação característica do circuito RLC em série é

$$s^2 + 2\zeta\omega_0 s + \omega_0^2 = s^2 + \left[\frac{R+1}{L}\right]s + \frac{1}{LC} = 0 \quad 7.31$$

Para diminuir a velocidade de fechamento da chave, será escolhido, arbitrariamente, um sistema criticamente amortecido, no qual $\zeta = 1$ e $\omega_0 = 10^6$ rad/s. Essa escolha de ω_0 permitirá a estabilização do sistema em poucos microssegundos. Com

base na Eq. (7.31), pode-se agora escrever as expressões para a determinação dos parâmetros C e R

$$\omega_0^2 = 10^{12} = \frac{1}{LC} = \frac{1}{10^{-4}C} \quad 7.32$$

$$2\zeta\omega_0 = 2 \times 10^6 = \frac{R+1}{L} = \frac{R+1}{10^{-4}}$$

Resolvendo essas equações obtém-se os valores $C = 10$ nF e $R = 199 \Omega$. Analisa-se agora a tensão de pico ocorrente na chave. Quando a chave abre, a corrente no indutor, estabelecida em 1 A pela fonte e pelo resistor de 1Ω , flui através do circuito RC . Como o capacitor foi previamente descarregado quando a chave estava fechada, sua tensão não pode variar imediatamente e permanece nula durante um pequeno intervalo de tempo. A tensão no resistor é simplesmente $I_L R$, em que I_L é a corrente inicial no indutor. Dados os valores de I_L e R , a tensão no resistor imediatamente após a abertura da chave será de 199 V. A tensão na chave será então exatamente a soma das tensões no capacitor e no resistor (isto é, 199 V). Essa situação representa uma melhoria significativa em relação ao primeiro cenário!

Uma representação gráfica da tensão na chave, mostrada na Fig. 7.36, mostra claramente a coerência com a análise realizada. Esse gráfico ilustra a efetividade da rede RC na redução do salto indutivo gerado pela abertura da chave. Observe que a tensão na chave é controlada para um valor de pico de 199 V e o sistema é criticamente amortecido; isto é, poderá ocorrer um pequeno sobrevalor ou mesmo não ocorrer sobrevalor, tendo o sistema se estabilizado em menos de 5 μ s. Devido à sua importância, essa rede RC é chamada de *snubber* e representa uma opção de solução de engenharia para o controle do salto indutivo.

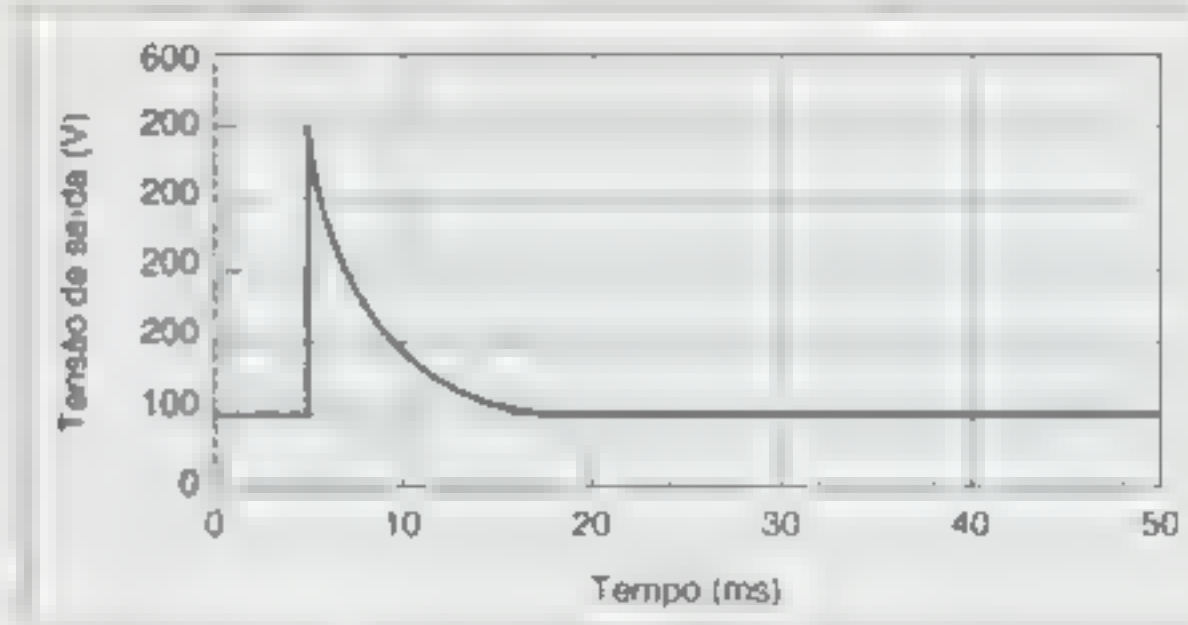


Figura 7.36 Gráfico da tensão na chave quando um circuito *snubber* é empregado para reduzir o salto indutivo.

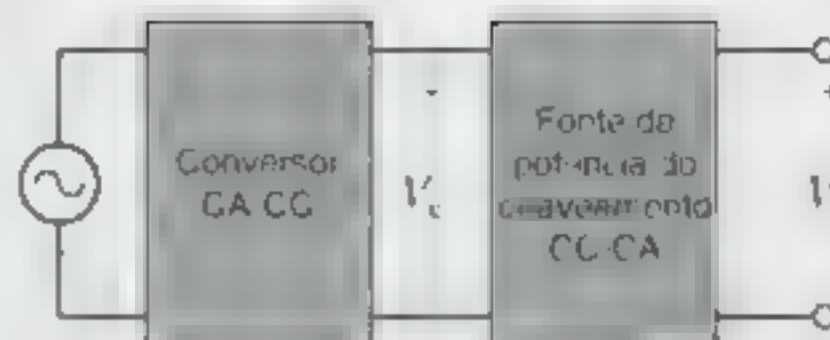
EXEMPLO DE APLICAÇÃO 7.16

Um dos mais comuns e necessários subcircuitos que aparece em uma grande variedade de sistemas eletrônicos — por exemplo, aparelhos estéreos, TVs, rádios e computadores — é uma fonte de tensão CC ou de potência de qualidade. O soquete padrão de alimentação fornece uma tensão alternada (CA)

cujas forma de onda é a mostrada na Fig. 7.37a, e a conversão dessa tensão para o nível CC desejado é realizada conforme ilustrado na Fig. 7.37b. A forma da onda CA é convertida para uma tensão aproximadamente CC através de um conversor CA-CC de baixo custo, cuja saída contém sinais remanescentes da entrada CA e não é regulado. Uma saída CC de



(a)



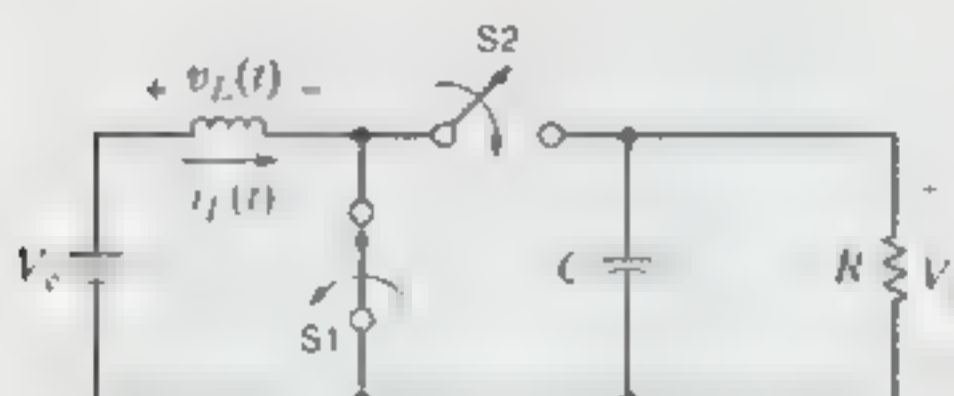
(b)

Figura 7.37 (a) Forma de onda da tensão CA de uma saída padrão e (b) diagrama de blocos de uma fonte de potência CC moderna.

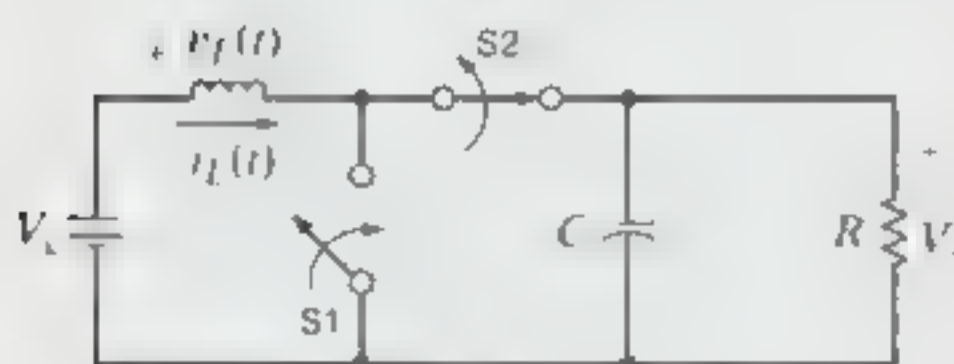
melhor qualidade é gerada pelo chaveamento de um conversor CA-CC. Dentre as várias versões de conversores CC-CC, discute-se particularmente a topologia do chamado conversor regulador, mostrado na Fig. 7.38. Pode-se, assim, desenvolver uma equação que relacione a tensão de saída às características do chaveamento.

SOLUÇÃO

Considere o conversor regulador mostrado na Fig. 7.38a, no qual a chave 1 (S1) está fechada e S2 está aberta durante um intervalo de tempo t_{lig} . Essa configuração isola o indutor do capacitor, gerando dois subcircuitos que podem ser analisados independentemente. Note que durante o tempo t_{lig} a corrente do indutor e a energia nele armazenada estarão aumentando, enquanto, no nó de saída, a tensão no capacitor é descarregada exponencialmente para a carga. Se a constante de tempo desse circuito ($\tau = RC$) for alta, então a tensão de saída diminuirá



(a)



(b)

Figura 7.38 Conversor regulador com chave seletora para intervalos de tempo (a) t_{lig} e (b) t_{deslig} .

lentamente. Assim, durante o tempo t_{lig} a energia é armazenada no indutor e o capacitor entrega energia para a carga.

Em seguida, as posições de ambas as chaves são alteradas de forma que S1 fique aberta e S2 fique fechada durante um intervalo de tempo t_{deslig} , conforme ilustrado na Fig. 7.38b. Como a corrente do indutor não pode variar instantaneamente, esta corrente flui para o capacitor e para a carga, recarregando o capacitor. Durante o tempo t_{deslig} , a energia que foi acumulada no indutor durante t_{lig} é utilizada para recarregar o capacitor e alimentar a carga. Ao término de t_{deslig} , o ciclo se repete.

Note que a energia acumulada no indutor durante t_{lig} deve ser direcionada para o capacitor e para a carga durante o tempo t_{deslig} ; caso contrário, a energia no indutor aumentaria até o ponto em que o indutor falharia. Essa condição requer que a energia armazenada no indutor seja a mesma ao final de cada ciclo do chaveamento. Lembrando que a energia no indutor está relacionada à corrente pela expressão

$$w(t) = \frac{1}{2} Li^2(t)$$

pode-se concluir que a corrente no indutor deve também ser a mesma ao final de cada ciclo do chaveamento, conforme mostrado na Fig. 7.39. A corrente no indutor durante os tempos t_{lig} e t_{deslig} pode ser expressa por

$$i_L(t) = \frac{1}{L} \int_0^{t_{lig}} v_L(t) dt = \frac{1}{L} \int_0^{t_{lig}} V_e dt = \left[\frac{V_e}{L} \right] t_{lig} + I_0 \quad (1) \quad 0 \leq t \leq t_{lig}$$

$$i_L(t) = \frac{1}{L} \int_{t_{lig}}^{t_{lig}+t_{deslig}} v_L(t) dt = \frac{1}{L} \int_{t_{lig}}^{t_{lig}+t_{deslig}} (V_e - V_o) dt = \left[\frac{V_e - V_o}{L} \right] t_{deslig} + I_0 \quad t_{lig} < t < t_{lig}+t_{deslig} \quad 7.33$$

em que I_0 é a corrente inicial no início de cada ciclo do chaveamento. Se a corrente no indutor é a mesma no início e no final de cada ciclo de chaveamento, então a soma das integrais na Eq. (7.33) deve ser nula, ou seja,

$$V_e t_{lig} = (V_o - V_e) t_{deslig} = (V_o - V_e)(T - t_{lig})$$

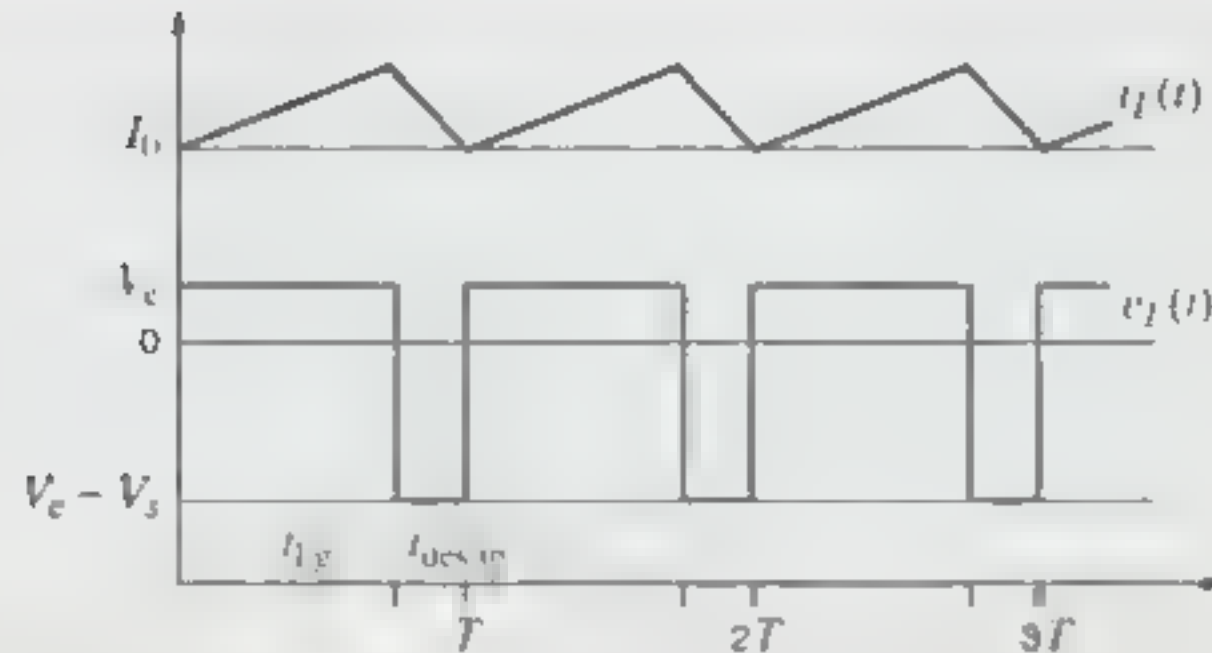


Figura 7.39 Esquemas das formas de onda da tensão e da corrente no indutor.

em que T é o período ($T = t_{\text{lig}} + t_{\text{deslig}}$). A solução para V_s fornece

$$V_s = V_c \left[\frac{T}{t_{\text{lig}}} \right] = V_c \left[\frac{1}{D} \right]$$

$$V_s \left[\frac{1}{(1 - t_{\text{deslig}}/T)} \right] = V_c \left[\frac{1}{1 - D} \right]$$

nessa expressão, D é o ciclo ativo ($D = t_{\text{lig}}/T$). Assim, controlando-se o ciclo ativo, controla-se a tensão de saída. Como D é sempre uma fração positiva, V_s será sempre maior que V_c — daí o nome, conversor regulador. Um gráfico da relação V_s/V_c em função do ciclo ativo é mostrado na Fig. 7.40.

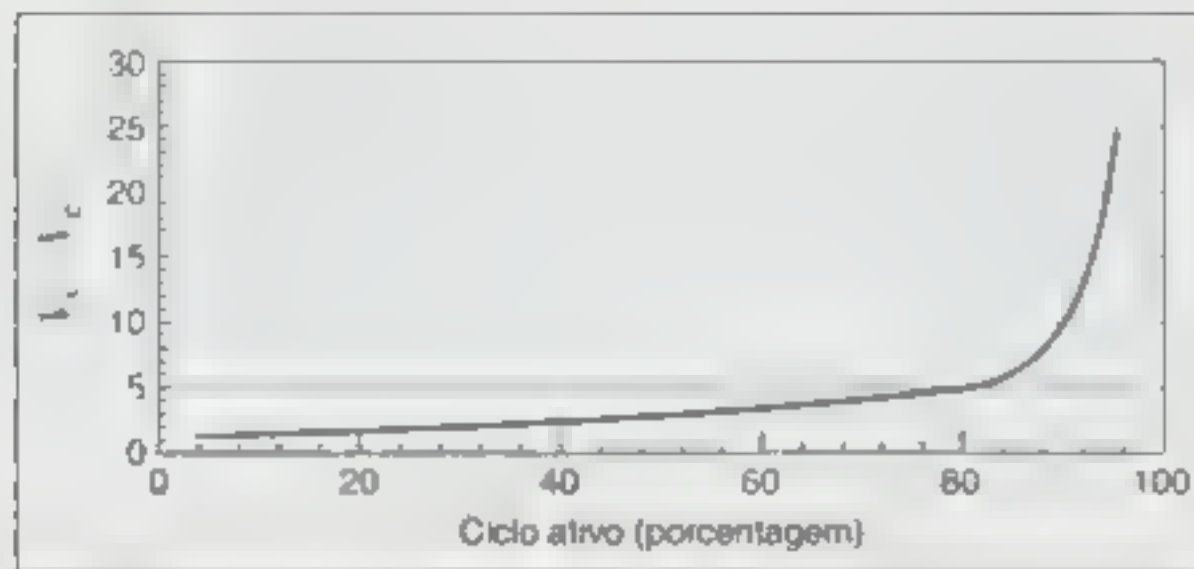


Figura 7.40 Efeito do ciclo ativo no ganho do conversor regulador.

EXEMPLO DE APLICAÇÃO 7.17

A Fig. 7.41 mostra um esquema experimental de um canhão elétrico. Com a chave Sw-2 aberta, a chave Sw-1 é fechada e a fonte de potência carrega o banco capacitor com 10 kV. Em seguida a chave Sw-1 é aberta. O canhão elétrico é acionado pelo fechamento da chave Sw-2. Quando o capacitor é descarregado, a corrente faz com que a lâmina na extremidade do canhão exploda, criando um plasma quente que se acelera descendo o tubo. A queda da tensão devida à vaporização da lâmina é desprezível e, portanto, mais de 95% da energia permanece disponível para acelerar o plasma. O fluxo de corrente estabelece um campo magnético, e a força no plasma causada pelo campo magnético, o qual é proporcional ao quadrado

da corrente em qualquer instante de tempo, acelera o plasma. Uma tensão inicial mais alta resulta em mais aceleração.

O diagrama do circuito para a fase de descarga é mostrado na Fig. 7.42. A resistência do barramento *bus* (um condutor pesado) inclui a resistência da chave. A resistência resultante da lâmina e do plasma é desprezada; portanto, a corrente que flui entre os condutores superior e inferior é dependente dos componentes de circuito remanescentes na trajetória fechada, conforme especificado na Fig. 7.41.

A equação diferencial para a resposta natural da corrente é

$$\frac{d^2 i(t)}{dt^2} + \frac{R_{\text{bus}}}{L_{\text{bus}}} \frac{di(t)}{dt} + \frac{i(t)}{L_{\text{bus}} C} = 0$$

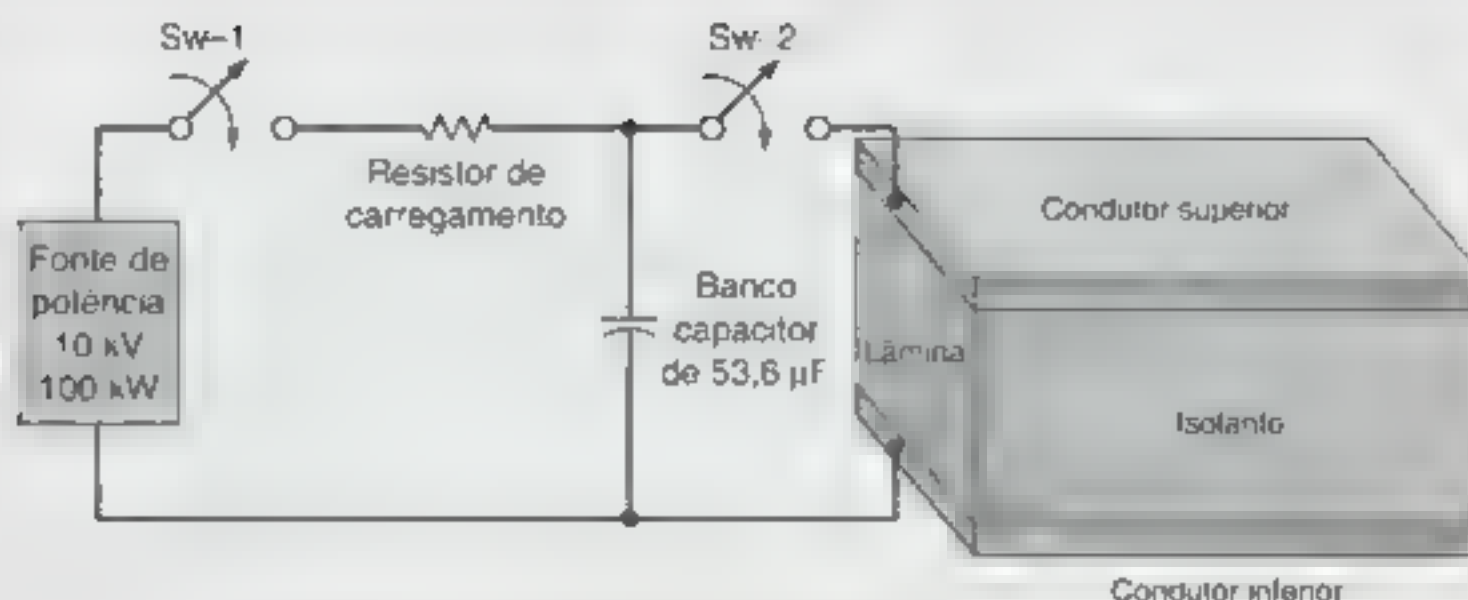


Figura 7.41 Esquema experimental de um canhão elétrico.

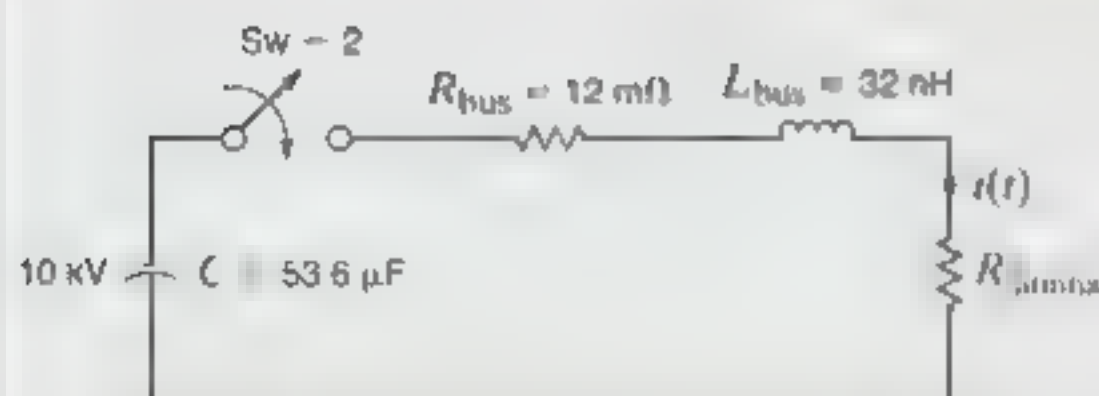


Figura 7.42 Circuito de descarga do canhão elétrico.

Seja o uso da equação característica para descrever a forma de onda da corrente.

SOLUÇÃO

Utilizando os valores apresentados no circuito, a equação característica fica

$$s^2 + 37,5 \times 10^4 s + 38,3 \times 10^{10} = 0$$

e as raízes da equação são

$$s_1, s_2 = (-18,75 \pm j74) \times 10^4$$

Logo, a rede é subamortecida.

As raízes da equação característica indicam que a frequência ressonante amortecida é

$$\omega_d = 740 \text{ krad/s}$$

Portanto,

$$f_d = 118 \text{ kHz}$$

e o período da forma de onda é

$$T = \frac{1}{f_d} = 8,5 \mu\text{s}$$

Uma representação gráfica real da corrente é mostrada na Fig. 7.43, e pelo seu traçado pode-se verificar que o período da resposta amortecida é, de fato, 8,5 µs.

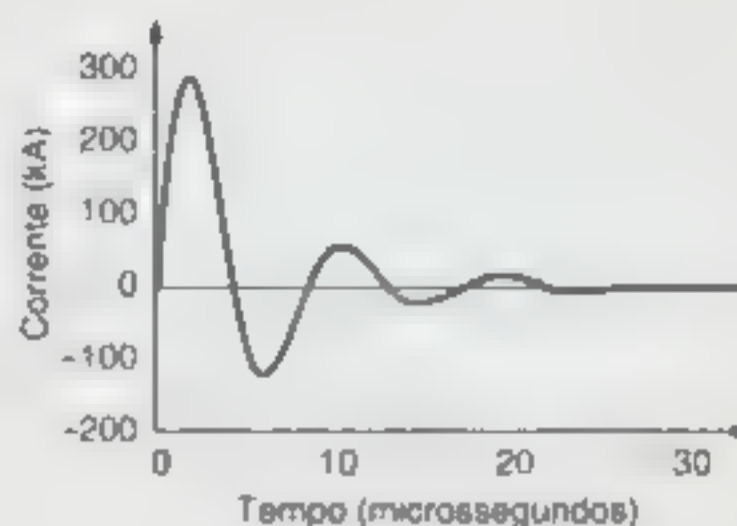


Figura 7.43 Corrente na carga com um banco capacitor carregado com 10 kV.

7.5 Exemplos de Projeto

EXEMPLO DE PROJETO 7.18

Deseja-se projetar um aquecedor elétrico eficiente que opere a partir de uma fonte de 24 V e gere calor pelo acionamento de um componente resistivo de aquecimento de 1 Ω. Para a faixa de temperatura de interesse, a potência absorvida pelo componente resistivo deve ficar entre 100 e 400 W. Um engenheiro experiente sugeriu que duas técnicas bem diferentes

sejam examinadas como soluções possíveis: um simples divisor de tensão e um circuito indutivo chaveado.

SOLUÇÃO

No primeiro caso, a rede necessária é amostrada na Fig. 7.44. O componente de resistência variável é chamado de reostato. Os potenciômetros são resistores variáveis destinados a

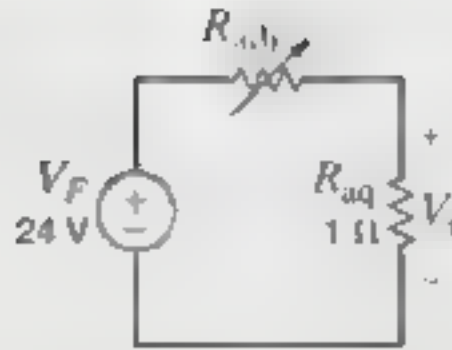


Figura 7.44 Circuito simples utilizado na variação da temperatura de um componente de aquecimento.

operações envolvendo baixa potência (normalmente, inferior a 1 W). Os reostatos, por outro lado, são dispositivos utilizados a níveis de potência bem superiores.

Sabe-se do trabalho anterior que a tensão no componente de aquecimento pode ser expressa por

$$V_s = V_F \frac{R_{aq}}{R_{aq} + R_{adj}} \quad 7.34$$

A variação de R_{adj} altera a tensão entre os terminais e a potência dissipada pelo componente de aquecimento. A potência pode ser expressa como

$$P = \frac{V_s^2}{R_{aq}} = V_F^2 \frac{R_{aq}}{(R_{aq} + R_{adj})^2} \quad 7.35$$

A substituição dos valores máximo e mínimo da potência de saída na Eq. (7.35) permite determinar a faixa de valores da resistência necessária ao reostato:

$$R_{adj, \min} = \sqrt{\frac{V_F^2 R_{aq}}{P_{n, \max}}} - R_{aq} = \sqrt{\frac{(24^2)(1)}{100}} - 1 = 0,2 \, \Omega \quad 7.36$$

$$R_{adj, \max} = \sqrt{\frac{V_F^2 R_{aq}}{P_{n, \min}}} - R_{aq} = \sqrt{\frac{(24^2)(1)}{100}} - 1 = 1,4 \, \Omega$$

Assim, um reostato de $2 \, \Omega$ deve operar de forma adequada. Porém, o que acontece com a eficiência do projeto? Qual é a perda de potência no reostato? A potência no reostato pode ser expressa como

$$P_{adj} = \frac{(V_F - V_s)^2}{R_{adj}} = V_F^2 \frac{R_{adj}}{(R_{aq} + R_{adj})^2} \quad 7.37$$

Sabe-se, do estudo da transferência de potência máxima, que o valor de R_{adj} que causa a perda máxima de potência e, portanto, o caso de pior eficiência do circuito, ocorre quando $R_{adj} = R_{aq} = 1 \, \Omega$. Naturalmente, as resistências consomem a mesma potência e a eficiência é de apenas 50%.

Agora que ficou entendida a capacidade da técnica do divisor de tensão, explora-se a solução alternativa. Neste ponto, parece que o uso do indutor chaveado é uma alternativa viável, uma vez que esse elemento não consome potência. Assim, caso se possa ajustar a corrente de um indutor, chaveando-o no componente de aquecimento, e repetir esta operação de modo suficientemente rápido, o componente de aquecimento poderia responder a uma potência média fornecida a ele e manter uma temperatura constante.

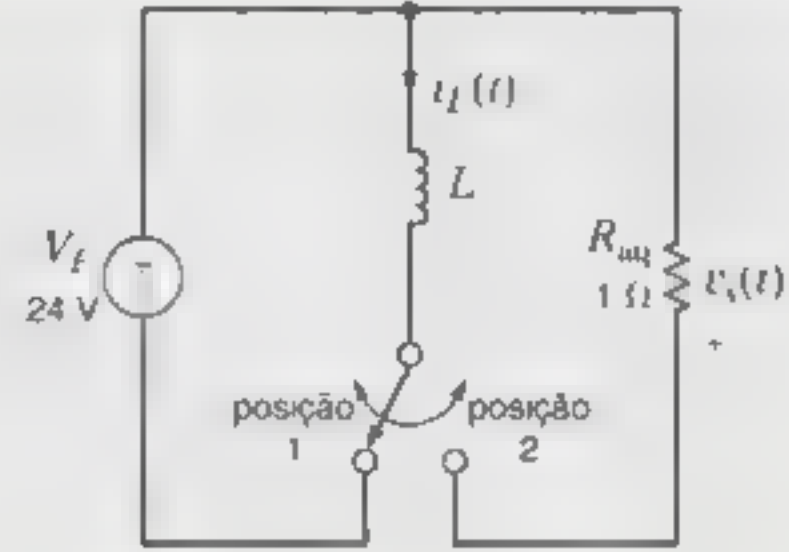


Figura 7.45 Solução do indutor com chaveamento para variação de temperatura do componente de aquecimento.

Considere o circuito mostrado na Fig. 7.45, no qual a chave se move para trás e para adiante, energizando o indutor com corrente e, em seguida, direcionando essa corrente para o componente de aquecimento. Examina-se agora esse conceito para determinar sua efetividade. Começa-se a análise admitindo que a corrente no indutor seja nula e que a chave acaba de ser movimentada para a posição 1. A corrente no indutor começará a aumentar *linearmente* de acordo com a equação fundamental

$$i_L(t) = \frac{1}{L} \int v_L(t) dt = \frac{1}{L} \int V_F dt = \frac{V_F}{L} t \quad 7.38$$

Observe que V_F/L é a inclinação do crescimento linear. Como V_F é estabelecido em 24 V, pode-se controlar essa inclinação com a seleção do valor de L . A corrente no indutor aumenta até que a chave se move no tempo $t = t_1$, quando então a corrente de pico vale

$$I_{\text{pico}} = \frac{V_F}{L} t_1 \quad 7.39$$

Essa corrente no indutor é descarregada exponencialmente através do componente de aquecimento de acordo com a equação

$$i_L(t') = I_{\text{pico}} e^{-t'/\tau} \quad 7.40$$

em que t' é igual a zero quando a chave se move para a posição 2 e $\tau = L/R_{aq}$. Se a chave for mantida na posição 2 por cerca de 5 vezes a constante de tempo, a corrente no indutor praticamente atingirá o zero e a chave pode retornar à posição 1 na condição inicial — corrente nula no indutor. Um esquema do comportamento da corrente no indutor ao longo de um ciclo do chaveamento é mostrado na Fig. 7.46. Repetidos ciclos de chaveamento transferirão potência para o componente de aquecimento. Caso o período de chaveamento seja muito inferior à constante de tempo térmica do componente — uma medida de quão rapidamente o componente se aquece — então a temperatura do componente será determinada pela potência média. Este é um conceito que não pode ser compreendido neste ponto. Entretanto, o conceito de Potência Média será apresentado no Capítulo 9, e este exemplo fornece, pelo menos, alguma motivação para sua análise. Todavia, duas coisas devem ser reconhecidas: a corrente da carga é representada exatamente pela região de decaimento exponencial da corrente

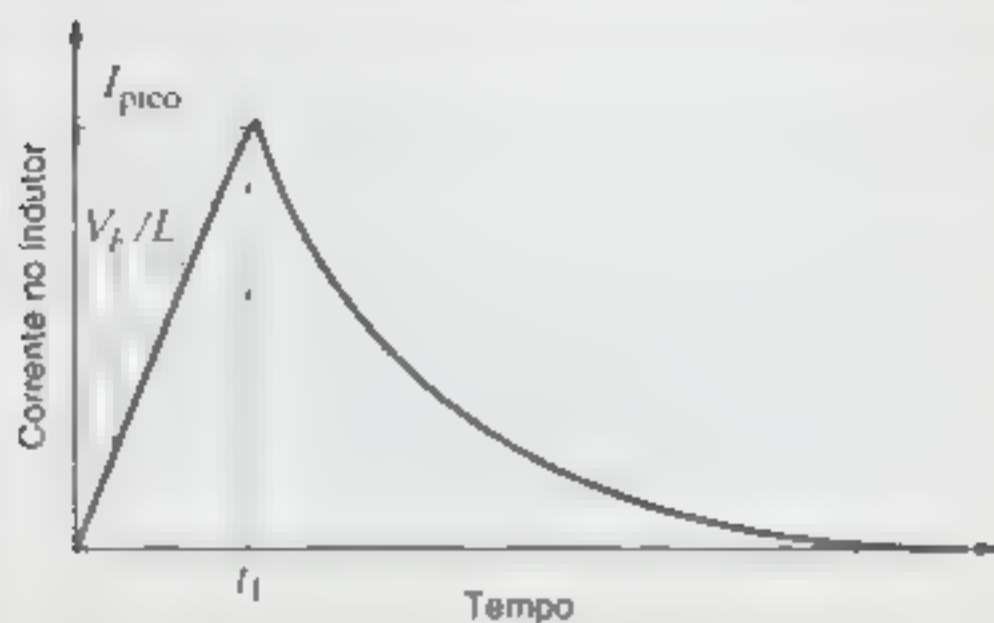


Figura 7.46 Um ciclo de chaveamento simples para a solução baseada no indutor. O valor de I_{pico} é diretamente proporcional a t_1 .

no indutor e o valor inicial dessa exponencial é I_{pico} , conforme definido na Eq. (7.39). O aumento de I_{pico} aumentará a potência no componente e a temperatura. Conforme indicado pela Eq. (7.39), esta condição é facilmente obtida controlando-se t_1 . É impossível prosseguir com o projeto até que se possa estabelecer precisamente a potência média na carga.

Retornando-se à preocupação original, seria possível melhorar a eficiência como um todo? Observe que não existem outros componentes consumindo potência no novo circuito, a não ser o próprio elemento de aquecimento. Portanto, ignorando-se a resistência no indutor e na chave, verifica-se que essa solução apresenta uma eficiência de 100%. Na realidade, eficiências que se aproximam de 95% são possíveis de serem alcançadas. Essa é uma melhoria significativa em relação a outras alternativas, as quais empregam um reostato.

EXEMPLO DE PROJETO 7.19

Considere o circuito mostrado na Fig. 7.47a onde uma fonte de potência CC, basicamente alimentada a partir de uma tomada de parede, é modelada como uma fonte de tensão CC em série com um resistor R_F . A carga recebe uma corrente constante e é modelada como uma fonte de corrente. Deseja-se projetar o circuito mais simples possível que possa isolar o dispositivo da carga de perturbações na tensão da fonte de potência. Na realidade, o objetivo é aumentar o desempenho da fonte de potência a um custo adicional muito pequeno.

Uma solução padronizada para este problema envolve o uso de um capacitor C_D , conforme mostrado na Fig. 7.47b. As duas fontes de tensão e a chave de polo simples e duas posições modelam a perturbação de entrada esquematizada na Fig. 7.47c. Os engenheiros chamam C_D de *capacitor desacoplador*, uma vez que ele desacopla as perturbações na tensão de entrada a partir da tensão de saída. Nos circuitos eletrônicos típicos, esses capacitores desacopladores são encontrados corriqueiramente. Assim, o objetivo é desenvolver uma equação de projeto para C_D em termos de R_F , V_F , V_L , ΔV_F , ΔV_L e

I . O resultado será aplicável a qualquer cenário que possa ser modelado pelo circuito mostrado na Fig. 7.47b.

SOLUÇÃO

A tensão entre os terminais do capacitor C_D pode ser expressa de forma padronizada como

$$v_c(t) = K_1 + K_2 e^{-t/\tau} \quad 7.41$$

Os circuitos equivalentes para $t = 0$ e $t = \infty$ são mostrados nas Figs. 7.48a e b, respectivamente. Nesses dois tempos extremos obtém-se

$$\begin{aligned} v_c(0) &= K_1 + K_2 = V_F - I_L R_F \\ v_c(\infty) &= K_1 = V_F + \Delta V_F - I_L R_F \end{aligned} \quad 7.42$$

Para se determinar a constante de tempo da resistência equivalente, retorna-se ao circuito mostrado na Fig. 7.48b, reduz-se todas as fontes independentes a zero e observa-se o circuito resultante a partir dos terminais do capacitor. É fácil perceber que a constante de tempo é simplesmente $R_F C_D$. Assim,

$$v_c(t) = V_F + \Delta V_F - I_L R_F - \Delta V_F e^{-t/R_F C_D} \quad 7.43$$

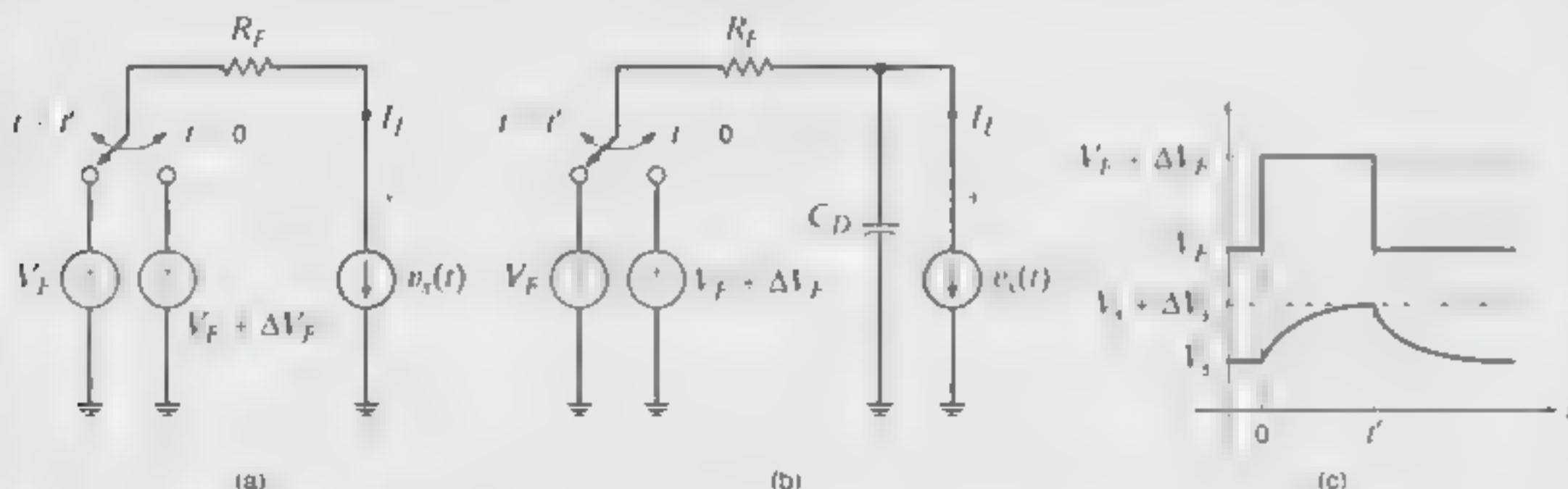


Figura 7.47 (a) Circuito CC simples que modela as perturbações ocorrentes na tensão da fonte. (b) Uso de um capacitor desacoplador para reduzir as perturbações na tensão da carga. (c) Definições das perturbações nas tensões de entrada e de saída.

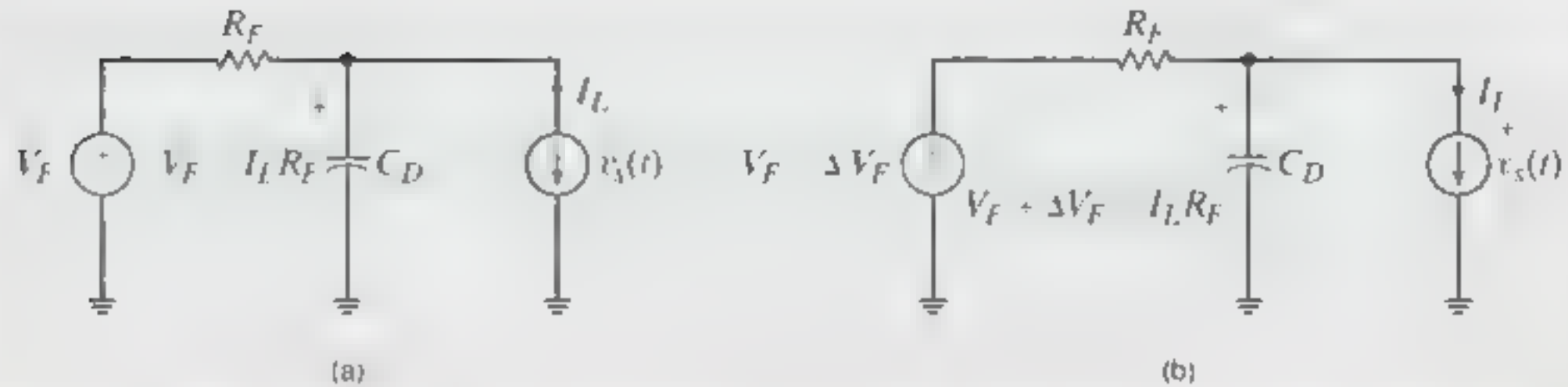


Figura 7.48 Circuito da Fig. 7.47b em $t = 0$, imediatamente após a chave ser movimentada. (b) O mesmo circuito em $t = \infty$.

Exatamente no tempo $t = t'$, a tensão de saída é igual ao seu valor original, $V_s(0)$ somada de ΔV_s . A substituição dessa condição na Eq. (7.43) fornece

$$V_s(t') = V_F + I_L R_F + \Delta V_s = V_F + \Delta V_F + I_L R_F + \Delta V_s e^{-t'/R_F C_D}$$

a qual pode ser reduzida à expressão

$$\Delta V_F - \Delta V_s = \Delta V_s e^{-t'/R_F C_D} \quad 7.44$$

Observe que o valor de C_D não depende das tensões de entrada e de saída, mas sim das variações ocorrentes nessas tensões! Essa condição torna a Eq. (7.44) muito versátil. Uma simples manipulação algébrica da Eq. (7.44) fornece a equação de projeto de C_D .

$$C_D = \frac{t'}{R_F \ln \left[\frac{\Delta V_F}{\Delta V_F - \Delta V_s} \right]} \quad 7.45$$

Examinando-se essa expressão, nota-se que C_D está diretamente relacionada a t' e inversamente relacionada a R_F . Ao se dobrar o valor de t' ou dividir por dois o valor de R_F , a capacitância C_D será dobrada. Esse valor não é muito surpreendente. A dependência da variação das tensões é mais complexa. Esse termo é agora isolado e expresso como

$$f = \frac{1}{\ln \left[\frac{\Delta V_F}{\Delta V_F - \Delta V_s} \right]} = \frac{1}{\ln \left[\frac{1}{1 - \Delta V_s / \Delta V_F} \right]} = \frac{1}{\ln \left[1 + \frac{\Delta V_s}{\Delta V_F} + \frac{1}{2} \left(\frac{\Delta V_s}{\Delta V_F} \right)^2 + \dots \right]} \quad 7.46$$

A Fig. 7.49 mostra um gráfico desse termo em função da relação $\Delta V_s / \Delta V_F$. Note que para valores muito baixos de ΔV_s (isto

é, um grande grau de desacoplamento) esse termo é muito grande. Como este termo é multiplicado por t' na Eq. (7.45), tem-se que o preço para um excelente desacoplamento é uma capacitância muito alta.

Finalmente, como exemplo, considere o cenário no qual V_F valendo 5 V, R_F valendo 20 Ω e a perturbação na entrada é caracterizada por $\Delta V_F = 1$ V e $t' = 0,5$ ms. Se as variações na saída devem ser limitadas a apenas 0,2 V, a capacitância necessária deverá ser $C_D = 112,0$ μ F. Um capacitor como este, para operações até 16 V, custa menos de US\$0,20 e possui dimensões ligeiramente menores que uma bala da M&M.

Essa aplicação, embora muito simples, é importante para mostrar como um engenheiro pode utilizar suas habilidades em análise de circuitos básicos para atacar e descrever uma aplicação prática, de modo que o resultado seja amplamente aplicável. Lembre-se de que a chave de todo esse exercício foi a criação de um modelo de circuito para desacoplar os cenários.

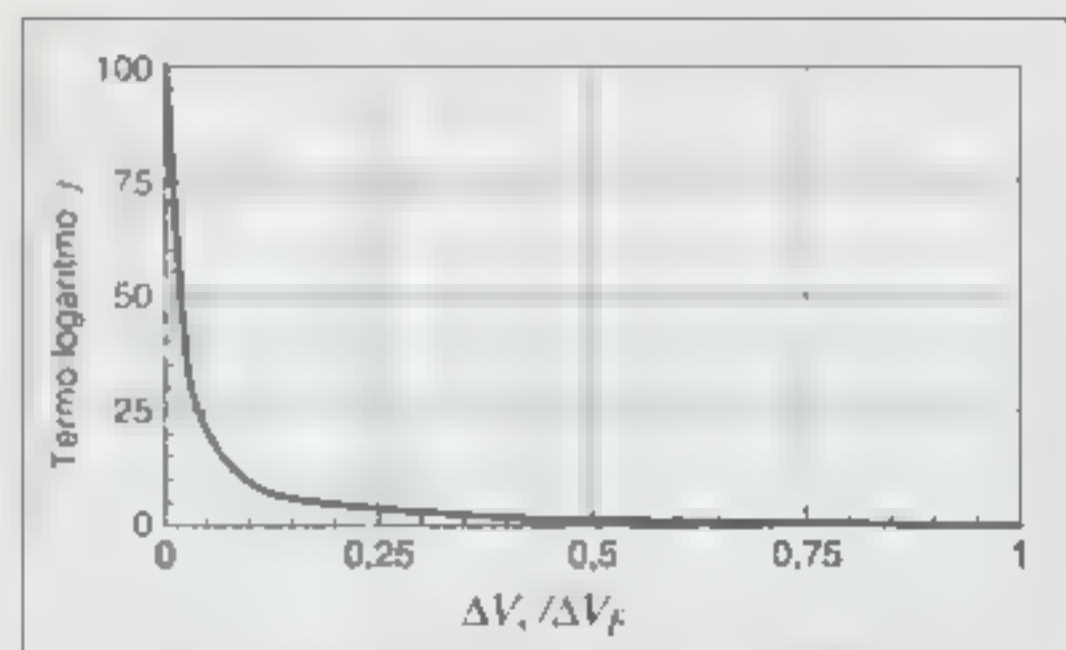


Figura 7.49 Representação gráfica da função, f , em função de $\Delta V_s / \Delta V_F$.

EXEMPLO DE PROJETO 7.20

A rede mostrada na Fig. 7.50 modela o sistema de ignição de um veículo. A fonte de tensão representa uma bateria padrão de 12 V. O indutor é a bobina de ignição magneticamente acoplada ao motor de partida (não mostrado). A resistência interna do indutor é modelada pelo resistor e a chave representa a

chave de ignição. Inicialmente, a chave conecta o circuito de ignição à bateria e, assim, o capacitor é carregado até 12 V. Para dar partida ao motor, fecha-se a chave, descarregando, assim, o capacitor por meio do indutor. Admitindo que uma operação adequada do motor de partida requeira uma resposta superamortecida para $i_L(t)$, que atinge um mínimo de 1 A em

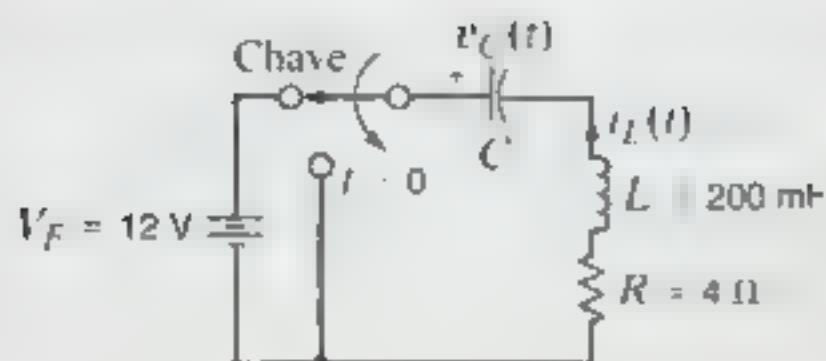


Figura 7.50 Modelo do circuito de um sistema de ignição.

100 ms após o acionamento da chave e permanece acima de 1 A entre 1 e 1,5 s, deseja-se obter o valor do capacitor que produzirá essa forma de onda para a corrente. Além disso, deseja-se também representar graficamente a resposta, incluindo o intervalo de tempo imediatamente anterior ao movimento da chave, e verificar o projeto final.

SOLUÇÃO

Antes de a chave ser acionada em $t = 0$, o capacitor opera como um circuito aberto e o indutor como um curto-circuito. Assim,

$$i_L(0^-) = i_L(0^+) = 0 \text{ A} \quad \text{e} \quad v_C(0^-) = v_C(0^+) = 12 \text{ V}$$

Após a chave ser acionada, o circuito RLC em série corresponde a uma rede sem forçamento, que pode ser descrita pela equação característica

$$s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC} = 0$$

com raízes $s = -s_1$ e $-s_2$. A equação característica possui a forma

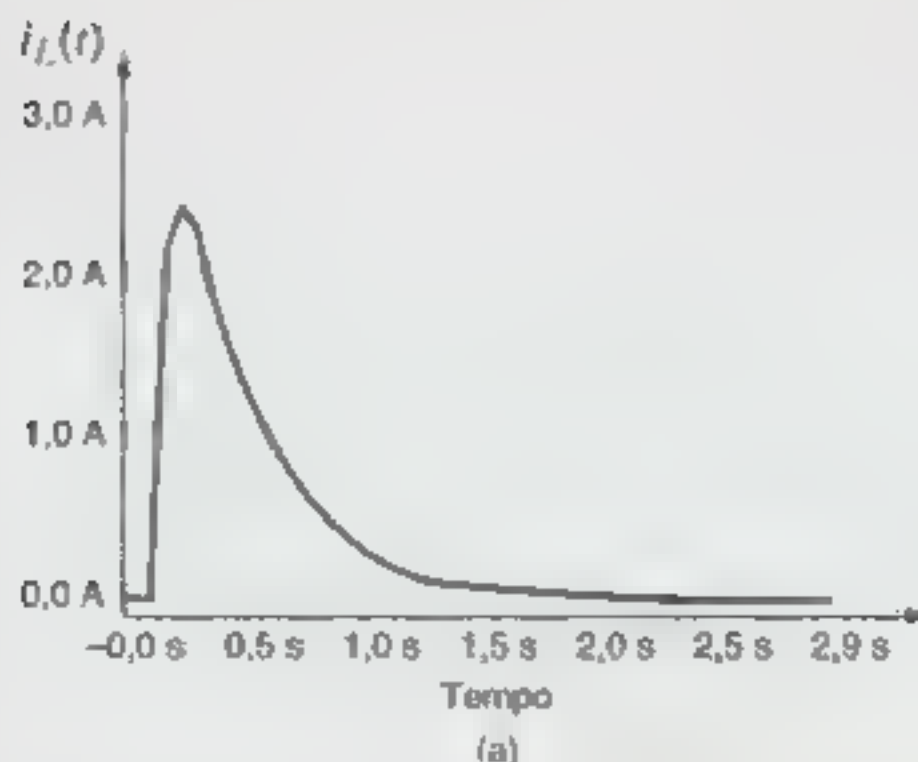
$$(s + s_1)(s + s_2) = s^2 + (s_1 + s_2)s + s_1s_2 = 0$$

Comparando as duas expressões, pode-se perceber que

$$\frac{R}{L} = s_1 + s_2 = 20$$

e

$$\frac{1}{LC} = s_1s_2$$



Como a rede deve ser superamortecida, a corrente no indutor deve possuir a forma

$$i_L(t) = K_1 e^{s_1 t} + K_2 e^{s_2 t}$$

No instante imediatamente após o acionamento da chave, tem-se

$$i_L(0^+) = K_1 + K_2 = 0$$

ou

$$K_2 = -K_1$$

Sabe-se, também, que em $t = 0^+$, a tensão no indutor é igual à tensão no capacitor, pois $i_L = 0$ e, portanto, $i_L R = 0$. Assim pode-se escrever

$$v_L(0^+) = L \frac{di_L(0^+)}{dt} \Rightarrow -s_1 K_1 + s_2 K_1 = \frac{12}{L}$$

ou

$$K_1 = \frac{60}{s_2 - s_1}$$

Pode-se, agora, escolher arbitrariamente $s_1 = 3$ e $s_2 = 17$, o que atende à condição $s_1 + s_2 = 20$ e, além disso,

$$K = \frac{60}{s_2 - s_1} = \frac{60}{14} = 4,29$$

$$C = \frac{1}{L s_1 s_2} = \frac{1}{(0,2)(3)(17)} = 98 \text{ mF}$$

Logo, a corrente $i_L(t)$ é expressa por

$$i_L(t) = 4,29[e^{-3t} - e^{-17t}] \text{ A}$$

A Fig. 7.51a mostra o gráfico de $i_L(t)$. No tempo $t = 100 \text{ ms}$, a corrente aumentou para 2,39 A, o que atende à especificação inicial da magnitude. Todavia, um segundo mais tarde, em $t = 1,1 \text{ s}$, $i_L(t)$ cai para apenas 0,16 A — bem abaixo da magnitude requerida. O que ocorre é que a corrente está caindo muito rapidamente. Para se fazer uma estimativa mais direcionada para s_1 e s_2 , pode-se investigar o efeito dessas raízes na forma de onda da corrente quando $s_2 > s_1$.

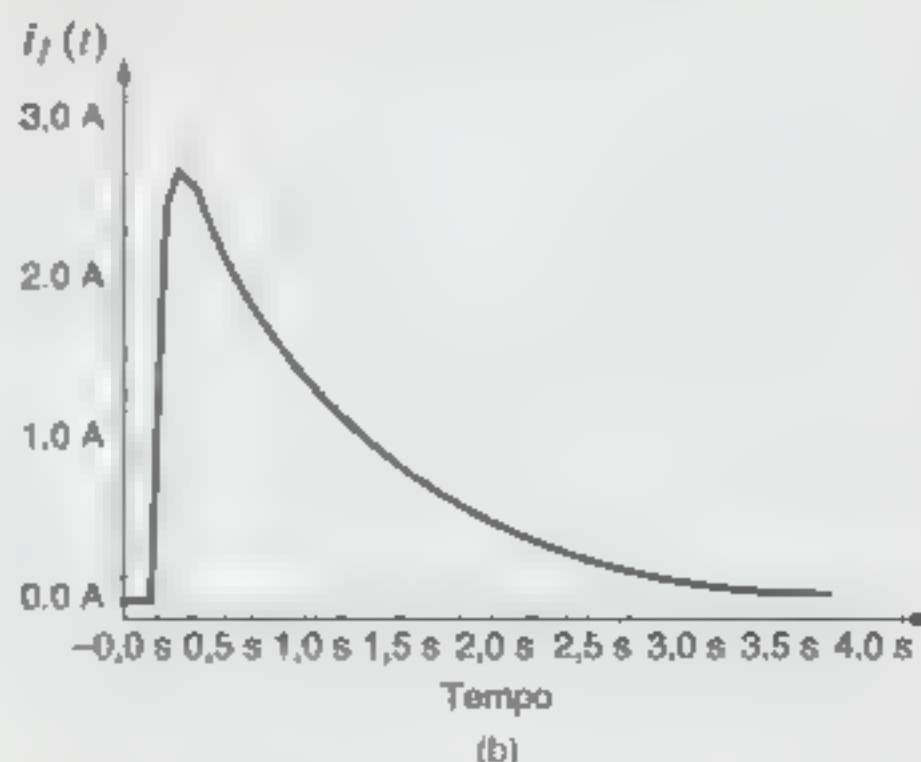


Figura 7.51 Corrente de ignição em função do tempo.

Como $s_2 > s_1$, a exponencial associada a s_2 decairá para zero mais rapidamente do que a associada com s_1 . Isso causa um aumento em $i_L(t)$ — quanto maior o valor de s_2 , mais rápido esse aumento. Passados 5 segundos ($1/s_2$), a exponencial associada a s_2 é aproximadamente nula e $i_L(t)$ diminui exponencialmente com uma constante de tempo $\tau = 1/s_1$. Assim, para se obter uma queda mais lenta de $i_L(t)$, deve-se reduzir s_1 . Logo, pode-se escolher $s_1 = 1$. Como $s_1 + s_2$ deve ser igual a 20, $s_2 = 19$. Nessas condições,

$$C = \frac{1}{T(s_1 - s_2)} = \frac{1}{(0,2)(1)(19)} = 263 \text{ mF}$$

e

$$K = \frac{60}{s_2 - s_1} = \frac{60}{18} = 3,33$$

Assim, a corrente é

$$i_L(t) = 3,33 e^{-t} - e^{-19t} \text{ A}$$

A Fig. 7.51b mostra a curva representativa dessa equação. No tempo $t = 100 \text{ ms}$ a corrente é de 2,52 A. Também no tempo $t = 1,1 \text{ s}$, a corrente é de 1,11 A — acima do valor requerido de 1 A. Portanto, a escolha de $C = 263 \text{ mF}$ atende a todas as especificações do motor de partida.

EXEMPLO DE PROJETO 7.21

O desfibrilador é um dispositivo utilizado para interromper o processo de fibrilação do coração — um tremor errático sem coordenação — aplicando um choque elétrico ao órgão. O desfibrilador de Lown foi desenvolvido pelo Dr. Bernard Lown em 1962. Sua característica mais importante, mostrada na Fig. 7.52a, é a forma de onda da tensão por ele gerada. Um diagrama simplificado do circuito capaz de produzir a forma de onda de Lown é mostrado na Fig. 7.52b. Seja a determinação dos valores necessários ao indutor e ao capacitor.

SOLUÇÃO

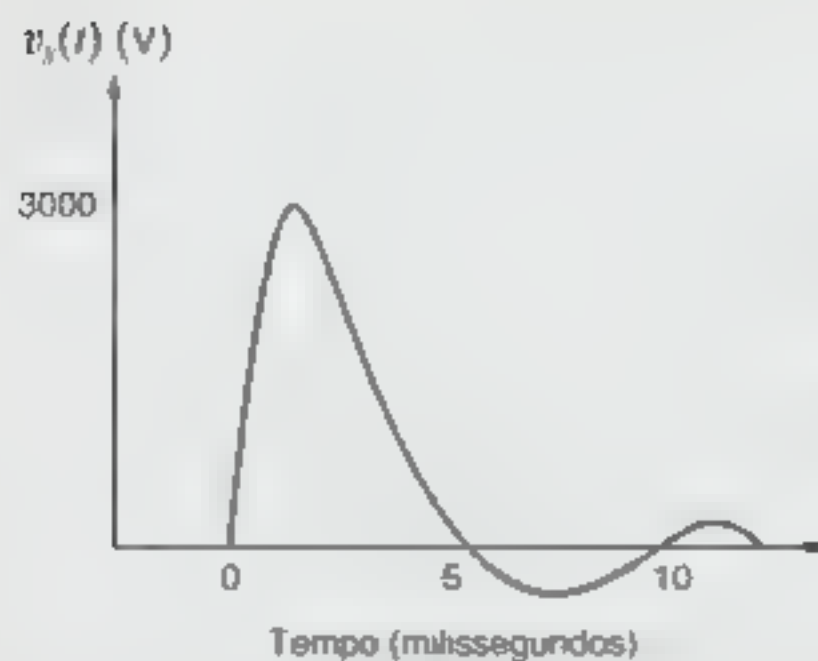
Como a forma de onda de Lown é oscilatória, pela sua própria natureza, sabe-se que o circuito é subamortecido ($\zeta < 1$) e a tensão aplicada ao paciente é da forma

$$v_s(t) = K_1 e^{-\zeta \omega_n t} \sin(\omega t)$$

em que

$$\zeta \omega_n = \frac{R}{2L}$$

$$\omega = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}$$



a)

e

$$\omega_n = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

para o circuito RLC em série. Pela Fig. 7.52a, percebe-se que o período da função senoidal é

$$T = 10 \text{ ms}$$

Assim, tem-se uma expressão envolvendo ω_n e ζ , qual seja,

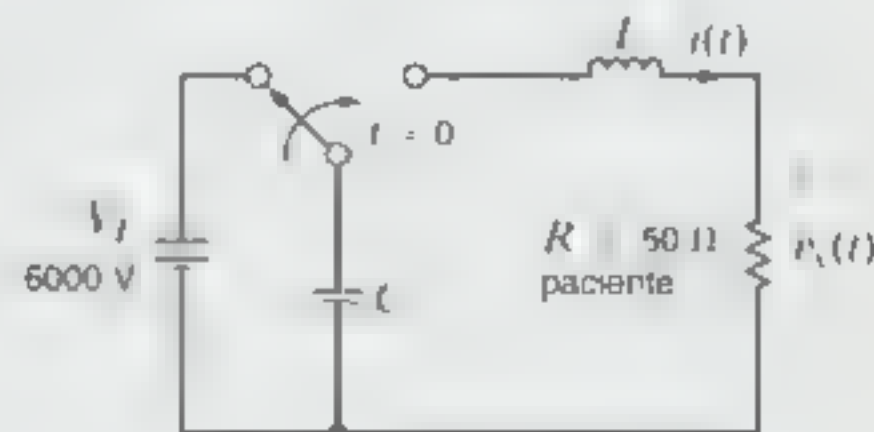
$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} = 200\pi \text{ rad/s}$$

Uma segunda expressão pode ser obtida definindo-se a razão entre os valores de $v_s(t)$ para $t = T/4$ e $t = 3T/4$. Nesses dois instantes de tempo, a função seno é igual a +1 e -1, respectivamente. Utilizando os valores da Fig. 7.52a, pode-se escrever

$$\frac{v_s(T/4)}{-v_s(3T/4)} = \frac{K_1 e^{-\zeta \omega_n (T/4)}}{K_1 e^{-\zeta \omega_n (3T/4)}} = e^{\zeta \omega_n (T/2)} \approx \frac{3000}{250} = 12$$

ou

$$\zeta \omega_n = 497,0$$



b)

Figura 7.52 Forma de onda do desfibrilador de Lown e um circuito simplificado. Reimpresso com a permissão da John Wiley & Sons., *Introduction to Biomedical Equipment Technology*.

Como $R = 50 \, \Omega$, o valor necessário ao indutor é

$$L = 50,3 \, \text{mH}$$

Utilizando a expressão de ω , tem-se

$$\omega^2 = (200\pi)^2 = \omega_0^2 - (\zeta\omega_0)^2$$

ou

$$(200\pi)^2 = \frac{1}{LC} - (497,0)^2$$

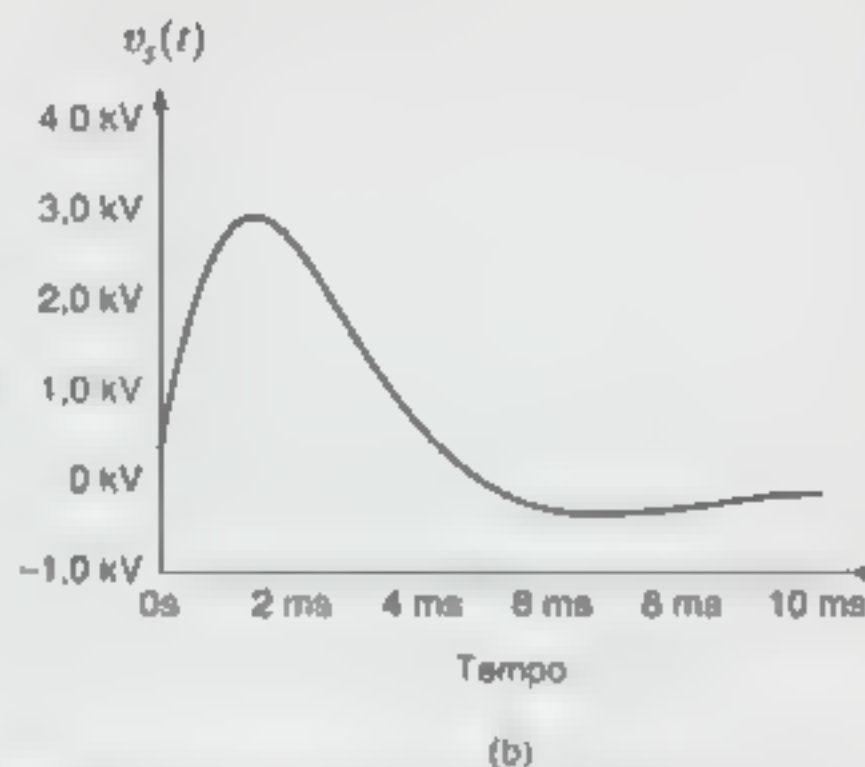
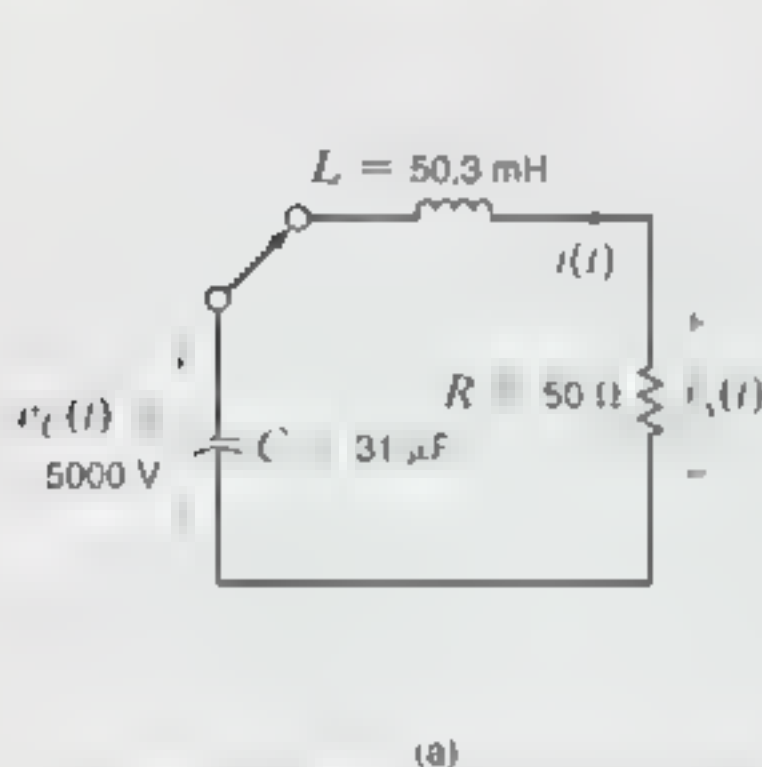


Figura 7.53 Circuito e representação gráfica do sinal de saída do desfibrilador de Lown.

Resolvendo para o valor do capacitor, obtém-se

$$C = 31,0 \, \mu\text{F}$$

O projeto é agora verificado por meio do circuito mostrado na Fig. 7.53a. A curva da tensão de saída mostrada na Fig. 7.53b está de acordo com a forma de onda de Lown da Fig. 7.52a, portanto, pode-se considerar que o circuito foi bem projetado.

Embora a solução aqui apresentada seja viável, ela não é única. Da mesma forma que há muitos problemas de projeto, geralmente, existem diversas formas de atender às especificações de projeto.

RESUMO

Circuitos de Primeira Ordem

- Um circuito transiente RC ou RL é dito ser de primeira ordem se contém apenas um único capacitor ou um único indutor. A tensão ou a corrente em qualquer ponto da rede pode ser obtida resolvendo-se uma equação diferencial de primeira ordem.
- A forma da equação diferencial de primeira ordem com uma função forçamento constante pode ser expressa por

$$\frac{dx(t)}{dt} + \frac{x(t)}{\tau} = A$$

cuja solução é

$$x(t) = A\tau + K e^{-t/\tau}$$

em que $A\tau$ é conhecida como a solução no regime estacionário e τ é chamada de constante de tempo

- A função $e^{-t/\tau}$ decai para um valor menor do que 1% de seu valor inicial após um período de 5τ . Portanto, a constante de tempo, τ , determina o tempo necessário para o circuito atingir o regime estacionário
- A constante de tempo de um circuito RC é $R_{th}C$ e de um circuito RL é L/R_{th} , em que R_{th} é a resistência equivalente de

Thévenin, observando-se o circuito através dos terminais do elemento armazenador (isto é, o capacitor ou o indutor).

- Os dois procedimentos propostos para a solução dos circuitos transientes de primeira ordem são o procedimento da equação diferencial e o método passo a passo. No primeiro caso, a equação diferencial que descreve o comportamento dinâmico do circuito é resolvida para se determinar a solução desejada. No segundo caso, as condições iniciais e o valor do regime estacionário da tensão entre os terminais do capacitor ou da corrente do indutor são utilizados em conjunção com a constante de tempo do circuito e a forma conhecida da variável desejada para se obter uma solução.
- A resposta de um circuito transiente de primeira ordem a um pulso de entrada pode ser obtida tratando-se o pulso como uma combinação de duas entradas em degrau.

Circuitos de Segunda Ordem

- A tensão ou a corrente em um circuito RLC transiente pode ser descrita por uma equação diferencial com coeficientes constantes da forma

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + 2\zeta\omega_0 \frac{dx(t)}{dt} + \omega_0^2 x(t) = f(t)$$

em que $f(t)$ é a função forçamento da rede.

- A equação característica para um circuito de segunda ordem é $s^2 + 2\zeta\omega_0 s + \omega_0^2 = 0$ em que ζ é a fração de amortecimento e ω_0 é a frequência natural não amortecida
- Se as duas raízes da equação característica são
 - reais e distintas, então $\zeta > 1$ e a resposta da rede é superamortecida
 - reais e iguais, então $\zeta = 1$ e a resposta da rede é criticamente amortecida
 - complexos conjugados, então $\zeta < 1$ e a resposta da rede é subamortecida
- Os três tipos de amortecimento propiciam as seguintes respostas para a rede:
 1. Superamortecida: $x(t) = K_1 e^{(\sigma_1 + j\omega_d)t} + K_2 e^{(\sigma_2 + j\omega_d)t}$
 2. Criticamente amortecida: $x(t) = B_1 e^{-\zeta\omega_0 t} + B_2 t e^{-\zeta\omega_0 t}$
 3. Subamortecida: $x(t) = e^{-\sigma t} (A_1 \cos \omega_d t + A_2 \sin \omega_d t)$, em que $\sigma = \zeta\omega_0$ e $\omega_d = \omega_0 \sqrt{1 - \zeta^2}$
- Duas condições iniciais são necessárias para a determinação dos dois coeficientes incógnitos da equação de resposta da rede.

PROBLEMAS

- 7.1 Utilize o procedimento da equação diferencial para obter a corrente $i(t)$ da rede mostrada na Fig. P7.1, para $t > 0$.

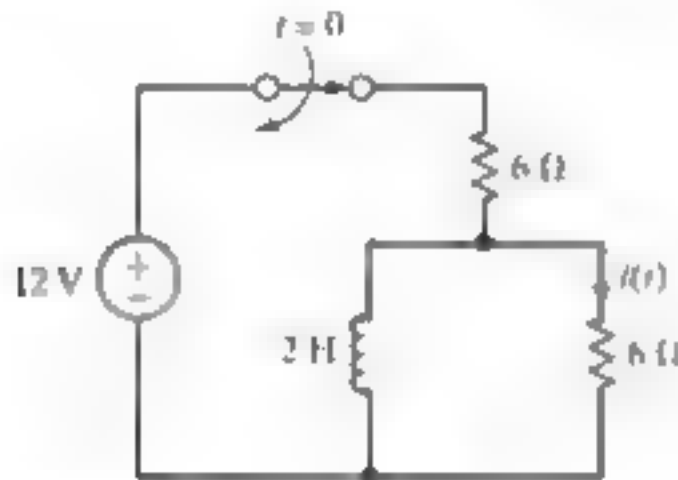


Figura P7.1

- 7.2 Utilize o procedimento da equação diferencial para obter a corrente $i_c(t)$ da rede mostrada na Fig. P7.2, para $t > 0$.

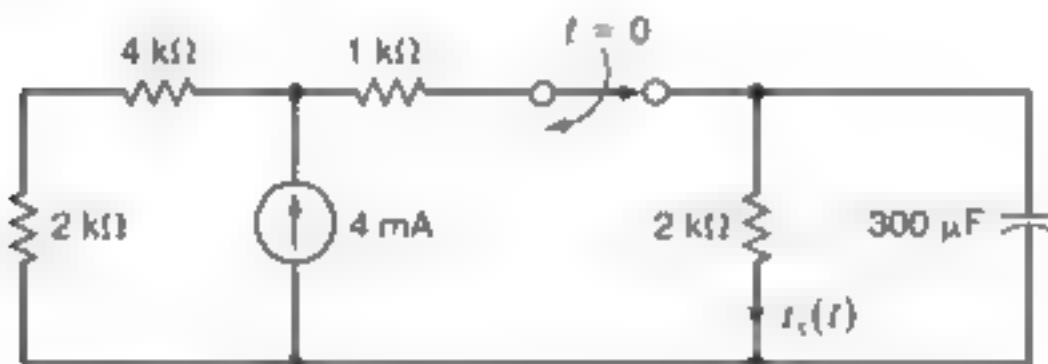


Figura P7.2

- 7.3 Utilize o procedimento da equação diferencial para obter a tensão $v_c(t)$, para $t > 0$, do circuito mostrado na Fig. P7.3 e trace um gráfico da resposta incluindo o intervalo de tempo imediatamente anterior à atuação da chave.

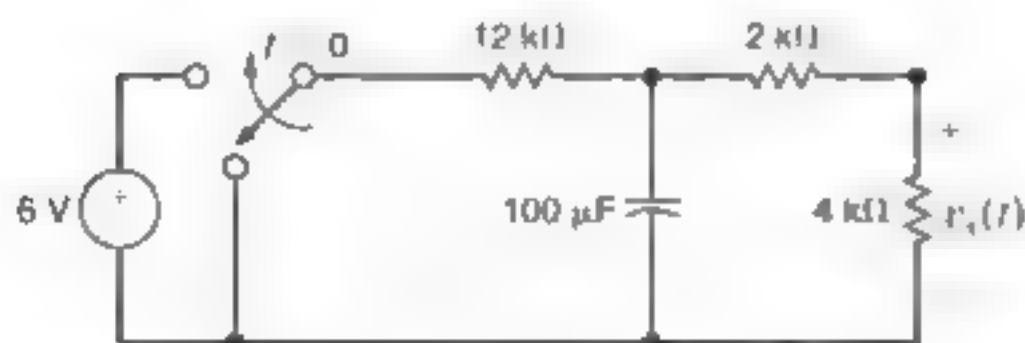


Figura P7.3

- 7.4 Utilize o procedimento da equação diferencial para obter a tensão $v_c(t)$ do circuito mostrado na Fig. P7.4, para $t > 0$

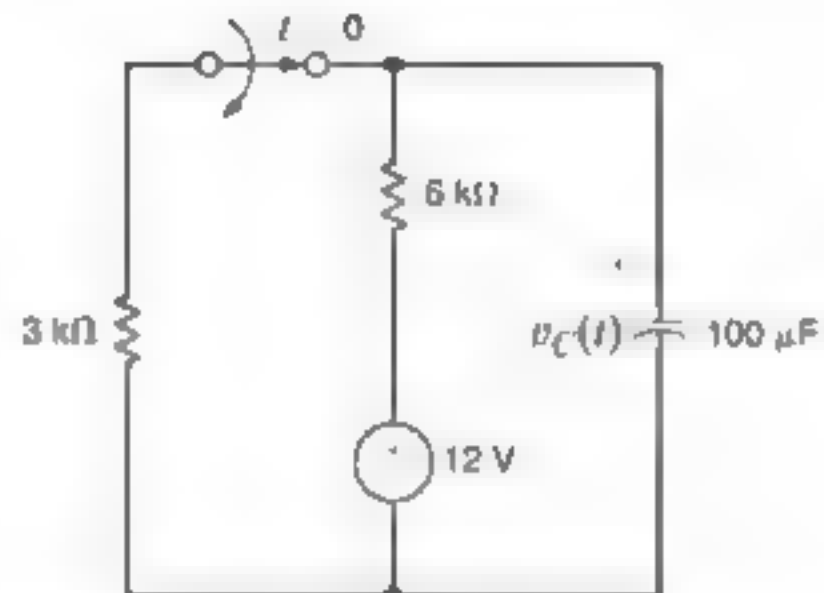


Figura P7.4

- 7.5 Utilize o procedimento da equação diferencial para obter a tensão $v_c(t)$ do circuito mostrado na Fig. P7.5, para $t > 0$.

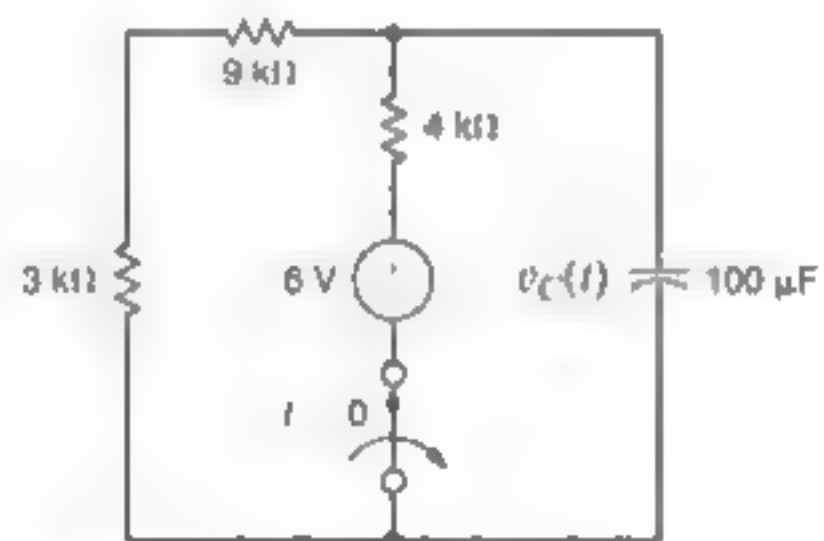


Figura P7.5

- 7.6 Utilize o procedimento da equação diferencial para obter a tensão $v_c(t)$, para $t > 0$, do circuito mostrado na Fig. P7.6 e trace um gráfico da resposta incluindo o intervalo de tempo imediatamente anterior ao fechamento da chave

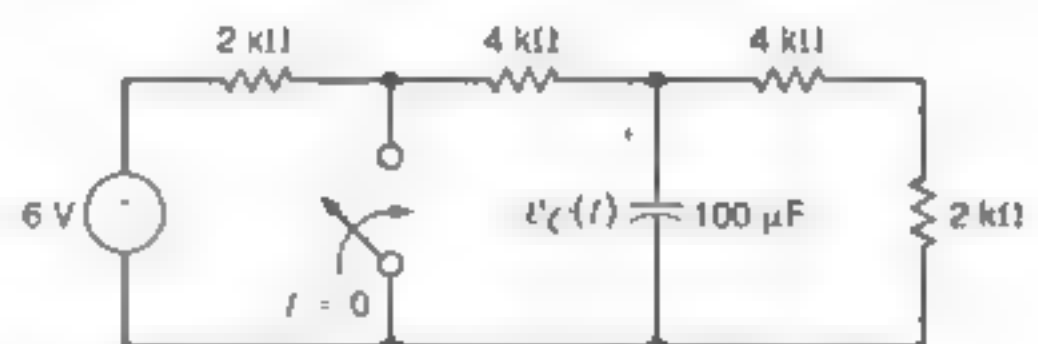


Figura P7.6

- 7.7** Utilize o procedimento da equação diferencial para obter a corrente $i_1(t)$, para $t > 0$, do circuito mostrado na Fig. P7.7 e trace um gráfico da resposta incluindo o intervalo de tempo imediatamente anterior à abertura da chave.

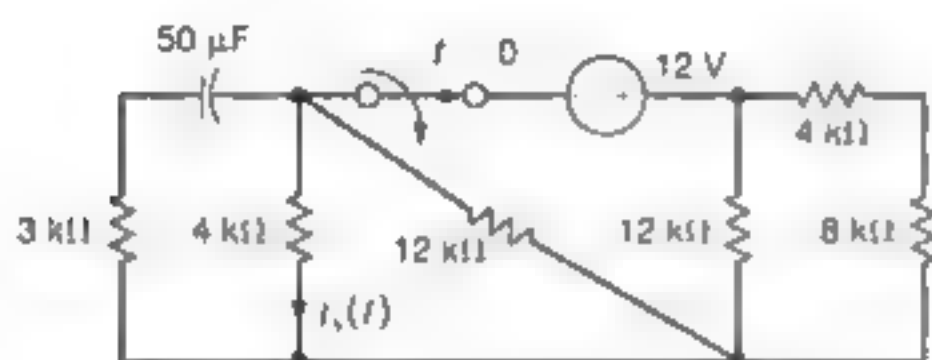


Figura P7.7

- 7.8** Utilize o procedimento da equação diferencial para obter a corrente $i_1(t)$, para $t > 0$, do circuito mostrado na Fig. P7.8 e trace um gráfico da resposta incluindo o intervalo de tempo imediatamente anterior ao fechamento da chave.

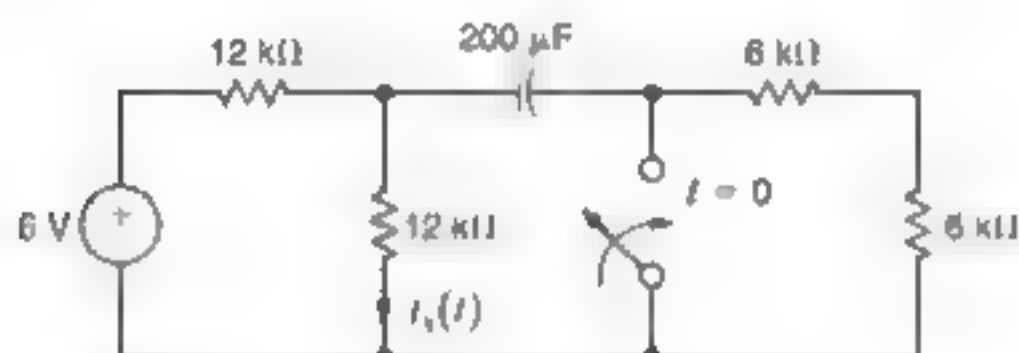


Figura P7.8

- 7.9** Utilize o procedimento da equação diferencial para obter a tensão $v_1(t)$, para $t > 0$, do circuito mostrado na Fig. P7.9 e trace um gráfico da resposta incluindo o intervalo de tempo imediatamente anterior à abertura da chave.

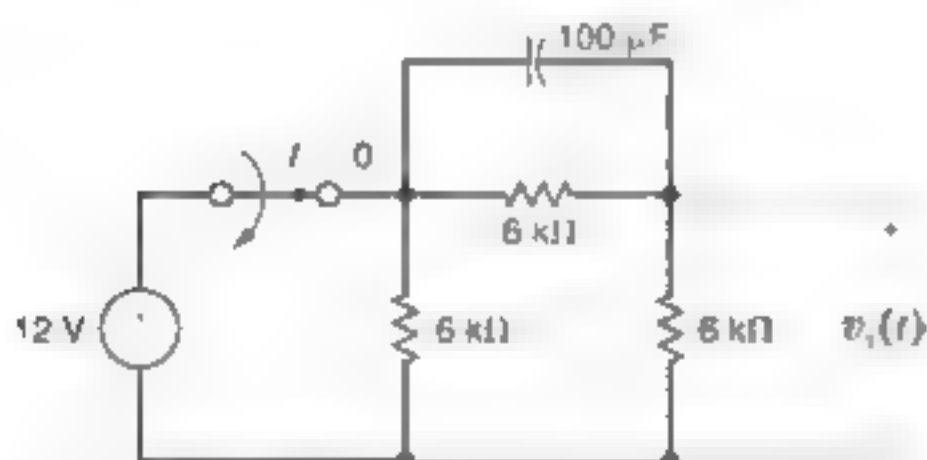


Figura P7.9

- 7.10** Na rede mostrada na Fig. P7.10, determine a corrente $i_1(t)$, para $t > 0$, utilizando o procedimento da equação diferencial.

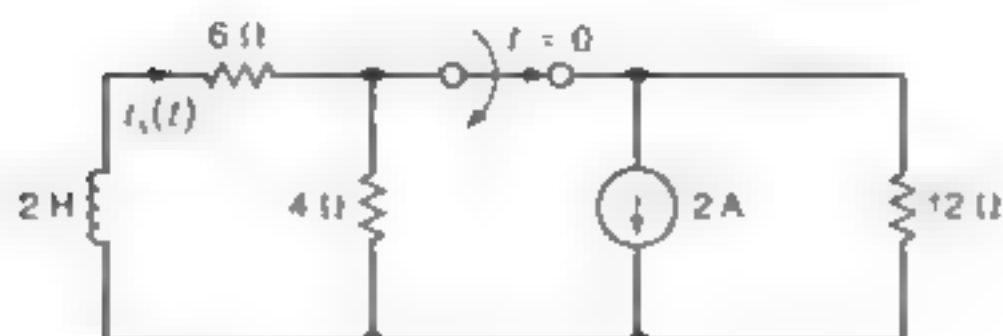


Figura P7.10

- 7.11** Utilize o procedimento da equação diferencial para obter a corrente $i_2(t)$, para $t > 0$, do circuito mostrado na Fig. P7.11

e trace um gráfico da resposta incluindo o intervalo de tempo imediatamente anterior à abertura da chave.

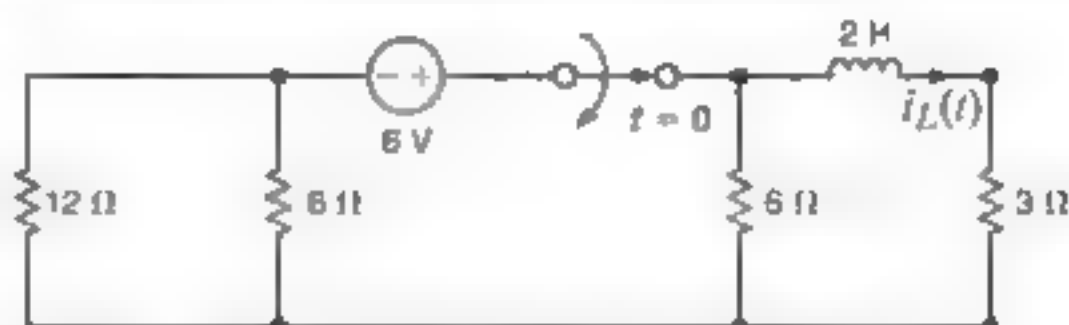


Figura P7.11

- 7.12** Utilize o procedimento da equação diferencial para obter a tensão $v_1(t)$, para $t > 0$, do circuito mostrado na Fig. P7.12 e trace um gráfico da resposta incluindo o intervalo de tempo imediatamente anterior à abertura da chave.

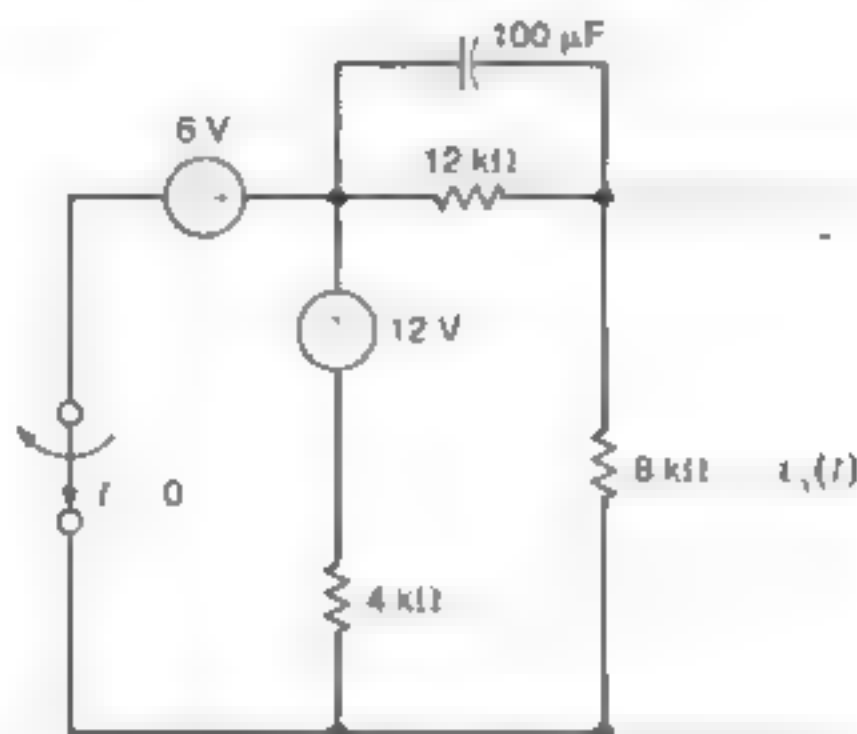


Figura P7.12

- 7.13** Utilize o procedimento da equação diferencial para obter a corrente $i(t)$, para $t > 0$, do circuito mostrado na Fig. P7.13 e trace um gráfico da resposta incluindo o intervalo de tempo imediatamente anterior à abertura da chave.

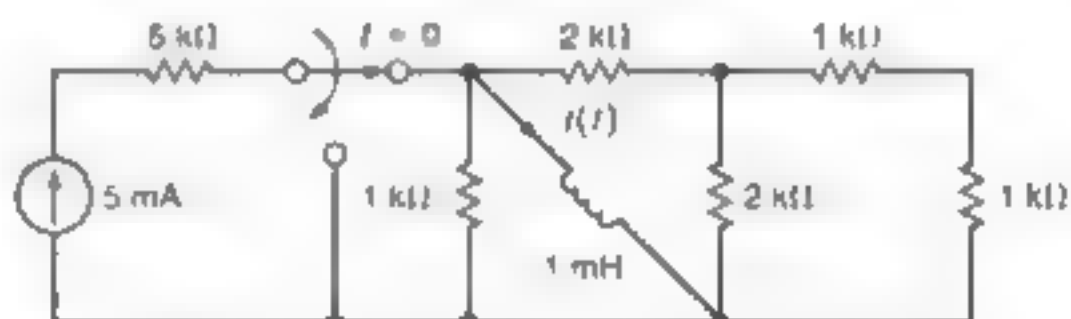


Figura P7.13

- 7.14** Utilize o procedimento da equação diferencial para obter a corrente $i_1(t)$, para $t > 0$, do circuito mostrado na Fig. P7.14 e trace um gráfico da resposta incluindo o intervalo de tempo imediatamente anterior à abertura da chave.

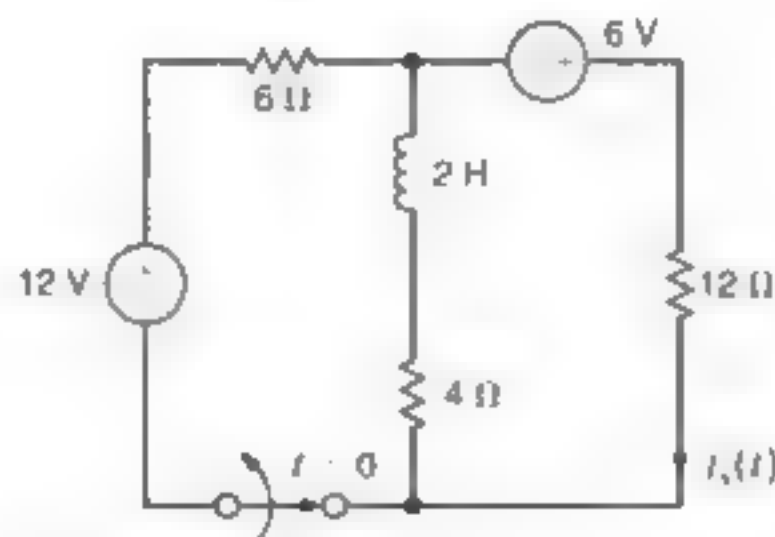


Figura P7.14

- 7.15** Utilize a técnica passo a passo na obtenção da corrente $i_s(t)$, para $t > 0$, da rede mostrada na Fig. P7.15.

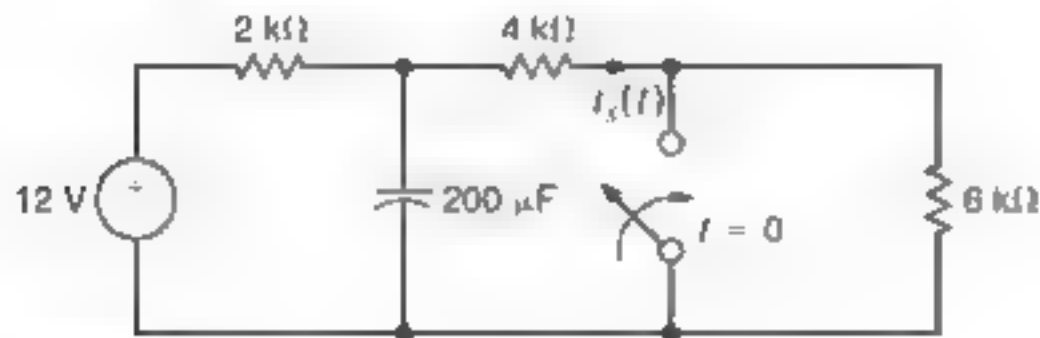


Figura P7.15

- 7.16** Utilize o método passo a passo na obtenção da corrente $i_s(t)$, para $t > 0$, do circuito mostrado na Fig. P7.16.

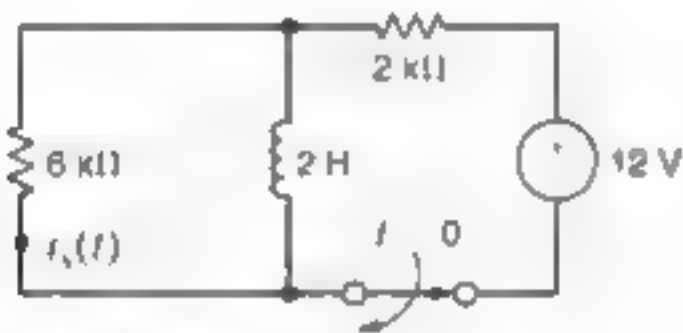


Figura P7.16

- 7.17** Obtenha a tensão $v_s(t)$ da rede mostrada na Fig. P7.17, para $t > 0$.

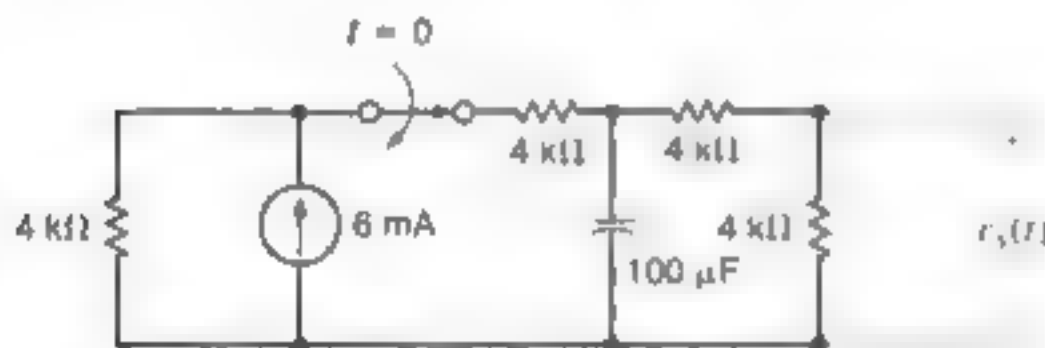


Figura P7.17

- 7.18** Obtenha a tensão $v_s(t)$ da rede mostrada na Fig. P7.18, para $t > 0$.

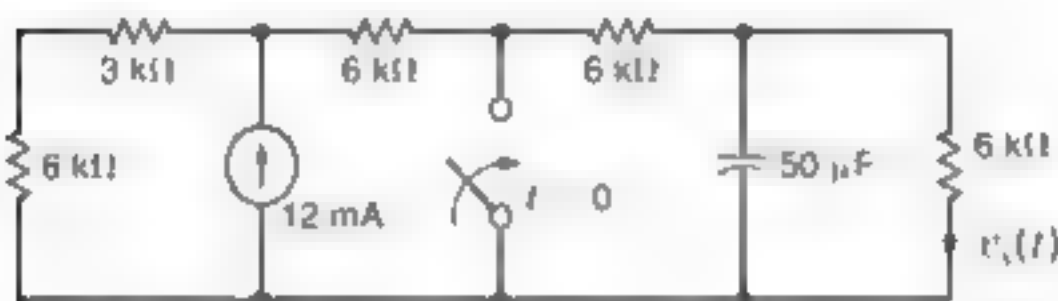


Figura P7.18

- 7.19** Utilize o método passo a passo na obtenção da corrente $i_s(t)$ do circuito mostrado na Fig. P7.19, para $t > 0$.

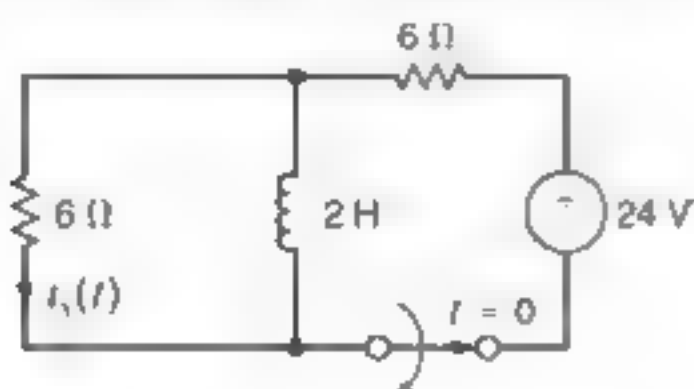


Figura P7.19

- 7.20** Utilize o método passo a passo na obtenção da corrente $i_s(t)$ do circuito mostrado na Fig. P7.20, para $t > 0$.

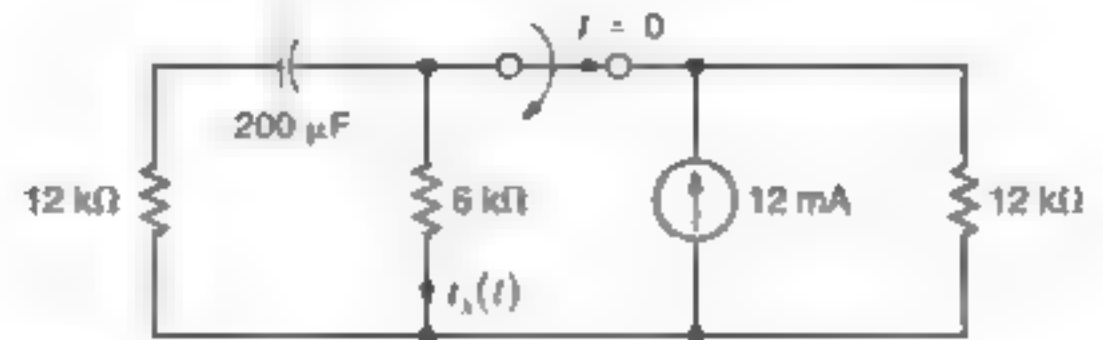


Figura P7.20

- 7.21** Obtenha a tensão $v_s(t)$ do circuito mostrado na Fig. P7.21, para $t > 0$.

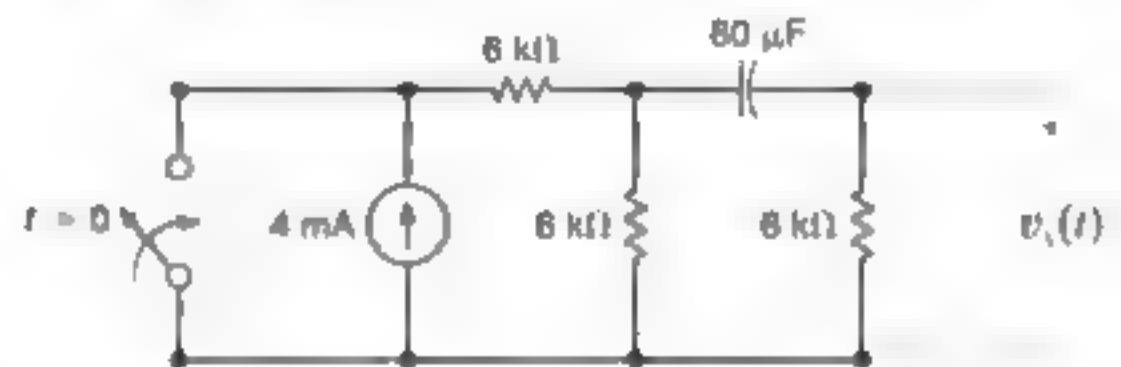


Figura P7.21

- 7.22** Obtenha a tensão $v_s(t)$ do circuito mostrado na Fig. P7.22, para $t > 0$.

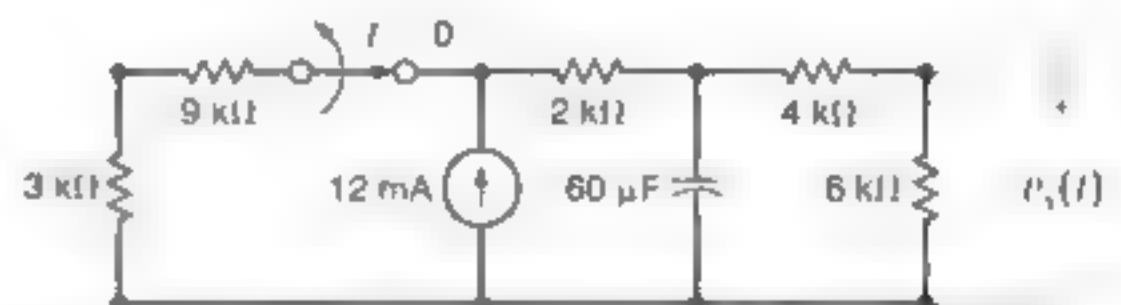


Figura P7.22

- 7.23** Obtenha a tensão $v_s(t)$ do circuito mostrado na Fig. P7.23, para $t > 0$.

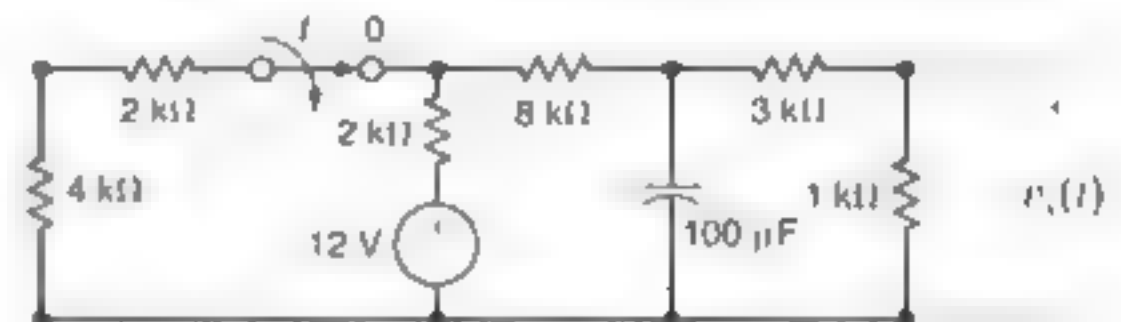


Figura P7.23

- 7.24** Obtenha a tensão $v_s(t)$ da rede mostrada na Fig. P7.24, para $t > 0$.

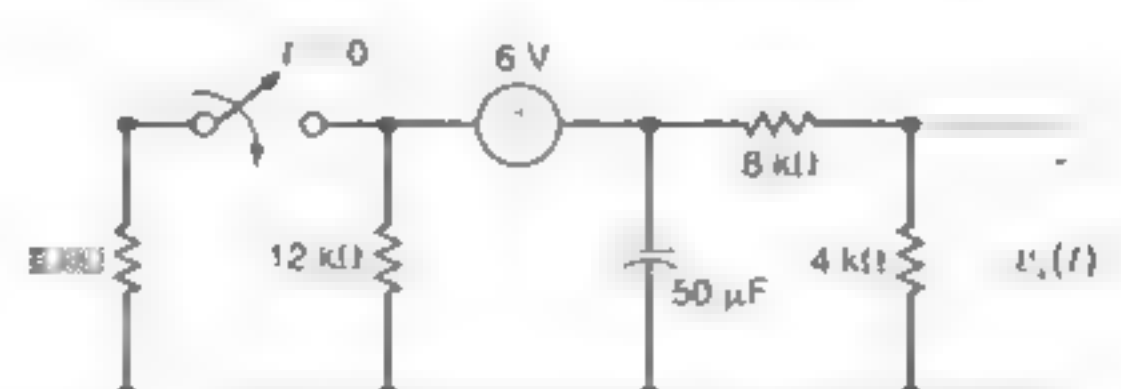


Figura P7.24

- 7.25** Utilize a técnica passo a passo na obtenção da corrente $i_s(t)$ da rede mostrada na Fig. P7.25, para $t > 0$.

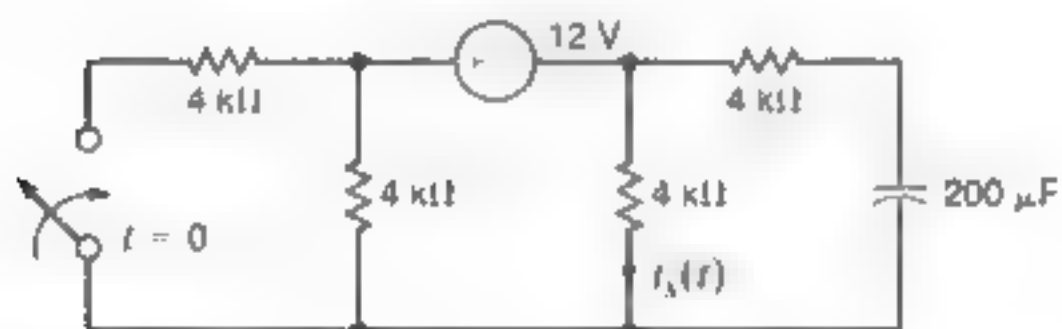


Figura P7.25

- 7.26** Utilize o método passo a passo na obtenção da tensão $v_s(t)$ da rede mostrada na Fig. P7.26, para $t > 0$.

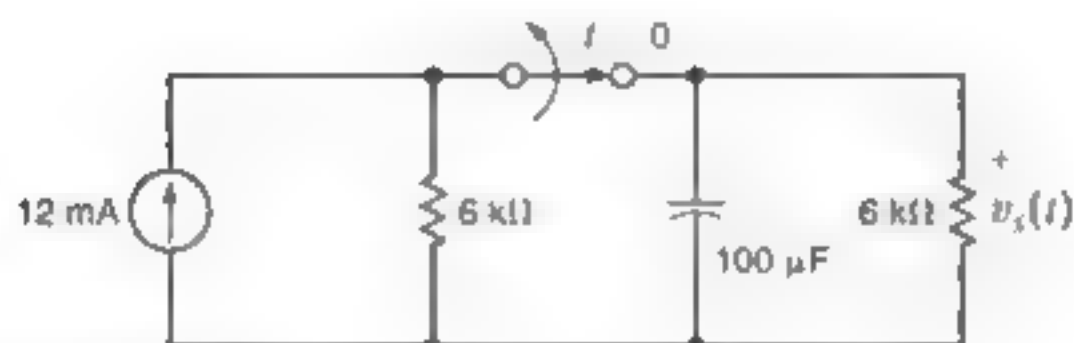


Figura P7.26

- 7.27** Obtenha a corrente $i_s(t)$ da rede mostrada na Fig. P7.27, para $t > 0$.

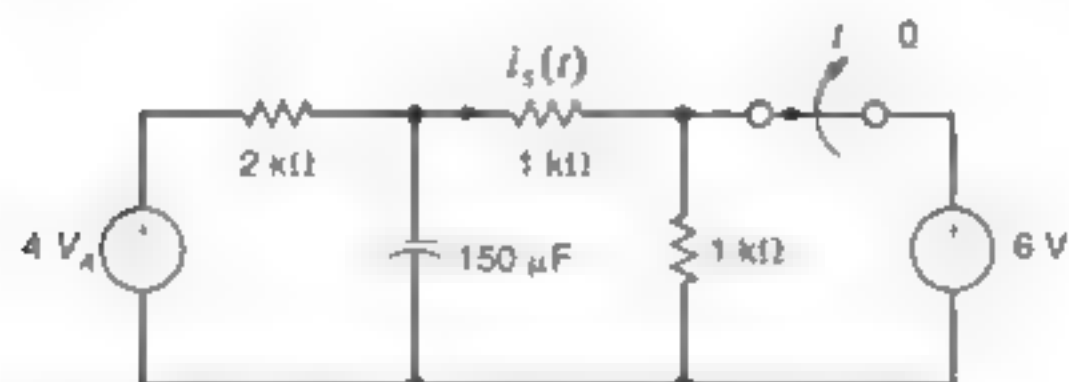


Figura P7.27

- 7.28** Obtenha a corrente $i_s(t)$ do circuito mostrado na Fig. P7.28, para $t > 0$.

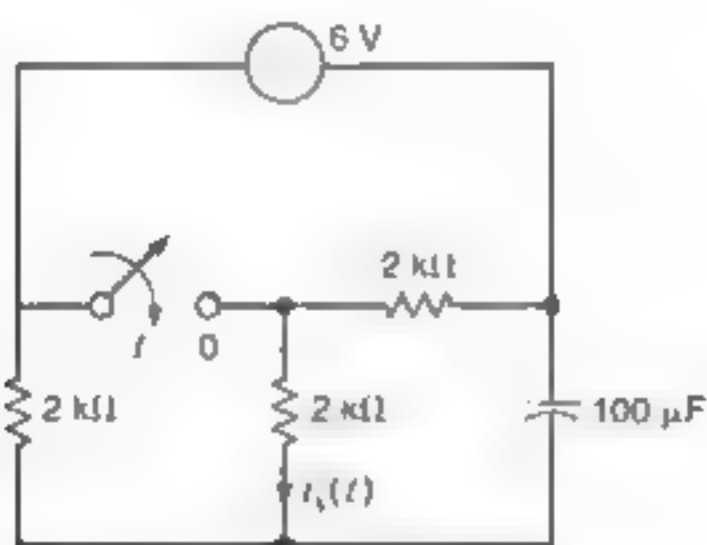


Figura P7.28

- 7.29** Obtenha a corrente $i_s(t)$ do circuito mostrado na Fig. P7.29, para $t > 0$.

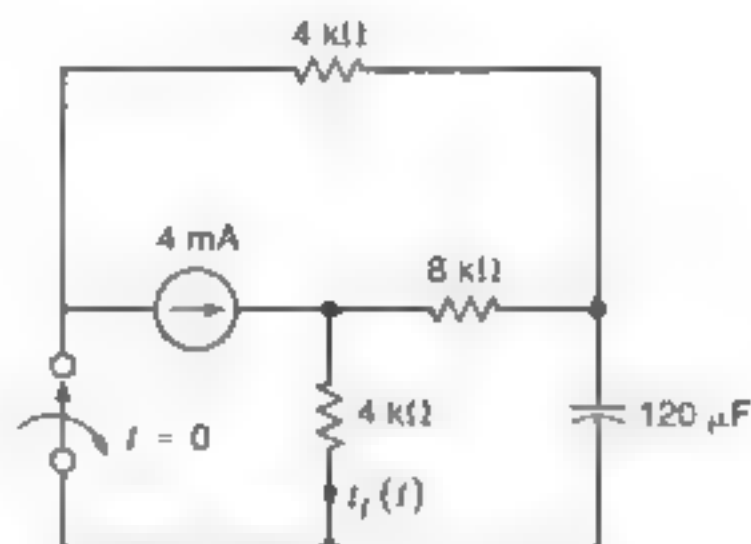


Figura P7.29

- 7.30** Obtenha a corrente $i_s(t)$ da rede mostrada na Fig. P7.30, para $t > 0$.

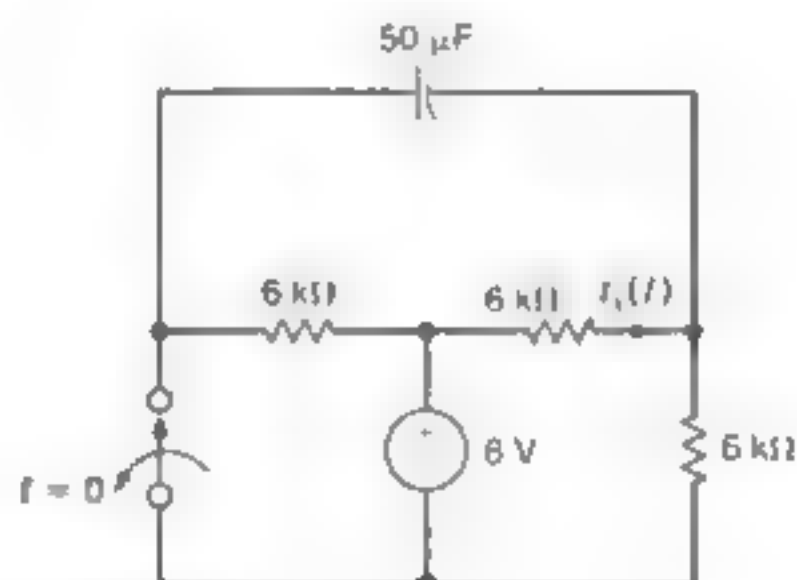


Figura P7.30

- 7.31** Obtenha a corrente $i_s(t)$ do circuito mostrado na Fig. P7.31, para $t > 0$.

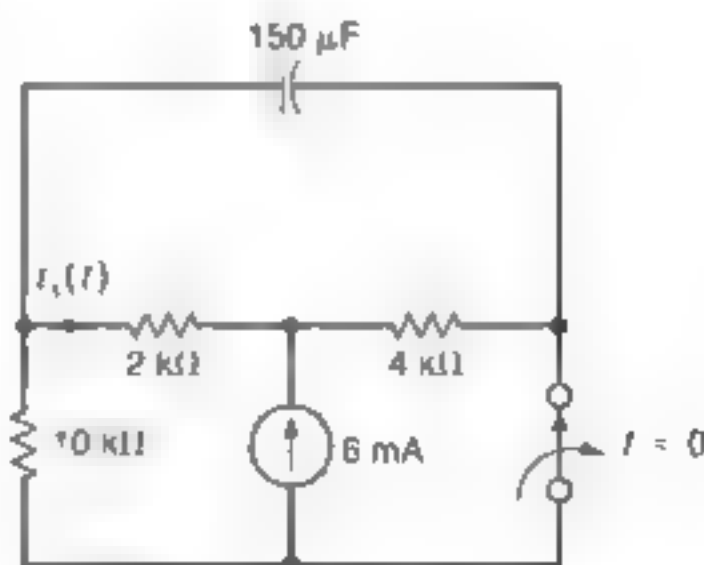


Figura P7.31

- 7.32** Utilize o método passo a passo na obtenção da tensão $v_x(t)$ da rede mostrada na Fig. P7.32, para $t > 0$.

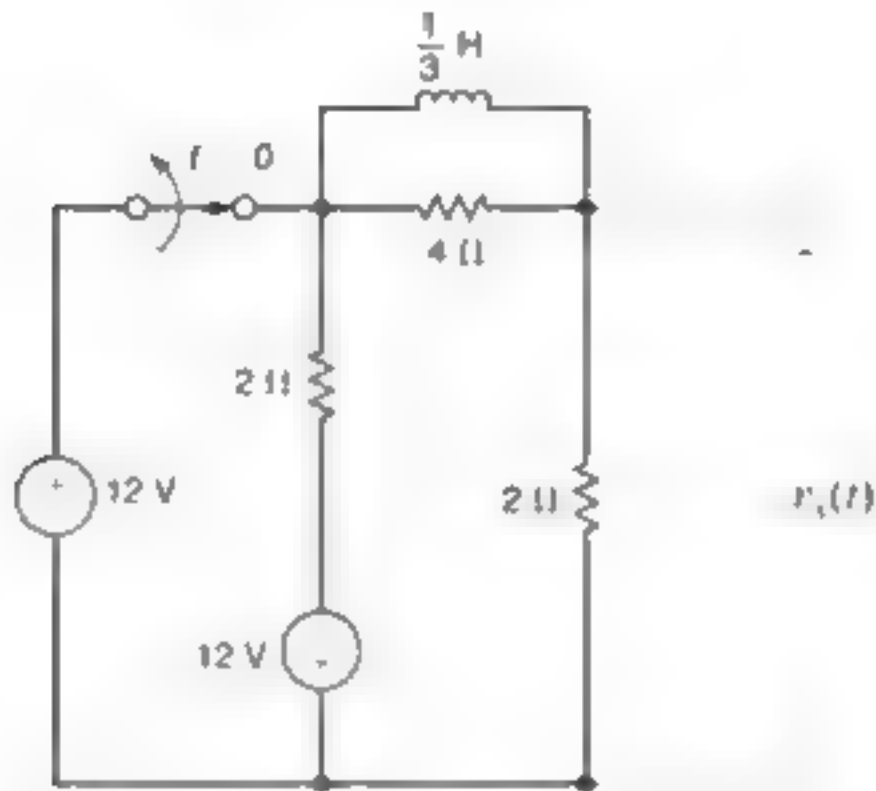


Figura P7.32

- 7.33** Obtenha a tensão $v_x(t)$, para $t > 0$, da rede mostrada na Fig. P7.33 utilizando o método passo a passo.

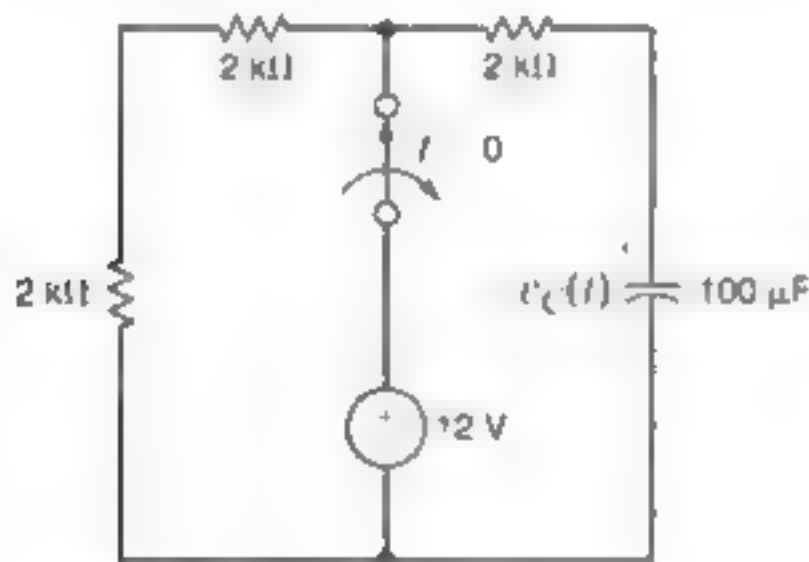


Figura P7.33

- 7.34** Obtenha a tensão $v_x(t)$, para $t > 0$, da rede mostrada na Fig. P7.34 utilizando o método passo a passo.

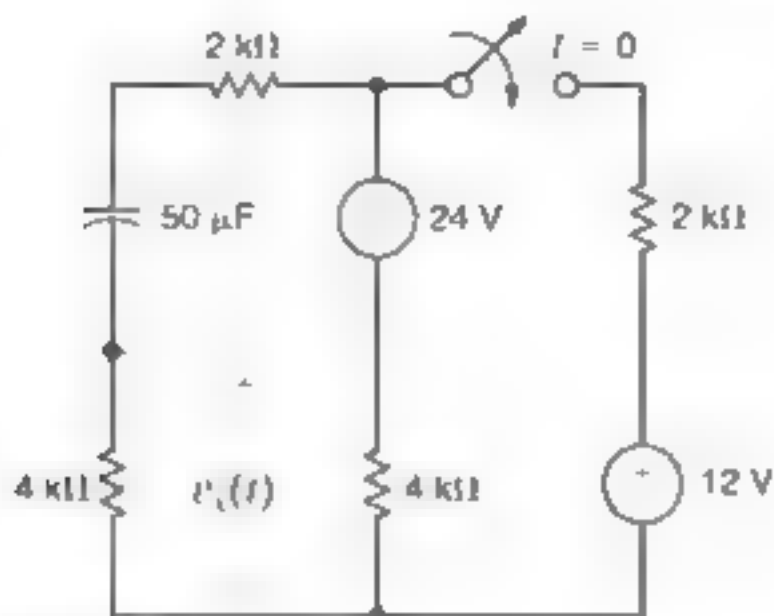


Figura P7.34

- 7.35** Obtenha a tensão $v_x(t)$, para $t > 0$, do circuito mostrado na Fig. P7.35 utilizando o método passo a passo.

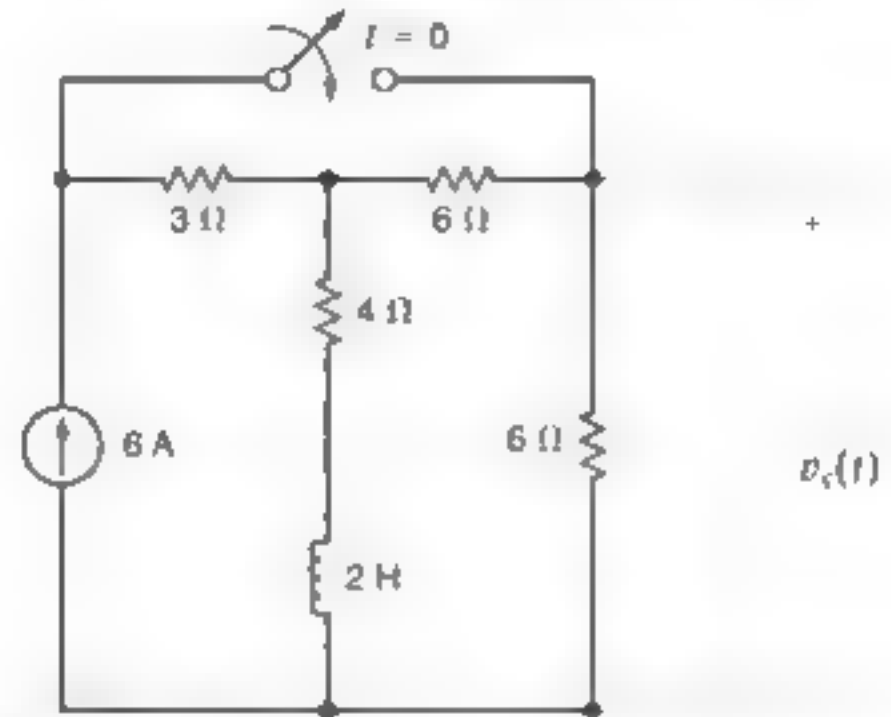


Figura P7.35

- 7.36** Utilize o método passo a passo na obtenção da corrente $i_x(t)$ do circuito mostrado na Fig. P7.36, para $t > 0$.

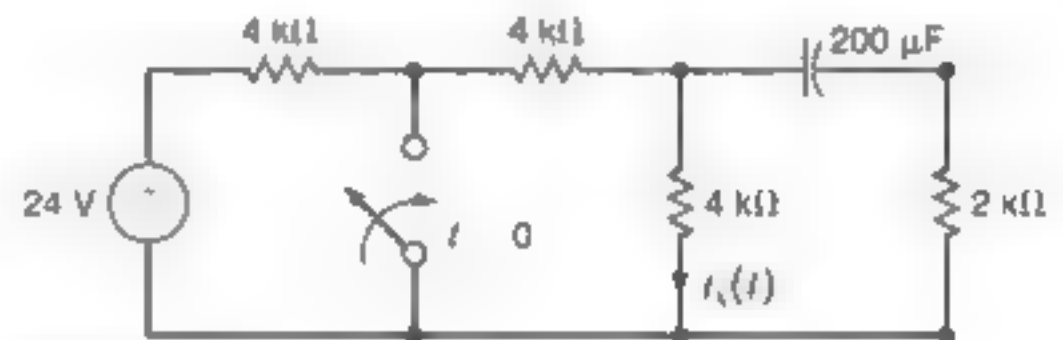


Figura P7.36

- 7.37** Obtenha a tensão $v_x(t)$, para $t > 0$, da rede mostrada na Fig. P7.37 utilizando a técnica passo a passo.

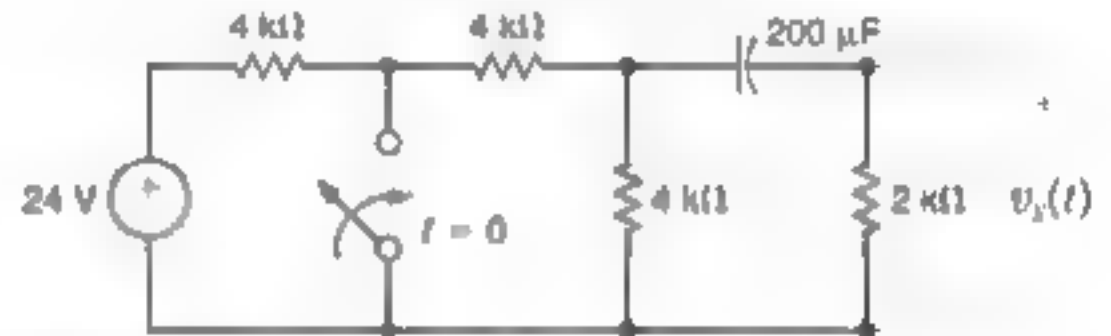


Figura P7.37

- 7.38** Obtenha a tensão $v_x(t)$, para $t > 0$, do circuito mostrado na Fig. P7.38 utilizando o método passo a passo.

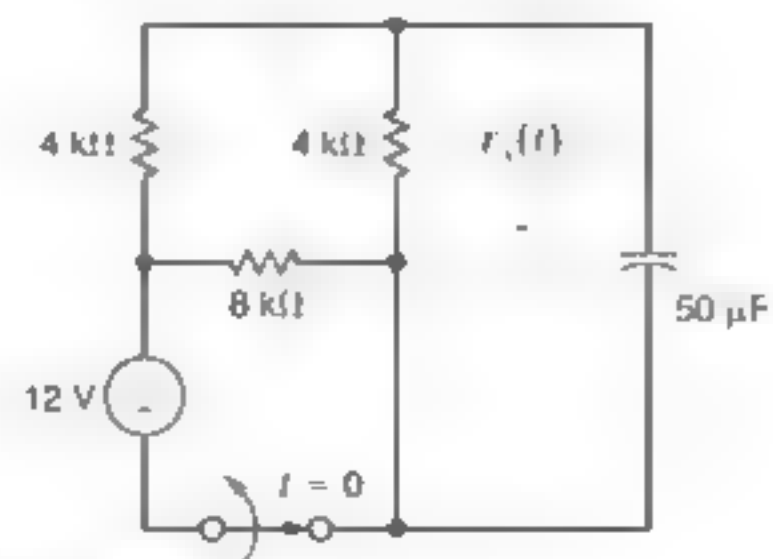


Figura P7.38

- 7.39** A chave do circuito mostrado na Fig. P7.39 é aberta em $t = 0$. Obtenha a corrente $i(t)$, para $t > 0$.

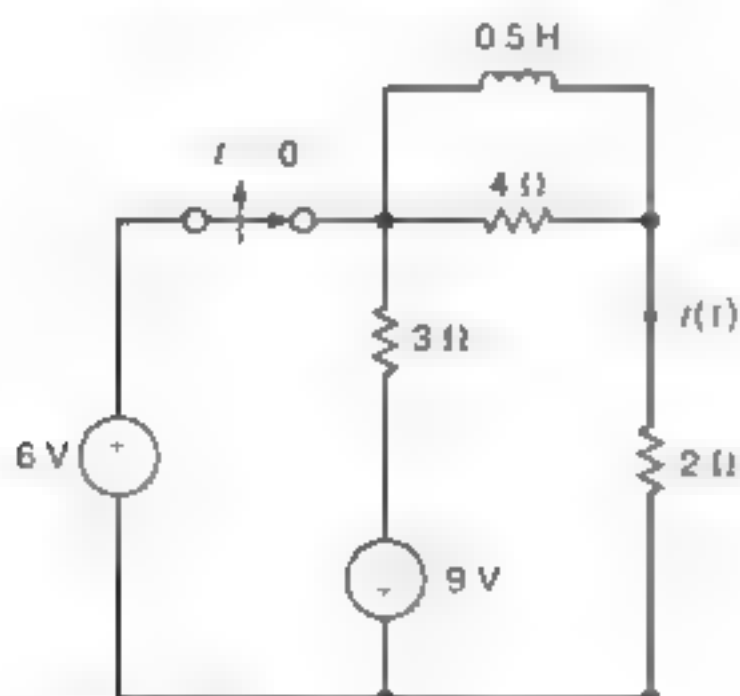


Figura P7.39

- 7.40** A chave do circuito mostrado na Fig. P7.40 é aberta em $t = 0$. Obtenha a corrente $i_x(t)$, para $t > 0$.

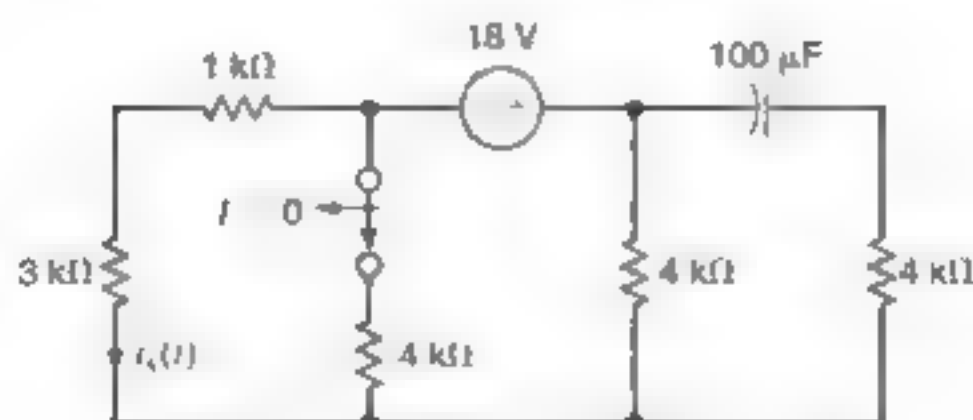


Figura P7.40

- 7.41** A chave do circuito mostrado na Fig. P7.41 é fechada em $t = 0$. Obtenha a tensão $v_x(t)$, para $t > 0$.

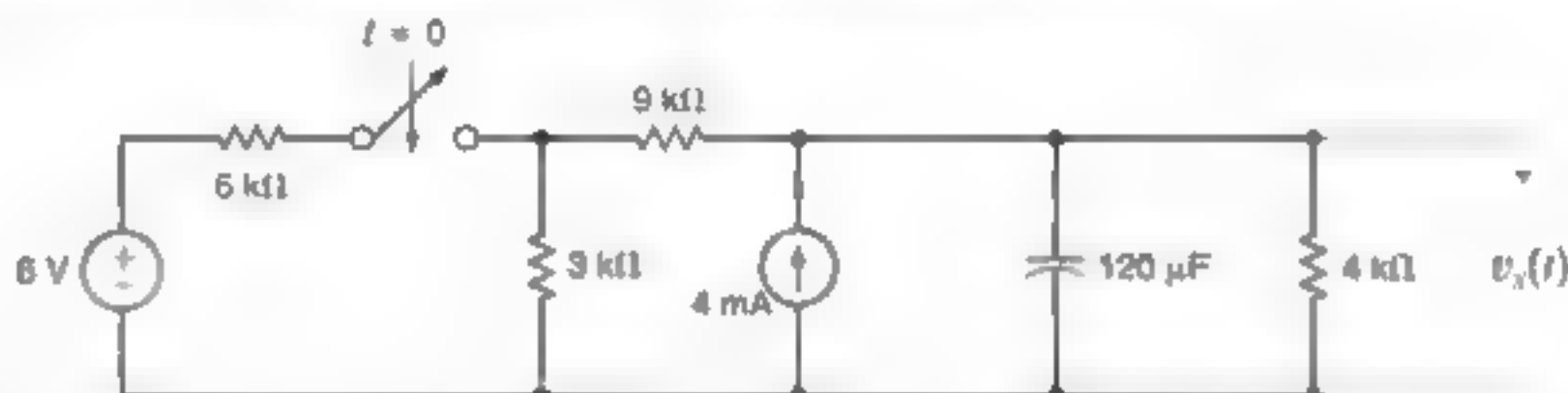


Figura P7.41

- 7.42** A chave do circuito mostrado na Fig. P7.42 fica fechada por um longo tempo e é aberta em $t = 0$. Determine a corrente $i(t)$ para $t > 0$.

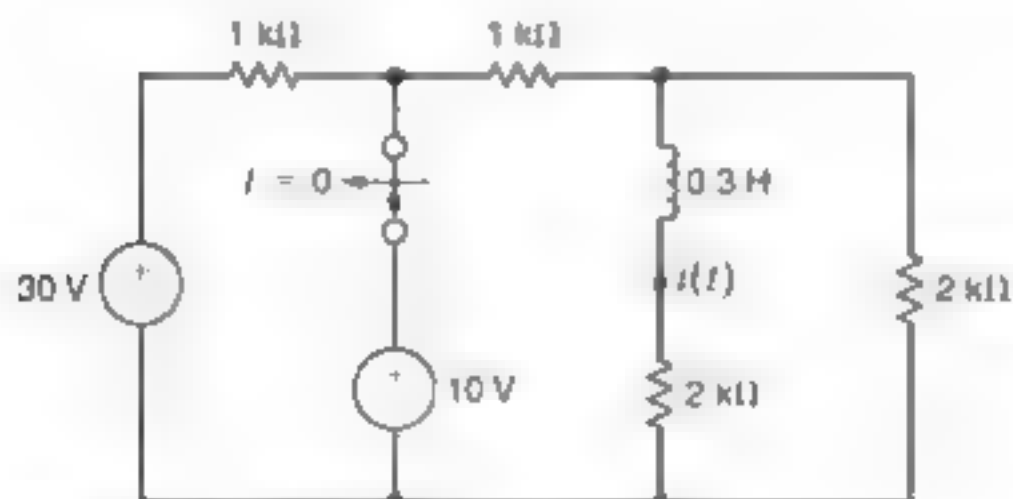


Figura P7.42

- 7.44** A chave do circuito mostrado na Fig. P7.44 fica na posição A por um longo tempo e se move para a posição B em $t = 0$. Calcule a tensão $v_x(t)$ para $t > 0$.

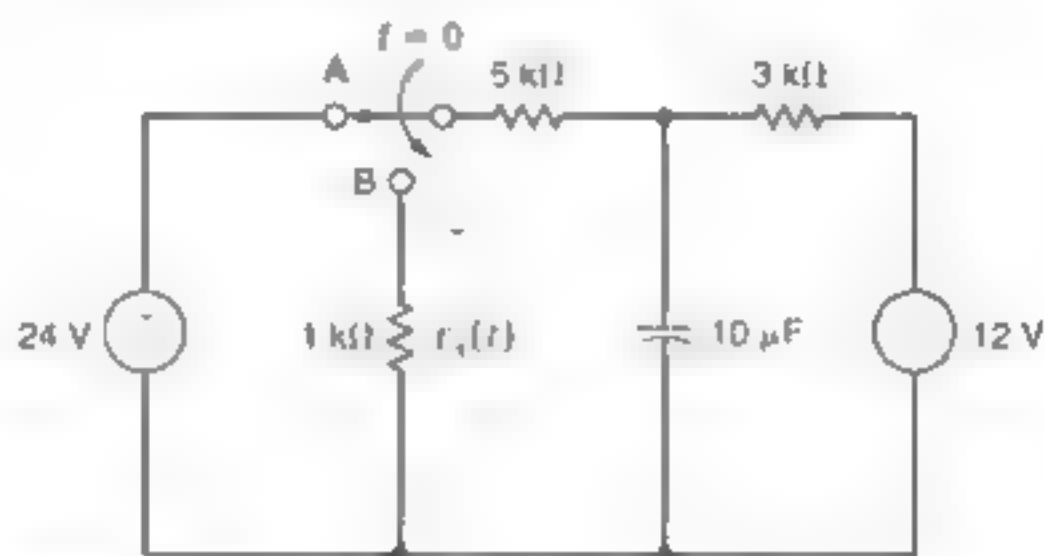


Figura P7.44

- 7.43** A chave do circuito mostrado na Fig. P7.43 fica fechada por um longo tempo e é aberta em $t = 0$. Determine a corrente $i_x(t)$ para $t > 0$.

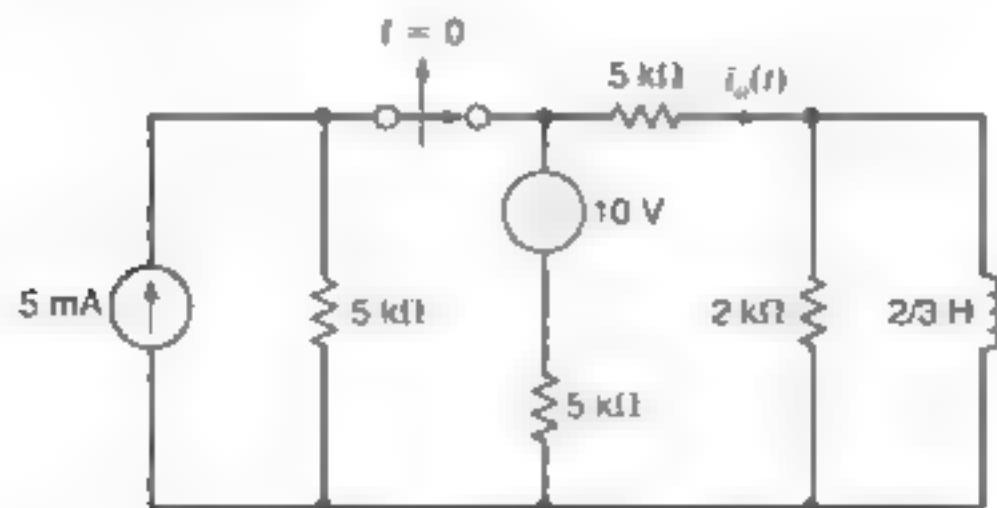


Figura P7.43

- 7.45** A chave do circuito mostrado na Fig. P7.45 fica fechada por um longo tempo e é aberta em $t = 0$. Determine a tensão $v_C(t)$ para $t > 0$.

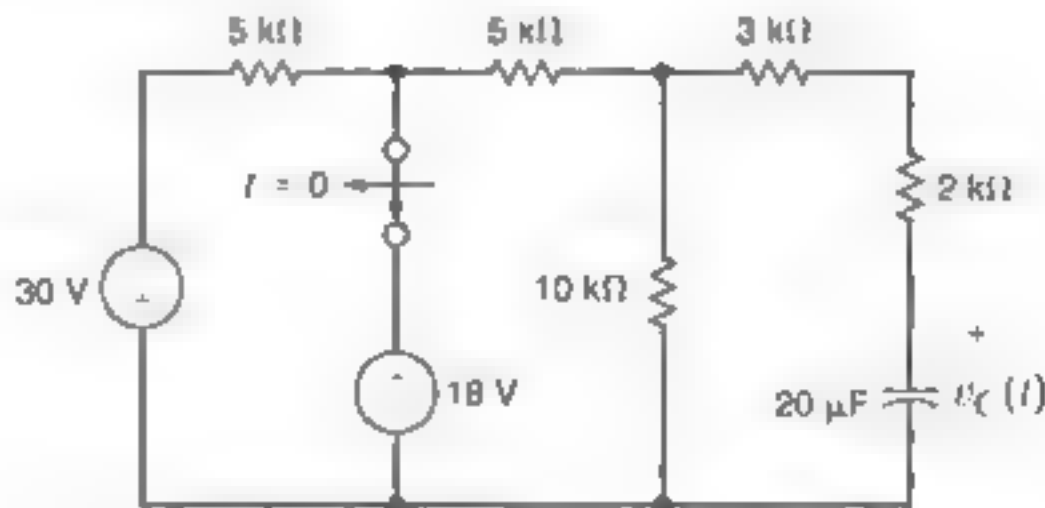


Figura P7.45

- 7.46** Obtenha a corrente $i_x(t)$, para $t > 0$, da rede mostrada na Fig. P7.46 utilizando o método passo a passo.

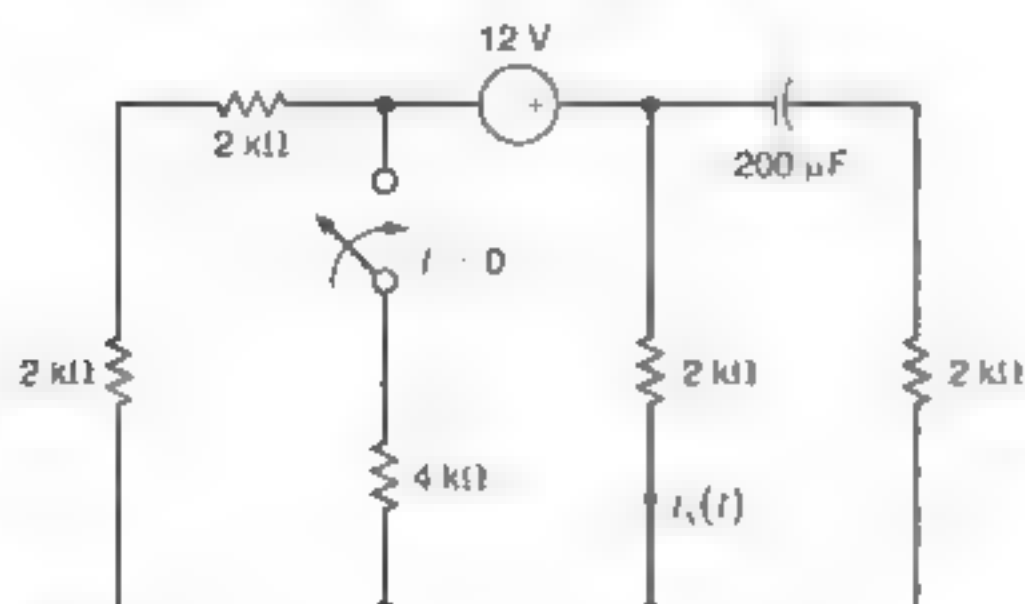


Figura P7.46

- 7.47** Utilize o método passo a passo na obtenção da corrente $i_x(t)$ da rede mostrada na Fig. P7.47, para $t > 0$.

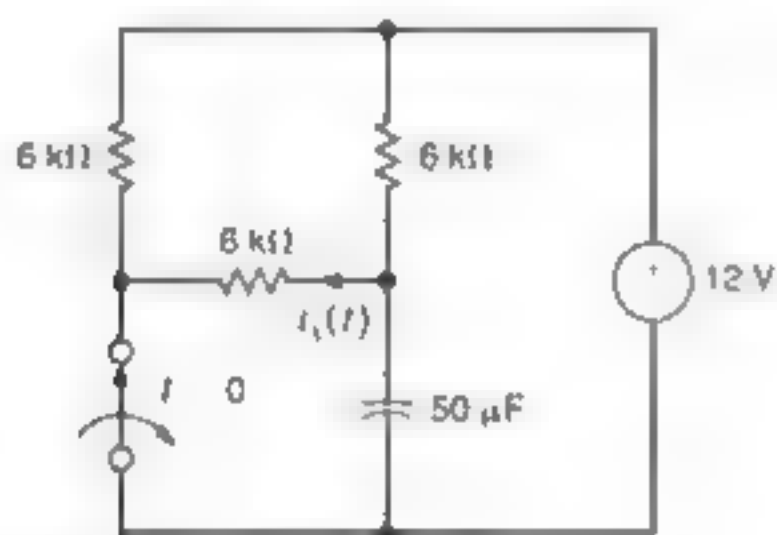


Figura P7.47

- 7.48** Obtenha a tensão $v_x(t)$ da rede mostrada na Fig. P7.48, para $t > 0$.

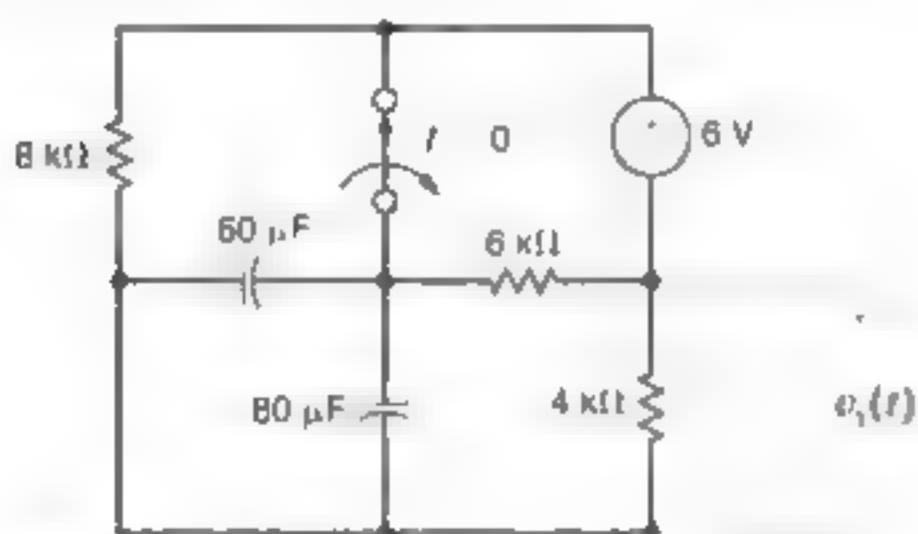


Figura P7.48

- 7.49** Obtenha a tensão $v_x(t)$ da rede mostrada na Fig. P7.49, para $t > 0$.

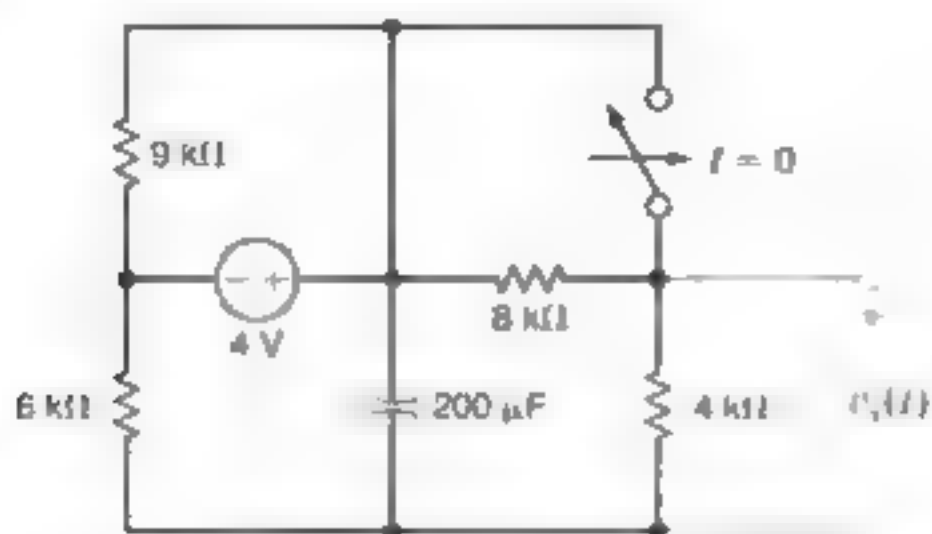


Figura P7.49

- 7.50** Obtenha a tensão $v_x(t)$ da rede mostrada na Fig. P7.50, para $t > 0$.

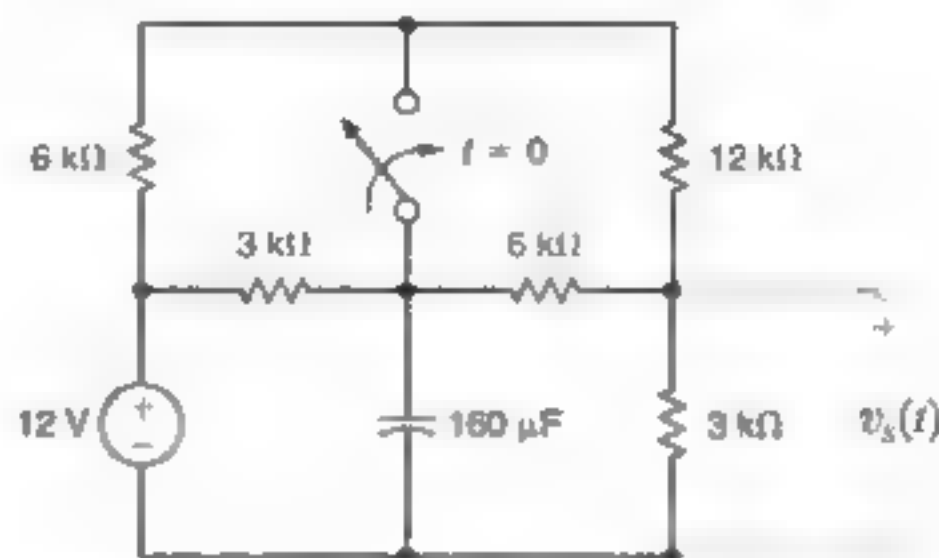


Figura P7.50

- 7.51** Determine a tensão $v_x(t)$ da rede mostrada na Fig. P7.51, para $t > 0$.

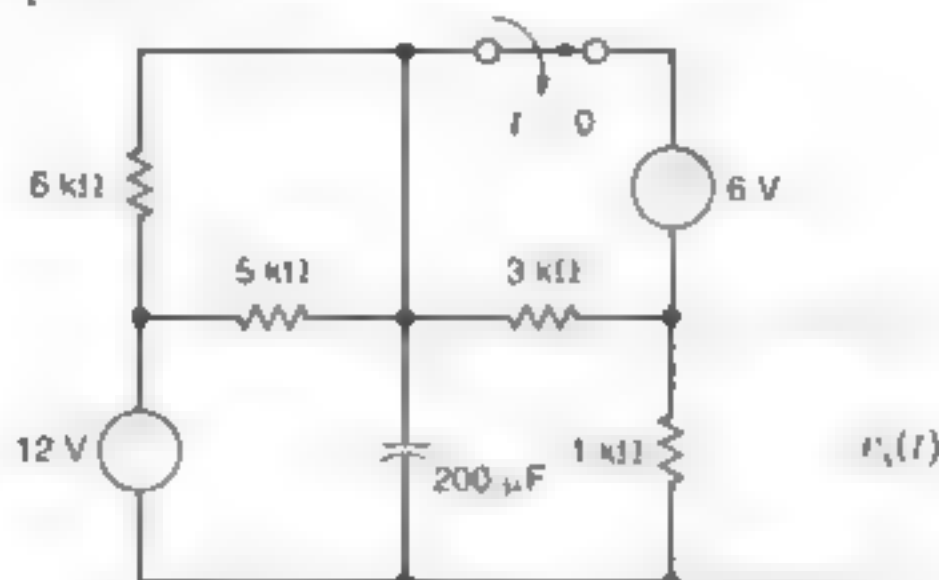


Figura P7.51

- 7.52** Obtenha a tensão $v_x(t)$ do circuito mostrado na Fig. P7.52, para $t > 0$.

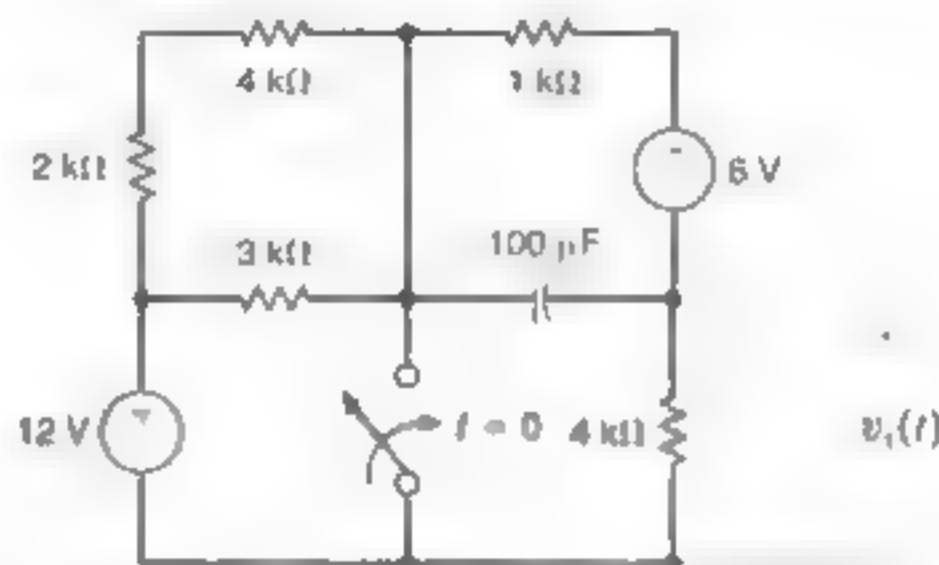


Figura P7.52

- 7.53** Obtenha a tensão $v_x(t)$ da rede mostrada na Fig. P7.53, para $t > 0$.

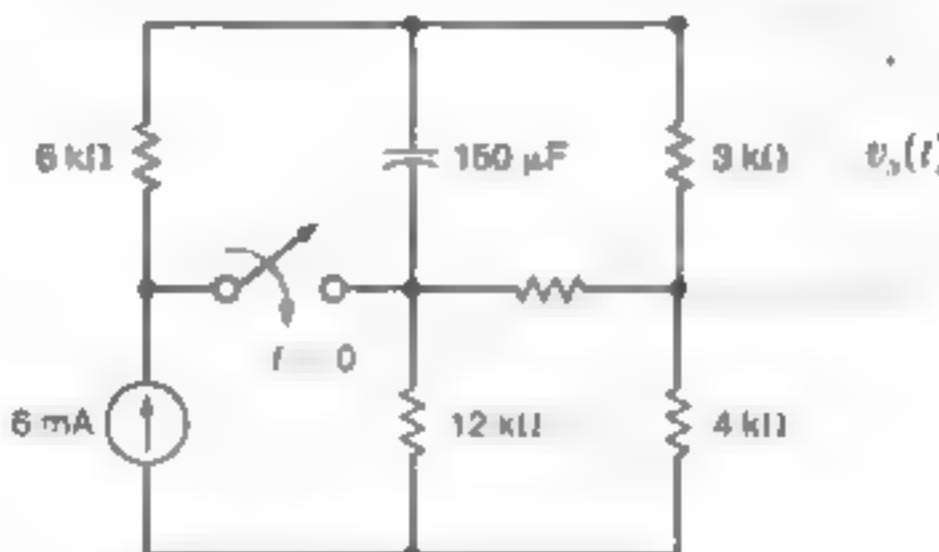


Figura P7.53

7.54 Obtenha a tensão $v_x(t)$ da rede mostrada na Fig. P7.54, para $t > 0$.

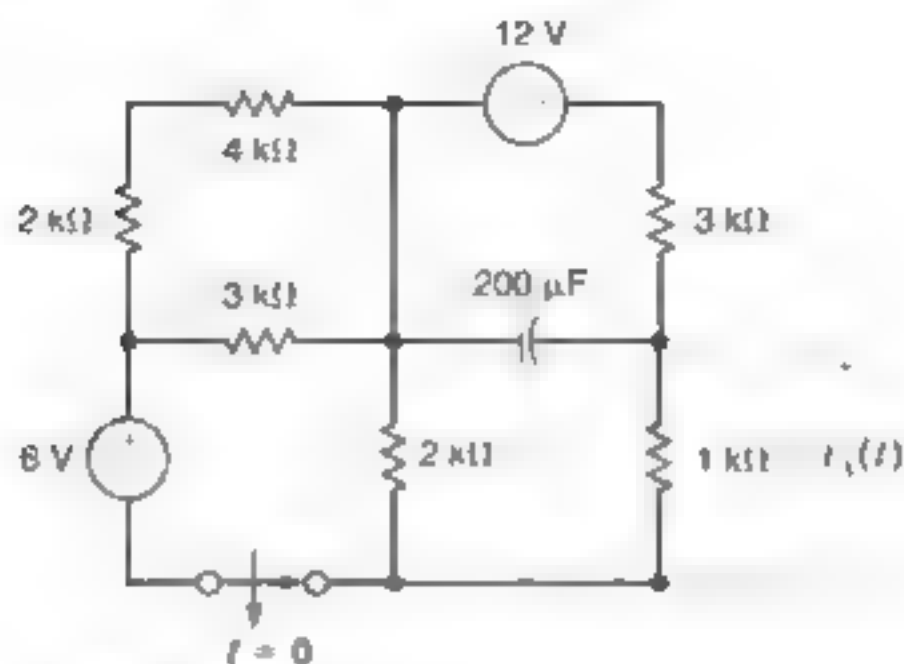


Figura P7.54

7.55 Utilize a técnica passo a passo na obtenção da tensão $v_x(t)$ do circuito mostrado na Fig. P7.55, para $t > 0$.

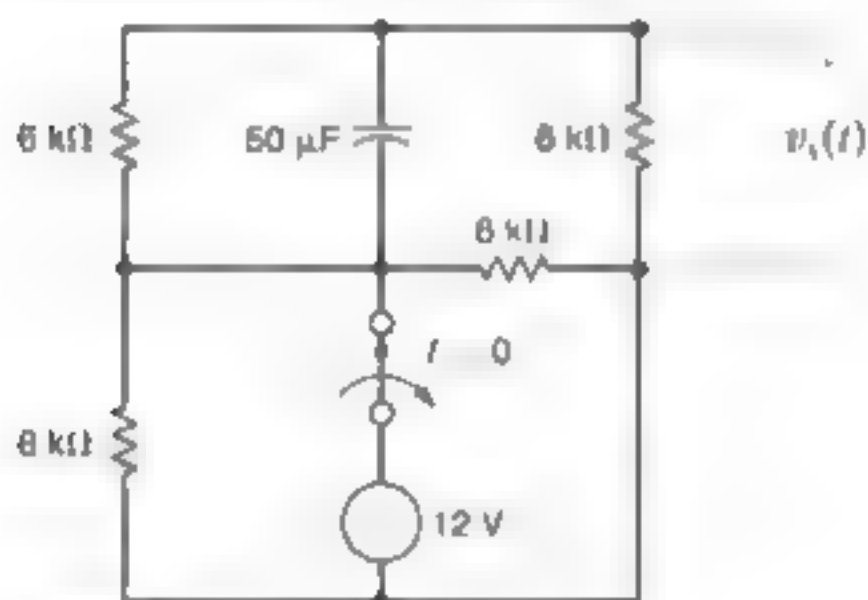


Figura P7.55

7.56 Utilize a técnica passo a passo na obtenção da corrente $i_x(t)$ da rede mostrada na Fig. P7.56, para $t > 0$.

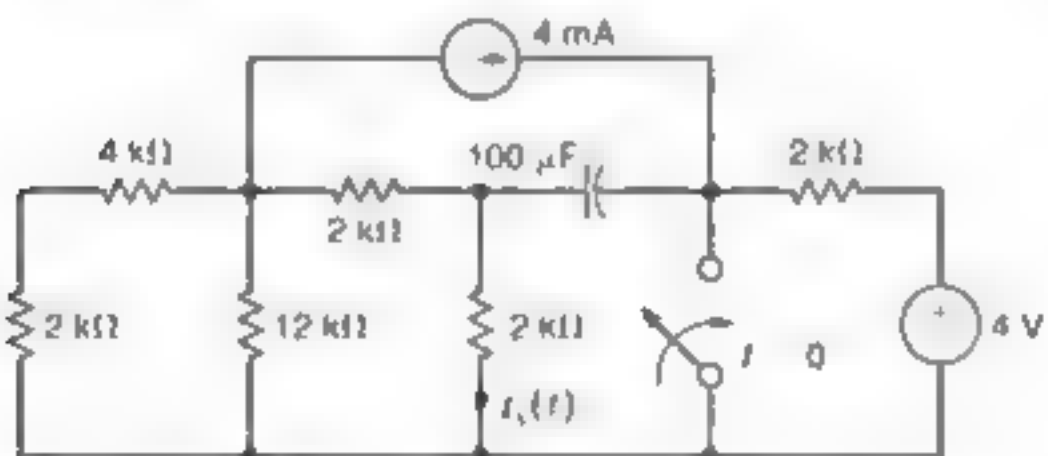


Figura P7.56

7.57 Obtenha a tensão $v_x(t)$, para $t > 0$, da rede mostrada na Fig. P7.57 utilizando a técnica passo a passo.

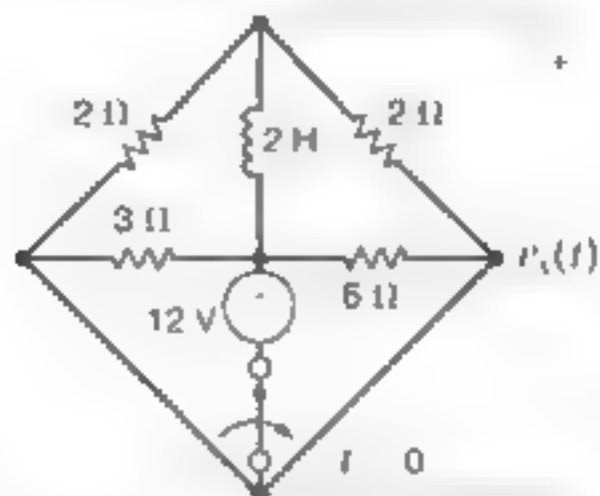


Figura P7.57

7.58 Obtenha a corrente $i_x(t)$ da rede mostrada na Fig. P7.58, para $t > 0$.

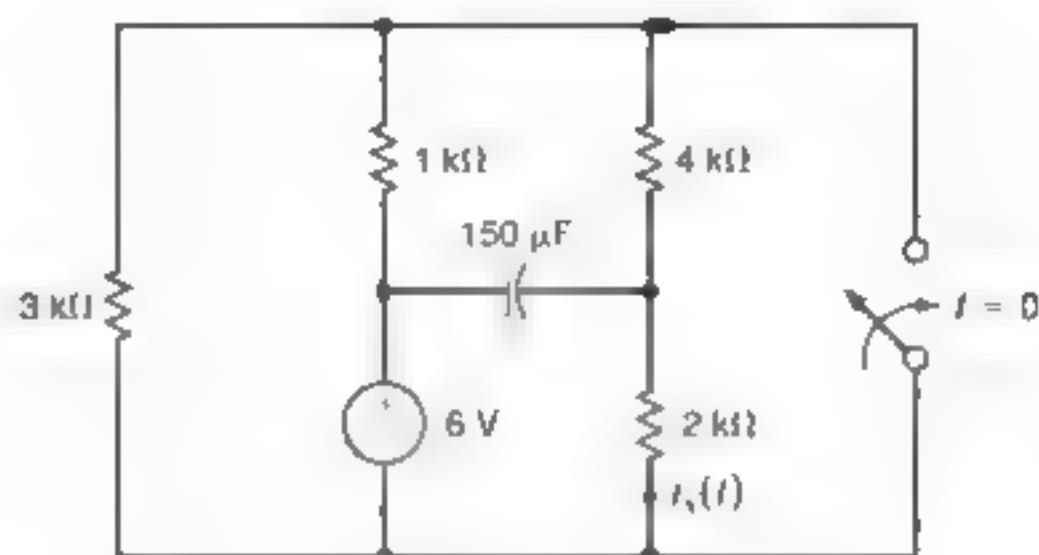


Figura P7.58

7.59 Obtenha a tensão $v_c(t)$, para $t > 0$, do circuito mostrado na Fig. P7.59 utilizando o método passo a passo.

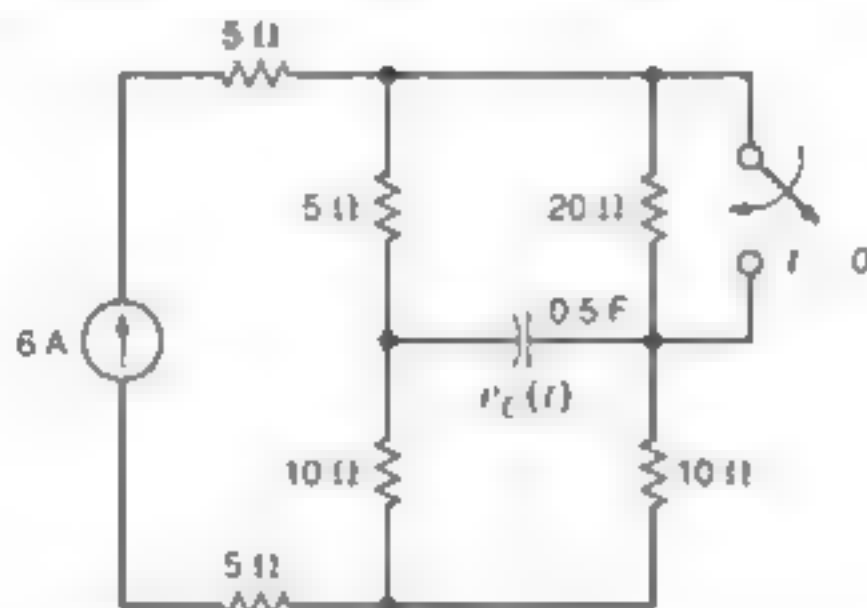


Figura P7.59

7.60 Obtenha a corrente $i(t)$, para $t > 0$, da rede mostrada na Fig. P7.60 utilizando o método passo a passo.

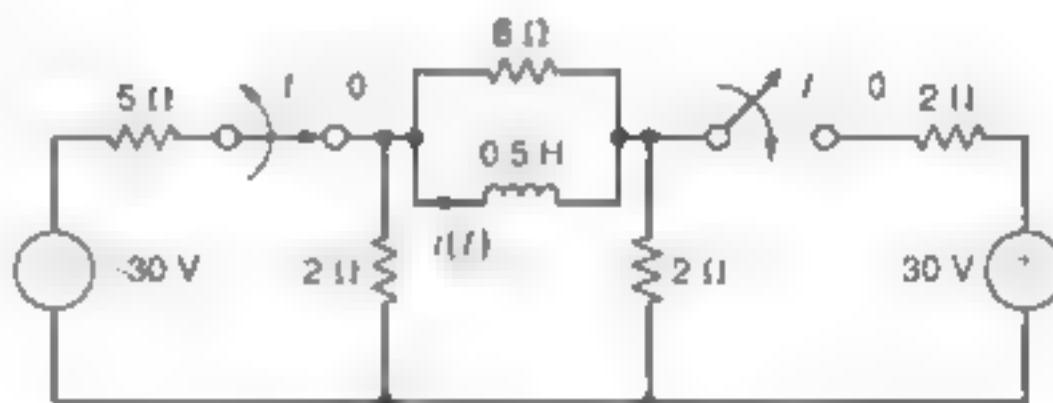


Figura P7.60

7.61 Obtenha a corrente $i(t)$, para $t > 0$, da rede mostrada na Fig. P7.61 utilizando o método passo a passo.

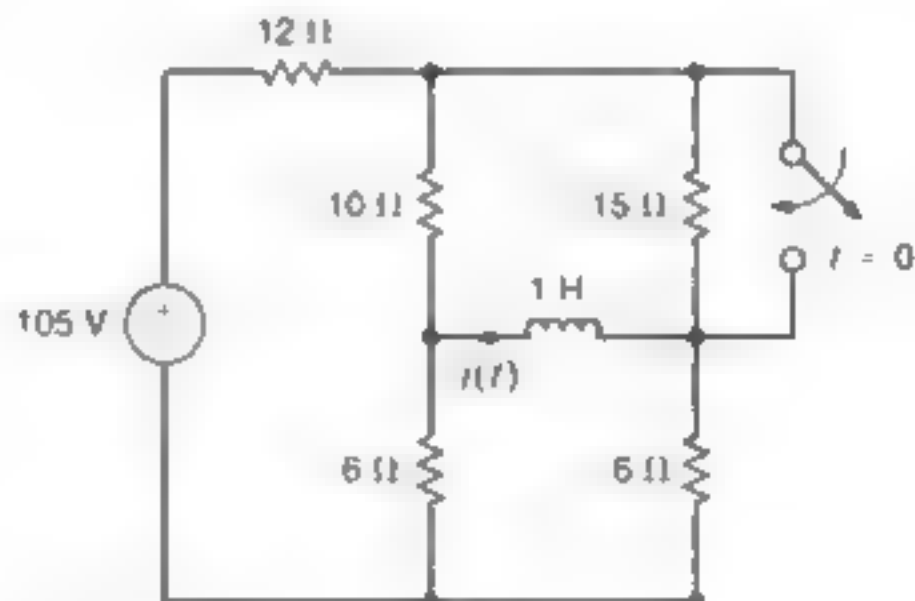


Figura P7.61

- 7.62** Obtenha a tensão $v_x(t)$ do circuito mostrado na Fig. P7.62, para $t > 0$.

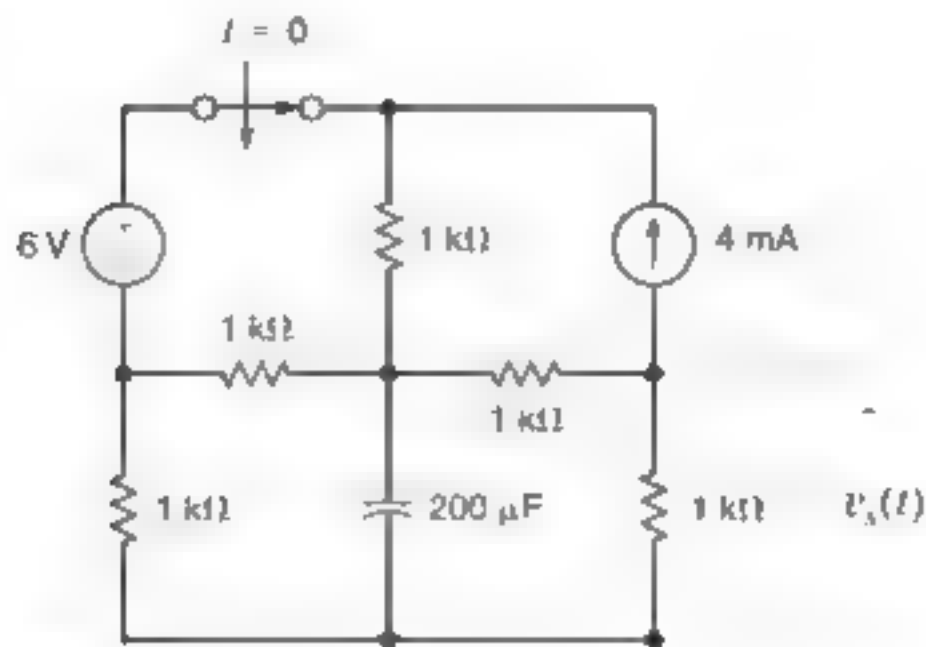


Figura P7.62

- 7.64** Obtenha a corrente $i_x(t)$ da rede mostrada na Fig. P7.64, para $t > 0$.

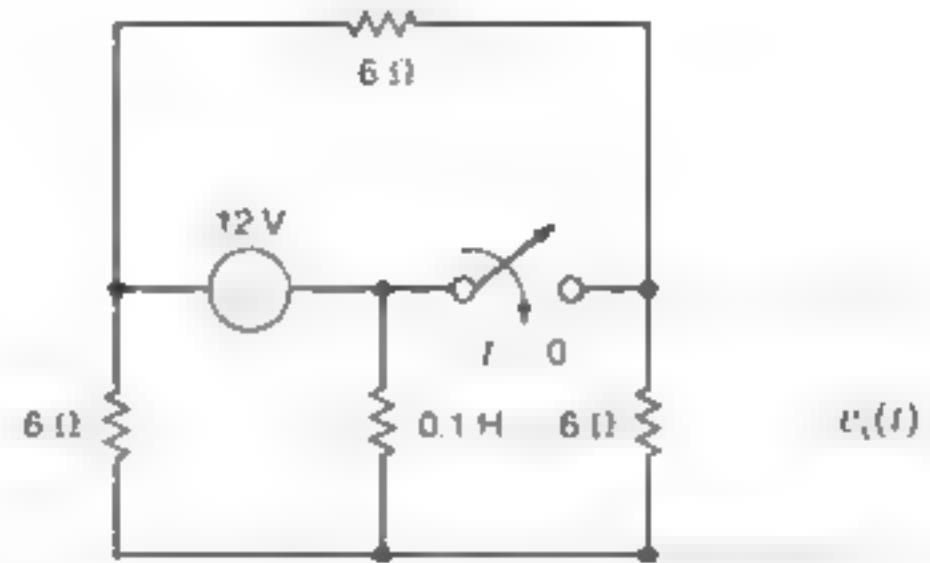


Figura P7.64

- 7.63** Obtenha a corrente $i_x(t)$ da rede mostrada na Fig. P7.63, para $t > 0$.

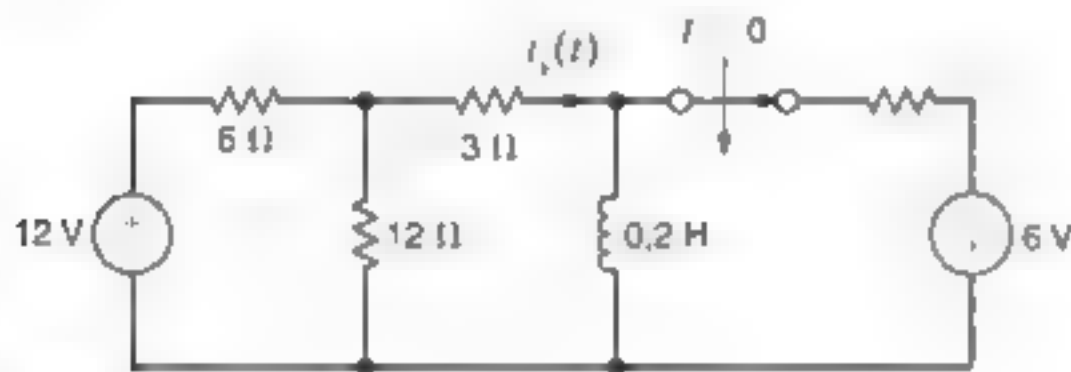


Figura P7.63

- 7.65** Obtenha a corrente $i_x(t)$ da rede mostrada na Fig. P7.65, para $t > 0$.

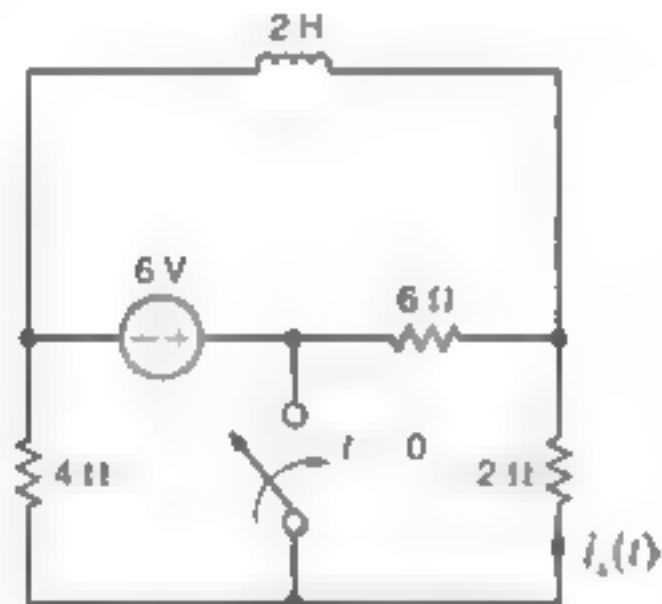


Figura P7.65

- 7.66** Obtenha a corrente $i_x(t)$ da rede mostrada na Fig. P7.66, para $t > 0$.

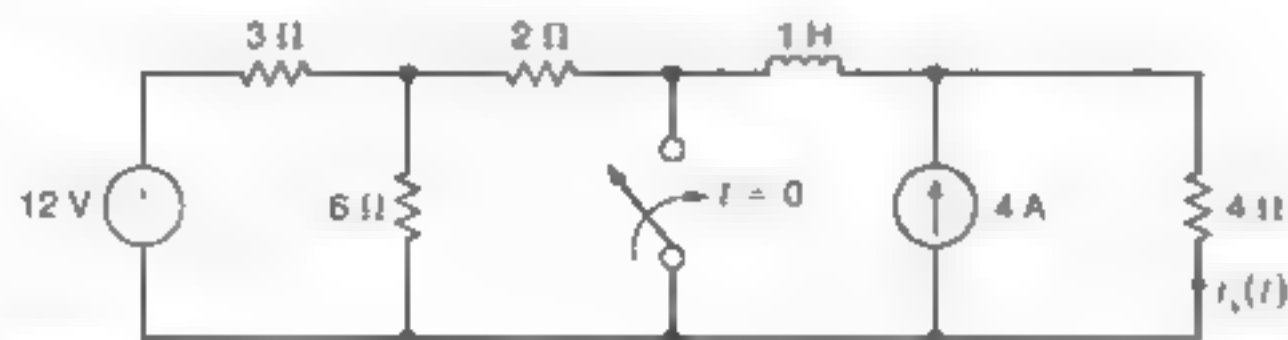


Figura P7.66

- 7.67** Obtenha a corrente $i_x(t)$ do circuito mostrado na Fig. P7.67, para $t > 0$.

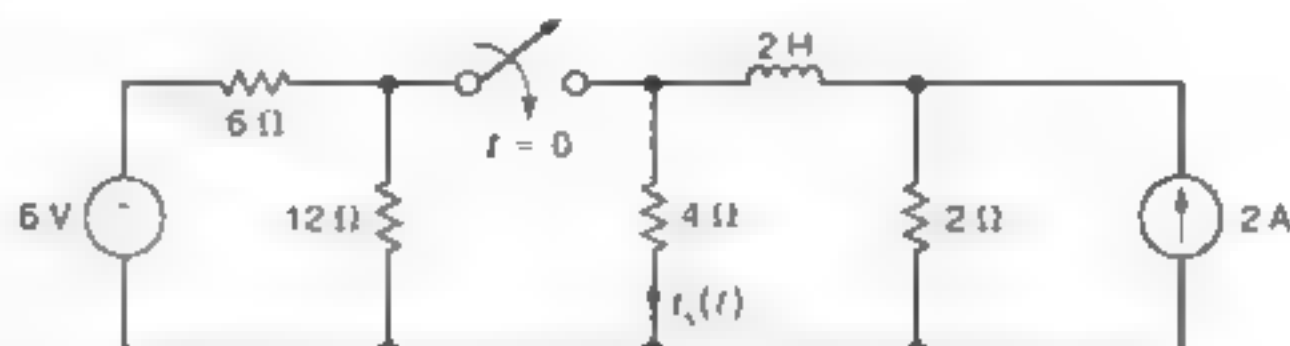


Figura P7.67

7.68 Obtenha a tensão $v_s(t)$ da rede mostrada na Fig. P7.68, para $t > 0$.

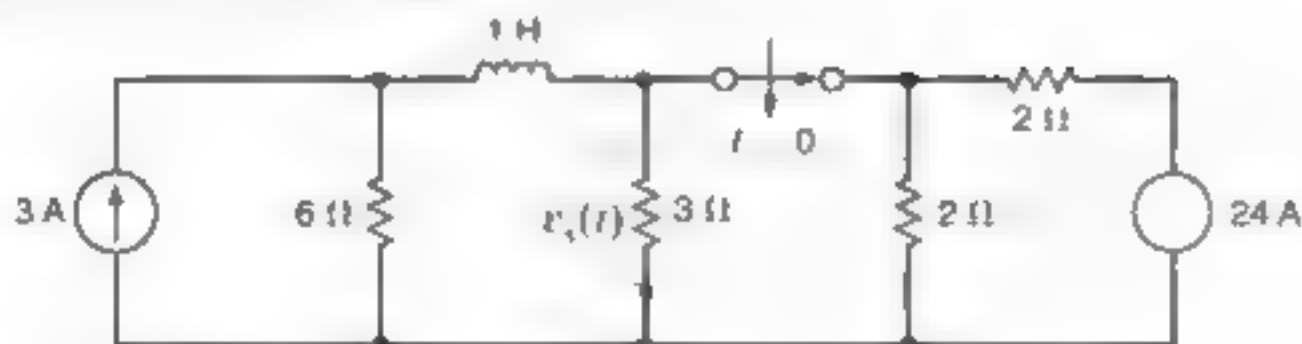


Figura P7.68

7.69 Obtenha a corrente $i_s(t)$ do circuito mostrado na Fig. P7.69, para $t > 0$.

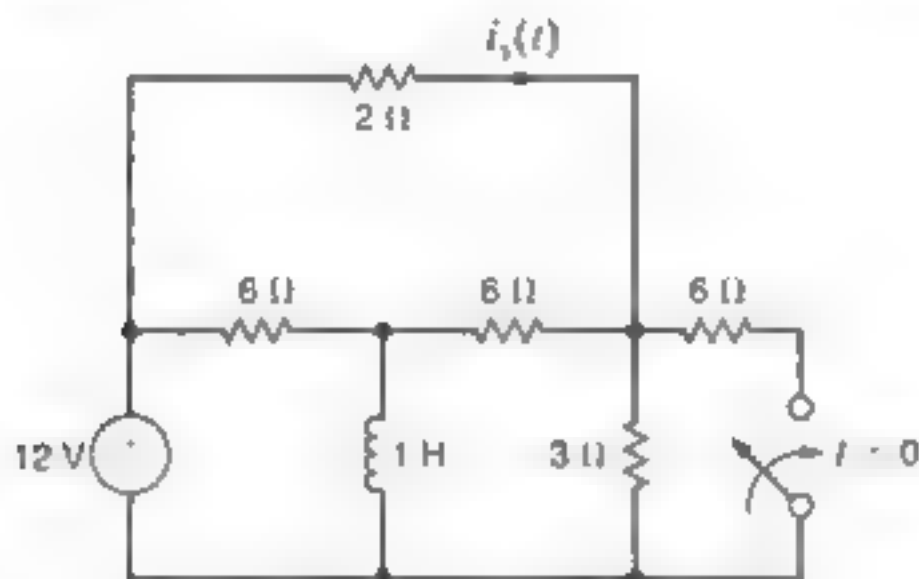


Figura P7.69

7.70 Utilize o método passo a passo na obtenção da corrente $i_s(t)$, para $t > 0$, da rede mostrada na Fig. P7.70.

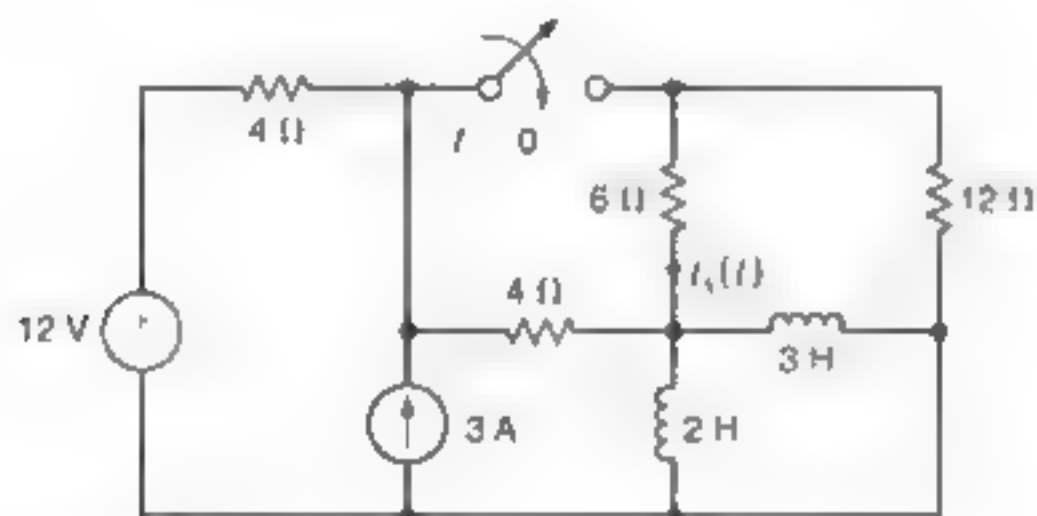


Figura P7.70

7.71 Utilize o método passo a passo na obtenção da tensão $v_s(t)$, para $t > 0$, da rede mostrada na Fig. P7.71.

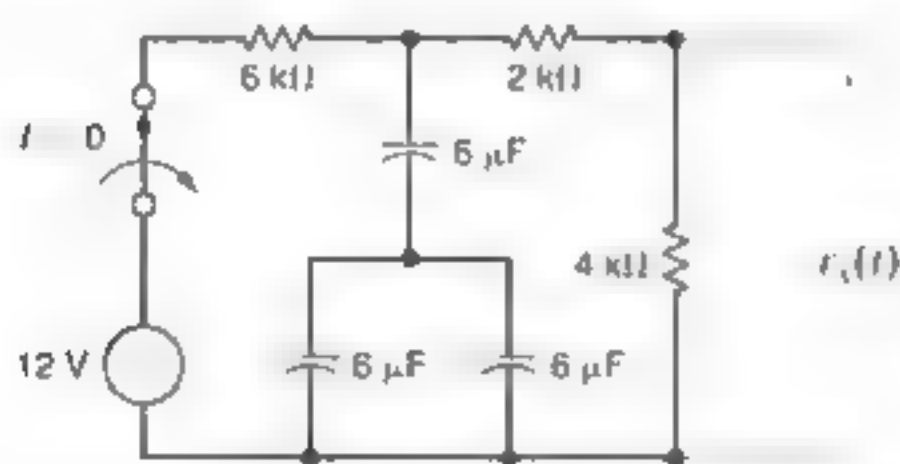


Figura P7.71

7.72 Obtenha a corrente $i_s(t)$, para $t > 0$, do circuito mostrado na Fig. P7.72 utilizando o método passo a passo.

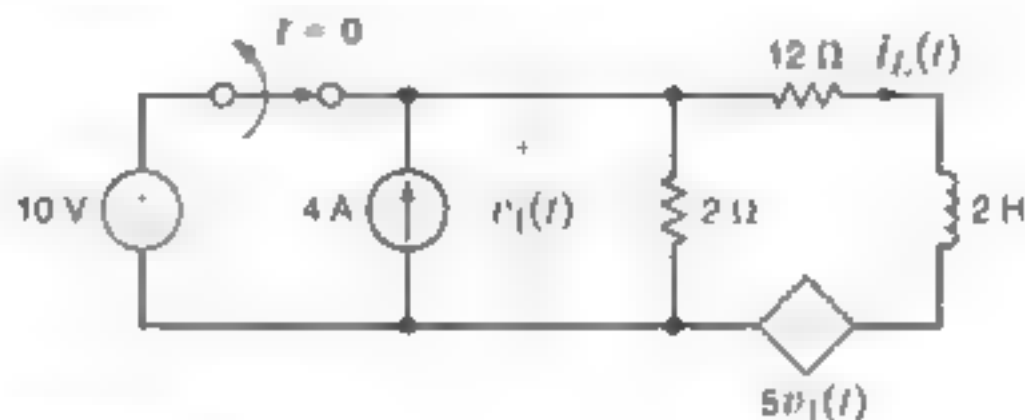


Figura P7.72

7.73 Obtenha a corrente $i_s(t)$, para $t > 0$, da rede mostrada na Fig. P7.73 utilizando o método passo a passo.

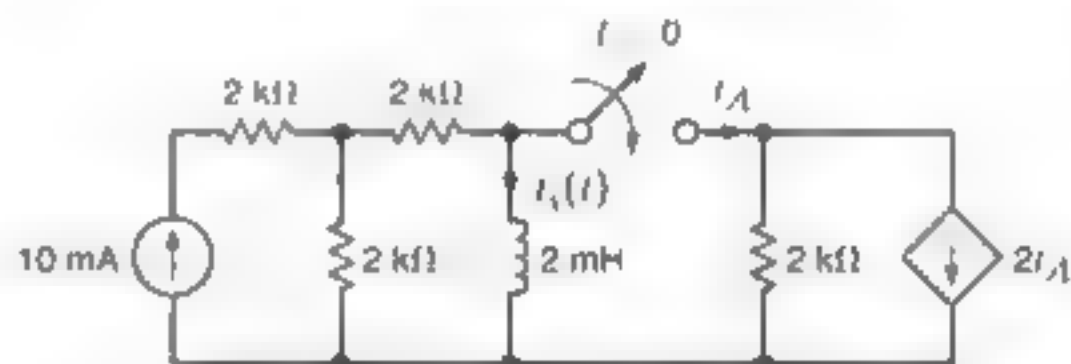


Figura P7.73

7.74 Utilize a técnica passo a passo na obtenção da tensão $v_s(t)$ da rede mostrada na Fig. P7.74 para $t > 0$.

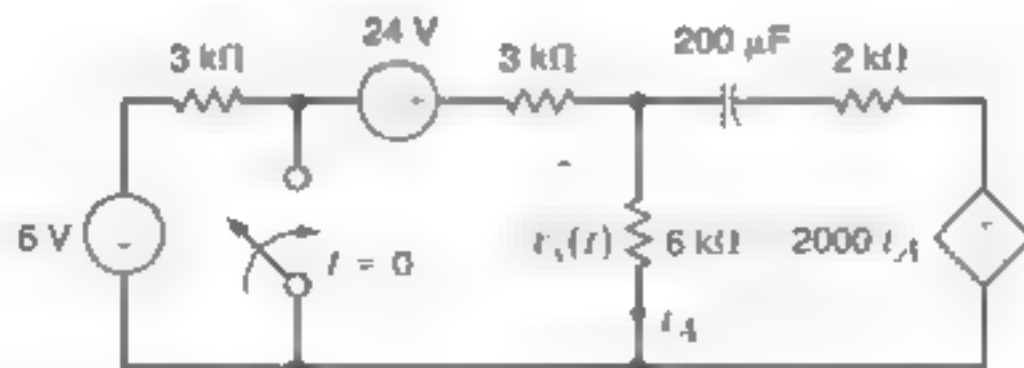


Figura P7.74

- 7.75** Determine a equação da tensão $v_x(t)$, para $t > 0$, do circuito mostrado na Fig. P7.75a, quando sujeito ao pulso mostrado na Fig. P7.75b

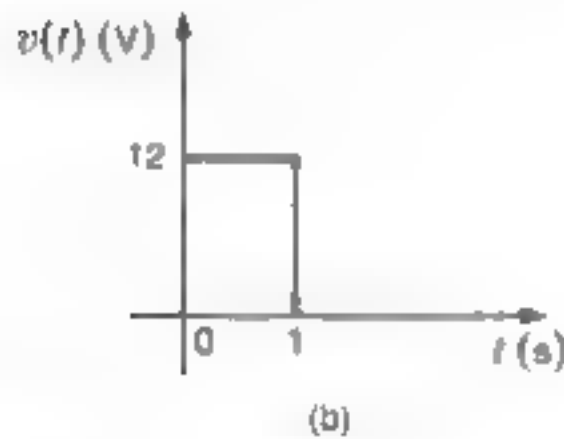
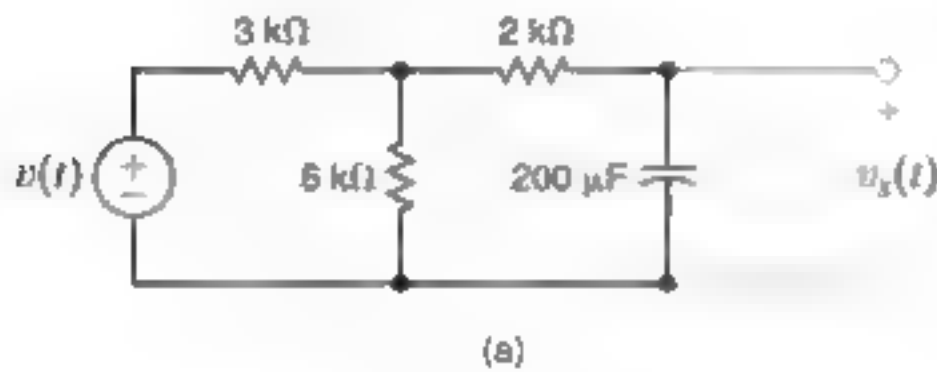


Figura P7.75

- 7.76** A fonte de corrente da rede mostrada na Fig. P7.76a é definida na Fig. P7.76b. A tensão inicial entre os terminais do capacitor deve ser nula. (Por quê?) Determine a corrente $i_x(t)$ para $t > 0$.

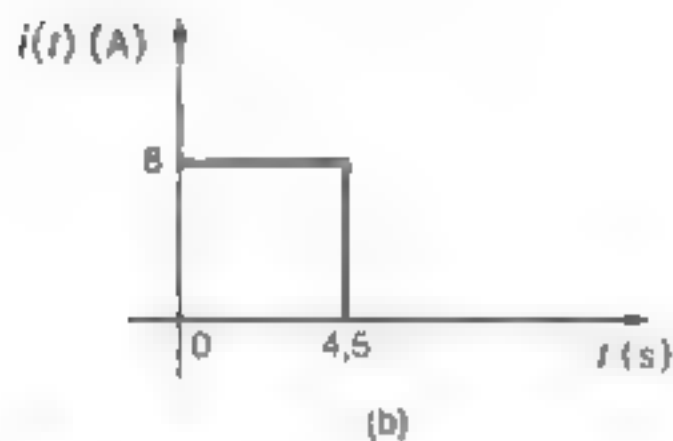
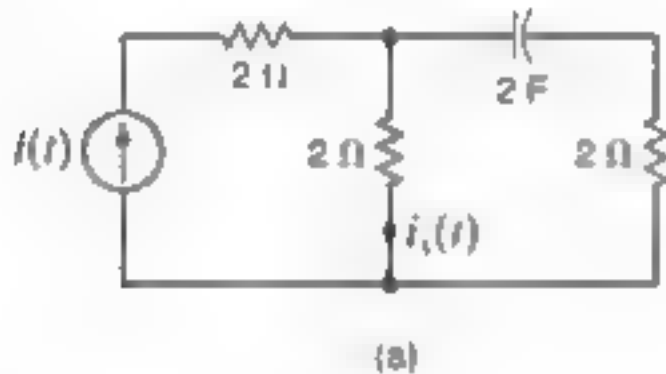


Figura P7.76

- 7.77** A tensão $v(t)$ mostrada na Fig. P7.77a é dada pelo gráfico mostrado na Fig. P7.77b. Se $i_L(0) = 0$, responda às seguintes questões:

- Qual é o valor da energia armazenada no indutor em $t = 3$ s?
- Qual é o valor da potência fornecida pela fonte em $t = 4$ s?
- Qual é o valor de $i(t = 6$ s)?
- Qual é o valor da potência absorvida pelo indutor em $t = 3$ s?

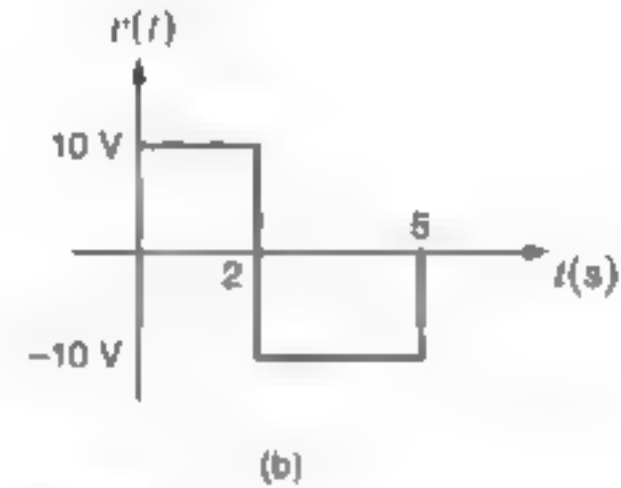
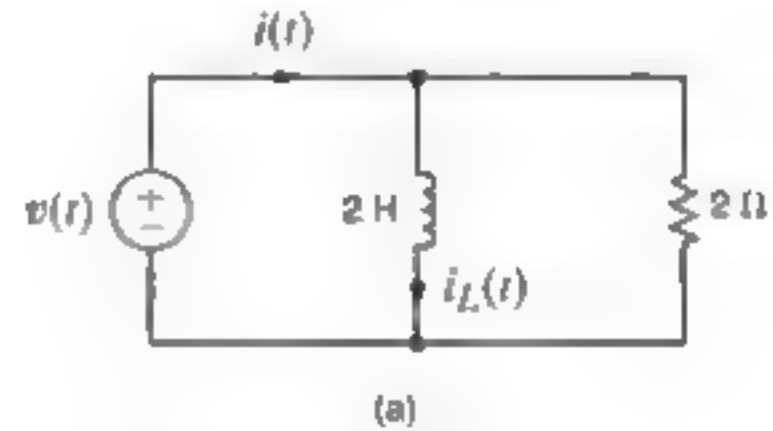


Figura P7.77

- 7.78** Determine a tensão de saída $v_x(t)$ da rede mostrada na Fig. P7.78 se a tensão de entrada for expressa por $v_e(t) = 5(\mu(t) - \mu(t - 0.05))$ V.

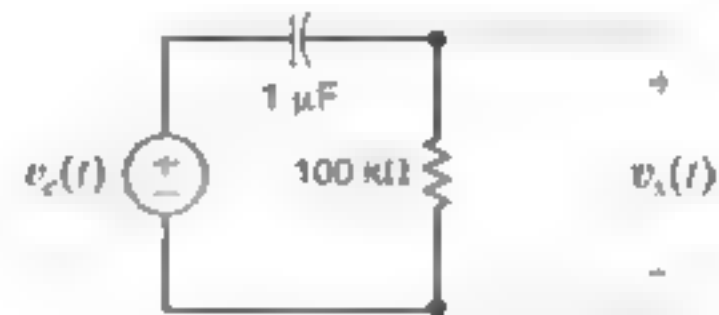


Figura P7.78

- 7.79** Dado que $v_{C1}(0^-) = -10$ V e $v_{C2}(0^-) = 20$ V no circuito mostrado na Fig. P7.79, determine $i(0^+)$.

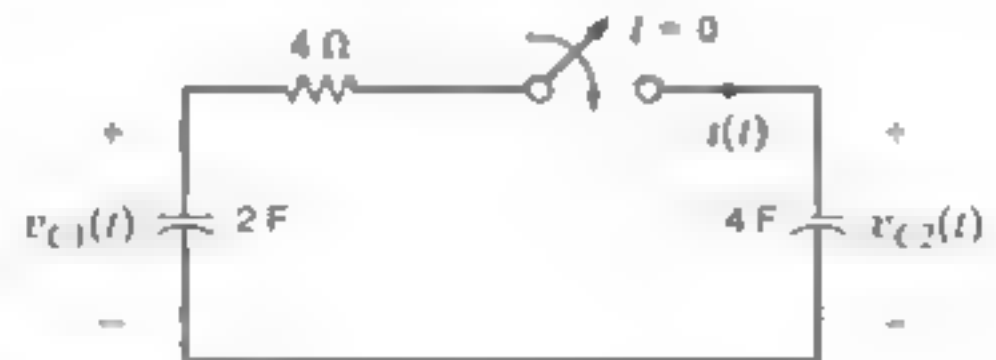


Figura P7.79

- 7.80** Na rede mostrada na Fig. P7.80, determine a corrente $i(t)$ para $t < 0$. Considerando $v_C(0^-) = -10$ V, calcule $v_{C2}(0^-)$

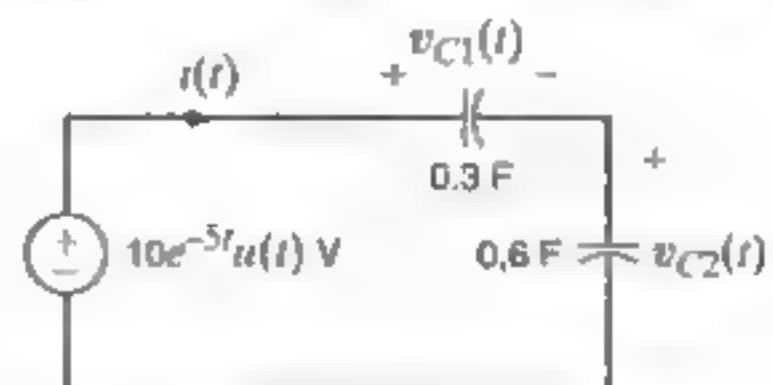


Figura P7.80

- 7.81** No circuito mostrado na Fig. P7.81, $v_R(t) = 100e^{-400t}$ V para $t > 0$. Determine $v_R(t)$ para $t > 0$.

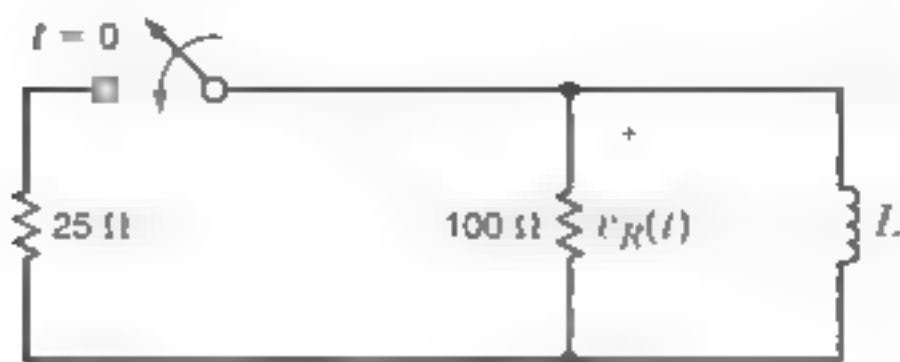


Figura P7.81

- 7.82** A chave do circuito mostrado na Fig. P7.82 está fechada em $t = 0$. Considerando $i_1(0^-) = 2$ A, determine $i_2(0^+)$, $v_R(0^+)$ e $i_1(t = \infty)$.

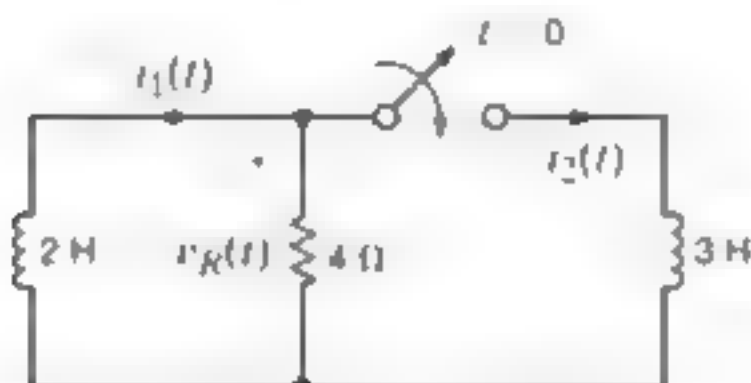


Figura P7.82

- 7.83** A chave do circuito mostrado na Fig. P7.83 fica fechada por um longo tempo e é aberta em $t = 0$. Se $v_C(t) = 20 - 8e^{-0,05t}$ V, determine R_1 , R_2 e C .

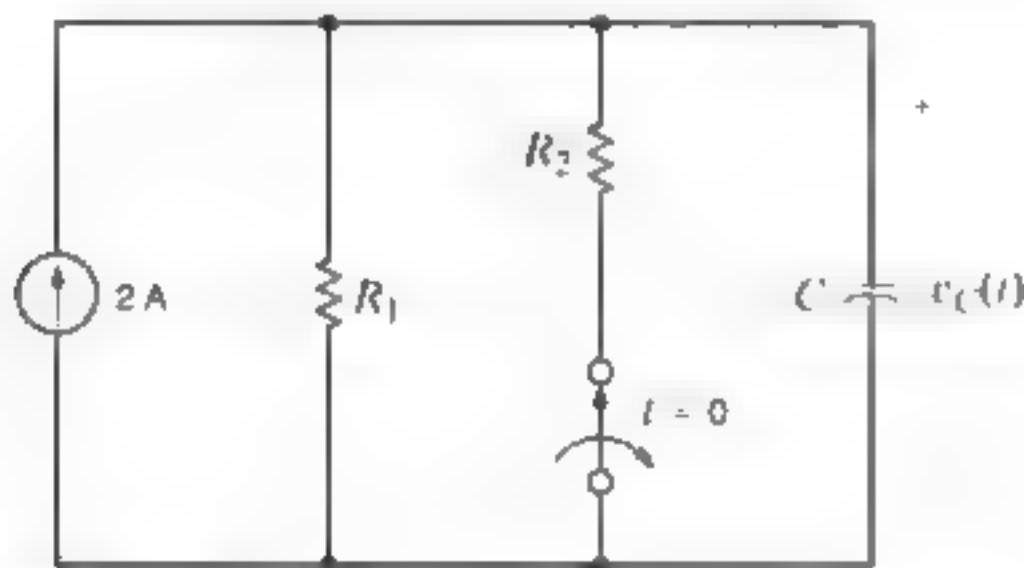


Figura P7.83

- 7.84** Dado que $i(t) = 2,5 + 1,5e^{-4t}$ A para $t > 0$ no circuito mostrado na Fig. P7.84, determine R_1 , R_2 e L .

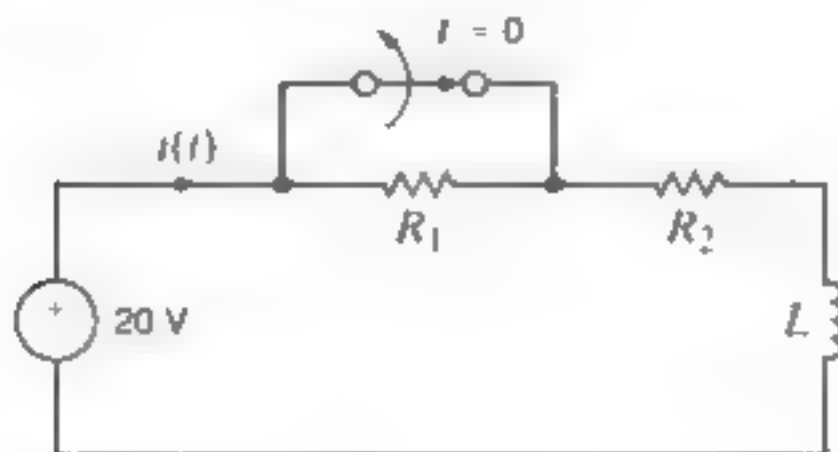


Figura P7.84

- 7.85** Dado que $i(t) = 13,33e^{-t} - 8,33e^{-0,5t}$ A para $t > 0$ na rede mostrada na Fig. P7.85, determine:

- $v_C(0)$,
- $v_C(t = 1 \text{ s})$ e
- a capacitância C .

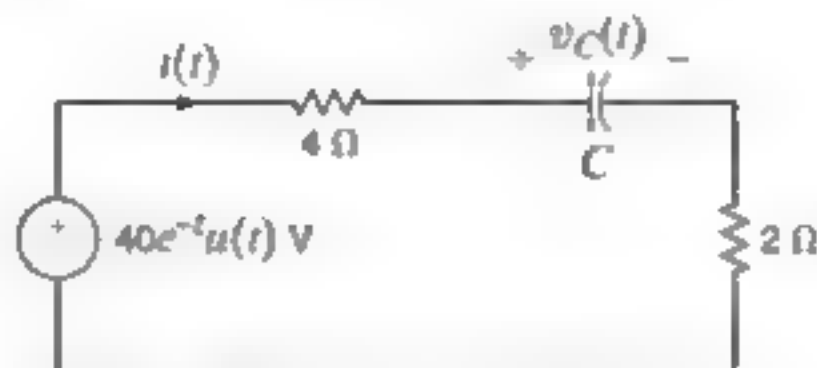


Figura P7.85

- 7.86** A equação diferencial que descreve o comportamento da corrente $i_x(t)$ de uma rede é

$$\frac{d^2 i_x(t)}{dt^2} + 6 \frac{di_x(t)}{dt} + 4 i_x(t) = 0$$

Determine

- a equação característica da rede,
- as frequências naturais da rede e
- a expressão para $i_x(t)$.

- 7.87** A tensão $v_1(t)$ em uma rede é definida pela equação

$$\frac{d^2 v_1(t)}{dt^2} + 4 \frac{dv_1(t)}{dt} + 5 v_1(t) = 0$$

Determine

- a equação característica da rede,
- as frequências naturais da rede e
- a expressão para $v_1(t)$.

- 7.88** A tensão $v_1(t)$ em uma rede é definida pela equação

$$\frac{d^2 v_1(t)}{dt^2} + 2 \left[\frac{dv_1(t)}{dt} \right] + 5 v_1(t) = 0$$

Determine

- a equação característica da rede,
- as frequências naturais da rede e
- a expressão para $v_1(t)$.

- 7.89** Um circuito RLC em paralelo possui um resistor $R = 1 \Omega$ e um indutor $L = 2$ H. Selecione o valor do capacitor de modo que o circuito seja criticamente amortecido.

- 7.90** Um circuito RLC em série possui um resistor $R = 2 \Omega$ e um capacitor $C = 1/2$ F. Selecione o valor do indutor de modo que o circuito seja criticamente amortecido.

- 7.91** No circuito criticamente amortecido mostrado na Fig. P7.91, as condições iniciais nos elementos armazenadores de energia são $i_L(0) = 2$ A e $v_C(0) = 5$ V. Determine a tensão $v(t)$.

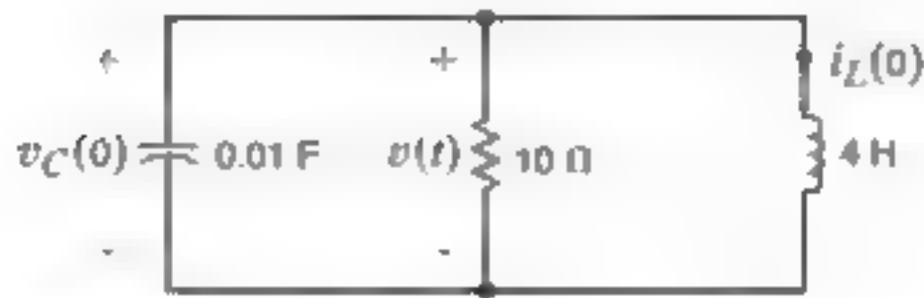


Figura P7.91

- 7.92** Determine a tensão $v(t)$ do circuito subamortecido mostrado na Fig. P7.92, considerando que as condições iniciais nos elementos armazenadores de energia são $i_L(0) = 1$ A e $v_C(0) = 10$ V.

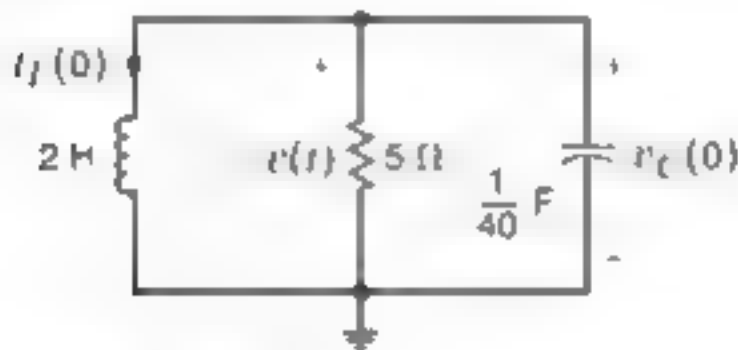


Figura P7.92

- 7.93** Determine a tensão $v_C(t)$ do circuito mostrado na Fig. P7.93, para $t > 0$.

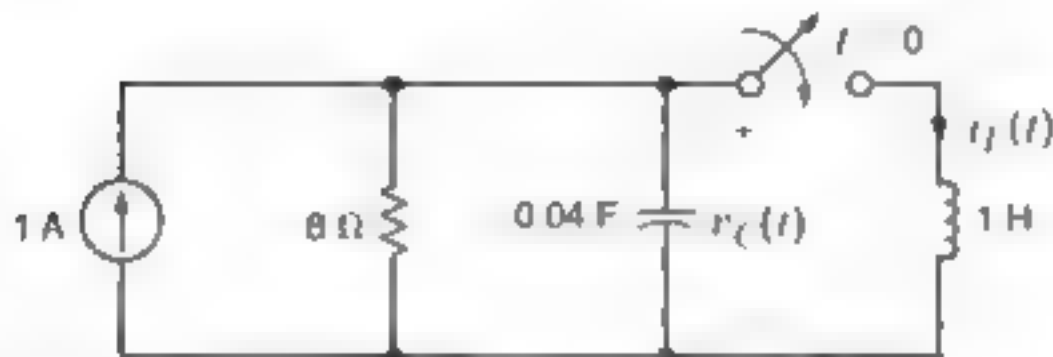


Figura P7.93

- 7.94** Determine a tensão $v_C(t)$ do circuito mostrado na Fig. P7.94, para $t > 0$, considerando que $v_C(0) = 0$.

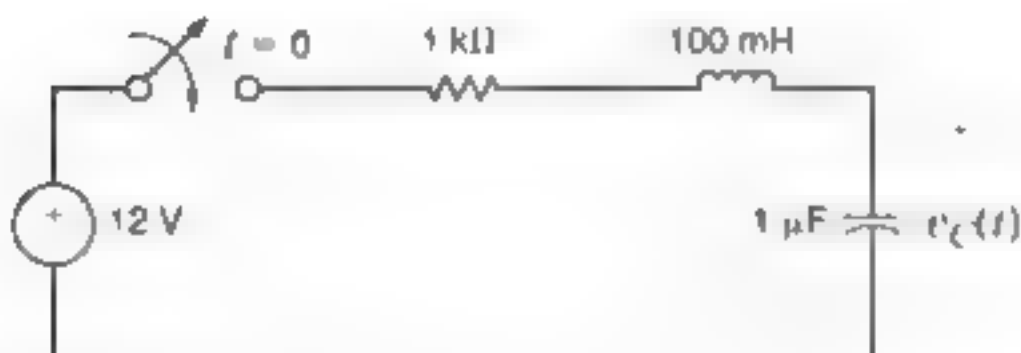


Figura P7.94

- 7.95** Determine a tensão $v_x(t)$, para $t > 0$, do circuito mostrado na Fig. P7.95 e represente graficamente a resposta incluindo o intervalo de tempo imediatamente anterior ao fechamento da chave.

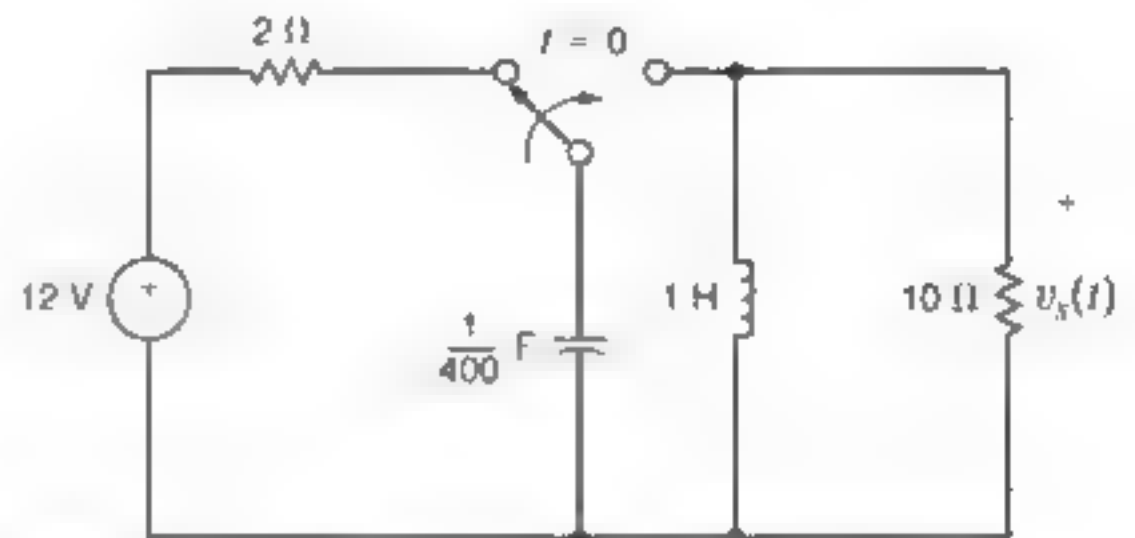


Figura P7.95

- 7.96** A chave do circuito mostrado na Fig. P7.96 fica fechada por um longo tempo e é aberta em $t = 0$. Determine a corrente $i(t)$ para $t > 0$.

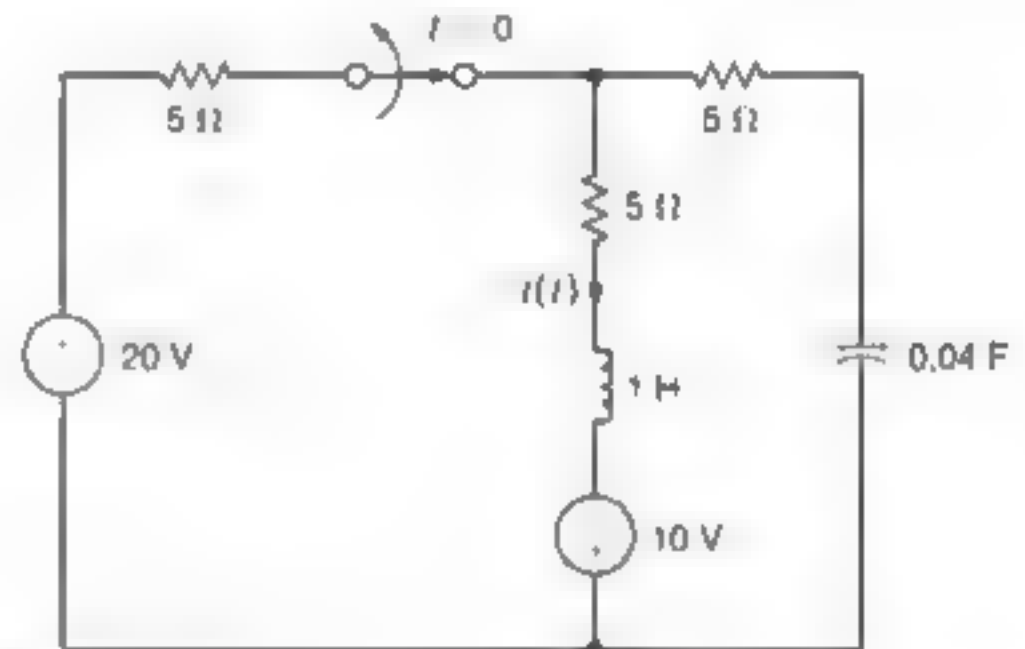


Figura P7.96

- 7.97** A chave do circuito mostrado na Fig. P7.97 fica fechada por um longo tempo e é aberta em $t = 0$. Determine a corrente $i(t)$ para $t > 0$.

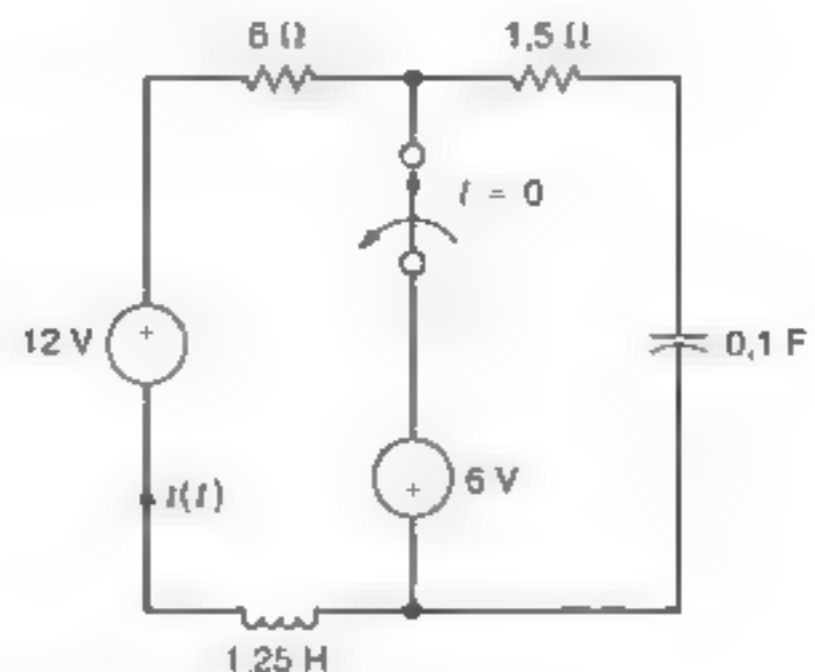


Figura P7.97

7.98 Determine a tensão $v_s(t)$, para $t > 0$, do circuito mostrado na Fig. P7.98 e represente graficamente a resposta incluindo o intervalo de tempo imediatamente anterior ao fechamento da chave.

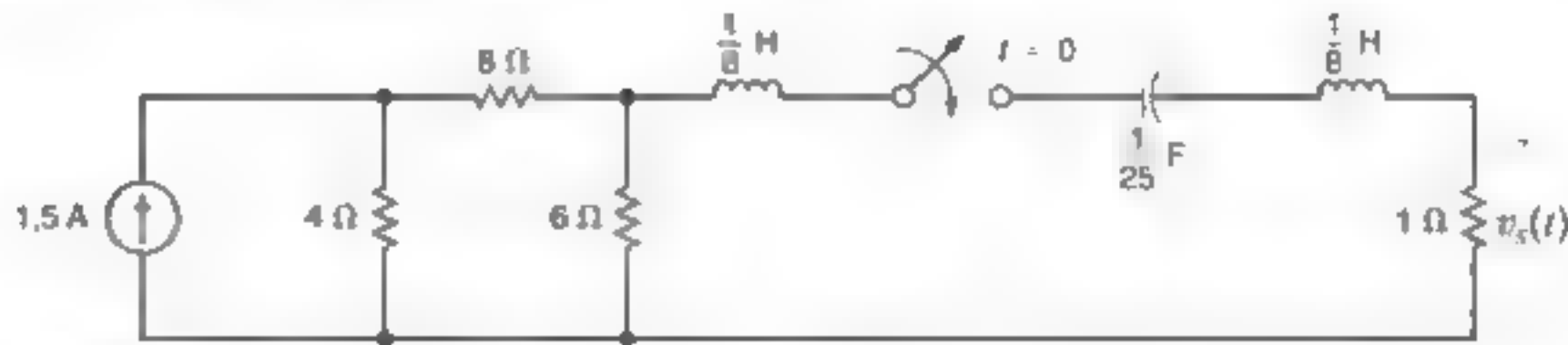


Figura P7.98

7.99 Determine a tensão $v(t)$ do circuito mostrado na Fig. P7.99, para $t > 0$.

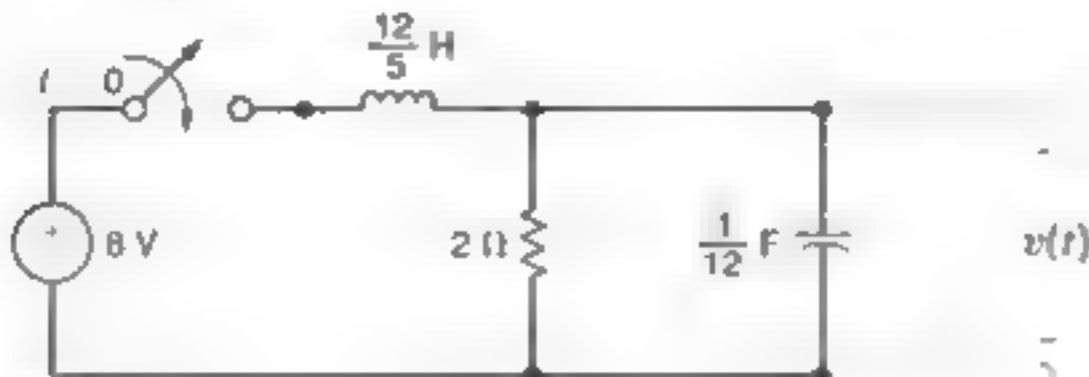


Figura P7.99

7.100 Determine a tensão $v_s(t)$, para $t > 0$, do circuito mostrado na Fig. P7.100 e represente graficamente a resposta incluindo o intervalo de tempo imediatamente anterior à movimentação da chave.

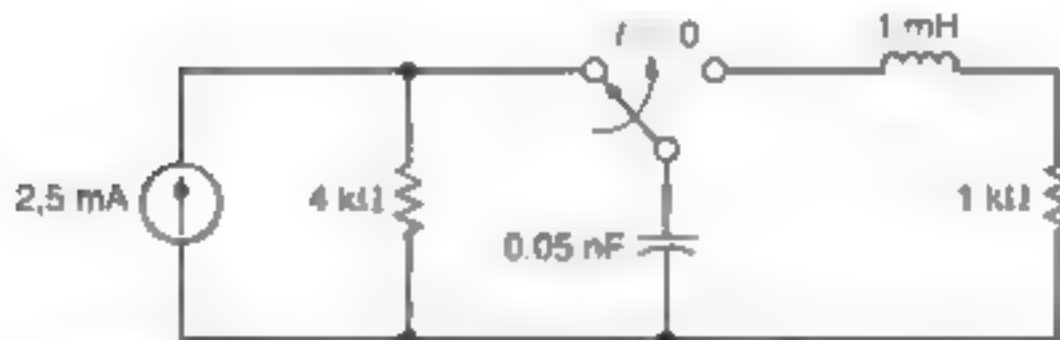


Figura P7.100

7.101 Determine a tensão $v_s(t)$, para $t > 0$, do circuito mostrado na Fig. P7.101 e represente graficamente a resposta incluindo o intervalo de tempo imediatamente anterior à movimentação da chave.

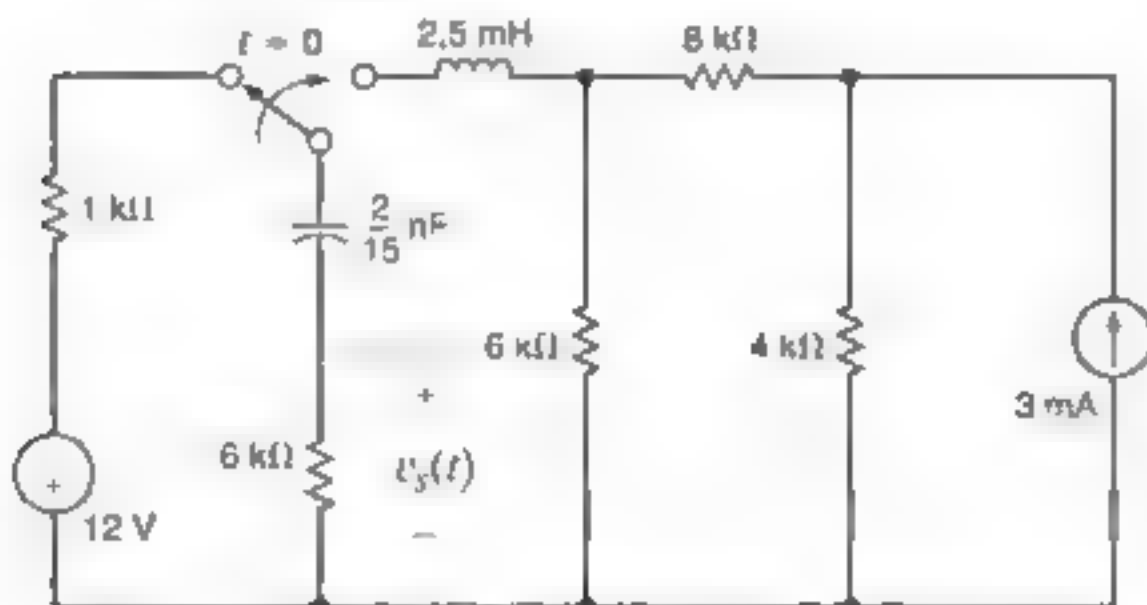


Figura P7.101

7.102 Determine a tensão $v_s(t)$, para $t > 0$, da rede mostrada na Fig. P7.102 e represente graficamente a resposta incluindo o intervalo de tempo imediatamente anterior à movimentação da chave.

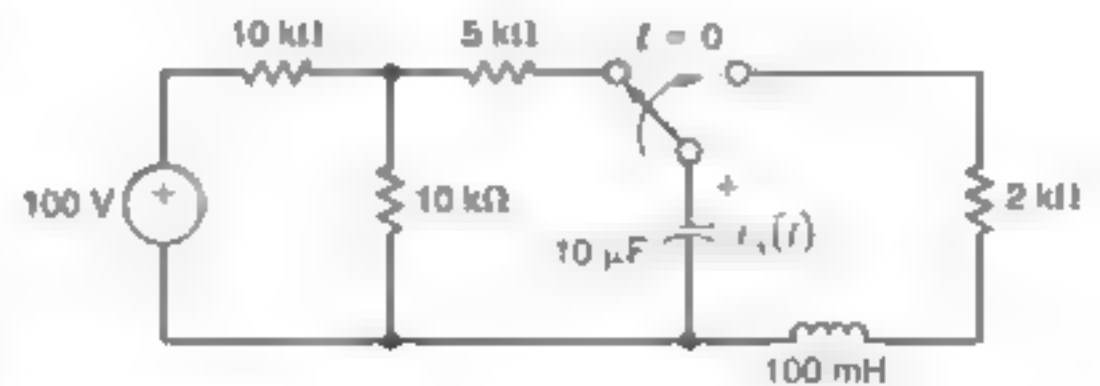


Figura P7.102

7.103 Determine a tensão $v_s(t)$, para $t > 0$, do circuito mostrado na Fig. P7.103 e represente graficamente a resposta incluindo o intervalo de tempo imediatamente anterior à movimentação da chave.

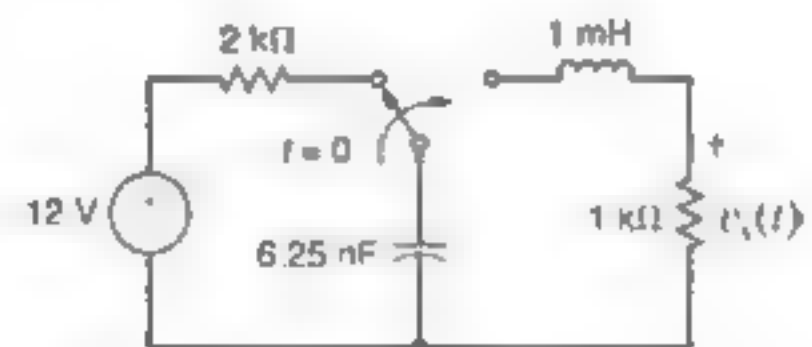


Figura P7.103

7.104 Projete um circuito RLC em paralelo com $R \geq 1 \text{ k}\Omega$ de modo que a equação característica seja

$$s^2 + 4 \times 10^7 s + 3 \times 10^{14} = 0$$

7.105 Projete um circuito RLC em paralelo com $R \geq 1 \text{ k}\Omega$ de modo que a equação característica seja

$$s^2 + 4 \times 10^7 s + 4 \times 10^{14} = 0$$

Resolva os demais problemas utilizando métodos computacionais

7.106 Dada a rede mostrada na Fig. P7.106, represente graficamente o comportamento da tensão $v_x(t)$ em um intervalo de tempo de 10 s, iniciando em $t = 0$. Utilize um espaçamento de 100 ms

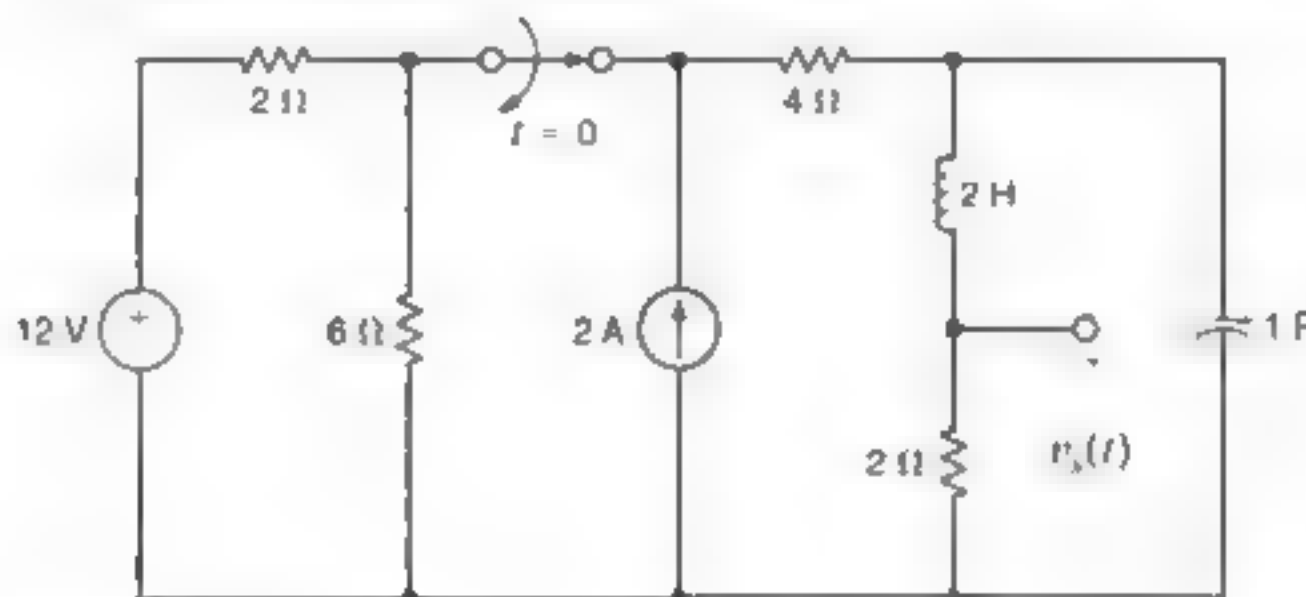


Figura P7.106

7.107 Dada a rede mostrada na Fig. P7.107, represente graficamente o comportamento da tensão $v_x(t)$ em um intervalo de tempo de 10 s, iniciando em $t = 0$. Utilize um espaçamento de 100 ms

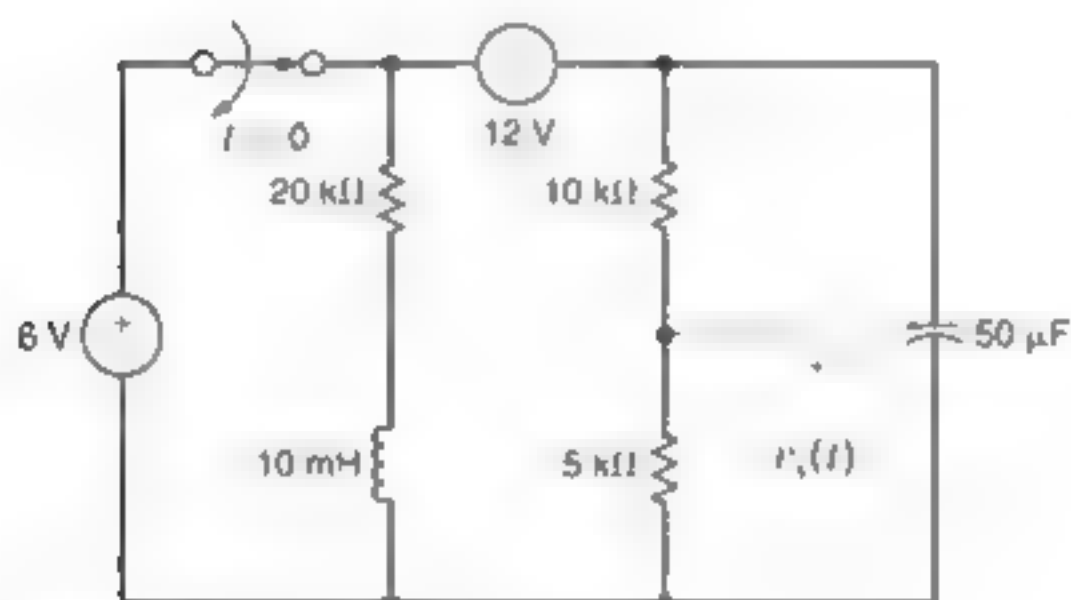
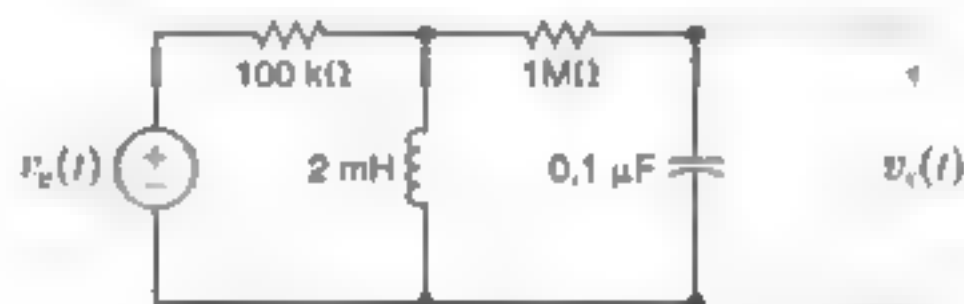
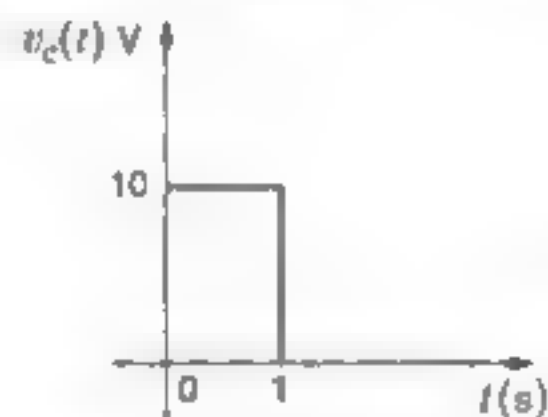


Figura P7.107

7.108 Dada a rede mostrada na Fig. P7.108a e a tensão de entrada mostrada na Fig. 7.108b, represente graficamente o comportamento da tensão $v_x(t)$ ao longo do intervalo $0 \leq t \leq 4$ s. Utilize um espaçamento de 20 ms.



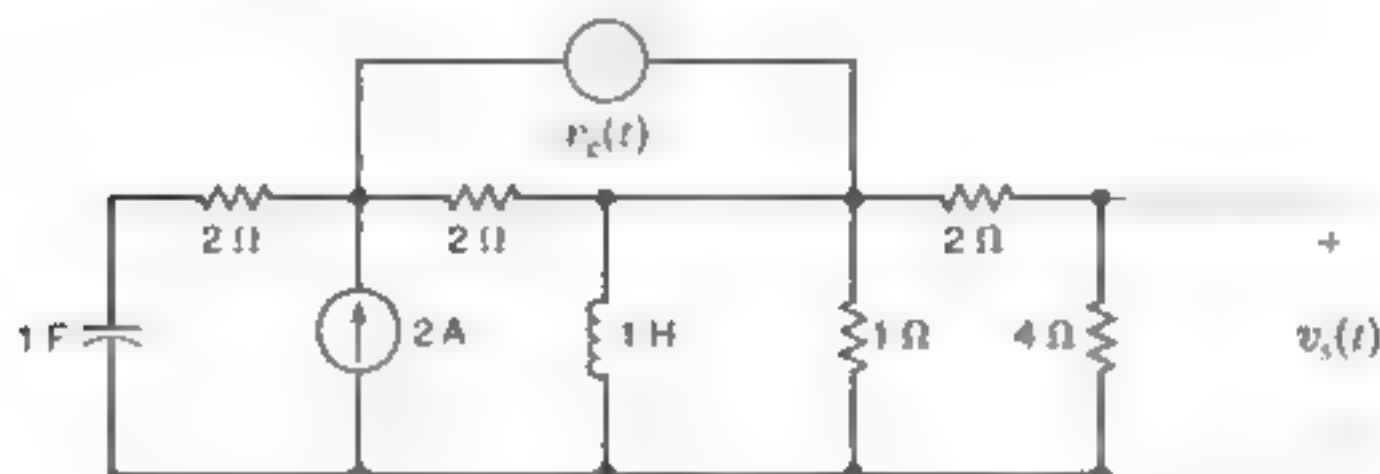
(a)



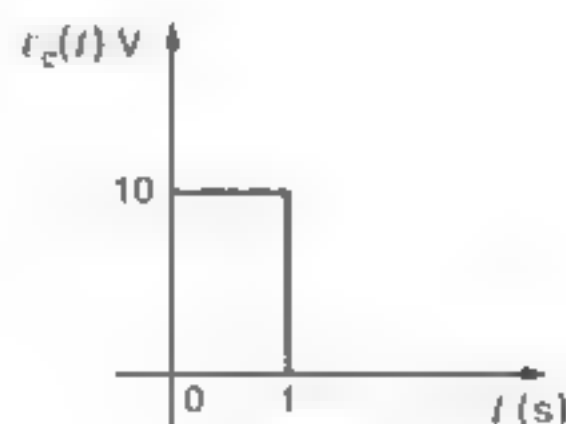
(b)

Figura P7.108

7.109 Dada a rede mostrada na Fig. P7.109a e a tensão de entrada mostrada na Fig. 7.109b, represente graficamente o comportamento da tensão $v_x(t)$ no intervalo $0 \leq t \leq 10$ s. Utilize um espaçamento de 100 ms.



(a)



(b)

Figura P7.109

- 7.110** Dada a rede mostrada na Fig. P7.110a e a tensão de entrada mostrada na Fig. 7.110b, represente graficamente o comportamento da tensão $v_o(t)$ no intervalo $0 \leq t \leq 4$ s. Utilize um espaçamento de 20 ms.

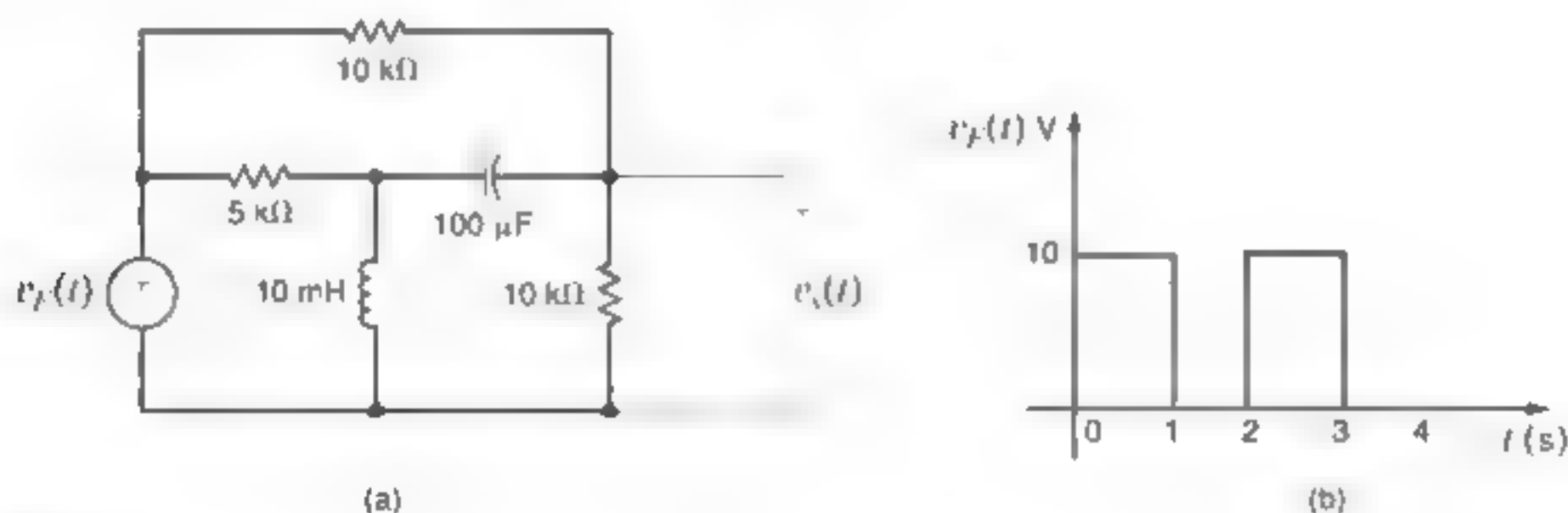


Figura P7.110

PROBLEMAS TÍPICOS DE EXAMES PROFISSIONAIS DE ENGENHARIA

- 7PEP-1** No circuito mostrado na Fig. 7PEP-1, a chave, que ficou fechada durante um longo tempo, abre em $t = 0$. Determine o valor da tensão no capacitor, $v_C(t)$ em $t = 2$ s.

- a. 0,936 V
- b. 0,756 V
- c. 0,264 V
- d. 0,462 V

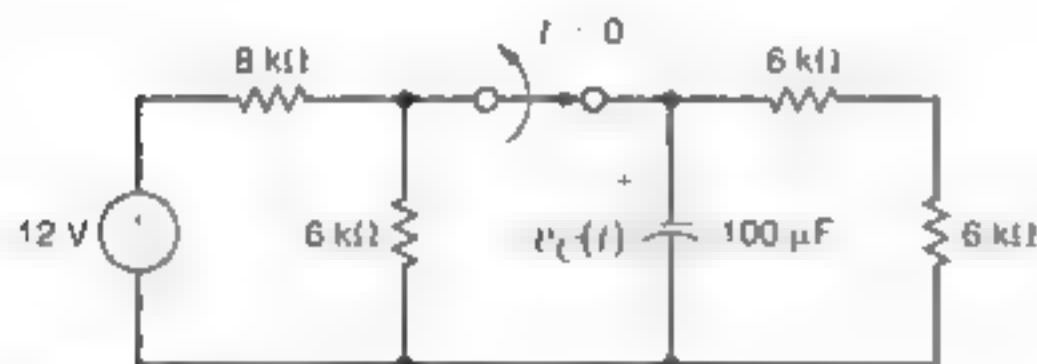


Figura 7PEP-1

- 7PEP-2** Na rede mostrada na Fig. 7PEP-2, a chave fecha em $t = 0$. Determine a tensão $v_o(t)$ em $t = 1$ s

- a. 5,62 V
- b. 1,57 V
- c. 4,25 V
- d. 3,79 V

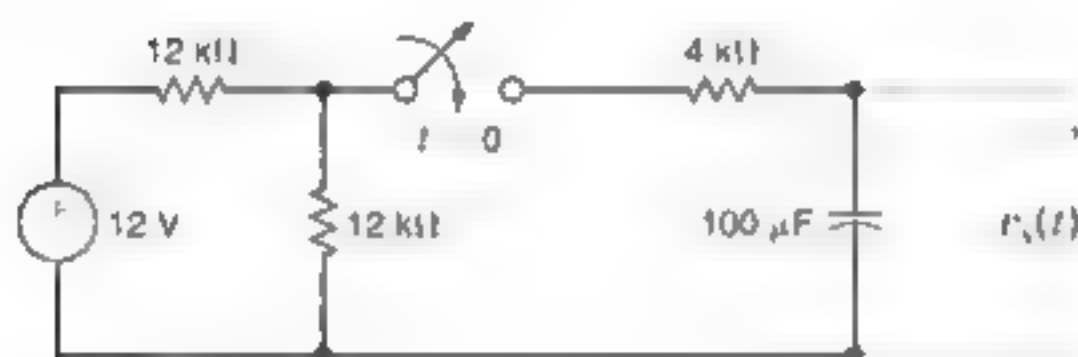


Figura 7PEP-2

7PEP-3 Admita que a chave da rede mostrada na Fig. 7PEP-3 tenha sido fechada por algum tempo. Em $t = 0$, a chave abre. Determine o tempo necessário para a tensão no capacitor apresentar um decaimento de metade de seu valor inicialmente carregado.

- a. 0,416 s
- b. 0,625 s
- c. 0,235 s
- d. 0,143 s

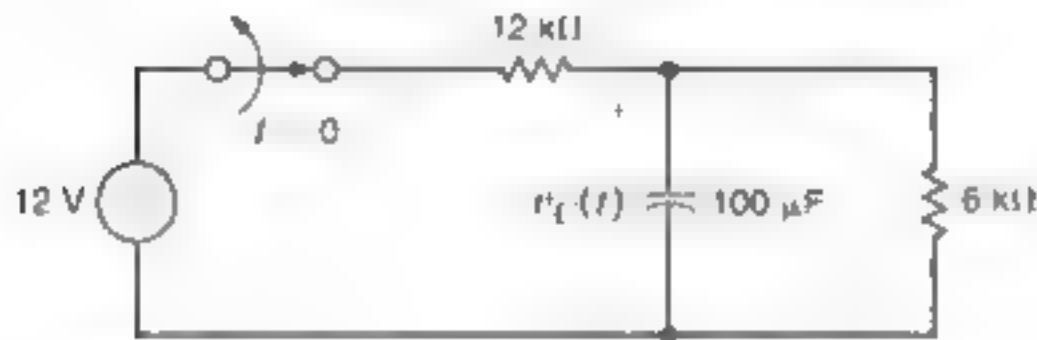


Figura 7PEP-3

7PEP-4 Determine a corrente $i_L(t)$ do indutor do circuito mostrado na Fig. 7PEP-4, para $t > 0$.

- a. $i_L(t) = 3 - 2e^{-t/6}$ A, $t > 0$
- b. $i_L(t) = 1 + 2e^{-2t/3}$ A, $t > 0$
- c. $i_L(t) = 6 - e^{-t/6}$ A, $t > 0$
- d. $i_L(t) = 3 - e^{-2t/3}$ A, $t > 0$

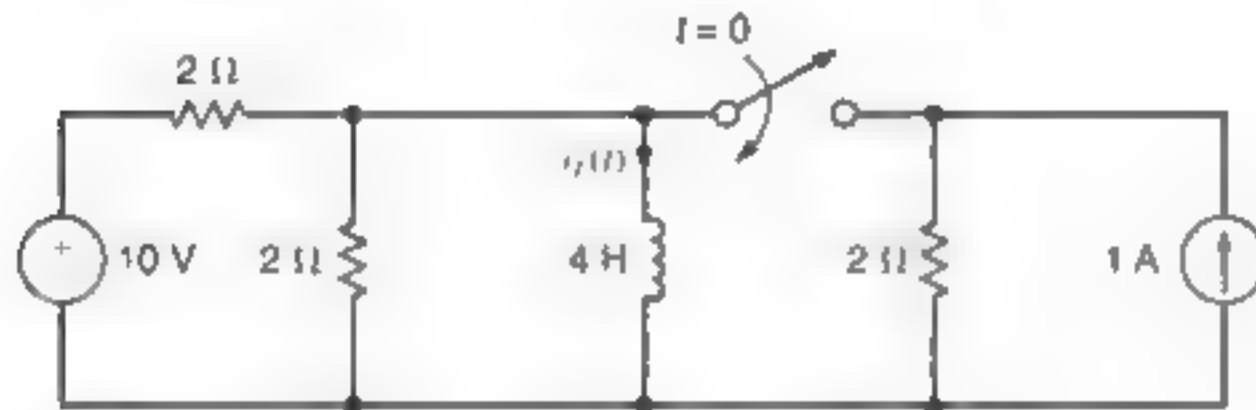


Figura 7PEP-4

7PEP-5 Determine a corrente $i_L(t)$ do indutor do circuito mostrado na Fig. 7PEP-5, para $t > 0$.

- a. $i_L(t) = 1,4 + 0,4e^{-4t/3}$ A, $t > 0$
- b. $i_L(t) = 1,2 + 0,4e^{-4t/3}$ A, $t > 0$
- c. $i_L(t) = 0,4 + 0,2e^{-4t/3}$ A, $t > 0$
- d. $i_L(t) = 2,4 + 0,6e^{-4t/3}$ A, $t > 0$

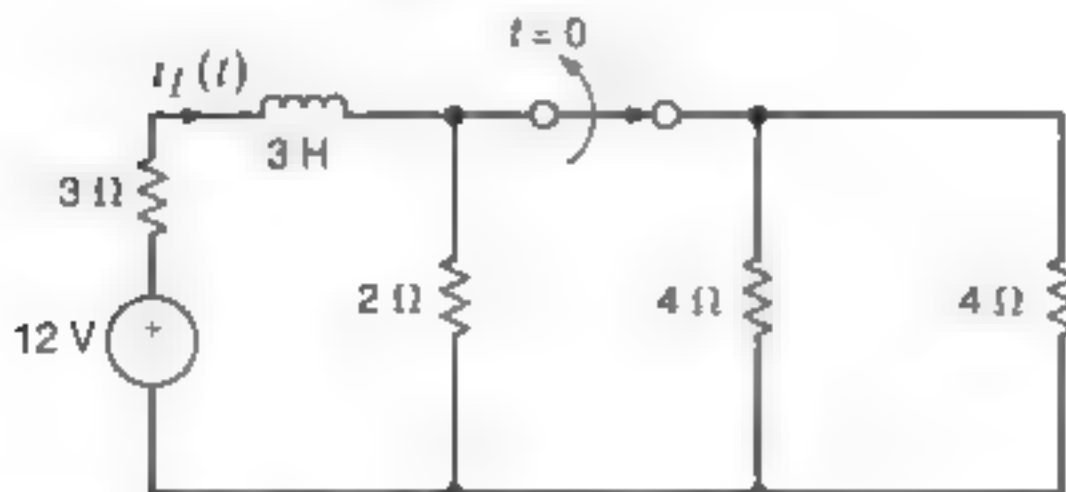


Figura 7PEP-5

ANÁLISE DO REGIME ESTACIONÁRIO DOS CIRCUITOS CA



TebNad/iStockphoto

AS METAS DE APRENDIZAGEM DESTE CAPÍTULO SÃO:

- Compreender as características básicas das funções senoidais
- Ser capaz de realizar transformações diretas e inversas com fasores, e desenhar diagramas com fasores
- Saber como calcular a impedância e a admitância dos elementos básicos de circuito: R , L e C
- Ser capaz de combinar impedâncias e admitâncias em série e em paralelo
- Ser capaz de desenhar o circuito no domínio da frequência para um circuito com uma fonte senoidal
- Saber como aplicar as técnicas de análise de circuitos aos circuitos no domínio da frequência

Redes de Transmissão de Potência Inteligentes O que torna uma rede de transmissão de potência inteligente? Ela permite uma comunicação de duas vias entre o gerador da energia elétrica e o consumidor. Para os provedores, uma rede inteligente fornece informações rápidas sobre a qualidade da energia e os alerta sobre a ocorrência de interrupções. Para os consumidores, ela promove o uso eficiente da eletricidade, informando-os sobre o período do dia em que a energia está mais disponível e é mais barata. O objetivo das redes inteligentes é interconectar uma nação por meio de um sistema eficiente de distribuição de energia, o qual inclui a energia renovável convencional e em larga escala.

As redes de transmissão de potência inteligentes alocam a energia disponível de modo a atender às prioridades mais altas. Os sensores sem fio, os programas e os microprocessadores são componentes de grande importância para essa rede digital inteligente. À medida que a demanda por eletricidade continua a crescer, uma rede inteligente que forneça a eletricidade de modo

mais eficiente também contribui no combate contra o aquecimento global.

Este capítulo introduz os sinais CA – tensões e correntes alternadas – os quais representam a forma da eletricidade que a rede de transmissão de energia fornece ao usuário final. Seu conhecimento em equações diferenciais, o qual foi necessário para a compreensão do capítulo anterior, novamente será de grande importância para a determinação das tensões e correntes do regime estacionário de circuitos lineares com fontes de potência descritas por formas de onda cossenoidais. Será introduzida uma notação compacta utilizando fasores, e você realizará cálculos envolvendo números complexos. A técnica de análise de circuitos CC estudada anteriormente poderá ser aplicada agora diretamente à análise dos circuitos CA utilizando os fasores. Os circuitos CA podem ser analisados utilizando qualquer procedimento básico – análise nodal, análise dos laços, superposição de efeitos e outros.

8.1 Senoides

Inicia-se a discussão das funções senoidais considerando a onda senoidal

$$x(t) = X_M \sin \omega t \quad 8.1$$

em que $x(t)$ poderia representar tanto a tensão $v(t)$ quanto a corrente $i(t)$. Nessa expressão, X_M é a *amplitude*, o *valor máximo* ou o valor de pico, ω é a *frequência angular* (em radianos) e ωt é o *argumento* da função seno. Um gráfico da função descrita pela Eq. (8.1) em função de seu argumento é mostrado na Fig. 8.1a. Naturalmente, a função se repete a cada 2π radianos. Essa condição é descrita matematicamente como $x(\omega t + 2\pi) = x(\omega t)$ ou, de forma geral, em função do período T como

$$x[\omega(t + T)] = x(\omega t) \quad 8.2$$

significando que a função possui no tempo $t + T$ o mesmo valor que no tempo t .

A forma de onda também pode ser traçada como função do tempo, conforme mostrado na Fig. 8.1b. Note que essa função completa um período a cada T segundos, ou, em outras palavras, em 1 segundo ela percorre $1/T$ períodos ou ciclos. O número de ciclos por segundo, denominado Hertz, é a frequência f , na qual

$$f = \frac{1}{T} \quad 8.3$$

[atenção]

A relação entre frequência e período.

Uma vez que $\omega T = 2\pi$, conforme mostrado na Fig. 8.1a, tem-se que

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f \quad 8.4$$

[atenção]

A relação entre frequência em Hertz, período e frequência em radianos por segundo.

que é a relação geral entre período em segundos, frequência em Hertz e frequência em radianos por segundo.

Agora que algumas das propriedades básicas de uma onda senoidal foram discutidas, considera-se a seguinte expressão geral para uma função senoidal.

$$x(t) = X_M \sin(\omega t + \theta) \quad 8.5$$

[atenção]

Definição de ângulo de fase em atraso.

Nesse caso, $(\omega t + \theta)$ é o argumento da função senoidal e o ângulo θ é chamado de *ângulo de fase*. Para efeito de comparação, um gráfico dessa função é mostrado na Fig. 8.2, juntamente com a função original da Eq. (8.1). Devido à presença do ângulo de fase, qualquer ponto da forma de onda $X_M \sin(\omega t + \theta)$ ocorre θ radianos mais cedo no tempo que o correspondente ponto na forma de onda $X_M \sin \omega t$. Portanto, diz-se que $X_M \sin \omega t$ está *atrasada* relativamente a $X_M \sin(\omega t + \theta)$ de θ radianos. Para uma situação mais geral, se

$$x_1(t) = X_{M1} \sin(\omega t + \theta)$$

e

$$x_2(t) = X_{M2} \sin(\omega t + \phi)$$

[atenção]

Definição de sinais em fase e fora de fase.

tem-se que $x_1(t)$ *adianta-se* de $x_2(t)$ de $\theta - \phi$ radianos e $x_2(t)$ *se atrasa* de $x_1(t)$ de $\theta - \phi$ radianos. Se $\theta = \phi$, as formas de onda são idênticas e as funções estarão *em fase*. Se $\theta \neq \phi$, as funções estarão *fora de fase*.

[atenção]

Ilustração gráfica da fase adiantada.

O ângulo de fase normalmente é expresso em graus e não em radianos e, portanto, neste ponto, as duas formas serão utilizadas indistintamente; isto é,

$$x(t) = X_M \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) = X_M \sin(\omega t + 90^\circ) \quad 8.6$$

A rigor, uma vez que ωt está em radianos, o ângulo de fase também deveria estar. Todavia, é comum e conveniente expressar a fase em graus e, portanto, essa será a prática utilizada neste texto.

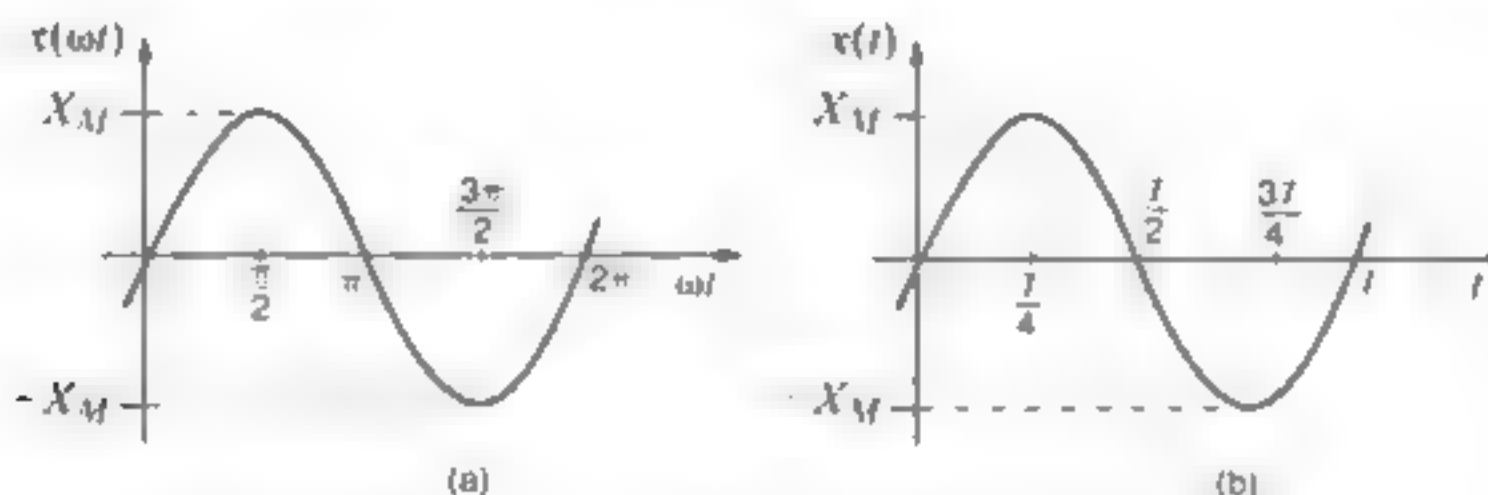


Figura 8.1 Gráfico de uma onda senoidal em função de ωt e de t .

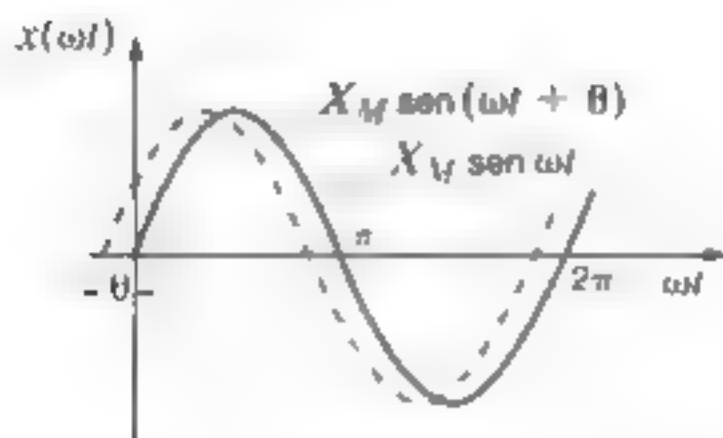


Figura 8.2 Ilustração gráfica de $X_M \sin(\omega t + \theta)$ adiantada de θ radianos relativamente a $X_M \sin \omega t$.

[atenção]

Uma observação muito importante.

Além disso, deve-se notar que a soma ao argumento de múltiplos inteiros de 2π radianos ou 360° não altera a função original. Essa condição pode ser facilmente mostrada matematicamente e é visivelmente evidente ao examinar-se a forma de onda, conforme mostrado na Fig. 8.2.

Embora a discussão aqui apresentada tenha sido centrada na função seno, poder-se-ia utilizar igualmente a função cosseno, uma vez que as duas formas de onda diferem apenas por um ângulo de fase; isto é,

$$\cos \omega t = \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) \quad 8.7$$

$$\sin \omega t = \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) \quad 8.8$$

[atenção]

Algumas identidades trigonométricas utilizadas nos cálculos do ângulo de fase.

Geralmente, há interesse na diferença de fase entre duas funções senoidais. Três condições devem ser atendidas antes de se poder determinar a diferença de fase: (1) as frequências das senoides devem ser idênticas, (2) as amplitudes das senoides devem ser positivas e, (3) ambas as senoides devem ser escritas como ondas senoidais ou cossenoidais. Uma vez neste formato, o ângulo de fase entre as funções pode ser calculado conforme discutido anteriormente. Duas outras identidades trigonométricas que normalmente são úteis na determinação do ângulo de fase são

$$\cos(\omega t) = \cos(\omega t \pm 180^\circ) \quad 8.9$$

$$-\sin(\omega t) = \sin(\omega t \pm 180^\circ) \quad 8.10$$

Finalmente, as relações para soma e diferença de ângulos das funções seno e cosseno podem ser úteis na manipulação das funções senoidais. Essas relações são

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$$

8.11

EXEMPLO 8.1

Deseja-se representar graficamente as formas de onda das seguintes funções:

- $v(t) = 1 \cos(\omega t + 45^\circ)$,
- $v(t) = 1 \cos(\omega t + 225^\circ)$, e
- $v(t) = 1 \cos(\omega t - 315^\circ)$.

SOLUÇÃO

A Fig. 8.3a mostra o gráfico da função $v(t) = 1 \cos \omega t$. A Fig. 8.3b apresenta o gráfico da função $v(t) = 1 \cos(\omega t + 45^\circ)$. A

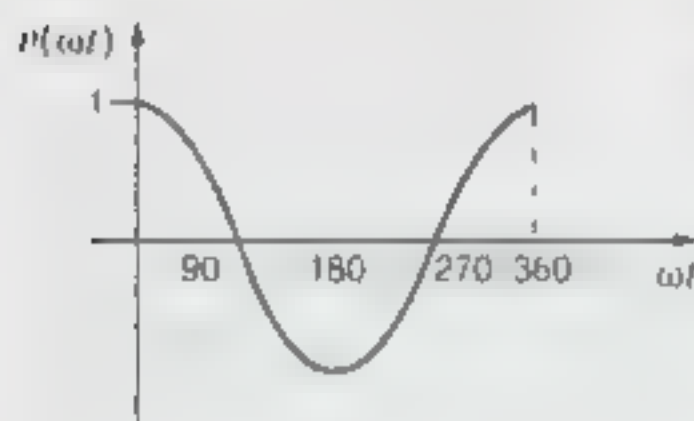
Fig. 8.3c mostra o gráfico da função $v(t) = 1 \cos(\omega t + 225^\circ)$. Note que, sendo

$$v(t) = 1 \cos(\omega t + 225^\circ) = 1 \cos(\omega t + 45^\circ + 180^\circ)$$

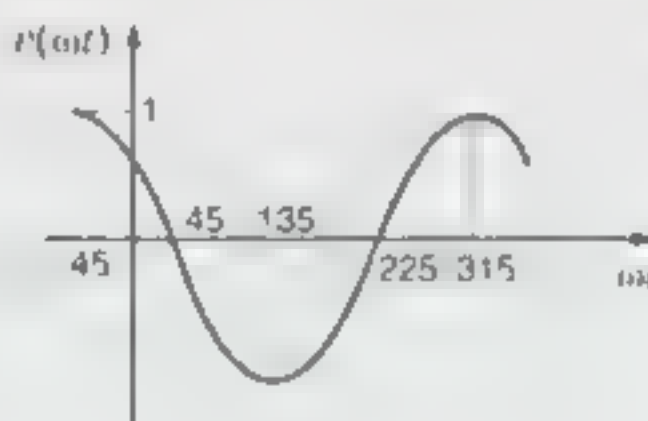
essa forma de onda está defasada de 180° em relação à forma de onda mostrada na Fig. 8.3b; isto é, $\cos(\omega t + 225^\circ) = -\cos(\omega t + 45^\circ)$, e a Fig. 8.3c é o negativo da Fig. 8.3b. Finalmente, uma vez que a função

$$\begin{aligned} v(t) &= 1 \cos(\omega t - 315^\circ) = 1 \cos(\omega t - 315^\circ + 360^\circ) \\ &= 1 \cos(\omega t + 45^\circ) \end{aligned}$$

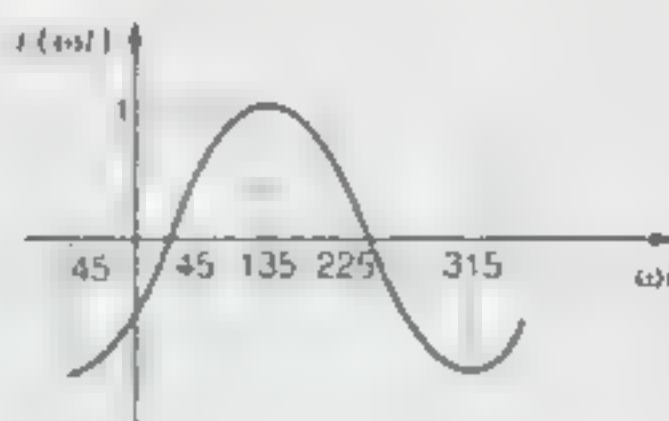
essa função é idêntica àquela mostrada na Fig. 8.3b.



(a)



(b)



(c)

Figura 8.3 Forma de onda do cosseno com diversos ângulos de fase.

EXEMPLO 8.2

Determine a frequência e o ângulo de fase entre as duas tensões $v_1(t) = 12 \sin(1000t + 60^\circ)$ V e $v_2(t) = -6 \cos(1000t + 30^\circ)$ V.

SOLUÇÃO

A frequência em Hertz (Hz) é dada pela expressão

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1000}{2\pi} = 159,2 \text{ Hz}$$

Utilizando a Eq. (8.9), a função $v_2(t)$ pode ser escrita como

$$v_2(t) = -6 \cos(\omega t + 30^\circ) = 6 \cos(\omega t + 210^\circ) \text{ V}$$

Logo, empregando a Eq. (8.7), obtém-se

$$6 \sin(\omega t + 300^\circ) \text{ V} = 6 \sin(\omega t - 60^\circ) \text{ V}$$

Agora que ambas as tensões de mesma frequência estão expressas como ondas senoidais com amplitudes positivas, o ângulo de fase entre $v_1(t)$ e $v_2(t)$ pode ser calculado como $60^\circ - (-60^\circ) = 120^\circ$; isto é, $v_1(t)$ está 120° adiantada relativamente a $v_2(t)$ ou $v_2(t)$ está 120° atrasada relativamente a $v_1(t)$.

Avaliação do Aprendizado

EB.1 Dada a tensão $v(t) = 120 \cos(314t + \pi/4)$ V, determine a frequência da tensão em Hertz e o ângulo de fase em graus.

RESPOSTA: $f = 50 \text{ Hz}$ e $\theta = 45^\circ$.

EB.2 Sabe-se que as correntes nos ramos de uma rede são expressas por

$$i_1(t) = 2 \sin(377t + 45^\circ) \text{ A}$$

$$i_2(t) = 0,5 \cos(377t + 10^\circ) \text{ A}$$

$$i_3(t) = -0,25 \sin(377t + 60^\circ) \text{ A}$$

Determine os ângulos de fase com os quais $i_1(t)$ se adianta de $i_2(t)$ e $i_1(t)$ de $i_3(t)$.

RESPOSTA: A corrente i_1 se adianta de i_2 em -55° e se adianta de i_3 em 165° .

8.2 Funções de Forçamento Senoidais e Complexas

Nos capítulos anteriores aplicou-se uma função forçamento constante à rede e obteve-se como resultado uma resposta estacionária também constante.

Analogamente, ao aplicar-se uma função forçamento senoidal a uma rede linear, as tensões e as correntes em regime estacionário associadas à rede serão também senoidais. Essa condição pode ser verificada pelas equações decorrentes da aplicação da LKT e da LKC. Por exemplo, se a tensão em um dos ramos for uma senoide de certa frequência, a tensão em outros ramos deve ser também uma senoide com a mesma frequência, uma vez que a LKT deve ser atendida ao longo de qualquer trajetória fechada. Isso significa que as soluções forçadas das equações diferenciais que descrevem a rede, sujeita a uma função força-

mento senoidal, são funções senoidais dependentes do tempo. Por exemplo, ao admitir-se que a função de entrada é uma tensão $v(t)$ e que como saída tem-se uma corrente $i(t)$, conforme mostrado na Fig. 8.4, então, se $v(t) = A \sin(\omega t + \theta)$, a forma de $i(t)$ será $i(t) = B \sin(\omega t + \phi)$. A questão crucial neste problema é que a forma da resposta é conhecida e, portanto, a solução envolve simplesmente a determinação dos valores dos dois parâmetros B e ϕ .

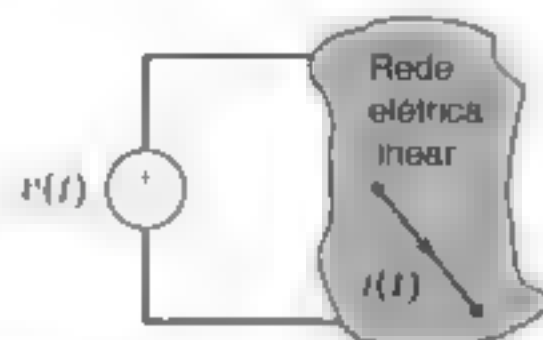


Figura 8.4 Resposta da corrente a uma tensão aplicada em uma rede elétrica.

EXEMPLO 8.3

Considere o circuito mostrado na Fig. 8.5. Seja a dedução da expressão da corrente $i(t)$ que flui pelos elementos do circuito.

SOLUÇÃO

A equação decorrente da LKT desse circuito é

$$L \frac{di(t)}{dt} + Ri(t) = V_M \cos \omega t$$

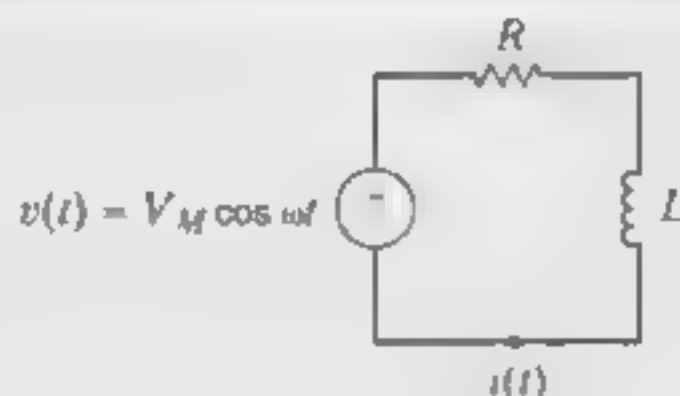


Figura 8.5 Circuito RL simples.

Uma vez que a função de forçamento na entrada é $V_M \cos \omega t$, admite-se que a componente da resposta forçada da corrente $i(t)$ seja da forma

$$i(t) = A \cos(\omega t + \phi)$$

que pode ser escrita utilizando a Eq. (8.11) como

$$\begin{aligned} i(t) &= A \cos \phi \cos \omega t - A \sin \phi \sin \omega t \\ &= A_1 \cos \omega t + A_2 \sin \omega t \end{aligned}$$

Note que esta é, conforme observado no Capítulo 7, da forma da função forçamento $\cos \omega t$ com derivada $\sin \omega t$. A substituição dessa forma da corrente $i(t)$ na equação diferencial precedente fornece

$$\begin{aligned} L \frac{d}{dt} (A_1 \cos \omega t + A_2 \sin \omega t) + R(A_1 \cos \omega t + A_2 \sin \omega t) \\ = V_M \cos \omega t \end{aligned}$$

O cálculo da derivada indicada resulta em

$$\begin{aligned} -A_1 \omega L \sin \omega t + A_2 \omega L \cos \omega t + RA_1 \cos \omega t + RA_2 \sin \omega t \\ = V_M \cos \omega t \end{aligned}$$

Igualando os coeficientes das funções seno e cosseno, obtém-se

$$\begin{aligned} A_1 \omega L + A_2 R &= 0 \\ A_1 R + A_2 \omega L &= V_M \end{aligned}$$

Isto é, duas equações simultâneas com duas incógnitas, A_1 e A_2 . A solução dessas duas equações para A_1 e A_2 resulta em

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{RV_M}{R^2 + \omega^2 L^2} \\ A_2 &= \frac{\omega L V_M}{R^2 + \omega^2 L^2} \end{aligned}$$

Portanto,

$$i(t) = \frac{RV_M}{R^2 + \omega^2 L^2} \cos \omega t + \frac{\omega L V_M}{R^2 + \omega^2 L^2} \sin \omega t$$

Este exemplo ilustra um ponto importante: a solução para um circuito com um único laço contendo um resistor e um indutor é bastante complexa quando comparada à solução de um circuito com um único laço contendo apenas dois resistores. Imagine, por um instante, o trabalho que seria necessário para resolver um circuito mais complexo utilizando o procedimento empregado no Exemplo 8.3. Para desenvolver o procedimento a ser utilizado neste caso, será estabelecida uma correspondência entre as funções senoidais dependentes do tempo e os números complexos. Em seguida, será mostrado que essa relação conduz a um conjunto de equações algébricas para a determinação das correntes e das tensões em uma rede (isto é, as correntes dos laços e as tensões dos nós) em que os coeficientes das variáveis são números complexos. Assim, uma vez mais, será verificado que a determinação das correntes ou tensões em um circuito pode ser obtida pela solução de um conjunto de equações algébricas; todavia, nesse caso, sua solução torna-se mais complicada pelo fato de as variáveis presentes nas equações possuírem coeficientes complexos e não apenas reais.

a qual, utilizando a última identidade na Eq. (8.11), pode ser escrita como

$$i(t) = A \cos(\omega t + \phi)$$

em que os parâmetros A e ϕ são determinados utilizando as seguintes expressões.

$$\begin{aligned} A \cos \phi &= \frac{RV_M}{R^2 + \omega^2 L^2} \\ A \sin \phi &= \frac{-\omega L V_M}{R^2 + \omega^2 L^2} \end{aligned}$$

Assim,

$$\tan \phi = \frac{A \sin \phi}{A \cos \phi} = -\frac{\omega L}{R}$$

e, portanto,

$$\phi = \tan^{-1} \left(-\frac{\omega L}{R} \right)$$

e, uma vez que

$$(A \cos \phi)^2 + (A \sin \phi)^2 = A^2 (\cos^2 \phi + \sin^2 \phi) = A^2$$

$$\begin{aligned} A^2 &= \frac{R^2 V_M^2}{(R^2 + \omega^2 L^2)^2} + \frac{(\omega L)^2 V_M^2}{(R^2 + \omega^2 L^2)^2} \\ &= \frac{V_M^2}{R^2 + \omega^2 L^2} \\ A &= \frac{V_M}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \end{aligned}$$

Assim, a expressão final para $i(t)$ fica

$$i(t) = \frac{V_M}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \cos \left(\omega t - \tan^{-1} \left(\frac{\omega L}{R} \right) \right)$$

Esta análise indica que o ângulo ϕ será nulo se $L = 0$ e, assim, $i(t)$ estará em fase com $v(t)$. Se $R = 0$, $\phi = -90^\circ$, e a corrente estará atrasada em 90° relativamente à tensão. Se o indutor L e o resistor R forem diferentes de zero, a corrente será atrasada relativamente à tensão de um ângulo entre 0° e 90° .

Para estabelecer uma relação entre as funções que variam com o tempo de forma harmônica e os números complexos, será utilizada a equação de Euler que, para os objetivos deste desenvolvimento, é escrita como

$$e^{j\omega t} = \cos \omega t + j \sin \omega t \quad 8.12$$

Essa função complexa possui uma parte real e uma parte imaginária, isto é,

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(e^{j\omega t}) &= \cos \omega t \\ \operatorname{Im}(e^{j\omega t}) &= \sin \omega t \end{aligned} \quad 8.13$$

em que $\operatorname{Re}(\cdot)$ e $\operatorname{Im}(\cdot)$ representam, respectivamente, a parte real e a parte imaginária da função entre parênteses. Lembre-se de que $j = \sqrt{-1}$.

Suponha, agora, que a fonte de tensão mostrada na Fig. 8.4 seja expressa por uma função forçamento na forma

$$v(t) = V_M e^{j\omega t} \quad 8.14$$

a qual, considerando a identidade de Euler, pode ser escrita como

$$v(t) = V_M \cos \omega t + jV_M \sin \omega t \quad 8.15$$

As partes real e imaginária dessa função podem, assim, ser facilmente identificadas. Observa-se essa função forçamento complexa como duas funções forçamento, uma real e uma imaginária. Assim, como consequência da linearidade, o princípio da superposição pode ser aplicado, fornecendo a resposta para a corrente do circuito, que pode ser escrita como

$$i(t) = I_M \cos(\omega t + \phi) + jI_M \sin(\omega t + \phi) \quad 8.16$$

em que $I_M \cos(\omega t + \phi)$ é a resposta devida à tensão $V_M \cos \omega t$ e $jI_M \sin(\omega t + \phi)$ é a resposta devida a $jV_M \sin \omega t$. Essa expressão

para a corrente, que contém um termo real e outro imaginário, pode ser escrita utilizando a equação de Euler como

$$i(t) = I_M e^{j(\omega t + \phi)} \quad 8.17$$

Pelas relações precedentes, conclui-se que, em vez de aplicar a função forçamento $V_M \cos \omega t$ e calcular a resposta $I_M \cos(\omega t + \phi)$, pode-se aplicar a função forçamento complexa $V_M e^{j\omega t}$ e calcular a resposta $I_M e^{j(\omega t + \phi)}$, cuja parte real é a resposta desejada $I_M \cos(\omega t + \phi)$. Embora esse procedimento possa, inicialmente, parecer mais complicado, este não é o caso. Esta é a técnica que permite a conversão da equação diferencial para uma equação algébrica, cuja solução é bem mais simples.

EXEMPLO 8.4

Seja, novamente, a determinação da corrente do circuito RL analisado no Exemplo 8.3. Entretanto, em vez de se aplicar uma tensão expressa por $V_M \cos \omega t$, essa mesma tensão aplicada será expressa por $V_M e^{j\omega t}$.

SOLUÇÃO

A resposta forçada será da forma

$$i(t) = I_M e^{j(\omega t + \phi)}$$

em que apenas a amplitude da corrente I_M e o ângulo ϕ são parâmetros incógnitos. Substituindo $v(t)$ e $i(t)$ na equação diferencial do circuito, obtém-se

$$RI_M e^{j(\omega t + \phi)} + L \frac{d}{dt} (I_M e^{j(\omega t + \phi)}) = V_M e^{j\omega t}$$

Calculando a derivada indicada, tem-se

$$RI_M e^{j(\omega t + \phi)} + j\omega LI_M e^{j(\omega t + \phi)} = V_M e^{j\omega t}$$

A divisão de cada termo da equação pelo fator comum $e^{j\omega t}$ fornece

$$RI_M e^{j\phi} + j\omega LI_M e^{j\phi} = V_M$$

que é uma equação algébrica com coeficientes complexos. Essa equação pode ser escrita como

$$I_M e^{j\phi} = \frac{V_M}{R + j\omega L}$$

Convertendo-se o lado direito dessa equação para uma forma exponencial ou polar, obtém-se a equação

$$I_M e^{j\phi} = \frac{V_M}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} e^{j \tan^{-1}(\omega L/R)}$$

[atenção]

Resumo das relações com números complexos:

$$x + jy = re^{j\theta}$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\theta = \tan^{-1} \frac{y}{x}$$

$$x = r \cos \theta$$

$$y = r \sin \theta$$

$$\frac{1}{e^{j\theta}} = e^{-j\theta}$$

(Uma rápida revisão sobre números complexos é fornecida no Apêndice para os leitores que necessitam rever suas habilidades nessa área.) A forma precedente indica claramente que a amplitude e a fase da corrente resultante podem ser expressas por

$$I_M = \frac{V_M}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}}$$

e

$$\phi = -\tan^{-1} \frac{\omega L}{R}$$

Todavia, uma vez que a função forçamento utilizada foi $V_M \cos \omega t$ e não $V_M e^{j\omega t}$, a resposta de fato é representada pela parte real da resposta complexa.

$$i(t) = I_M \cos(\omega t + \phi)$$

$$= \frac{V_M}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \cos \left(\omega t - \tan^{-1} \frac{\omega L}{R} \right)$$

Observe que essa expressão é idêntica àquela obtida no exemplo anterior através da solução da equação diferencial para a corrente $i(t)$.

8.3 Fasores

Admite-se novamente que a função forçamento para uma rede linear tenha a forma

$$v(t) = V_M e^{j\omega t}$$

Assim, cada tensão ou corrente em regime estacionário da rede terá a mesma forma e a mesma frequência ω ; por exemplo, uma corrente $i(t)$ será da forma $i(t) = I_M e^{j(\omega t + \phi)}$.

Conforme o desenvolvimento utilizado nas análises dos circuitos anteriores, simplesmente será observada a frequência e, em seguida, simplificar-se-á o fator $e^{j\omega t}$, uma vez que ele será

comum a cada termo das equações que descrevem o circuito. A simplificação do termo $e^{j\omega t}$ indica que cada tensão ou corrente pode ser completamente descrita por sua magnitude e sua fase. Por exemplo, uma tensão $v(t)$ pode ser escrita na forma exponencial como

$$v(t) = V_M \cos(\omega t + \theta) = \operatorname{Re}[V_M e^{j(\omega t + \theta)}] \quad 8.18$$

ou como um número complexo

$$v(t) = \operatorname{Re}(V_M / \theta e^{j\omega t}) \quad 8.19$$

Como está sendo utilizada uma função forçamento complexa, cuja parte real refere-se à resposta desejada, e considerando que todos os termos da equação contêm $e^{j\omega t}$, pode-se omitir a notação $\operatorname{Re}(\cdot)$ e $e^{j\omega t}$ e trabalhar apenas com o número complexo

EXEMPLO 8.5

Considere novamente o circuito RL apresentado no Exemplo 8.3. Seja a utilização do conceito dos fasores para a determinação da expressão referente à corrente do circuito.

SOLUÇÃO

A equação diferencial do circuito é

$$L \frac{di(t)}{dt} + Ri(t) = V_M \cos \omega t$$

A função forçamento pode ser substituída por uma função forçamento complexa expressa por $V e^{j\omega t}$, em que a notação por fasor fica $V = V_M / \underline{0^\circ}$. De modo análogo, a componente da resposta forçada da corrente $i(t)$ pode ser substituída por uma função complexa expressa como $I e^{j\omega t}$, e na forma de um fasor, $I = I_M / \phi$. A discussão realizada anteriormente mostrou que a solução da equação diferencial é a parte real da função representativa dessa corrente.

Utilizando a função forçamento complexa, a equação diferencial fica

V_M / θ . Essa representação complexa é normalmente chamada de *fasor*. Para efeito de diferenciação, os fasores serão escritos em **negrito**. De modo totalmente idêntico, uma tensão $v(t) = V_M \cos(\omega t + \theta) = \operatorname{Re}[V_M e^{j(\omega t + \theta)}]$ e uma corrente $i(t) = I_M \cos(\omega t + \phi) = \operatorname{Re}[I_M e^{j(\omega t + \phi)}]$ são escritas na forma de um fasor como $V = V_M / \theta$ e $I = I_M / \phi$, respectivamente. Note que é prática comum expressar os fasores com magnitudes positivas

[atenção]

Sendo $v(t) = V_M \cos(\omega t + \theta)$ e $i(t) = I_M \cos(\omega t + \phi)$, então, na notação por fasores

$$V = V_M / \underline{\theta}$$

e

$$I = I_M / \underline{\phi}$$

$$L \frac{d}{dt}(I e^{j\omega t}) + R I e^{j\omega t} = V e^{j\omega t}$$

$$j\omega L I e^{j\omega t} + R I e^{j\omega t} = V e^{j\omega t}$$

Note que $e^{j\omega t}$ é um fator comum e, conforme já foi indicado, pode ser simplificado, o que conduz à representação dos fasores; isto é,

$$j\omega L I + R I = V$$

Portanto,

$$I = \frac{V}{R + j\omega L} = \frac{V_M / \underline{0^\circ}}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2} \angle \tan^{-1} \frac{\omega L}{R}}$$

Assim,

$$i(t) = \frac{V_M}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \cos\left(\omega t - \tan^{-1} \frac{\omega L}{R}\right)$$

que, mais uma vez, é a função que foi obtida anteriormente.

[atenção]

A equação diferencial é reduzida a uma equação na notação de fasores.

As relações entre os fasores são definidas como “análise fasorial ou análise no domínio da frequência”. Essas relações são obtidas após o termo $e^{j\omega t}$ ser simplificado. Assim, um conjunto de equações diferenciais sujeito a funções forçamentos harmônicas no domínio do tempo é transformado em um conjunto de equações algébricas contendo números complexos no domínio da frequência. De fato, depara-se com a solução de um conjunto de equações algébricas para os fasores incógnitos. Os fasores são, então, simplesmente transformados novamente para o domínio do tempo, fornecendo a solução do conjunto original de equações diferenciais. Além disso, nota-se que a solução dos circuitos para o regime estacionário poderia ser relativamente simples se a equação dos fasores pudesse ser

escrita diretamente a partir da descrição do circuito. Na Seção 8.4, são apresentados os fundamentos para que isto possa ser feito.

Note que na discussão aqui apresentada admitiu-se tacitamente que as funções harmônicas possam ser representadas como fasores, com um ângulo de fase baseado em uma função cosseno. Todavia, se forem utilizadas funções senoidais, deverá ser empregada a relação apresentada na Eq. (8.7) de modo a se obter o ângulo de fase apropriado.

Resumindo, enquanto $v(t)$ representa uma tensão no domínio do tempo, o fasor V representa a tensão no domínio da frequência. O fasor contém apenas informações sobre a magnitude e a fase, e a frequência está implícita nessa representação. A

transformação do domínio do tempo para o domínio da frequência, bem como a transformação inversa, é mostrada na Tabela 8.1. Lembre-se de que o ângulo de fase é baseado em uma função cosseno e, portanto, se for utilizada uma função seno, um fator de defasagem de 90° deverá ser empregado, conforme mostrado na tabela.

TABELA 8.1 Representação por meio de fasores

DOMÍNIO DO TEMPO	DOMÍNIO DA FREQUÊNCIA
$A \cos(\omega t \pm \theta)$	$A \angle \pm \theta$
$A \sin(\omega t \pm \theta)$	$A \angle \pm \theta - 90^\circ$

Estratégia para Solução de Problemas

Análise por meio de fasores

Etapa 1. Utilizando os fasores, transforme um conjunto de equações diferenciais no domínio do tempo em um conjunto de equações algébricas no domínio da frequência.

Etapa 2. Resolva as equações algébricas para os fasores incógnitos.

Etapa 3. Transforme os fasores, agora conhecidos, de volta para o domínio do tempo.

Entretanto, se uma rede possui apenas fontes senoidais, não haverá necessidade de impor-se uma defasagem de 90° . Simplesmente realiza-se a análise normal utilizando os fasores e, assim, a parte *imaginária* da solução complexa variando com

o tempo será a resposta desejada. A utilização apenas de fontes cossenoidais gera uma resposta cossenoidal e o uso das fontes senoidais gera uma resposta também senoidal.

Avaliação do Aprendizado

E8.3 Converta as seguintes funções de tensão em fasores.

$$v_1(t) = 12 \cos(377t - 425^\circ) \text{ V}$$

$$v_2(t) = 18 \sin(2513t + 4,2^\circ) \text{ V}$$

RESPOSTAS:

$$\mathbf{V}_1 = 12 \angle -425^\circ \text{ V};$$

$$\mathbf{V}_2 = 18 \angle -85,8^\circ \text{ V}.$$

E8.4 Converta os seguintes fasores para o domínio do tempo considerando que a frequência seja de 400 Hz.

$$\mathbf{V}_1 = 10 \angle 20^\circ \text{ V}$$

$$\mathbf{V}_2 = 12 \angle -60^\circ \text{ V}$$

RESPOSTAS:

$$v_1(t) = 10 \cos(800\pi t + 20^\circ) \text{ V};$$

$$v_2(t) = 12 \cos(800\pi t - 60^\circ) \text{ V}.$$

8.4 Relações entre os Fasores dos Componentes de um Circuito

Conforme o procedimento adotado no desenvolvimento das técnicas necessárias para a análise do regime estacionário de circuitos sujeitos a funções forçamento harmônicas, pode-se, agora, estabelecer as relações fasoriais entre a tensão e a corrente dos três elementos passivos R , L e C .

No caso de um resistor, conforme mostrado na Fig. 8.6a, sabe-se que a relação tensão-corrente é

$$v(t) = Ri(t) \quad 8.20$$

A aplicação da tensão complexa $V_M e^{j(\omega t + \theta_v)}$ resulta na corrente complexa $I_M e^{j(\omega t + \theta_i)}$ e, portanto, a Eq. (8.20) fica

$$V_M e^{j(\omega t + \theta_v)} = RI_M e^{j(\omega t + \theta_i)} \quad 8.21$$

que reduz-se a

$$V_M e^{j\theta_v} = RI_M e^{j\theta_i}$$

[atenção]

A corrente e a tensão estão em fase

A Eq. (8.21) pode ser escrita na forma fasorial como

$$\mathbf{V} = R\mathbf{I} \quad 8.22$$

em que

$$\mathbf{V} = V_M e^{j\theta_v} = V_M \angle \theta_v \quad \text{e} \quad \mathbf{I} = I_M e^{j\theta_i} = I_M \angle \theta_i$$

Pela Eq. (8.21) vê-se que $\theta_v = \theta_i$ e, assim, a corrente e a tensão desse circuito estão *em fase*.

Historicamente, os números complexos têm sido representados por pontos em um gráfico no qual o eixo x representa o eixo real e o eixo y o eixo imaginário. O segmento de reta que une a origem ao ponto propicia uma representação conveniente da magnitude e do ângulo quando o número complexo é escrito na forma polar. Uma revisão do Apêndice indicará como esses números complexos ou segmentos de reta podem ser somados, subtraídos e assim por diante. Como os fasores são números complexos, é conveniente representar os fasores da tensão e da corrente graficamente na forma de segmentos

de reta. Um gráfico dos segmentos de reta representativos dos fasores é chamado de *diagrama de fasores*. Essa representação ilustrativa dos fasores fornece informações imediatas sobre a magnitude relativa de um fasor em relação ao outro, do ângulo entre dois fasores, e da posição relativa de um fasor relativamente ao outro (isto é, um avanço ou um atraso). Um diagrama fasor e a forma de onda harmônica do resistor são mostrados nas Figs. 8.6c e d, respectivamente. Um diagrama de fasores será construído para cada um dos demais elementos do circuito no restante dessa seção.

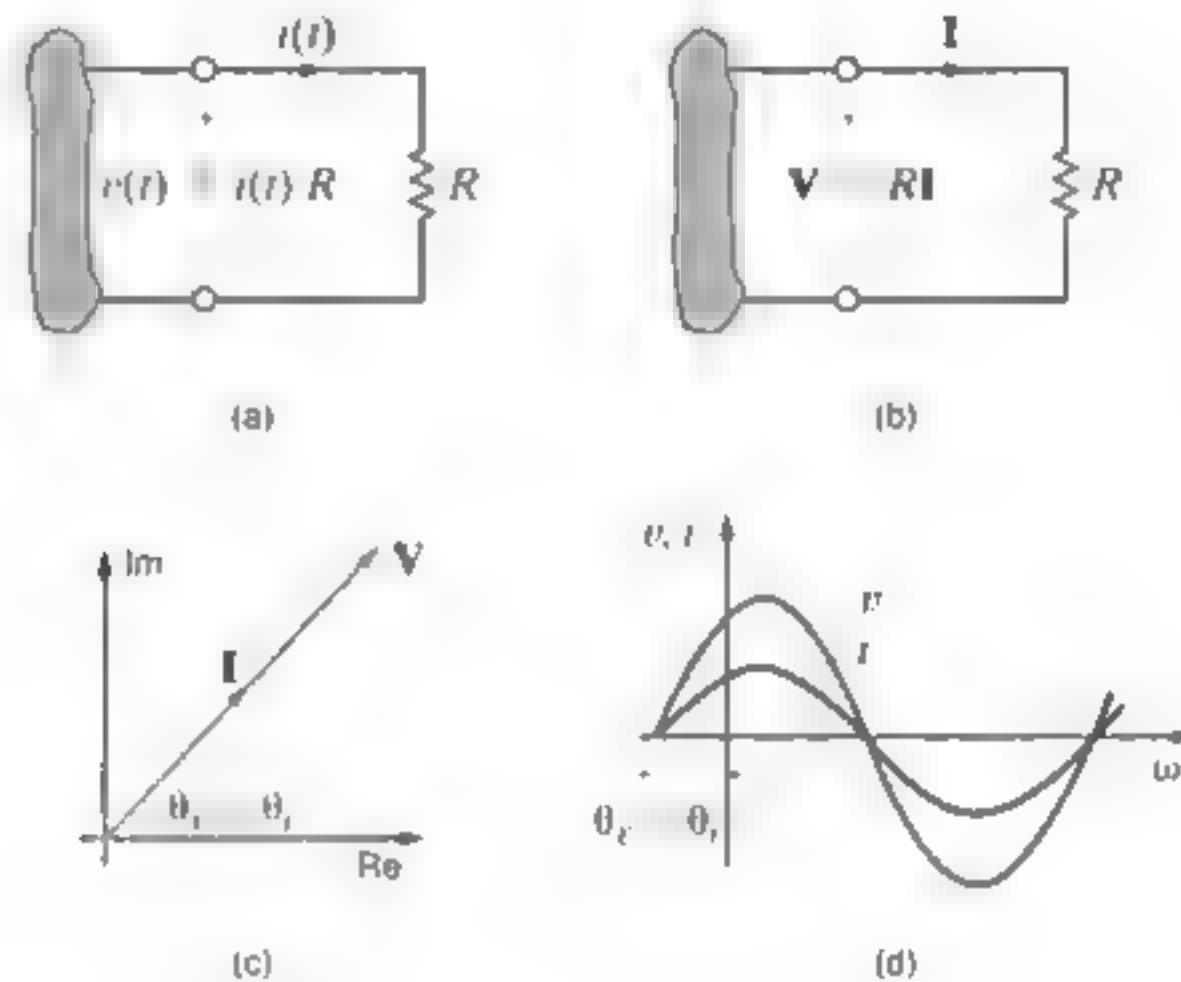


Figura 8.6 Relação tensão-corrente para um resistor.

EXEMPLO 8.6

Sendo a tensão $v(t) = 24 \cos(377t + 75^\circ)$ aplicada a um resistor de 6Ω , conforme mostrado na Fig. 8.6a, deseja-se determinar a corrente resultante.

SOLUÇÃO

Uma vez que o fasor da tensão é

$$\mathbf{V} = 24 \angle 75^\circ \text{ V}$$

o fasor da corrente, determinado pela Eq. (8.22), será

$$\mathbf{I} = \frac{24 \angle 75^\circ}{6} = 4 \angle 75^\circ \text{ A}$$

o qual, no domínio do tempo, fica

$$i(t) = 4 \cos(377t + 75^\circ) \text{ A}$$

Avaliação do Aprendizado

E8.5 Sabe-se que a corrente através de um resistor de 4Ω é $\mathbf{I} = 12 \angle 60^\circ \text{ A}$. Expresse a tensão entre os terminais do resistor em função do tempo considerando que a frequência da corrente seja de 4 kHz.

RESPOSTA: $v(t) = 48 \cos(8000\pi t + 60^\circ) \text{ V}$.

A relação tensão-corrente para um indutor, conforme o mostrado na Fig. 8.7a, é

$$v(t) = L \frac{di(t)}{dt} \quad 8.23$$

A substituição da tensão e da corrente complexas nessa equação fornece

$$V_M e^{j(\omega t + \theta_v)} = L \frac{d}{dt} I_M e^{j(\omega t + \theta_i)} \quad 8.24$$

que reduz-se a

$$V_M e^{j\theta_v} = j\omega L I_M e^{j\theta_i} \quad 8.25$$

[atenção]

O processo de derivada fornece uma função dependente da frequência.

A Eq. (8.24) na notação fasorial fica

$$\mathbf{V} = j\omega L \mathbf{I} \quad 8.25$$

Note que a equação diferencial no domínio do tempo (Eq. 8.23) foi convertida em uma equação algébrica com coeficientes complexos no domínio da frequência. Essa relação é mostrada na Fig. 8.7b. Uma vez que o operador imaginário $j = 1e^{j90^\circ} = 1/\underline{90^\circ} = \sqrt{-1}$, a Eq. (8.24) pode ser escrita

$$V_M e^{j\theta_v} = \omega L I_M e^{j\theta_i + j90^\circ} \quad 8.26$$

[atenção]

A tensão adianta a corrente ou a corrente atrasa a tensão.

Portanto, a tensão e a corrente estão *defasadas em 90°* e, em particular, a tensão adianta em 90° a corrente ou a corrente atrasa a tensão em 90°. O diagrama de fasores e a forma de onda harmônica para o circuito indutivo são mostrados nas Figs. 8.7c e d, respectivamente.

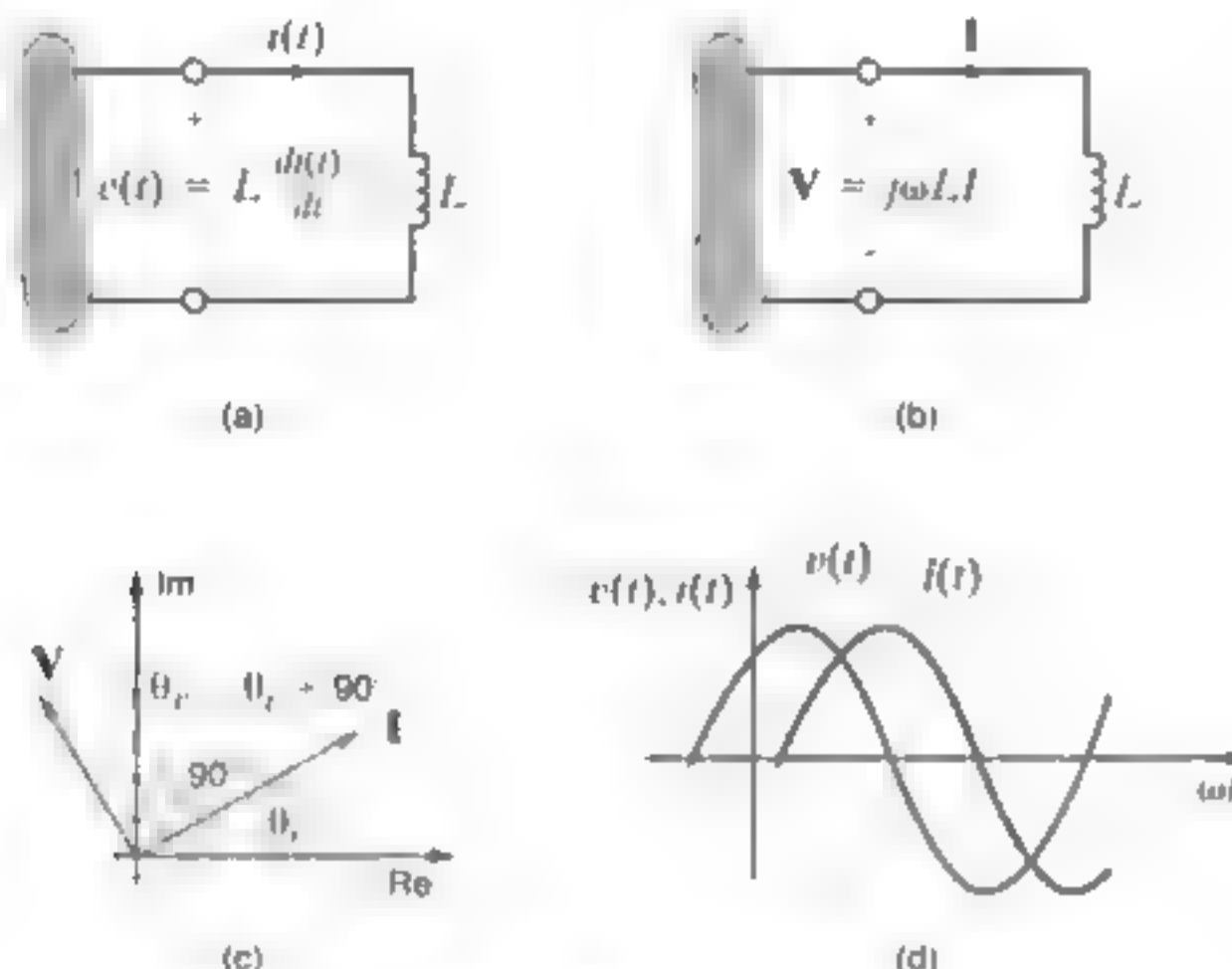


Figura 8.7 Relação tensão-corrente para um indutor.

EXEMPLO 8.7

A tensão $v(t) = 12 \cos(377t + 20^\circ)$ V é aplicada ao indutor de 20 mH, conforme mostrado na Fig. 8.7a. Determine a corrente resultante.

SOLUÇÃO

O fasor representativo da corrente é

$$\begin{aligned} \mathbf{I} &= \frac{\mathbf{V}}{j\omega L} = \frac{12 \angle 20^\circ}{\omega L \angle 90^\circ} \\ &= \frac{12 \angle 20^\circ}{(377)(20 \times 10^{-3}) \angle 90^\circ} \\ &= 1,59 \angle -70^\circ \text{ A} \end{aligned}$$

ou

$$i(t) = 1,59 \cos(377t - 70^\circ) \text{ A}$$

[atenção]

Aplicação de $\mathbf{V} = j\omega L \mathbf{I}$

$$\begin{aligned} x_1 \angle \theta_1 &= x_2 \angle \theta_2 \\ x_2 \angle \theta_2 &= x_1 \angle \theta_1 - 90^\circ \end{aligned}$$

Avaliação do Aprendizado

E8.6 A corrente em um indutor de 0,05 H é $i = 4 \cos 377t$ A. Se a frequência da corrente é de 60 Hz, determine a tensão entre os terminais do indutor.

RESPOSTA.

$$v_L(t) = 75,4 \cos(377t + 60^\circ) \text{ V.}$$

A relação tensão-corrente para o último elemento passivo, o capacitor, conforme mostrado na Fig. 8.8a, é

$$i(t) = C \frac{dv(t)}{dt} \quad 8.27$$

Utilizando novamente a notação em números complexos para representar a tensão e a corrente, obtém-se

$$I_M e^{j(\omega t + \theta_i)} = C \frac{d}{dt} V_M e^{j(\omega t + \theta_v)}$$

que reduz-se a

$$I_M e^{j\theta_i} = j\omega C V_M e^{j\theta_v} \quad 8.28$$

[atenção]

A corrente adianta a tensão ou a tensão atrasa a corrente.

Na notação através de fasores, essa equação fica

$$I = j\omega C V \quad 8.29$$

A Eq. (8.27), uma equação diferencial no domínio do tempo, foi transformada na Eq. (8.29), uma equação algébrica com coeficientes complexos no domínio da frequência. A relação fasorial é mostrada na Fig. 8.8b. A substituição de $j = 1e^{j90^\circ}$ na Eq. (8.28) fornece

$$I_M e^{j\theta_i} = \omega C V_M e^{j(\theta_v + 90^\circ)} \quad 8.30$$

Note que a tensão e a corrente estão *defasadas em 90°*. A Eq. (8.30) estabelece que a corrente adianta em 90° a tensão ou a tensão atrasa a corrente em 90°. O diagrama de fasores e a forma de onda harmônica do circuito capacitivo são mostrados nas Figs. 8.8c e d, respectivamente.

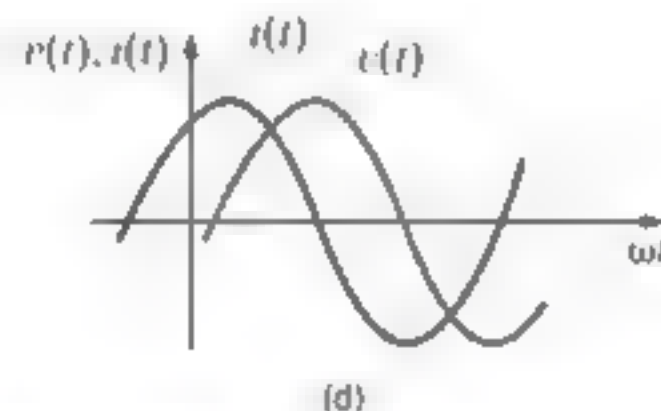
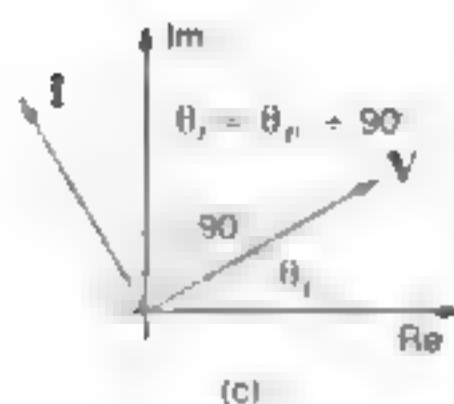
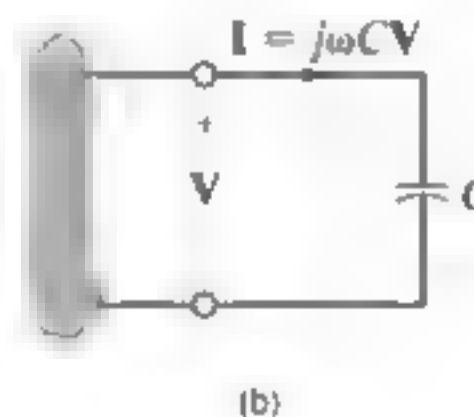
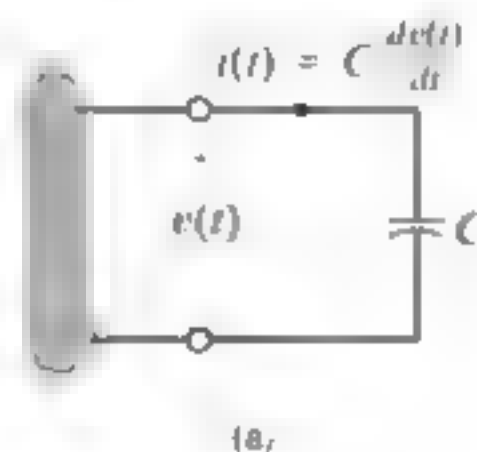


Figura 8.8 Relação tensão-corrente para um capacitor.

EXEMPLO 8.8

A tensão $v(t) = 100 \cos(314t + 15^\circ)$ V é aplicada aos terminais de um capacitor de 100 μF , conforme mostrado na Fig. 8.8a. Determine a corrente da rede.

SOLUÇÃO

O fasor representativo da corrente resultante é

$$\begin{aligned} I &= j\omega C (100 \angle 15^\circ) \\ &= (314)(100 \times 10^{-6} \angle 90^\circ)(100 \angle 15^\circ) \\ &= 3,14 \angle 105^\circ \text{ A} \end{aligned}$$

Portanto, a corrente escrita como uma função do tempo será

$$i(t) = 3,14 \cos(314t + 105^\circ) \text{ A}$$

[atenção]

Aplicação de $I = j\omega C V$

Avaliação do Aprendizado

EB.7 A corrente em um capacitor de $150 \mu\text{F}$ é $i = 3,6 \cos 145^\circ \text{ A}$. Se a frequência da corrente é de 60 Hz, determine a tensão entre os terminais do capacitor.

RESPOSTA: $v_C(t) = 63,66 \cos(377t - 235^\circ) \text{ V}$.

8.5 Impedância e Admitância

Examinou-se, no tópico anterior, o comportamento individual de cada um dos elementos de um circuito no domínio da frequência. Deseja-se, agora, tratar esses elementos passivos de circuito de forma mais geral. Define-se a *impedância* de entrada Z ou impedância motora para dois terminais de um circuito exatamente da mesma forma pela qual a resistência foi definida anteriormente. Posteriormente será analisado outro tipo de impedância, chamada de impedância de transferência.

A impedância é definida como a razão entre o fasor da tensão V e o fasor da corrente I :

$$Z = \frac{V}{I} \quad (8.31)$$

entre os dois terminais de um elemento. Essa relação segue a convenção passiva de sinais, conforme ilustrado na Fig. 8.9. Como V e I são complexos, a impedância Z será também um complexo e

$$Z = \frac{V_m \angle \theta_V}{I_m \angle \theta_I} = \frac{V_m}{I_m} \angle (\theta_V - \theta_I) = Z \angle \theta, \quad (8.32)$$

Como impedância Z , por definição, é obtida pela relação entre V e I , sua unidade é ohm. Assim, a impedância em um circuito CA é análoga à resistência em um circuito CC. Na forma cartesiana, a impedância é expressa como

$$Z(\omega) = R(\omega) + jX(\omega) \quad (8.33)$$

em que $R(\omega)$ é a componente real, ou resistiva e $X(\omega)$ é a componente imaginária, ou reativa. Em geral, refere-se a R como a resistência e a X como a reatância. É importante notar que R e X são funções reais de ω e, portanto, $Z(\omega)$ é dependente da frequência. A Eq. (8.33) indica claramente que a impedância Z é um número complexo; todavia, ela não é um fasor, uma vez que os fasores representam funções harmônicas.

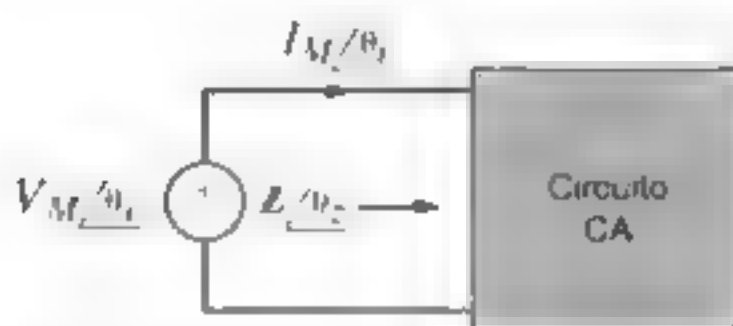


Figura 8.9 Relação geral para impedância.

As Eqs. (8.32) e (8.33) indicam que

$$Z \angle \theta_z = R + jX \quad (8.34)$$

Portanto,

$$Z = \sqrt{R^2 + X^2} \quad (8.35)$$

$$\theta = \tan^{-1} \frac{X}{R}$$

em que

$$R = Z \cos \theta$$

$$X = Z \sin \theta$$

Para os elementos passivos individualmente, a impedância pode ser expressa conforme indicado na Tabela 8.2. Entretanto, da mesma forma que foi vantajoso saber como determinar a resistência equivalente nos circuitos CC, deseja-se saber como determinar a impedância equivalente nos circuitos CA.

TABELA 8.2 Impedância dos elementos passivos

ELEMENTO PASSIVO	IMPEDÂNCIA
R	$Z = R$
L	$Z = j\omega L = jX_L = \omega L \angle 90^\circ, X_L = \omega L$
C	$Z = \frac{1}{j\omega C} = -jX_C = \frac{1}{\omega C} \angle -90^\circ, X_C = \frac{1}{\omega C}$

As leis de Kirchhoff (LKC e LKT) são também válidas no domínio da frequência. Pode-se utilizar desse fato, conforme empregado para os resistores no Capítulo 2, para mostrar que as impedâncias podem ser combinadas utilizando as mesmas regras que foram estabelecidas para a combinação de resistores. Isto é, se $Z_1, Z_2, Z_3, \dots, Z_n$ forem conectadas em série, a impedância equivalente Z_F será

$$Z_F = Z_1 + Z_2 + Z_3 + \dots + Z_n \quad (8.36)$$

e, se $Z_1, Z_2, Z_3, \dots, Z_n$ forem conectadas em paralelo, a impedância equivalente será expressa por

$$\frac{1}{Z_F} = \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} + \frac{1}{Z_3} + \dots + \frac{1}{Z_n} \quad (8.37)$$

EXEMPLO 8.9

Determine a impedância equivalente da rede mostrada na Fig. 8.10 se a frequência do sinal de entrada é $f = 60$ Hz. Calcule, em seguida, a corrente $i(t)$ considerando que a fonte de tensão é $v(t) = 50 \cos(\omega t + 30^\circ)$ V. Finalmente, calcule a impedância equivalente considerando que a frequência é $f = 400$ Hz.

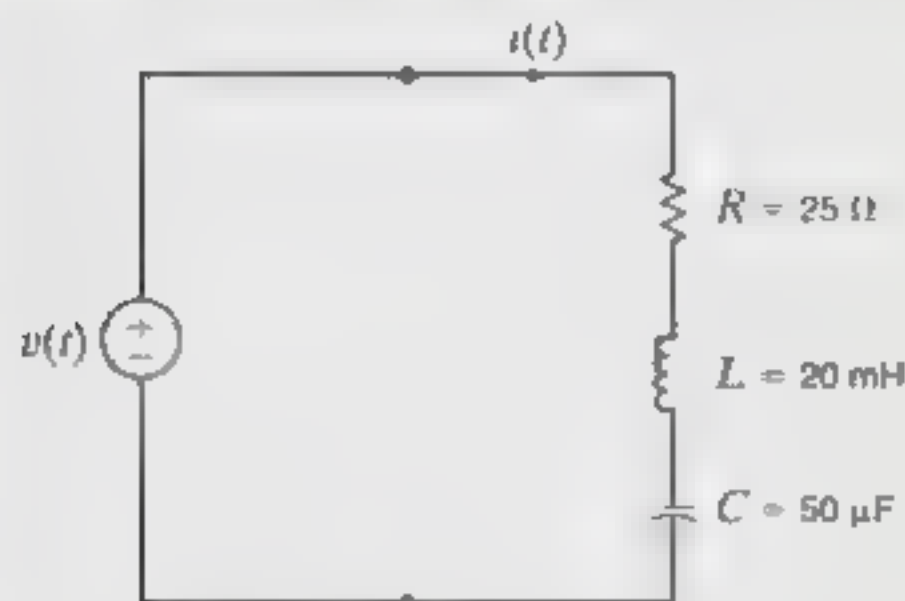


Figura 8.10 Circuito CA em série.

SOLUÇÃO

Individualmente, as impedâncias dos elementos a uma frequência de 60 Hz são

$$Z_R = 25 \Omega$$

$$Z_L = j\omega L = j(2\pi \times 60)(20 \times 10^{-3}) = j7,54 \Omega$$

$$Z_C = \frac{-j}{\omega C} = \frac{-j}{(2\pi \times 60)(50 \times 10^{-6})} = -j53,05 \Omega$$

Como os elementos estão em série,

$$Z = Z_R + Z_L + Z_C \\ 25 + j45,51 \Omega$$

A corrente no circuito é dada por

$$\mathbf{I} = \frac{\mathbf{V}}{\mathbf{Z}} = \frac{50 \angle 30^\circ}{25 + j45,51} = \frac{50 \angle 30^\circ}{51,93 \angle 61,22^\circ} = 0,96 \angle 91,22^\circ \text{ A}$$

ou, no domínio do tempo, $i(t) = 0,96 \cos(377t + 91,22^\circ)$ A.

Com a frequência de 400 Hz, a impedância de cada elemento será

$$Z_R = 25 \Omega$$

$$Z_L = j\omega L = j50,27 \Omega$$

$$Z_C = \frac{-j}{\omega C} = -j7,96 \Omega$$

Assim, a impedância total será

$$Z = 25 + j42,31 = 49,14 \angle 59,42^\circ \Omega$$

Na frequência $f = 60$ Hz, a reatância do circuito é capacitiva; isto é, se a impedância for escrita como $R + jX$, $X < 0$. Entretanto, com $f = 400$ Hz, a reatância será indutiva, uma vez que $X > 0$.

Estratégia para Solução de Problemas

Análise Básica de Circuitos CA

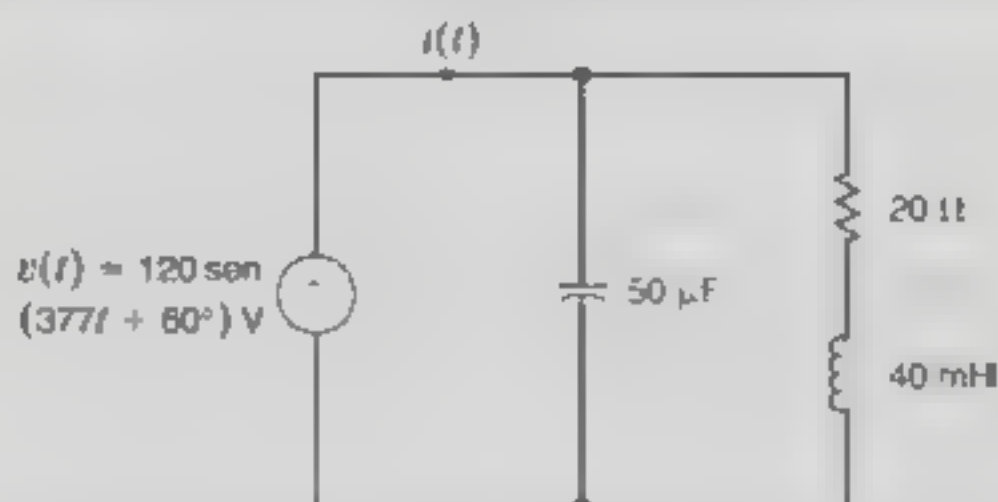
Etapa 1. Expresse a tensão $v(t)$ como um fasor e determine a impedância de cada elemento passivo.

Etapa 2. Combine as impedâncias e resolva para o fasor \mathbf{I} .

Etapa 3. Converta o fasor \mathbf{I} para $i(t)$.

Avaliação do Aprendizado

E8.8 Determine a corrente $i(t)$ da rede mostrada na Fig. E8.8.



RESPOSTA: $i(t) = 3,88 \cos(377t - 39,2^\circ)$ A.

Figura E8.8

Outra grandeza muito útil na análise dos circuitos CA é a *admitância* de entrada entre dois terminais, que é, por definição, igual à inversa da impedância; isto é,

$$Y = \frac{I}{Z} = \frac{I}{V} \quad 8.38$$

A admitância Y é expressa em siemens e essa grandeza é análoga à condutância nos circuitos CC resistivos. Uma vez que Z é um número complexo, Y será também um número complexo, e pode ser expresso por

$$Y = Y_m \angle \theta_Y \quad 8.39$$

o qual é escrito na forma cartesiana como

$$Y = G + jB \quad 8.40$$

em que G e B são chamadas de *condutância* e *susceptância*, respectivamente. Considerando a relação existente entre Y e Z , pode-se expressar as componentes de uma grandeza como função das componentes da outra. Pela expressão

$$G + jB = \frac{1}{R + jX} \quad 8.41$$

pode-se mostrar que

$$G = \frac{R}{R^2 + X^2} \quad B = \frac{-X}{R^2 + X^2} \quad 8.42$$

e, de modo similar, pode-se mostrar que

$$R = \frac{G}{G^2 + B^2} \quad X = \frac{-B}{G^2 + B^2} \quad 8.43$$

[atenção]

Procedimento para a obtenção do inverso de um número complexo:

$$\frac{1}{R + jX} = \frac{R - jX}{(R + jX)(R - jX)} = \frac{R - jX}{R^2 + X^2}$$

É muito importante notar que, em geral, R e G *não* são inversos um do outro. O mesmo pode ser concluído sobre X e B . O caso em que o circuito é apenas resistivo é uma exceção. No caso dos circuitos puramente resistivos, as grandezas são o negativo dos inversos uma da outra.

Individualmente, a admitância de cada componente passivo é expressa por

$$\begin{aligned} Y_R &= \frac{1}{R} = G \\ Y_L &= \frac{1}{j\omega L} = -\frac{j}{\omega L} \quad 8.44 \\ Y_C &= j\omega C = \omega C \angle 90^\circ \end{aligned}$$

Mais uma vez, como a LKC e a LKT são válidas no domínio da frequência, pode-se mostrar, utilizando o mesmo procedimento adotado no Capítulo 2 para a condutância nos circuitos resistivos, que as regras para a combinação de admitâncias são similares àsquelas adotadas para a combinação de condutâncias; isto é, se $Y_1, Y_2, Y_3, \dots, Y_n$ forem conectadas em paralelo, a admitância equivalente será

$$Y_p = Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n \quad 8.45$$

e se $Y_1, Y_2, Y_3, \dots, Y_n$ forem conectadas em série, a admitância equivalente será

$$\frac{1}{Y_s} = \frac{1}{Y_1} + \frac{1}{Y_2} + \dots + \frac{1}{Y_n} \quad 8.46$$

EXEMPLO 8.10

Calcule a admitância equivalente Y_p para a rede mostrada na Fig. 8.11 e utilize-a na determinação da corrente I considerando que $V_s = 60 \angle 45^\circ$ V.

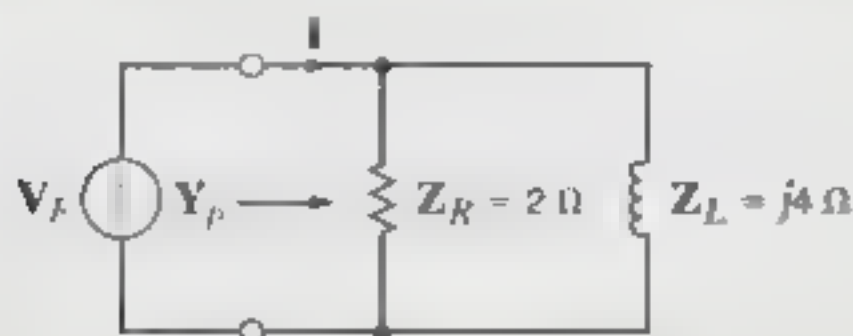


Figura 8.11 Exemplo de circuito com componentes em paralelo.

SOLUÇÃO

Pela Fig. 8.11, nota-se que

$$Y_R = \frac{1}{Z_R} = \frac{1}{2} \text{ S}$$

$$Y_L = \frac{1}{Z_L} = \frac{1}{j4} \text{ S}$$

Portanto,

$$Y_p = \frac{1}{2} - j\frac{1}{4} \text{ S}$$

e, assim,

$$\begin{aligned} I &= Y_p V_s \\ &= \left(\frac{1}{2} - j\frac{1}{4} \right) (60 \angle 45^\circ) \\ &= 33,5 \angle 18,43^\circ \text{ A} \end{aligned}$$

[atenção]

Admitâncias em paralelo se somam.

Avaliação do Aprendizado

E8.9 Determine a corrente I da rede mostrada na Fig. E8.9.

RESPOSTA: $I = 9,01/53,7^\circ$ A.

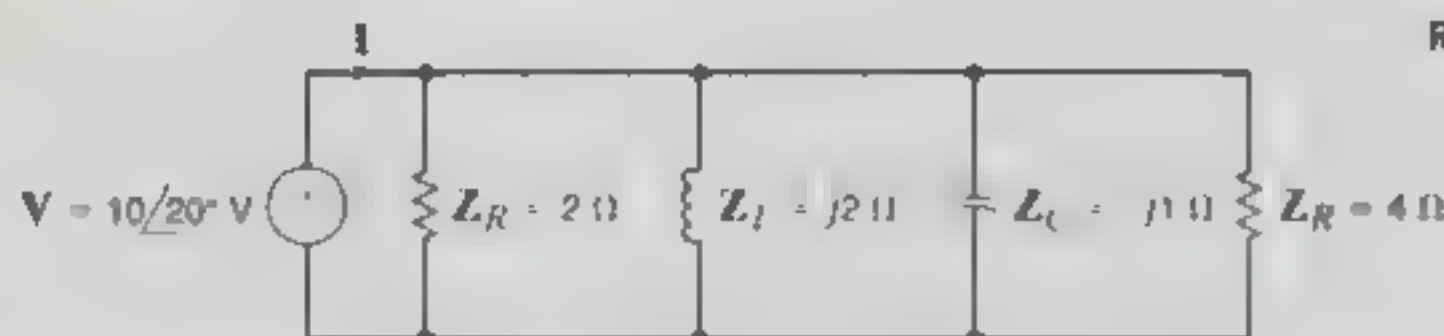


Figura E8.9

Vislumbrando-se análises de circuitos CA mais gerais, são agora examinadas as técnicas de cálculo da impedância ou da admitância de circuitos nos quais vários componentes passivos

estão interconectados. O exemplo a seguir ilustra o fato de o procedimento aqui empregado ser análogo aos cálculos realizados anteriormente na determinação da resistência equivalente.

EXEMPLO 8.11

Considere a rede mostrada na Fig. 8.12a. A impedância de cada componente é fornecida na figura. Deseja-se cal-

cular a impedância equivalente da rede, Z_{eq} , entre os terminais A-B.

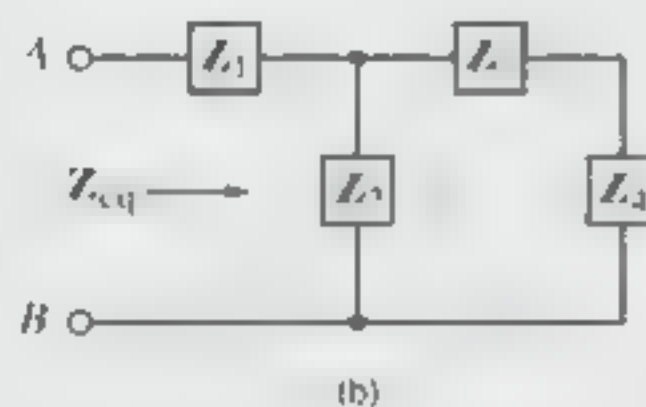
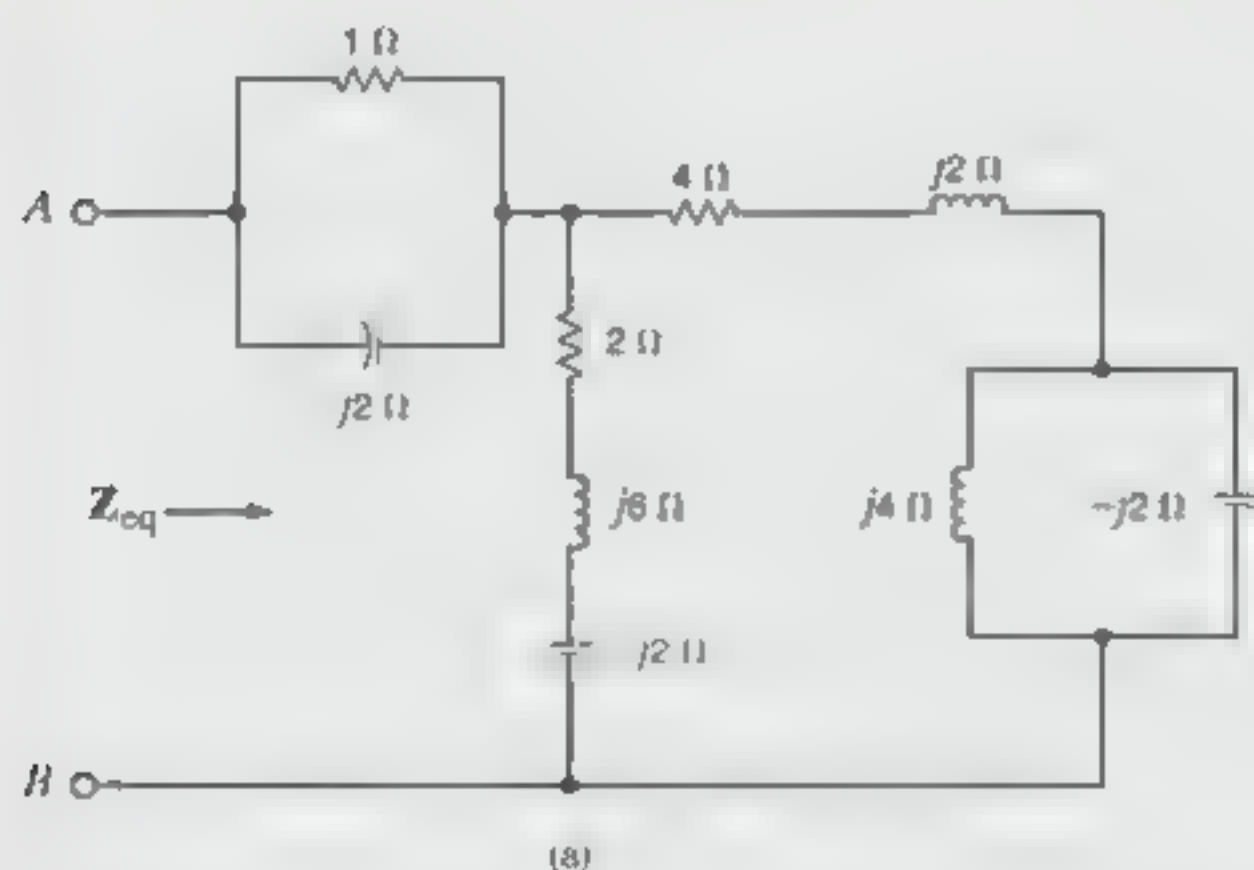


Figura 8.12 Exemplo de circuito em que a determinação da impedância equivalente é realizada em duas etapas.

SOLUÇÃO

A impedância equivalente Z_{eq} poderia ser calculada de várias formas; poder-se-ia utilizar apenas as impedâncias, ou apenas as admitâncias, ou uma combinação das duas. Na solução aqui apresentada será utilizada a última dessas formas. Inicia-se o desenvolvimento da solução observando que o circuito apresentado na Fig. 8.12a pode ser representado pelo circuito

Note que

$$\begin{aligned} Y_4 &= Y_1 + Y_2 \\ &= \frac{1}{j4} + \frac{1}{j2} \\ &= j\frac{1}{4} \text{ S} \\ Z_4 &= -j4 \Omega \end{aligned}$$

Portanto,

Agora,

$$\begin{aligned} Z_{34} &= Z_3 + Z_4 \\ &= (4 + j2) + (-j4) \\ &= 4 - j2 \, \Omega \end{aligned}$$

e, assim,

$$\begin{aligned} Y_{34} &= \frac{1}{Z_{34}} \\ &= \frac{1}{4 - j2} \\ &= 0,20 + j0,10 \, \text{S} \end{aligned}$$

Como

$$\begin{aligned} Z_1 &= 2 + j6 - j2 \\ &= 2 + j4 \, \Omega \end{aligned}$$

então,

$$\begin{aligned} Y_1 &= \frac{1}{2 + j4} \\ &= 0,10 - j0,20 \, \text{S} \\ Y_{234} &= Y_2 + Y_{34} \\ &= 0,30 + j0,10 \, \text{S} \end{aligned}$$

O leitor deve observar cuidadosamente o procedimento aqui apresentado: as impedâncias em série são somadas e as admitâncias em paralelo são somadas.

A partir da admitância Y_{234} pode-se calcular a impedância Z_{234} como

$$\begin{aligned} Z_{234} &= \frac{1}{Y_{234}} \\ &= \frac{1}{0,30 + j0,10} \\ &= 3 + j1 \, \Omega \end{aligned}$$

Agora,

$$\begin{aligned} Y_2 &= Y_3 + Y_4 \\ &= \frac{1}{1} + \frac{1}{j2} \\ &= 1 + j\frac{1}{2} \, \text{S} \end{aligned}$$

e, assim,

$$\begin{aligned} Z_2 &= \frac{1}{1 + j\frac{1}{2}} \\ &= 0,8 - j0,4 \, \Omega \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} Z_{eq} &= Z_1 + Z_{234} \\ &= 0,8 - j0,4 + 3 + j1 \\ &= 3,8 + j0,6 \, \Omega \end{aligned}$$

Estratégia para Solução de Problemas

Combinação de Impedâncias e Admitâncias

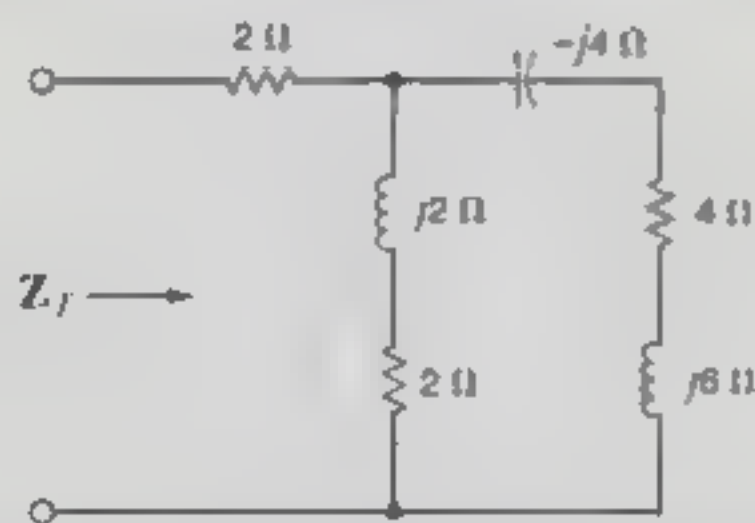
Etapa 1. Some as admitâncias dos componentes em paralelo.

Etapa 2. Some as impedâncias dos componentes em série.

Etapa 3. Faça a conversão entre admitância e impedância e vice-versa para melhor combinar os componentes próximos.

Avaliação do Aprendizado

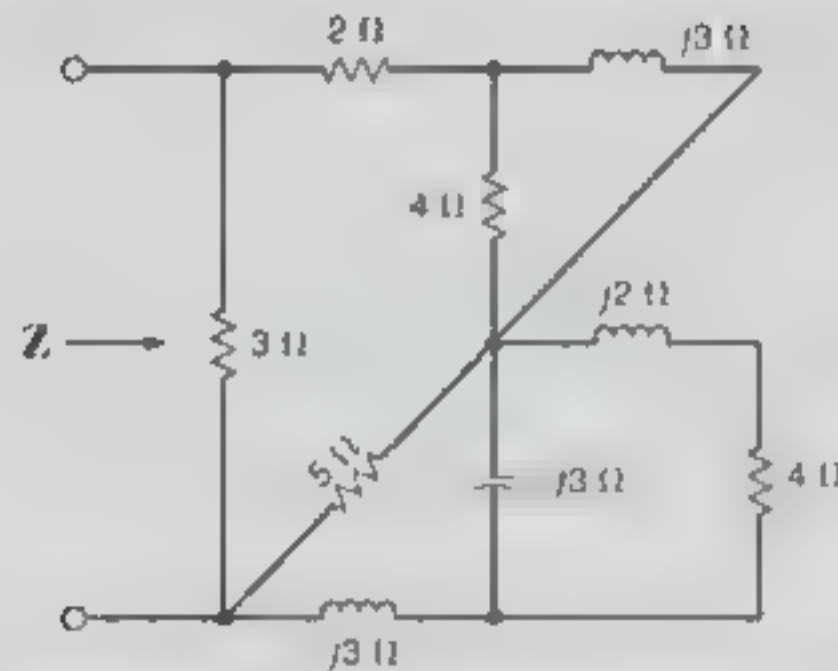
E8.10 Calcule a impedância Z_T da rede mostrada na Fig. E8.10.



RESPOSTA:
 $Z_T = 3,38 + j1,08 \, \Omega$.

Figura E8.10

E8.11 Determine a impedância Z da rede mostrada na Fig. E8.11.



RESPOSTA:
 $Z = 1,95 + j0,29 \Omega$.

Figura E8.11

8.6 Diagramas de Fasores

A impedância e a admitância são funções dependentes da frequência e, portanto, seus valores são alterados quando a frequên-

cia varia. Essas variações em Z e Y produzem um efeito resultante na relação corrente-tensão de uma rede. O impacto das variações na frequência sobre os parâmetros do circuito pode ser facilmente observado por meio de um diagrama de fasores. Os exemplos a seguir servirão para ilustrar esses pontos.

EXEMPLO 8.12

Seja a construção do diagrama de fasores da rede mostrada na Fig. 8.13.

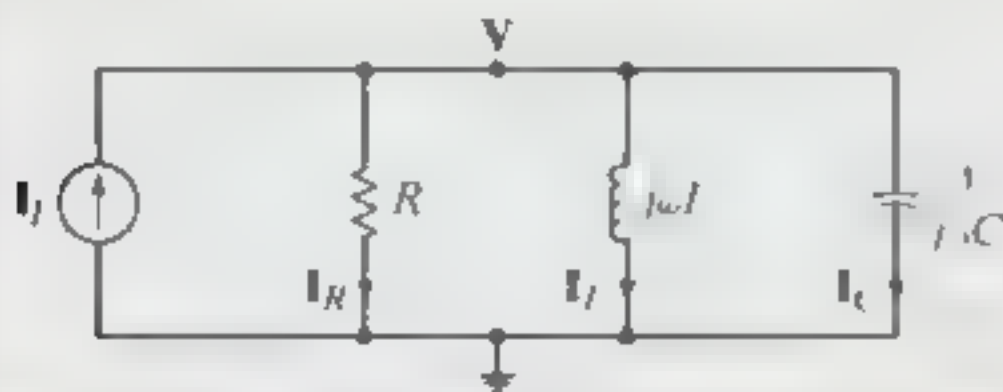


Figura 8.13 Exemplo de circuito com componentes em paralelo.

SOLUÇÃO

As variáveis pertinentes estão indicadas na figura. Por conveniência da construção de um diagrama de fasores, seleciona-se V como um fasor de referência e, arbitrariamente, atribui-se a ele um ângulo de fase nulo. Assim, todas as correntes serão medidas relativamente a esse fasor. Não haverá perda de generalidade ao se atribuir a V um ângulo de fase nulo, uma vez que se, por exemplo, esse ângulo for na realidade igual a 30° , o diagrama de fasores será girado como um todo de 30° , pois todas as correntes são medidas relativamente a esse fasor.

No nó superior do circuito a LKC fornece

$$I_F = I_R + I_L + I_C = \frac{V}{R} + \frac{V}{j\omega L} + \frac{V}{1 - j\omega C}$$

Uma vez que $V = V_M \angle 0^\circ$ então,

$$I_F = \frac{V_M \angle 0^\circ}{R} + \frac{V_M \angle -90^\circ}{\omega L} + V_M \omega C \angle 90^\circ$$

O diagrama de fasores que ilustra a relação de fase entre V , I_R , I_L e I_C é mostrado na Fig. 8.14a. Para pequenos valores de ω , de forma que a magnitude de I_L seja maior que a de I_C , o diagrama de fasores para as correntes é o mostrado na Fig. 8.14b. No caso de grandes valores de ω — isto é, aqueles para os quais I_C seja maior que I_L — o diagrama de fasores das correntes é o mostrado na Fig. 8.14c. Observe que, quando ω aumenta, o fasor I_F se move de I_{F1} para I_{F2} ao longo de um lugar geométrico definido pela linha tracejada mostrada na Fig. 8.14d.

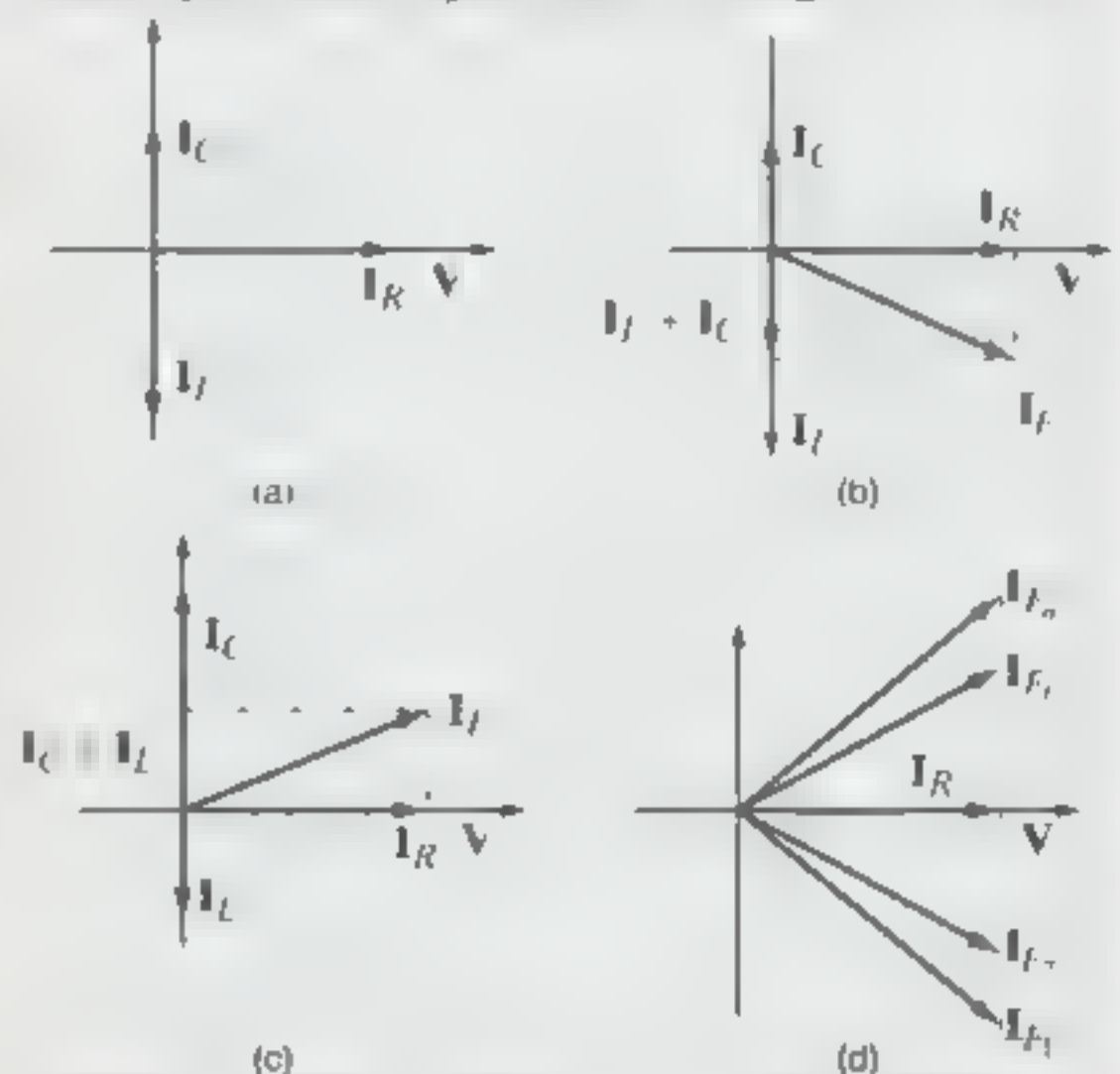


Figura 8.14 Diagrama de fasores para o circuito mostrado na Fig. 8.13.

Note que I_F está em fase com V quando $I_C = I_L$ ou, em outras palavras, quando $\omega L = 1/\omega C$. Logo, a tensão nodal V estará em fase com a fonte de corrente I_F quando

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

Esta condição também pode ser vista pela equação decorrente da aplicação da LKC

$$1 = \left[\frac{1}{R} + j\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right) \right] V$$

[atenção]

Do ponto de vista gráfico, os fasores podem ser manipulados como vetores.

EXEMPLO 8.13

Seja a obtenção do diagrama de fasores para o circuito em série mostrado na Fig. 8.15a.

SOLUÇÃO

A aplicação da LKT a esse circuito fornece uma equação da forma

$$\begin{aligned} V_S &= V_R + V_L + V_C \\ &= IR + \omega LI \angle 90^\circ + \frac{1}{\omega C} I \angle -90^\circ \end{aligned}$$

Selecionando-se a corrente I como fasor de referência, de modo que $I = I_M \angle 0^\circ$, então, se $\omega LI_M > I_M/\omega C$, o diagrama de fasores apresentará a forma mostrada na Fig. 8.15b.

Particularmente, se $\omega = 377 \text{ rad/s}$ (isto é, $f = 60 \text{ Hz}$), então $\omega L = 6$ e $1/\omega C = 2$. Nessas condições, o diagrama de fasores fica conforme mostrado na Fig. 8.15c. Todavia, se, por exemplo, V_F for selecionado como referência,

$$v_F(t) = 12\sqrt{2} \cos(377t + 90^\circ) \text{ V}$$

então,

$$\begin{aligned} I &= \frac{V}{Z} = \frac{12\sqrt{2} \angle 90^\circ}{4 + j6} = \frac{12\sqrt{2} \angle 90^\circ}{4\sqrt{2} \angle 45^\circ} \\ &= 3 \angle 45^\circ \text{ A} \end{aligned}$$

e o diagrama de fasores como um todo, conforme mostrado nas Figs. 8.15b e c, é girado de 45° , como mostrado na Fig. 8.15d.

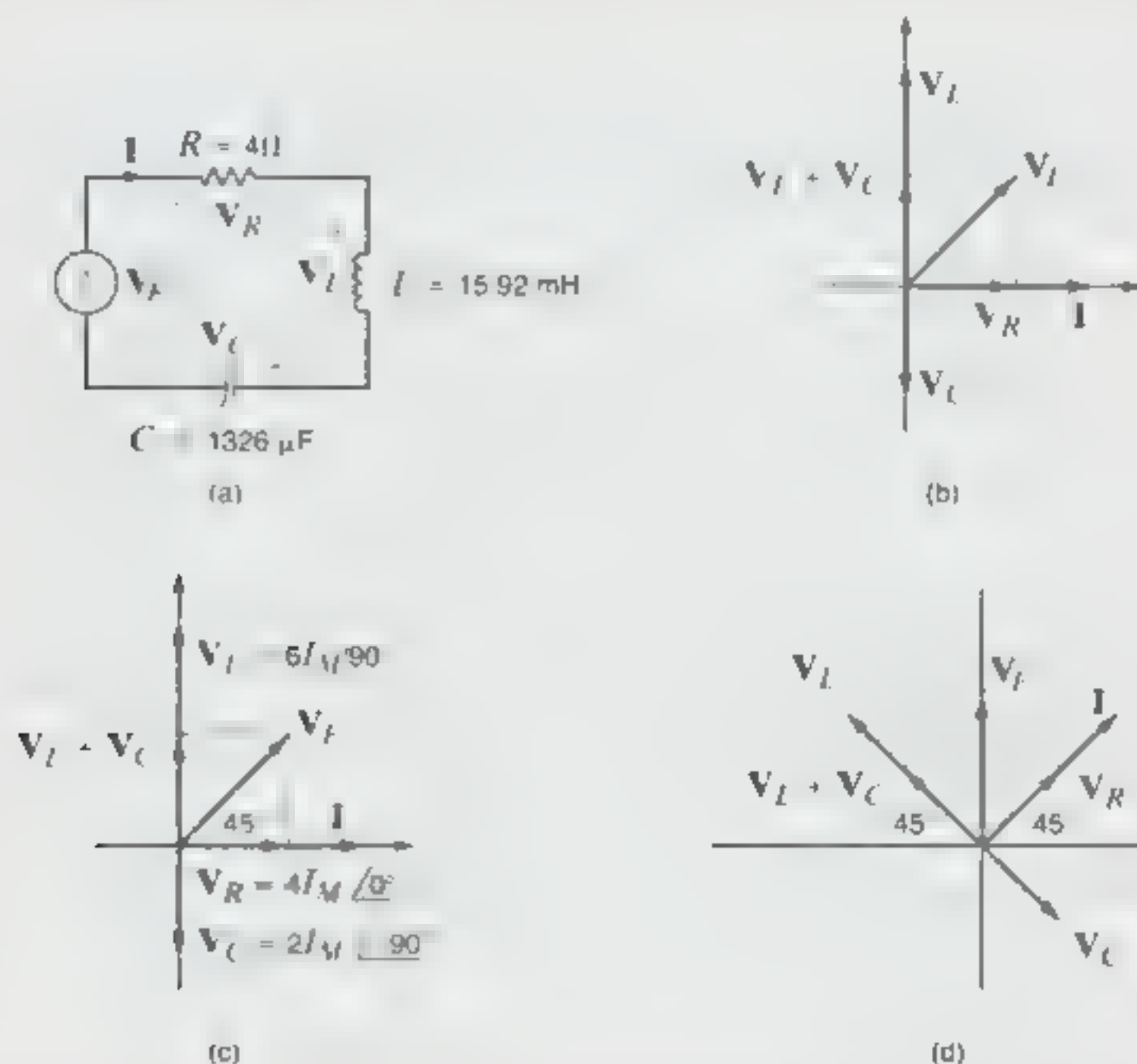


Figura 8.15 Circuito em série e alguns diagramas de fasores específicos (os gráficos não foram construídos em escala).

Avaliação do Aprendizado

E8.12 Desenhe um diagrama de fasores ilustrando todas as correntes e tensões da rede mostrada na Fig. E8.12.

RESPOSTA:

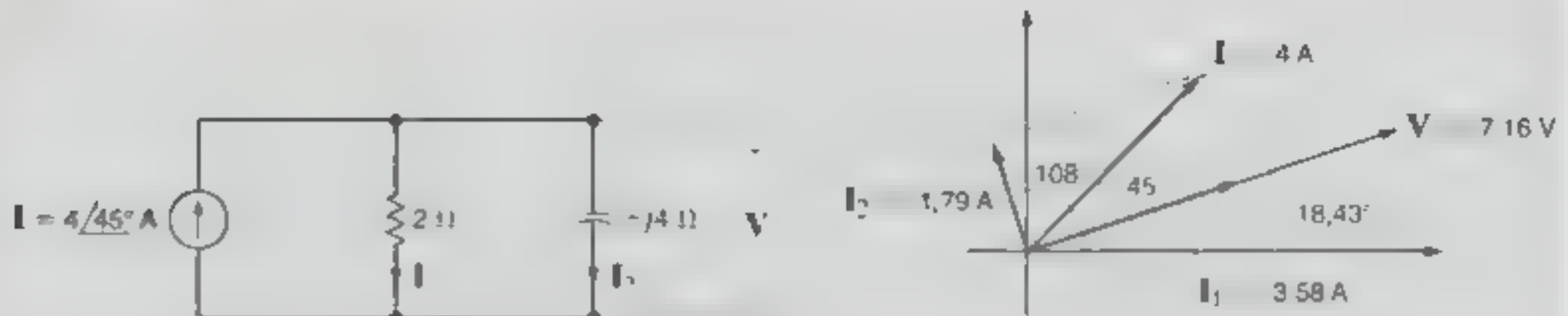


Figura E8.12

E8.13 Determine o valor da capacitância C de modo que $v(t)$ e $i(t)$ estejam em fase no circuito mostrado na Fig. E8.13.

RESPOSTA: $C = 400 \mu\text{F}$.

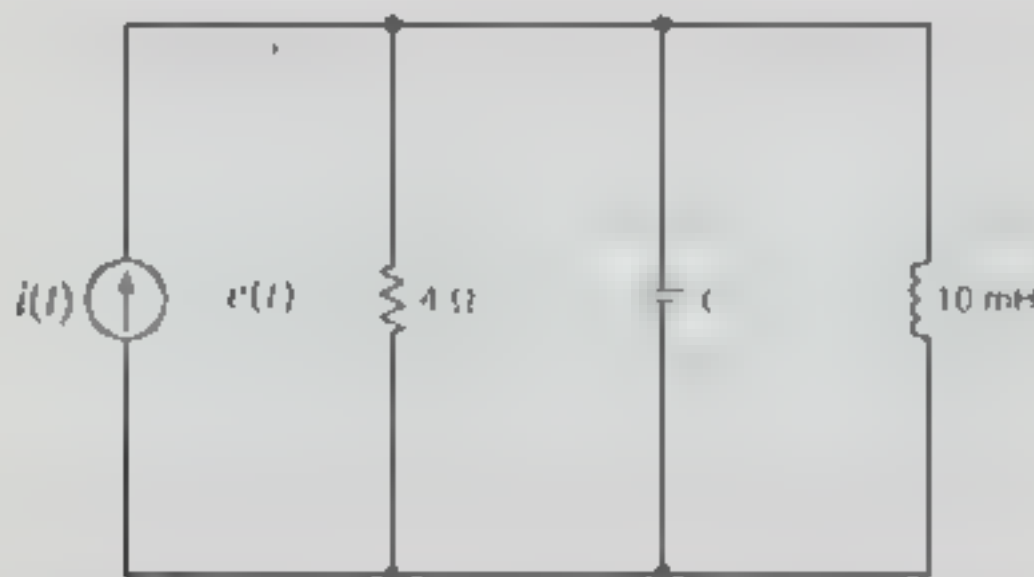


Figura E8.13

8.7 Análise Básica de Circuitos Utilizando as Leis de Kirchhoff

Foi mostrado que as leis de Kirchhoff podem ser aplicadas no domínio da frequência e, portanto, elas podem também ser utilizadas para calcular as tensões e correntes no regime estacionário dos circuitos CA. Esse procedimento envolve a expressão dessas tensões e correntes como fasores e, feito isso, a análise do regime estacionário de circuitos CA empregando as equa-

ções dos fasores é realizada de forma idêntica àquela utilizada na análise CC dos circuitos resistivos. A álgebra dos números complexos é a ferramenta a ser utilizada na manipulação matemática das equações com fasores que, obviamente, possuem coeficientes complexos. Inicia-se a discussão ilustrando o fato de que as técnicas que têm sido aplicadas na solução de circuitos CC resistivos são também válidas para a análise de circuitos CA — a única diferença é que na análise do regime estacionário dos circuitos CA, as equações algébricas dos fasores possuem coeficientes complexos.

Estratégia para Solução de Problemas

Análise do Regime Estacionário de Circuitos CA

- Para circuitos relativamente simples (isto é, aqueles com uma única fonte), utilize
 - A lei de Ohm para a análise CA, isto é, $V = IZ$
 - As regras de combinação para Z , e Y ,
 - As leis de Kirchhoff, LKC e LKT
 - A divisão de correntes e tensões
- Para circuitos mais complexos com múltiplas fontes, utilize
 - A análise nodal
 - A análise dos laços ou das malhas
 - O princípio da superposição
 - A troca de fonte
 - Os teoremas de Thévenin e Norton

Neste ponto, é importante que o leitor compreenda que, nas manipulações algébricas das equações com fasores, nos quais os coeficientes são complexos, normalmente os cálculos serão mantidos com apenas dois dígitos à direita da vírgula, para efeito de simplicidade. Assim, certamente, serão introduzidos nos

cálculos erros de arredondamento. Em nenhum caso esses erros serão mais significativos que quando dois ou mais procedimentos são utilizados para resolver o mesmo problema, conforme é feito no exemplo a seguir

EXEMPLO 8.14

Deseja-se calcular todas as tensões e correntes associadas ao circuito mostrado na Fig. 8.16a.

SOLUÇÃO

O procedimento a ser seguido obedecerá a ordem descrita a seguir. Inicialmente, será calculada a impedância total vista pela fonte V_F . Em seguida, utiliza-se esta impedância para determinar a corrente I_1 . Conhecendo-se I_1 , pode-se calcular V_1 utilizando a LKT. Conhecendo-se V_1 , pode-se determinar I_2 e I_3 e assim por diante.

A impedância total vista pela fonte V_F é

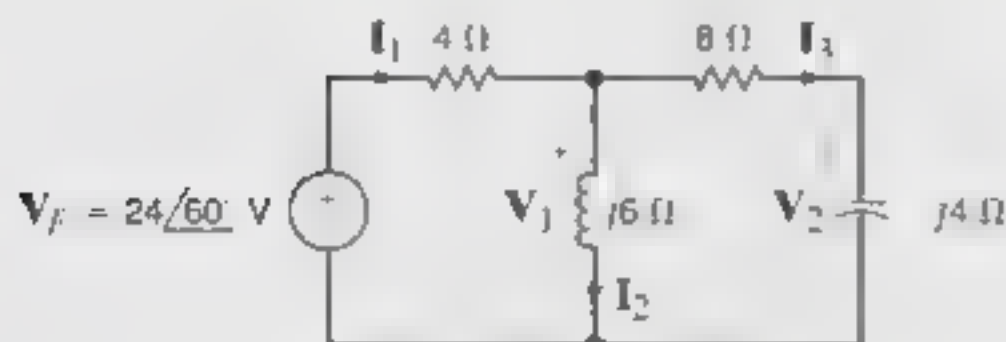
$$\begin{aligned} Z_{eq} &= 4 + \frac{(j6)(8 - j4)}{j6 + 8 - j4} \\ &= 4 + \frac{24 + j48}{8 + j2} \\ &= 4 + 4,24 + j4,94 \\ &= 9,61 / 30,94^\circ \Omega \end{aligned}$$

Assim,

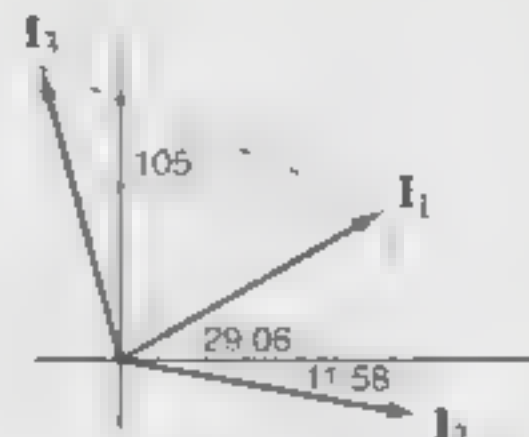
$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{V_F}{Z_{eq}} = \frac{24 / 60^\circ}{9,61 / 30,94^\circ} \\ &= 2,5 / 29,06^\circ \text{ A} \end{aligned}$$

A tensão V_1 pode ser determinada utilizando a LKT:

$$\begin{aligned} V_1 &= V_F - 4I_1 \\ &= 24 / 60^\circ - 10 / 29,06^\circ \\ &= 3,26 + j15,93 \\ &= 16,26 / 78,43^\circ \text{ V} \end{aligned}$$



(a)



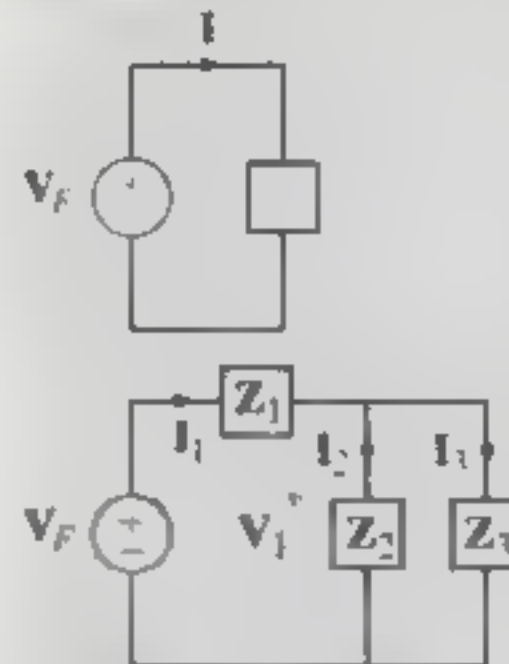
(b)

Figura 8.16 (a) Exemplo de um circuito CA, (b) diagrama de fasores para as correntes (os gráficos não foram construídos em escala).

[atenção]

Procedimento

1. Calcule I_1 .



2. Determine $V_1 = V_F - I_1 Z_1$.

Em seguida, $I_2 = \frac{V_1}{Z_2}$ e $I_3 = \frac{V_1}{Z_3}$.

A divisão de corrente e de tensão também são aplicáveis.

Note que V_1 poderia também ser calculada pela divisão de tensão:

$$V_1 = \frac{V_F \frac{(j6)(8 - j4)}{j6 + 8 - j4}}{4 + \frac{(j6)(8 - j4)}{j6 + 8 - j4}} V$$

que, pelos cálculos precedentes, resulta em

$$\begin{aligned} V_1 &= \frac{(24 / 60^\circ)(6,51 / 49,36^\circ)}{9,61 / 30,94^\circ} \\ &= 16,26 / 78,42^\circ \text{ V} \end{aligned}$$

Conhecendo V_1 , pode-se calcular tanto I_2 quanto I_3 :

$$I_2 = \frac{V_1}{j6} = \frac{16,76 \angle 78,43^\circ}{6 \angle 90^\circ} = 2,71 \angle -11,58^\circ \text{ A}$$

e

$$I_1 = \frac{V_1}{8 - j4} = 1,82 \angle 105^\circ \text{ A}$$

Note que as correntes I_2 e I_3 podem ser calculadas pela divisão de corrente. Por exemplo, I_2 seria determinada por

$$I_2 = \frac{I_1(8 - j4)}{8 - j4 + j6} = \frac{(12,5 \angle 29,06^\circ)(18,94 \angle 26,57^\circ)}{8 + j2} = 2,71 \angle -11,55^\circ \text{ A}$$

Finalmente, a tensão V_2 pode ser calculada como

$$V_2 = I_3(-j4) = 7,28 \angle 15^\circ \text{ V}$$

Esse valor poderia também ser calculado pela divisão de tensão. O diagrama de fasores para as correntes I_1 , I_2 e I_3 é mostrado na Fig. 8.16b e é uma ilustração da LKC.

Finalmente, o leitor é encorajado a trabalhar o problema ao reverso; isto é, dada a tensão V_2 , obter V_F . Note que, se V_2 for conhecida, a corrente I_3 poderá ser calculada imediatamente utilizando a impedância do capacitor. Assim, $V_2 + I_3(8)$ fornece V_1 . Conhecendo V_1 pode-se obter I_2 . Em seguida, $I_2 + I_3 = I_1$ e o problema estará resolvido. Note que essa análise, objeto do exercício de Avaliação do Aprendizado E8.12, envolve simplesmente uma aplicação repetida da lei de Ohm, da LKC e da LKT.

Avaliação do Aprendizado

E8.14 Obtenha a tensão $v_A(t)$ da rede mostrada na Fig. E8.14.

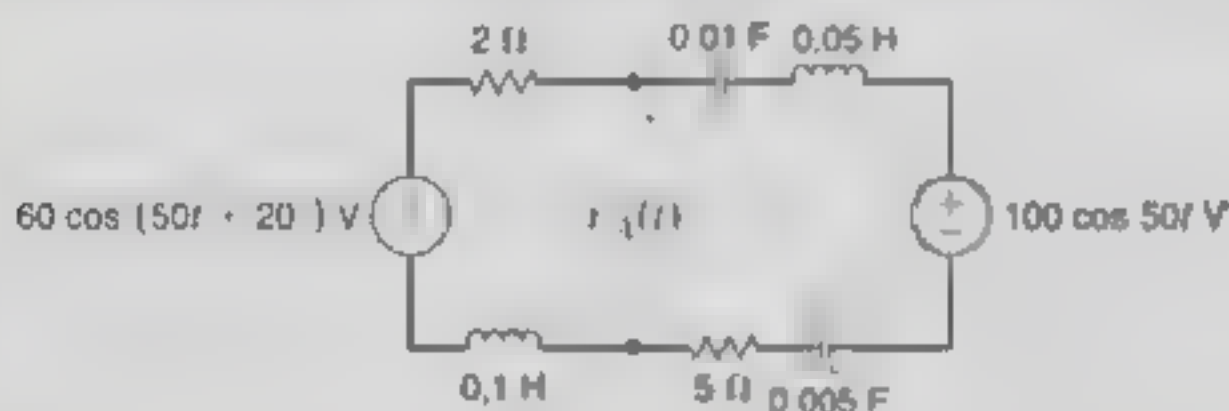


Figura E8.14

RESPOSTA: $v_A(t) = 95,83 \cos(50t + 24,1^\circ) \text{ V}$.

E8.15 Obtenha a tensão v , do circuito mostrado na Fig. E8.15.

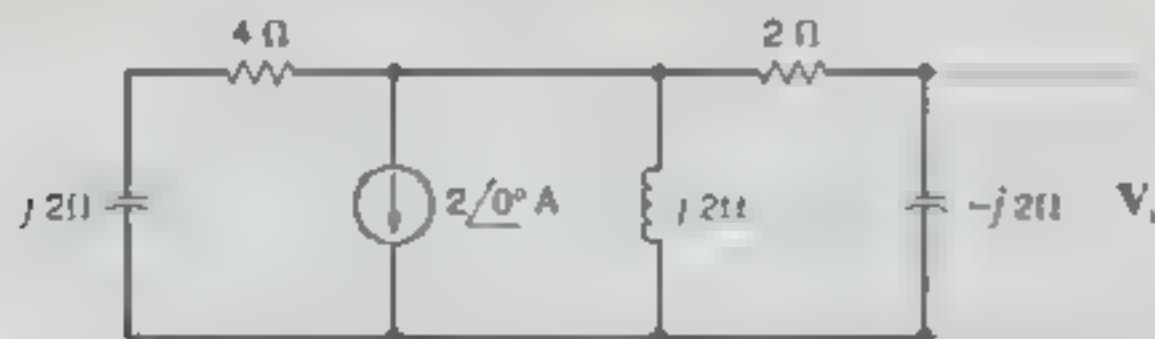


Figura E8.15

RESPOSTA: $v = 2,98 \angle 43,33^\circ \text{ V}$.

E8.16 Na rede mostrada na Fig. E8.12, sabe-se que a tensão V_1 pode ser representada pelo fasor $8 \angle 45^\circ \text{ V}$. Calcule a tensão V_F .

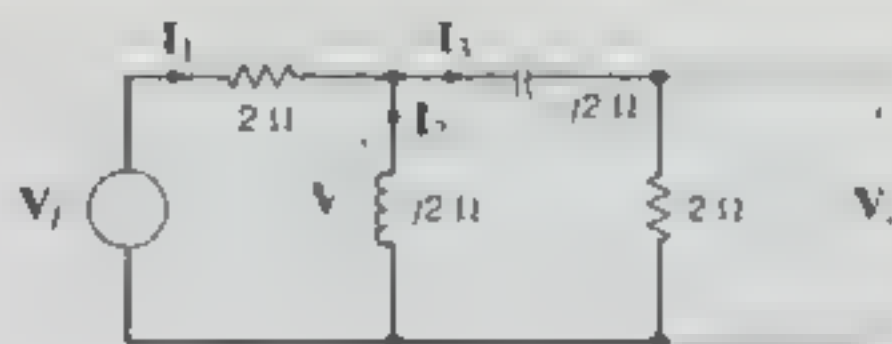


Figura E8.16

RESPOSTA: $V_F = 17,89 \angle -18,43^\circ \text{ V}$.

8.8 Procedimentos de Análise

Nesta seção, faz-se uma revisão dos métodos de análise de circuitos que foram, anteriormente, aplicados com sucesso aos circuitos CC, e ilustra-se sua aplicabilidade à análise do regime

estacionário dos circuitos CA. A estratégia empregada na apresentação desses procedimentos é a definição de um conjunto de exemplos em que todos os teoremas, aliados às análises nodal e dos laços, são utilizados para se obter a solução do problema proposto.

EXEMPLO 8.15

Seja a determinação da corrente I_x da rede mostrada na Fig. 8.17a utilizando os procedimentos da análise nodal, da análise dos laços, do princípio da superposição, da troca de fonte, do teorema de Thévenin e do teorema de Norton.

SOLUÇÃO

1. **Análise Nodal** Inicia-se com a análise nodal da rede. A equação da LKC para o supernó que inclui a fonte de tensão é

$$\frac{V_1}{1+j} - 2\angle 0^\circ + \frac{V_2}{1} + \frac{V_2}{1-j} = 0$$

[atenção]

Soma das correntes que deixam o supernó. O sinal das correntes que saem é positivo.

e a equação de restrição associada à LKT é

$$V_1 + 6\angle 0^\circ = V_2$$

Explicitando V_1 na segunda equação e substituindo na primeira tem-se

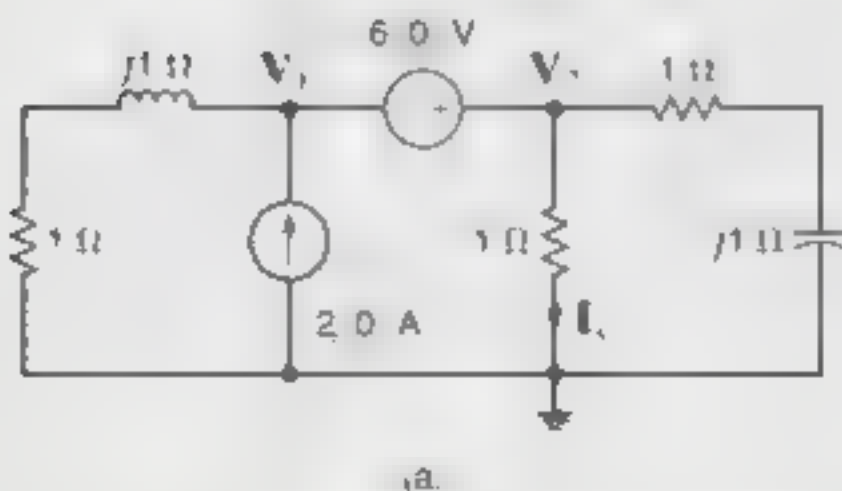
$$\frac{V_2 - 6\angle 0^\circ}{1+j} - 2\angle 0^\circ + V_2 + \frac{V_2}{1-j} = 0$$

ou

$$V_2 \left[\frac{1}{1+j} + 1 + \frac{1}{1-j} \right] = \frac{6 + 2 + 2j}{1+j}$$

Resolvendo para V_2 , obtém-se

$$V_2 = \left(\frac{4+j}{1+j} \right) V$$



(a)

Portanto,

$$I_x = \frac{4+j}{1+j} = \left(\frac{5}{2} - \frac{3}{2}j \right) A$$

2. **Análise dos Laços** A rede mostrada na Fig. 8.17b é utilizada no desenvolvimento da análise dos laços. Note que é selecionado um laço de corrente que passa pela fonte de corrente independente. As três equações dos laços são

$$I_1 = -2\angle 0^\circ$$

$$1(I_1 + I_2) + j1(I_1 + I_2) - 6\angle 0^\circ + 1(I_2 + I_1) - j1(I_2 + I_1) = 0$$

$$1I_1 + 1(I_2 + I_1) - j1(I_2 + I_1) = 0$$

[atenção]

Da mesma forma que ocorreu na análise CC, as equações dos laços admitem que uma diminuição no nível do potencial é positiva (+) e um aumento é negativo (-).

A combinação das duas primeiras equações fornece

$$1, (2j) + 1(1-j) = 8 + 2j$$

A equação do terceiro laço pode ser simplificada para a forma

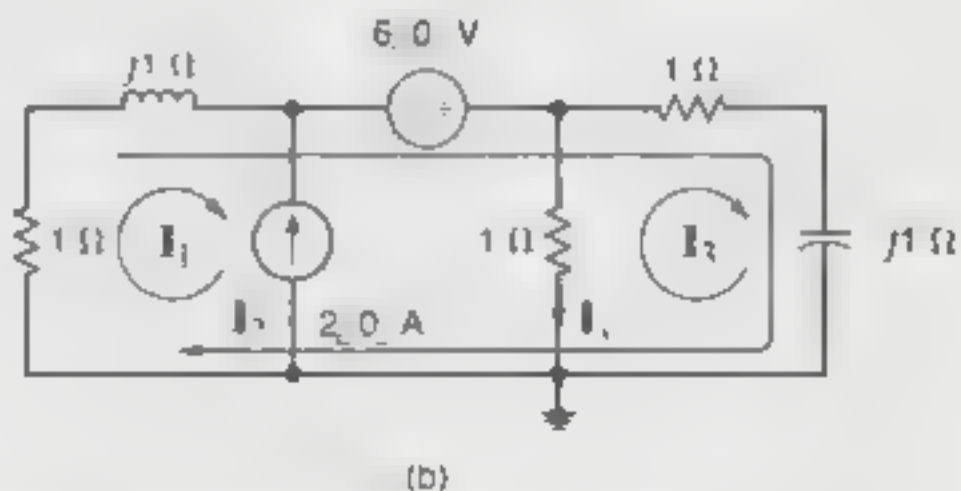
$$1(1-j) + 1, (2-j) = 0$$

Explicitando I_2 nessa última equação e substituindo o resultado na equação anterior tem-se

$$1, \left[\frac{-4 + 2j}{1-j} + 1-j \right] = 8 + 2j$$

ou

$$I_2 = \frac{10 + 6j}{4}$$



(b)

Figura 8.17 Circuitos utilizados no Exemplo 8.15 para análise dos nós e dos laços.

e, finalmente,

$$I_1 = I_1' + I_1'' = \left(\frac{5}{2} - \frac{3}{2}j \right) \text{ A}$$

3. **Princípio da Superposição** Utilizando a superposição, aplica-se uma fonte independente de cada vez. A rede na qual a fonte de corrente atua sozinha é mostrada na Fig. 8.18a. Combinando as duas impedâncias em paralelo de cada lado da rede, obtém-se o circuito mostrado na Fig. 8.18b, em que

$$Z' = \frac{(1 + j)(1 - j)}{(1 + j) + (1 - j)} = 1 \Omega$$

[atenção]

Utilizando o princípio da superposição de efeitos nesse caso, cada fonte será apl cada independentemente, e os resultados serão somados para se obter a solução desejada.

Portanto, utilizando a divisão de correntes, tem-se

$$I_1' = 1,0 \text{ A}$$

O circuito em que a fonte de tensão atua sozinha é mostrado na Fig. 8.18c. A tensão V_1'' obtida pela divisão de tensão é

$$V_1'' = \frac{(6 \angle 0^\circ) \left[\frac{(1 \angle 1 - j)}{1 + 1 - j} \right]}{1 + j + \left[\frac{(1 \angle 1 - j)}{1 + 1 - j} \right]} = \frac{6(1 - j)}{4} \text{ V}$$

e, portanto,

$$I_1'' = \frac{6}{4} (1 - j) \text{ A}$$

Assim,

$$I_1 = I_1' + I_1'' = 1 + \frac{6}{4} (1 - j) = \left(\frac{5}{2} - \frac{3}{2}j \right) \text{ A}$$

4. **Troca de Fonte** Como um primeiro passo do procedimento de troca de fonte, troca-se a fonte de corrente e a impedância em paralelo por uma fonte de tensão em série com a impedância, conforme mostrado na Fig. 8.19a.

A soma das duas fontes de tensão e a transformação dessas fontes e da impedância em série em uma fonte de corrente em paralelo com aquela impedância são mostradas na Fig. 8.19b. A combinação das duas impedâncias que estão em paralelo com o resistor de 1Ω resulta na rede mostrada na Fig. 8.19c, em que

$$Z' = \frac{(1 + j)(1 - j)}{1 + j + 1 - j} = 1 \Omega$$

[atenção]

No procedimento de troca de fonte, uma fonte de tensão em série com uma impedância pode ser substituída por uma fonte de corrente em paralelo com a impedância, e vice-versa. A aplicação repetida desse procedimento reduz sistematicamente o número de componentes do circuito.

Portanto, utilizando a divisão de correntes, tem-se

$$I_1 = \left(\frac{8 + 2j}{1 + j} \right) \left(\frac{1}{2} \right) = \left(\frac{5}{2} - \frac{3}{2}j \right) \text{ A}$$

5. **Análise pelo Teorema de Thévenin** Na aplicação do teorema de Thévenin ao circuito mostrado na Fig. 8.17a, obtém-se inicialmente a tensão do circuito aberto, V_{oc} , conforme

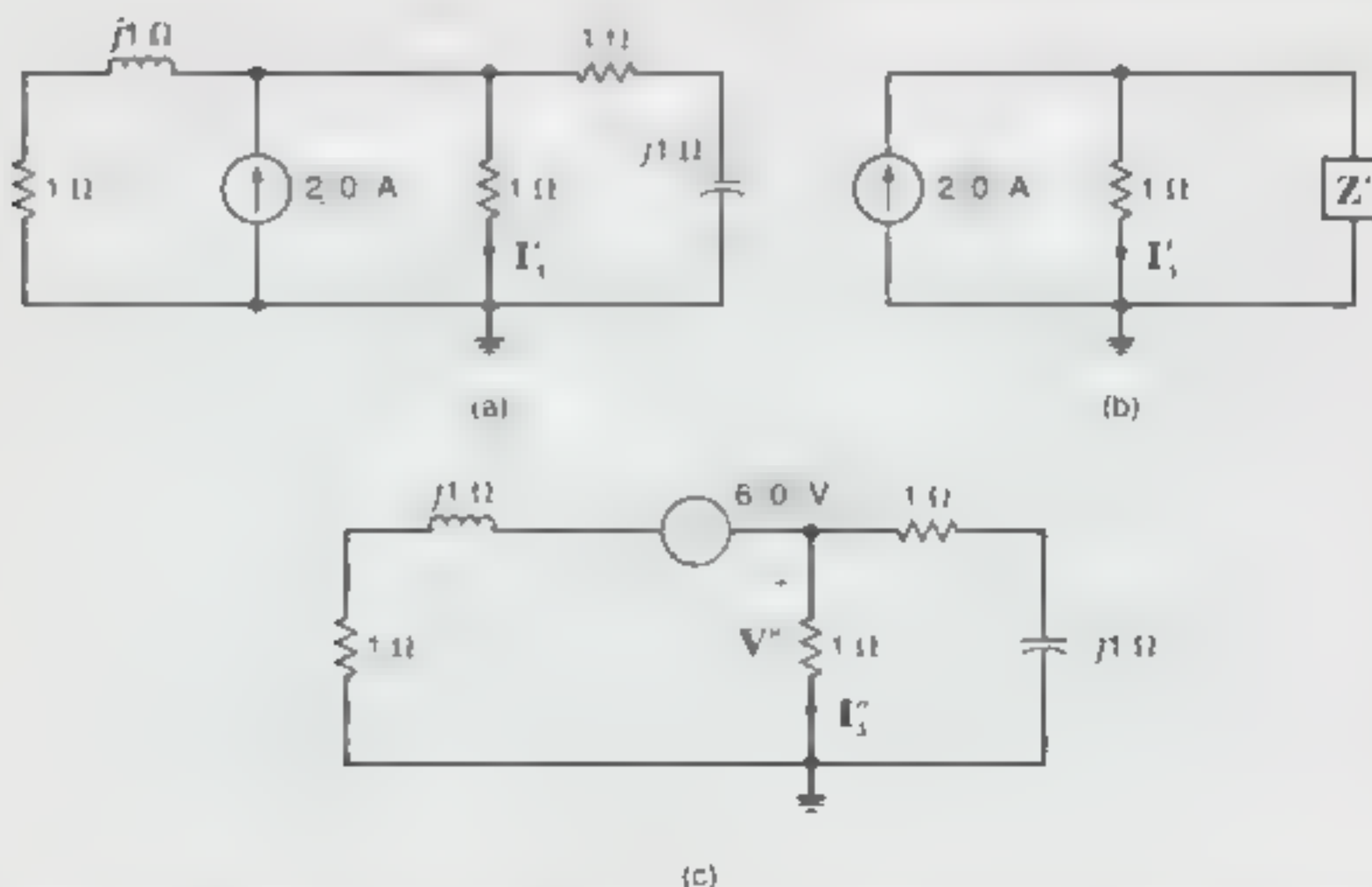


Figura 8.18 Circuitos utilizados no Exemplo 8.15 para análise pela superposição de efeitos

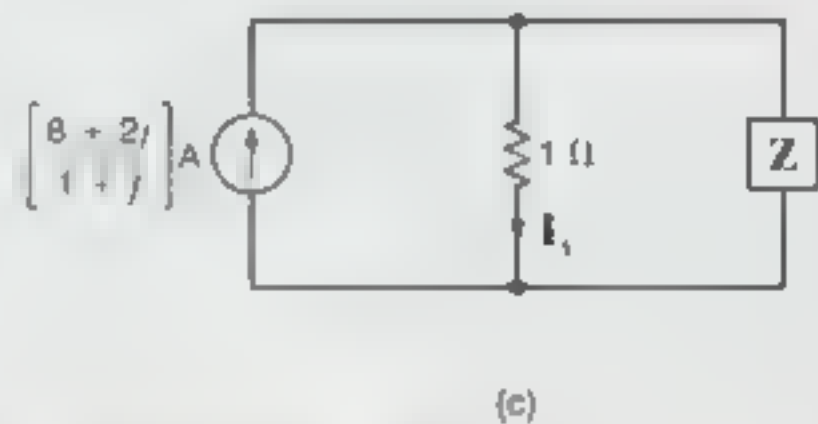
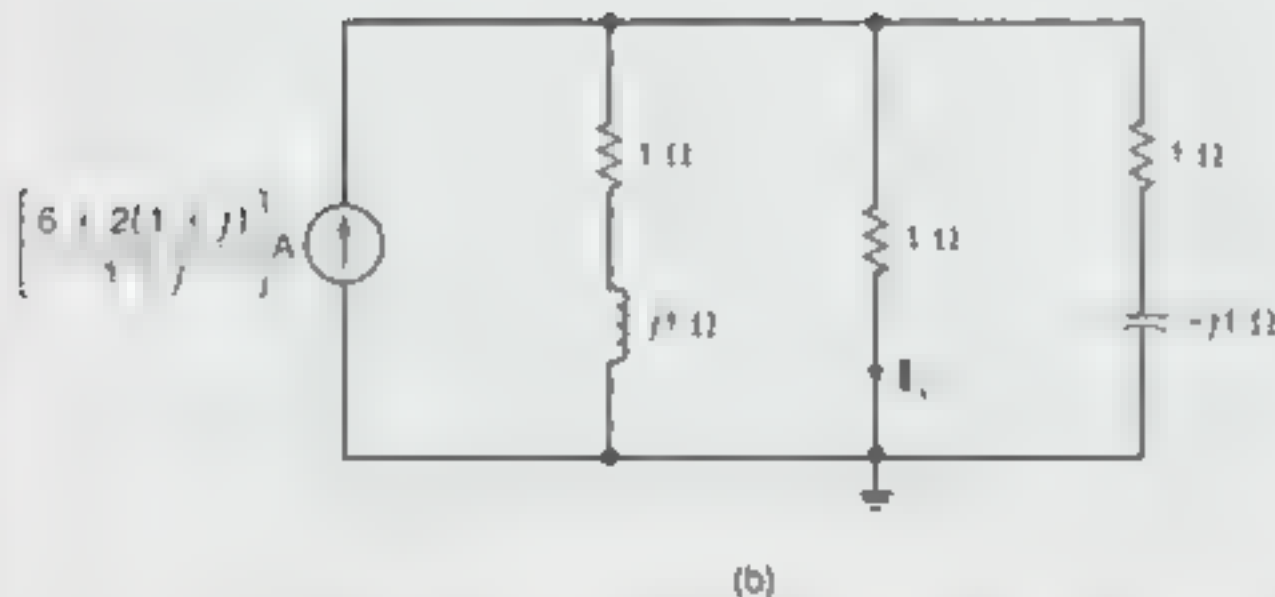
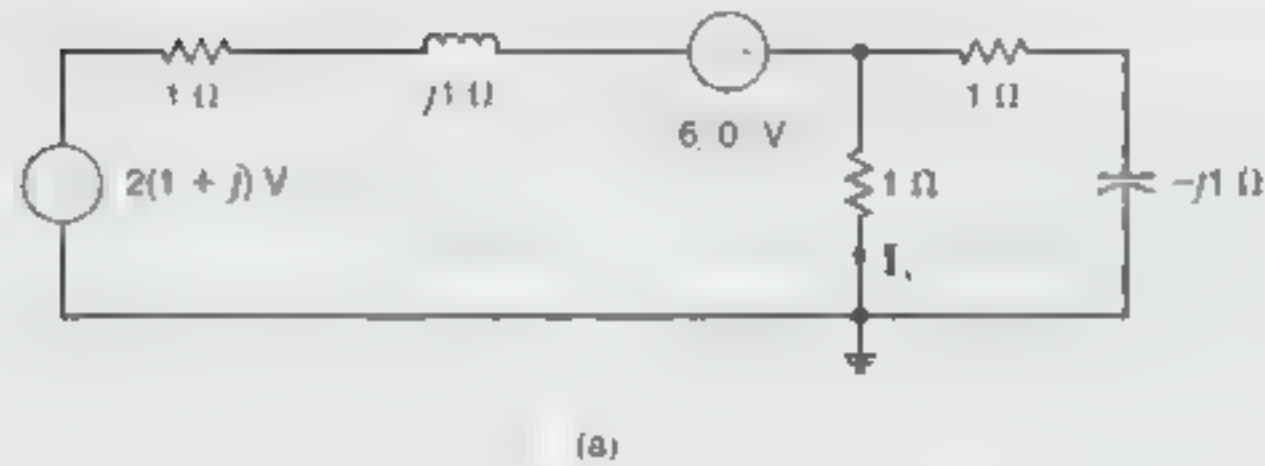


Figura 8.19 Circuitos utilizados no Exemplo 8.15 para análise por meio da troca de fonte.

mostrado na Fig. 8.20a. Para simplificar a análise, realiza-se uma troca de fonte do lado esquerdo da rede, o que resulta no circuito mostrado na Fig. 8.20b. Agora, utilizando a divisão de tensão, tem-se

$$V_{ca} = [6 + 2(1+j)] \left[\frac{1}{1 + j + 1 + j} \right]$$

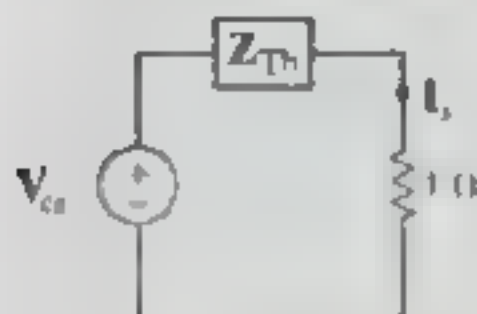
ou

$$V_{ca} = (5 - 3j) \text{ V}$$

[atenção]

Na análise por meio do teorema de Thévenin:

1. Remova a carga de 1Ω e obtenha a tensão entre os terminais do circuito aberto, V_{ca} .
2. Determine a impedância Z_{Th} entre os terminais abertos com todas as fontes consideradas nulas.
3. Construa o circuito a seguir e determine a corrente I_x .



A impedância equivalente de Thévenin, Z_{Th} , obtida nos terminais do circuito aberto quando a fonte de corrente é substituída por um circuito aberto e a fonte de tensão é substituída por um curto-circuito, é mostrada na Fig. 8.20c e calculada como

$$Z_{Th} = \frac{1 + j(1 + j)}{1 + j + 1 + j} = 1 \Omega$$

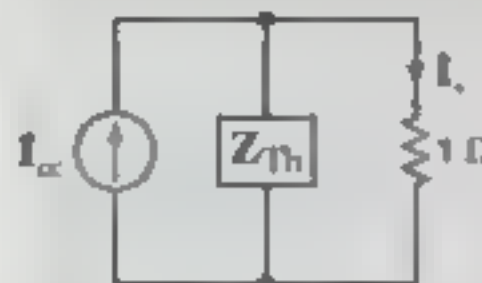
A conexão do circuito equivalente de Thévenin ao resistor de 1Ω com a corrente I_x na rede original resulta no circuito mostrado na Fig. 8.20d. A corrente I_x será, portanto,

$$I_x = \left(\frac{5}{2} - \frac{3}{2}j \right) \text{ A}$$

[atenção]

Na análise por meio do teorema de Norton:

1. Remova a carga de 1Ω e obtenha a corrente I_{cc} que passa pelo curto-circuito gerado.
2. Determine a impedância Z_{Th} entre os terminais abertos da carga com todas as fontes consideradas nulas.
3. Construa o circuito a seguir e determine a corrente I_x .



6. **Análise pelo Teorema de Norton** Finalmente, aplicando o teorema de Norton ao circuito mostrado na Fig. 8.17a, calcula-se a corrente do curto-circuito gerado, I_{cc} , utilizando a rede mostrada na Fig. 8.21a. Note que devido ao curto-circuito, a fonte de tensão é aplicada diretamente

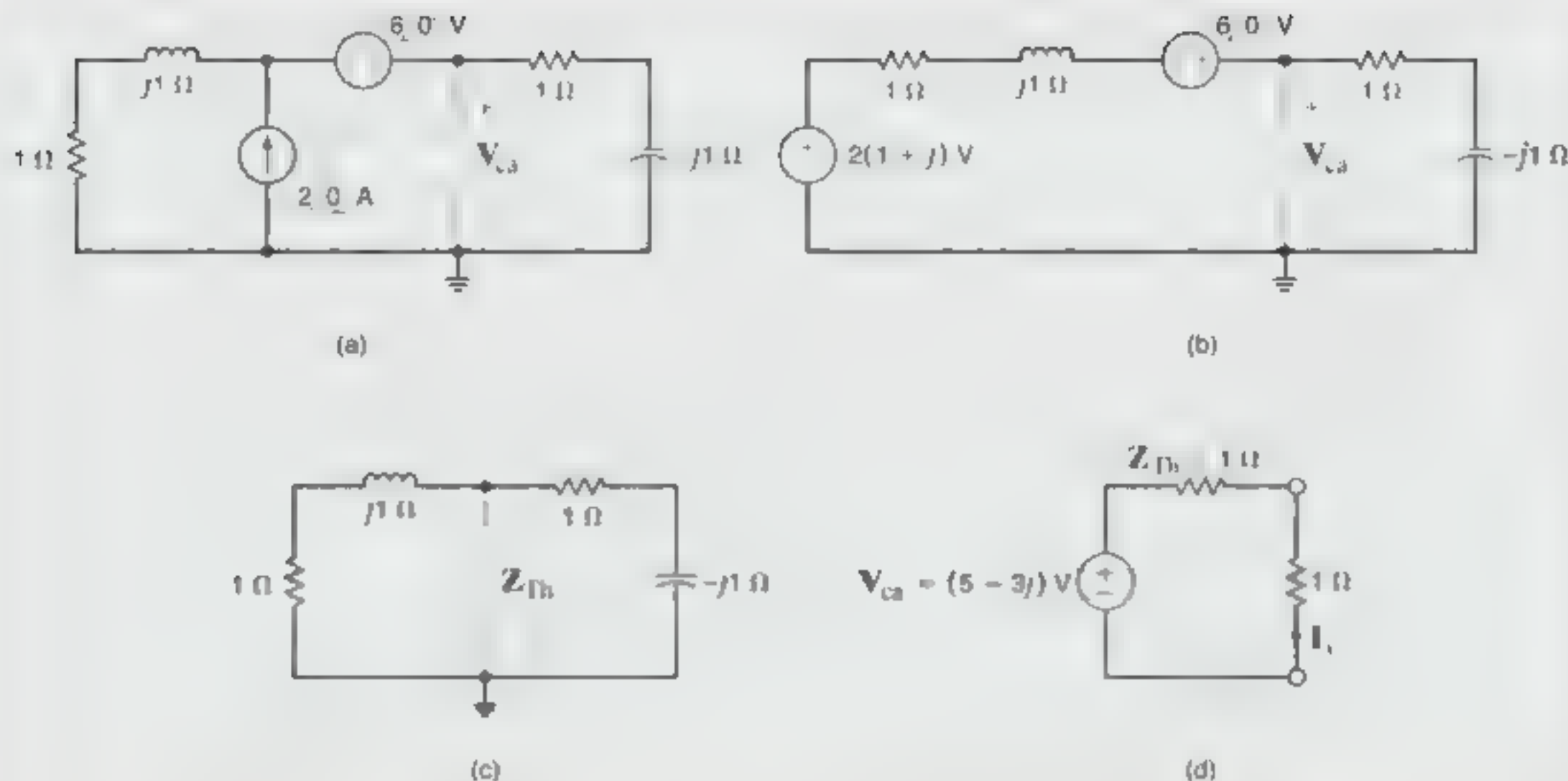


Figura 8.20 Circuitos utilizados no Exemplo 8.15 para análise por meio do teorema de Thévenin.

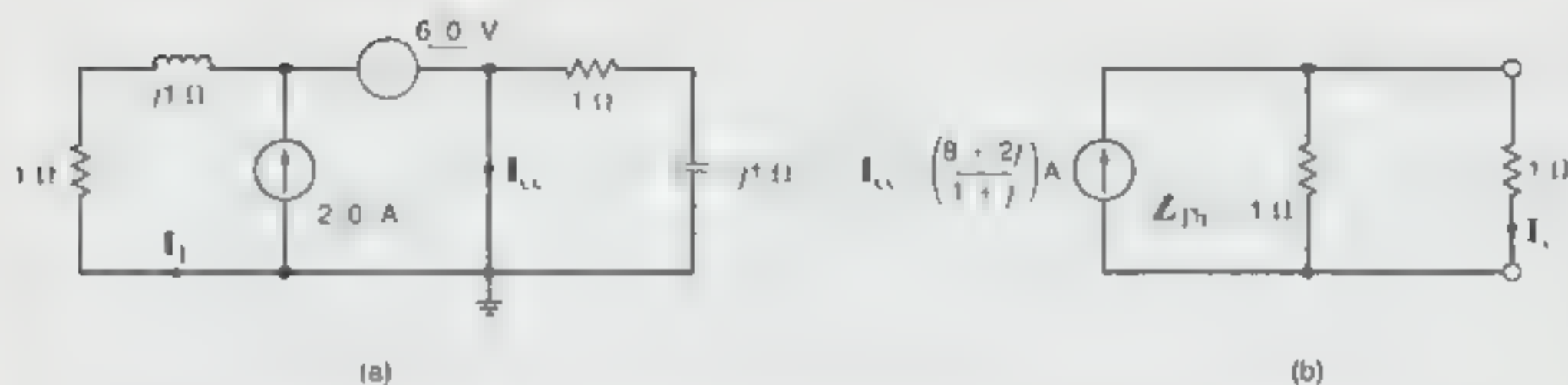


Figura 8.21 Circuitos utilizados no Exemplo 8.15 para análise por meio do teorema de Norton.

entre os terminais da impedância no ramo mais à esquerda. Portanto,

$$I_1 = \frac{6\angle 0^\circ}{1+j}$$

Em seguida, utilizando a LKC, tem-se

$$I_{cc} = I_1 + 2\angle 0^\circ = 2 + \frac{6}{1+j} = \left(\frac{8+2j}{1+j} \right) \text{ A}$$

A impedância equivalente de Thévenin, Z_{Th} , é conhecida e vale $1\ \Omega$ e, portanto, conectando-se o circuito equivalente de Norton ao resistor de $1\ \Omega$ com a corrente I_1 , tem-se a rede mostrada na Fig. 8.21b. Utilizando a divisão de correntes obtém-se

$$I_1 = \frac{1}{2} \left(\frac{8+2j}{1+j} \right) = \left(\frac{5-3j}{2} \right) \text{ A}$$

Considera-se agora um exemplo contendo uma fonte dependente.

EXEMPLO 8.16

Seja a determinação da tensão V_x do circuito mostrado na Fig. 8.22a. Nesse exemplo serão utilizados as equações nodais, as equações dos laços, o teorema de Thévenin e o teorema de Norton. Serão omitidos os procedimentos baseados no princípio da superposição e na transformação da fonte. Por quê?

SOLUÇÃO

1. **Análise Nodal** Para se realizar uma análise nodal, nomeia-se as tensões nodais e identifica-se o supernó conforme mostrado na Fig. 8.22b. A equação de restrição para o supernó é

$$V_1 + 12/0^\circ = V_2$$

e as equações da LKC para os nós da rede são

$$\begin{aligned} \frac{V_1 - V_2}{j1} + \frac{V_3 - V_2}{1} - 4/0^\circ + \frac{V_2 - V_x}{1} + \frac{V_3}{j1} &= 0 \\ \frac{V_1}{j1} + \frac{V_2}{1} + \frac{V_3}{1} - 2\left(\frac{V_1 - V_2}{1}\right) &= 0 \\ 4/0^\circ + \frac{V_1}{1} + \frac{V_2}{1} + \frac{V_3}{1} &= 0 \end{aligned}$$

[atenção]

Como a presença de uma fonte dependente afeta o princípio da superposição e o procedimento de troca da fonte?

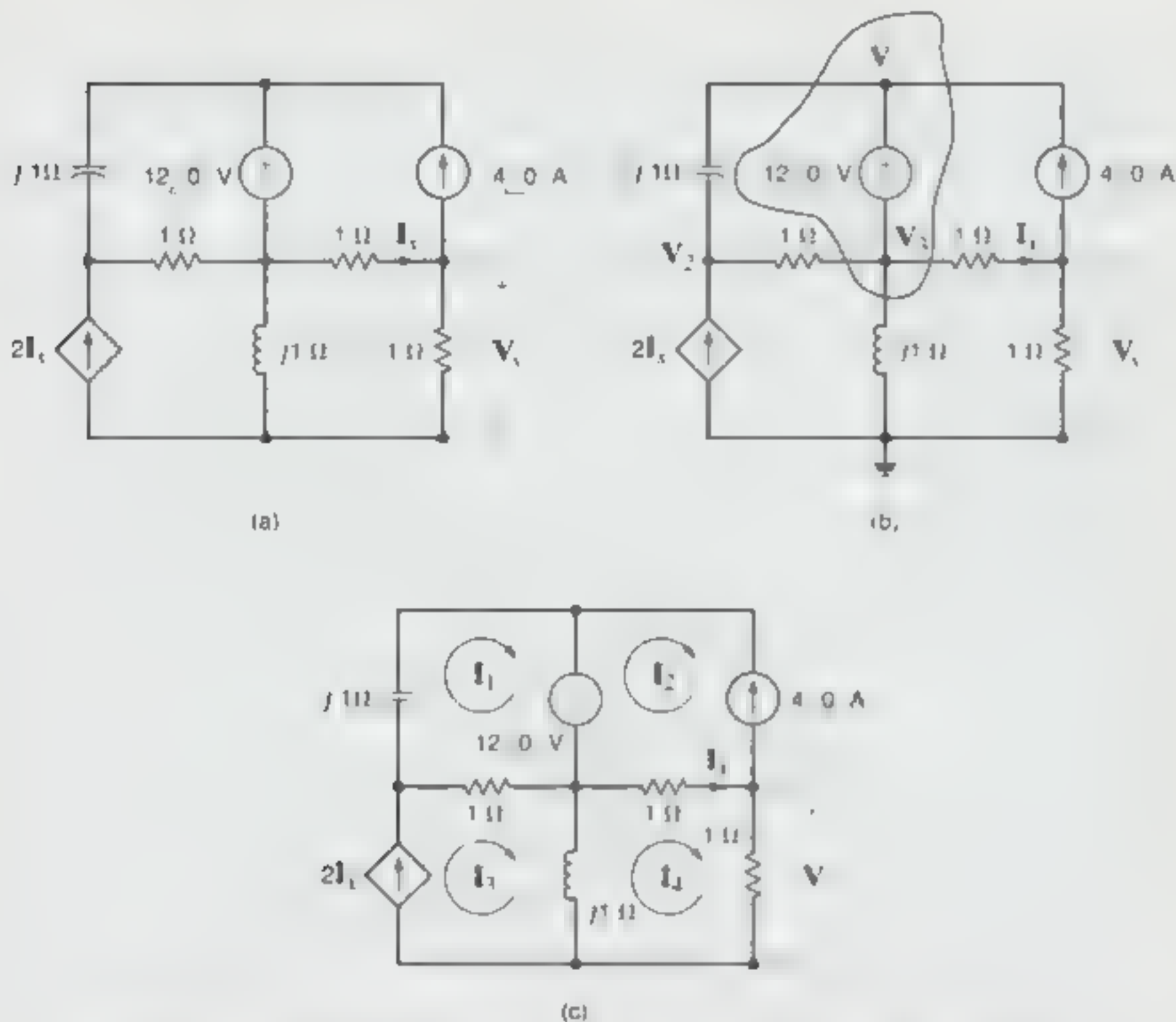


Figura 8.22 Circuitos utilizados no Exemplo 8.16 para as análises nodal e dos laços.

Neste ponto, essas equações podem ser resolvidas utilizando a análise matricial ou, por exemplo, pela substituição da primeira e da última dessas equações nas duas equações remanescentes, o que fornece

$$\begin{aligned} 3V_1 - (1 + j)V_2 &= -(4 + j2) \\ (4 + j2)V_1 + (1 + j)V_2 &= 12 + j16 \end{aligned}$$

Resolvendo essas equações para V_s , tem-se

$$V_s = \frac{8 - j4}{1 + j2} = +4/143,13^\circ \text{ V}$$

2. **Análise dos Laços** As correntes das malhas presentes na rede são definidas e mostradas na Fig. 8.22c. As equações de restrição do circuito são

$$\begin{aligned} I_2 &= -4/0^\circ \\ I_3 &= I_4 - I_2 = I_4 + 4/0^\circ \\ I_1 &= 2I_3 = 2I_4 + 8/0^\circ \end{aligned}$$

As equações da LKT para as malhas 1 e 4 são

$$\begin{aligned} -j1I_1 + 1(I_1 - I_3) &= -12/0^\circ \\ j1(I_4 - I_3) + 1(I_4 - I_2) + 1I_4 &= 0 \end{aligned}$$

Observe que, se as equações de restrição forem substituídas na segunda equação da LKT, a única incógnita na equação será I_4 . Essa substituição fornece

$$I_4 = +4/143,13^\circ \text{ A}$$

e, portanto,

$$V_s = +4/143,13^\circ \text{ V}$$

3. **Teorema de Thévenin** Ao se aplicar o teorema de Thévenin, será determinada a tensão do circuito aberto e, em seguida, pode-se obter a impedância equivalente de Thévenin utilizando uma fonte de teste nos terminais do circuito

aberto. Poder-se-ia determinar a impedância equivalente de Thévenin calculando a corrente de curto-circuito; todavia, essa corrente será determinada ao se aplicar o teorema de Norton.

A tensão do circuito aberto é obtida a partir da rede mostrada na Fig. 8.23a. Note que $I'_1 = 4/0^\circ \text{ A}$ e, como uma corrente igual a $2I'_1$ flui através do indutor, a tensão de circuito aberto V_{ca} é expressa por

$$\begin{aligned} V_{ca} &= -1(4/0^\circ) + j1(2I'_1) \\ &= 4 + j8 \text{ V} \end{aligned}$$

A impedância equivalente de Thévenin será determinada pela desativação das fontes independentes, aplicando uma fonte de tensão de teste aos terminais de saída e calculando a corrente que sai da fonte de teste. Conforme mostrado na Fig. 8.23b, sendo I''_x a corrente que flui através da fonte de teste, a LKC requer que a corrente no indutor seja também I''_x . A LKT ao longo da malha que contém a fonte de teste estabelece que

$$j1I''_x - 1I''_x - V_{\text{teste}} = 0$$

Portanto,

$$I''_x = \frac{-V_{\text{teste}}}{1 - j1}$$

Assim,

$$\begin{aligned} Z_{\text{Th}} &= \frac{V_{ca}}{-I''_x} \\ &= 1 - j1 \Omega \end{aligned}$$

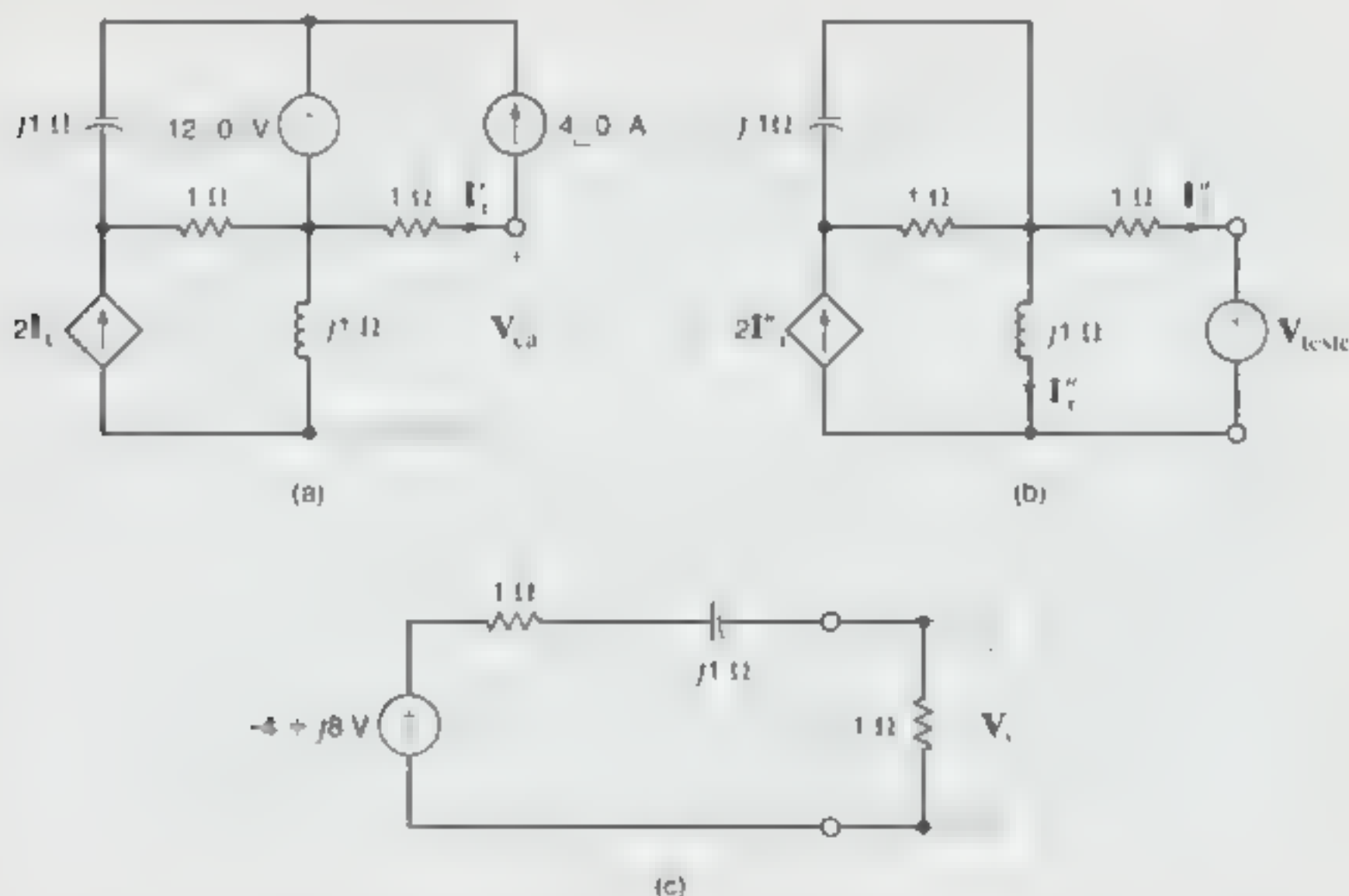


Figura 8.23 Circuitos utilizados no Exemplo 8.16 ao se aplicar o teorema de Thévenin.

Se a rede equivalente de Thévenin for agora conectada à carga, conforme mostrado na Fig. 8.23c, a tensão de saída V_x será

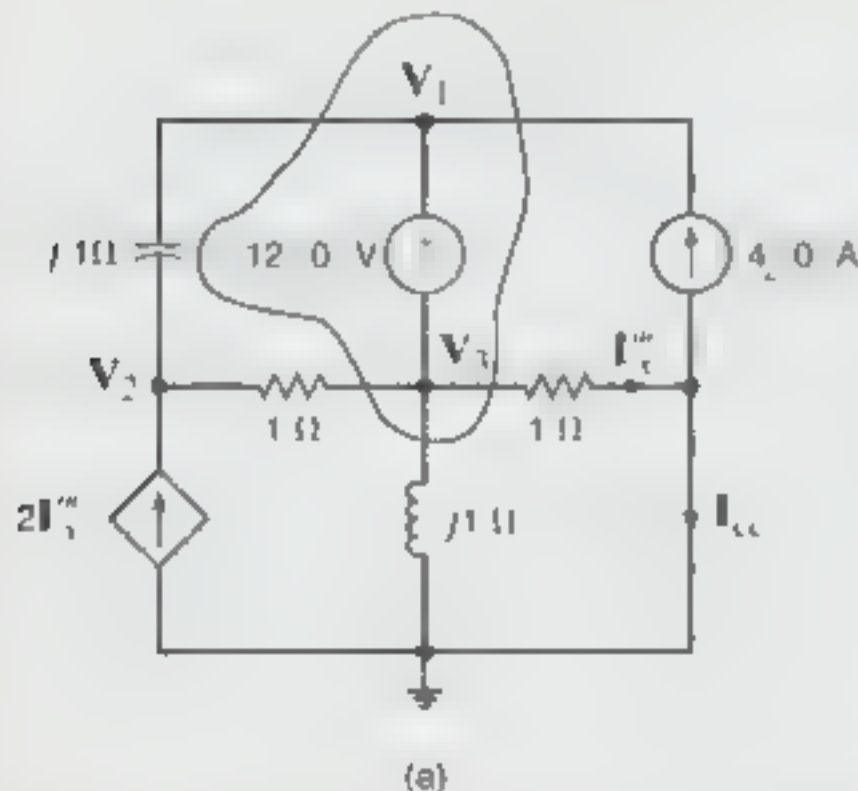
$$V_x = \frac{4 + 8j}{2 - j1} (1) \\ = +4 \angle 143,13^\circ \text{ V}$$

4. **Teorema de Norton** Utilizando o teorema de Norton, será determinada a corrente de curto-circuito da rede mostrada na Fig. 8.24a. Novamente, utilizando o supernó, a equação de restrição e as equações da LKC ficam

$$V_1 = 12 \angle 0^\circ = V \\ V_1 = V_2, \quad V_1 = V_3, \quad 2I_1'' = 0 \\ V_1 - V_2 = V_3 - V_4, \quad 4 \angle 0^\circ + \frac{V_3}{j1} + I_1'' = 0 \\ I_1'' = \frac{V_1}{1}$$

A substituição da primeira e da última equação nas equações remanescentes fornece

$$(1 + j)V_2 - (3 + j)I_1'' = j12 \\ -(1 + j)V_2 + (2)I_1'' = 4 - j12$$



A solução dessas equações para I_1'' fornece

$$I_1'' = \frac{-4}{1 + j} \text{ A}$$

A equação da LKC ao nó mais à direita da rede mostrada na Fig. 8.24a fica

$$I_1'' - 4 \angle 0^\circ + I_{cc} = 0$$

Resolvendo para I_{cc} , obtém-se

$$I_{cc} = \frac{(8 + j4)}{1 + j} \text{ A}$$

A impedância equivalente de Thévenin foi obtida anteriormente como

$$Z_{th} = 1 - j \Omega$$

Utilizando a rede equivalente de Norton, a rede original fica reduzida àquela mostrada na Fig. 8.24b. A tensão V_x será, portanto, igual a

$$V_x = \frac{-(8 + j4)}{1 + j} \left[\frac{(1)(1 - j)}{1 + 1 - j} \right] \\ = -4 \left[\frac{3 + j}{2 - j} \right] \\ = +4 \angle 143,13^\circ \text{ V}$$

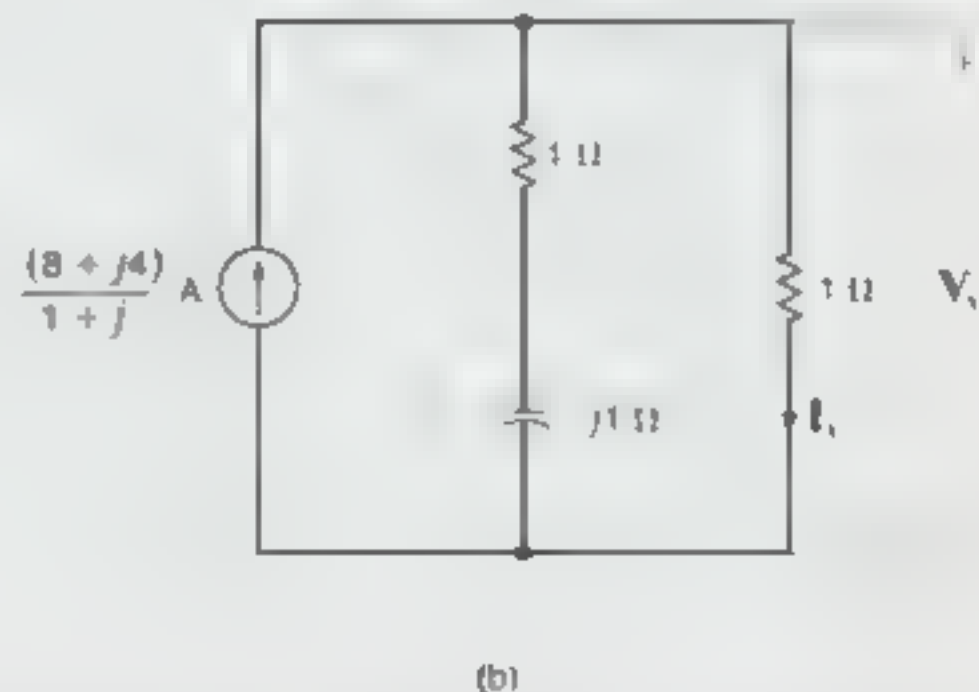
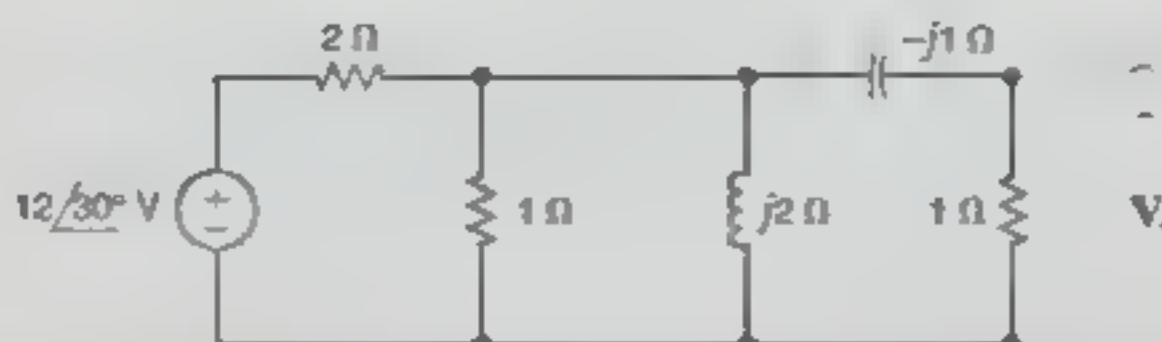


Figura 8.24 Circuitos utilizados no Exemplo 8.16 ao se aplicar o teorema de Norton.

Avaliação do Aprendizado

E8.17 Utilize a análise nodal para obter a tensão V_x da rede mostrada na Fig. E8.17



RESPOSTA: $V_x = 2,12 \angle 75^\circ \text{ V}$.

Figura E8.17

E8.18 Determine a corrente I_1 do circuito mostrado na Fig. E8.18 utilizando a análise nodal.

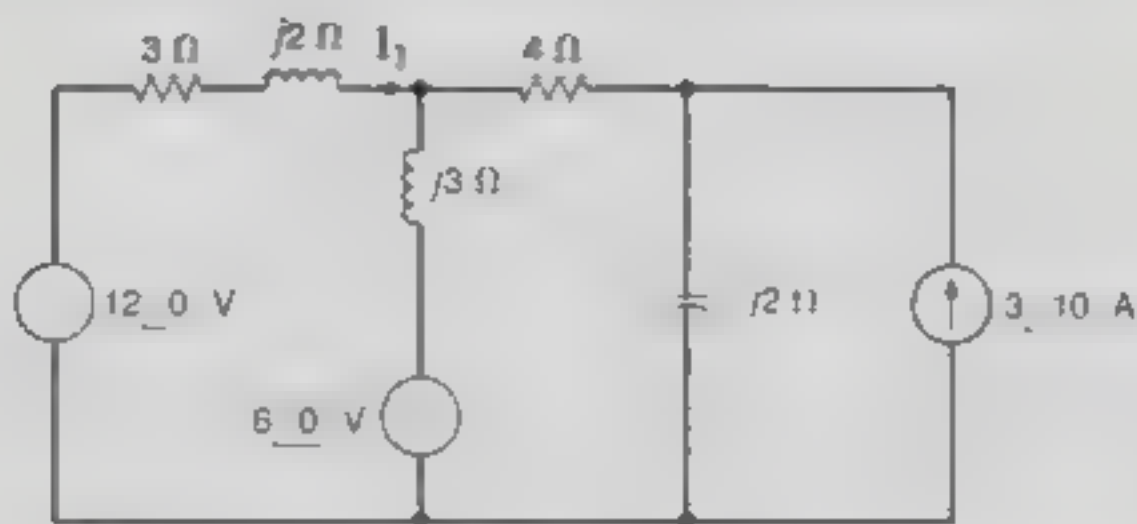


Figura E8.18

RESPOSTA:

$$I_1 = 0.7781 \angle -161.9^\circ \text{ A.}$$

E8.19 Determine a tensão V_x da rede mostrada na Fig. E8.19 utilizando (a) a análise nodal e (b) a análise das malhas.

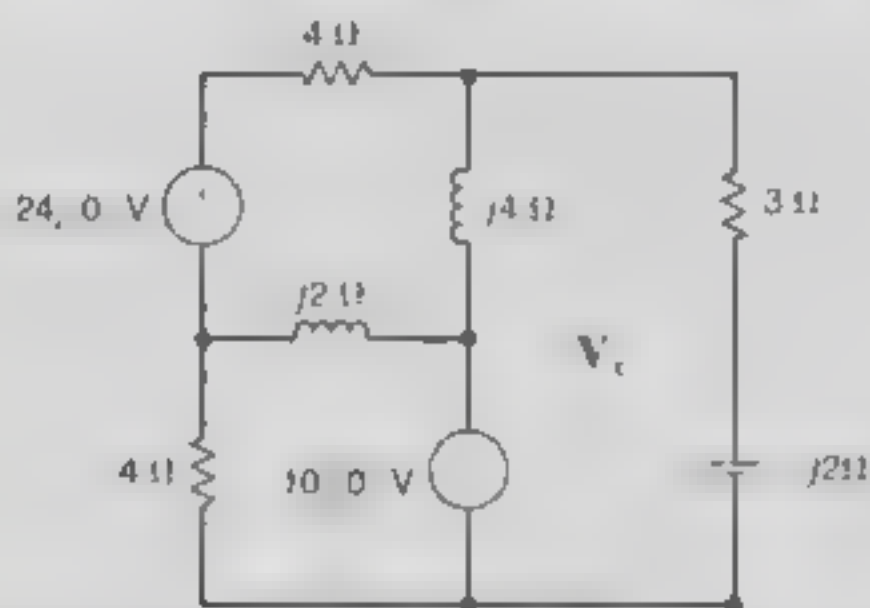


Figura E8.19

RESPOSTA:

$$V_x = 17.4 \angle -21.62^\circ \text{ V.}$$

E8.20 Utilize (a) as equações das malhas e (b) o teorema de Thévenin para obter a tensão V_x da rede mostrada na Fig. E8.20.

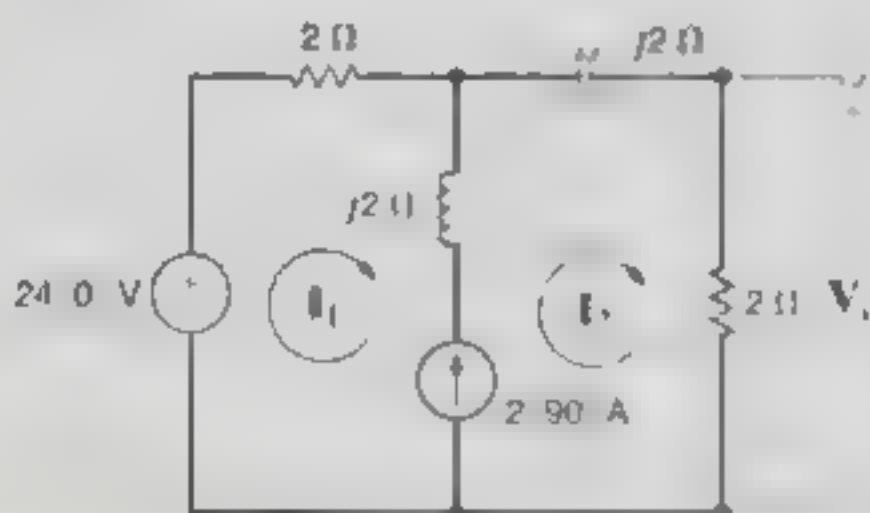


Figura E8.20

RESPOSTA:

$$V_x = 10.88 \angle 36^\circ \text{ V.}$$

E8.21 Determine a tensão V_x da rede mostrada na Fig. E8.21 utilizando a análise das malhas.

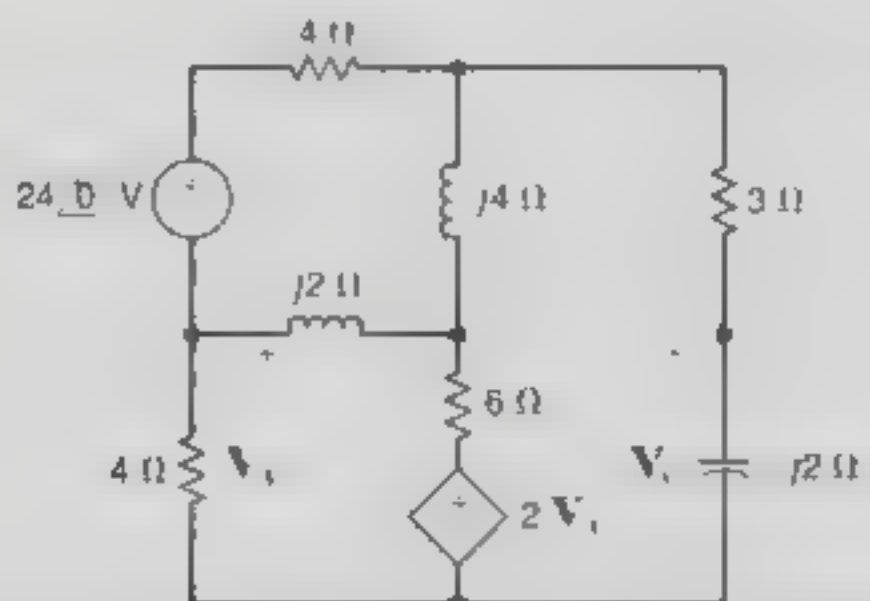
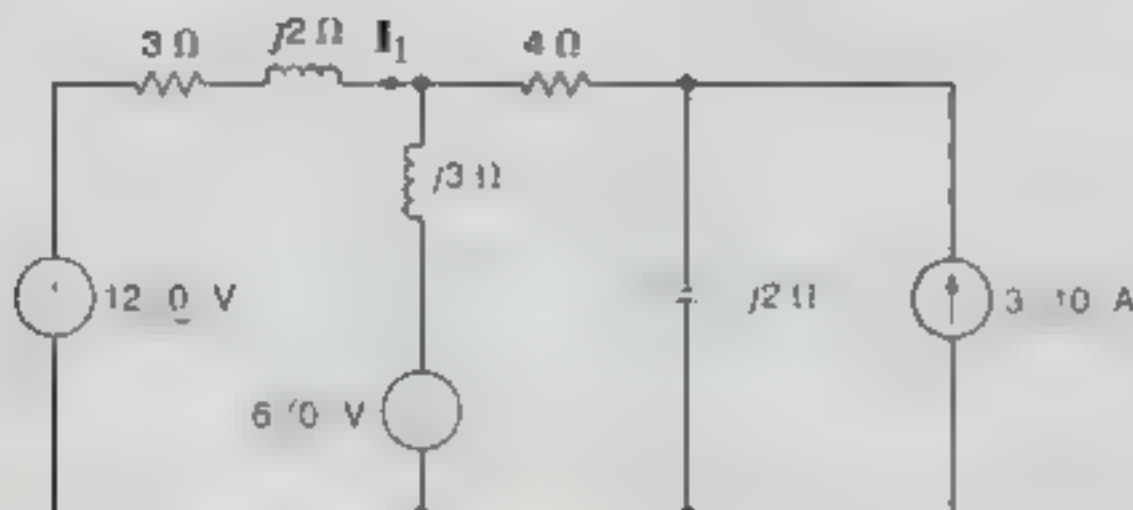


Figura E8.21

RESPOSTA:

$$V_x = 1.4654 \angle -12.34^\circ \text{ V}$$

E8.22 Determine a corrente I_1 do circuito mostrado na Fig. E8.18 utilizando o princípio da superposição.

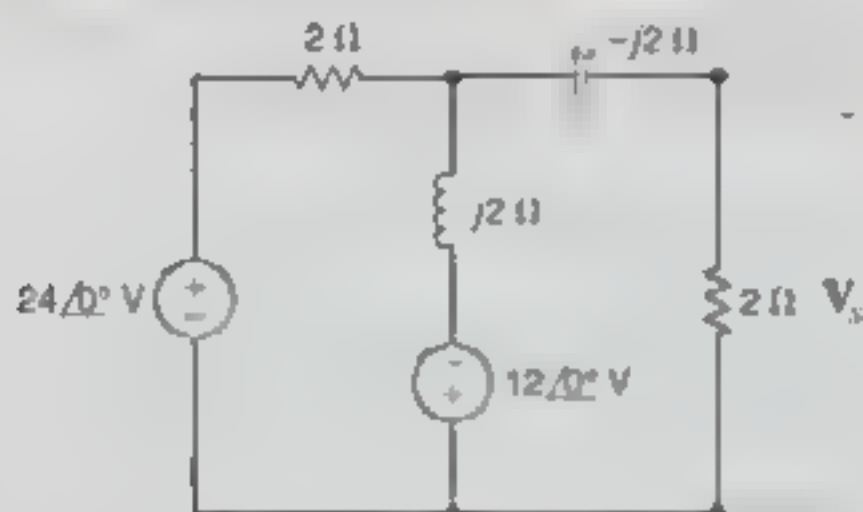


RESPOSTA:

$$I_1 = 0,7781 \angle -161,9^\circ \text{ V.}$$

Figura E8.22

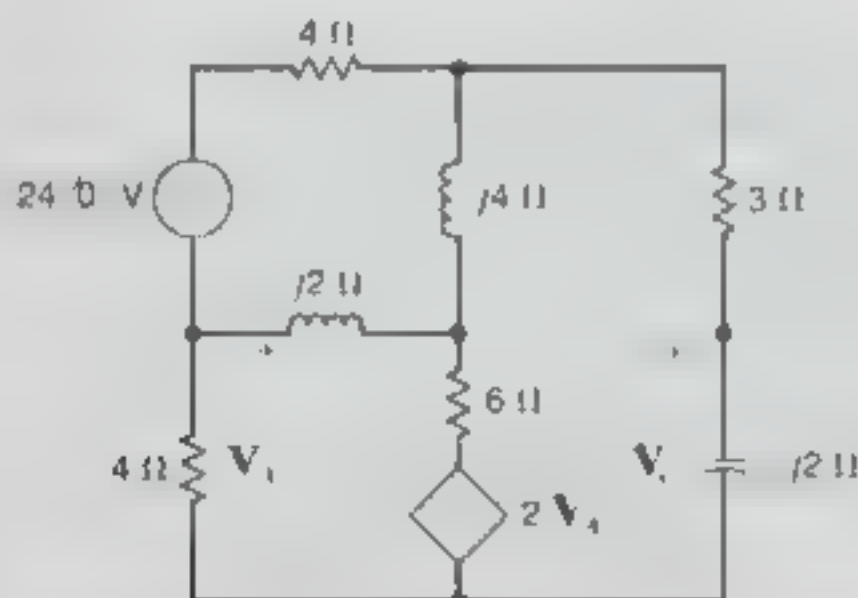
E8.23 Utilize (a) o princípio da superposição, (b) a transformação de fonte e (c) o teorema de Norton para obter a tensão V_x da rede mostrada na Fig. E8.23.



RESPOSTA: $V_x = 12 \angle 90^\circ \text{ V.}$

Figura E8.23

E8.24 Determine a tensão V_x da rede mostrada na Fig. E8.24 utilizando o teorema de Thévenin.



RESPOSTA:

$$V_x = 1,4654 \angle -12,34^\circ \text{ V.}$$

Figura E8.24

EXEMPLO 8.17

Seja a determinação da corrente $i(t)$ do circuito mostrado na Fig. 8.25. À primeira vista, parece ser um circuito simples de uma única malha. Uma observação mais detalhada revela que as duas fontes operam a diferentes frequências. A frequência angular da fonte da esquerda é de 10 rad/s, enquanto a fonte da direita opera a uma frequência angular de 20 rad/s. Ao se desenhar o circuito no domínio da frequência, que frequência deve ser utilizada? Como se pode resolver este problema?

SOLUÇÃO

Lembre-se de que o princípio da superposição estabelece que o circuito pode ser analisado com cada fonte operando isoladamente. As respostas do circuito para cada fonte atuando isoladamente são então superpostas de modo a se obter a resposta para ambas as fontes atuando simultaneamente. Pode-se, assim, utilizar o princípio da superposição para resolver este problema. Inicialmente, calcula-se a resposta $i'(t)$ referente à fonte da esquerda utilizando o circuito mostrado na Fig. 8.26a. Desenha-se agora um circuito no domínio da frequência para $\omega = 10$ rad/s.

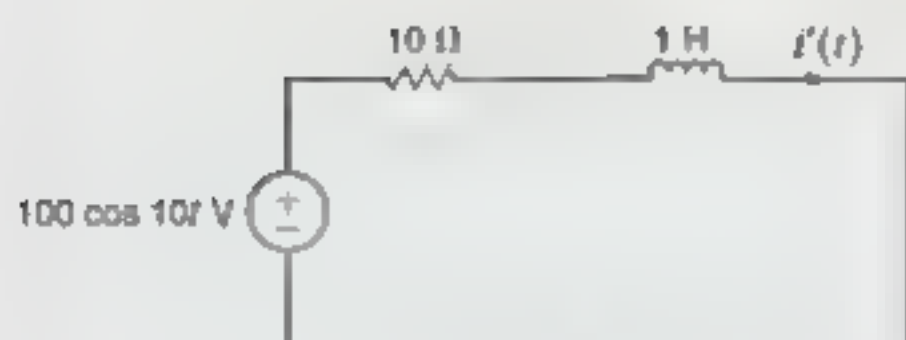
Assim, $\mathbf{I} = \frac{100 \angle 0^\circ}{10 + j10} = 7,07 \angle -45^\circ$ A. Portanto, $i(t) = 7,07 \cos(10t - 45^\circ)$ A.

A resposta devida à fonte da direita pode ser determinada utilizando o circuito mostrado na Fig. 8.27. Note que a corrente $i'(t)$ é definida no sentido oposto a $i(t)$ no circuito original. O circuito no domínio da frequência para $\omega = 20$ rad/s também é mostrado na Fig. 8.27b.

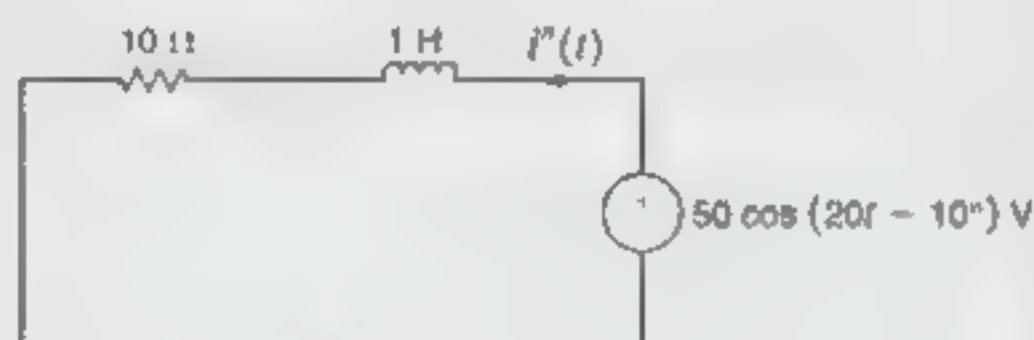
A corrente $\mathbf{I}' = \frac{50 \angle -10^\circ}{10 + j20} = 2,24 \angle -73,43^\circ$ A. Portanto, $i'(t) = 2,24 \cos(20t - 73,43^\circ)$ A. A corrente $i(t)$ pode agora ser calculada como $i(t) = i(t) - i'(t) = 7,07 \cos(10t - 45^\circ) - 2,24 \cos(20t - 73,43^\circ)$ A.



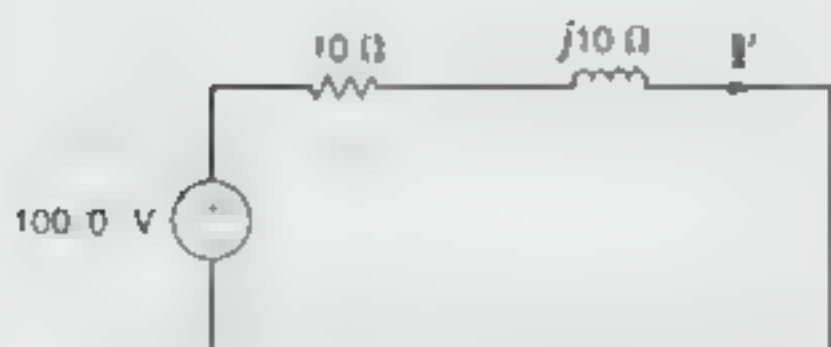
Figura 8.25 Circuito utilizado no Exemplo 8.17.



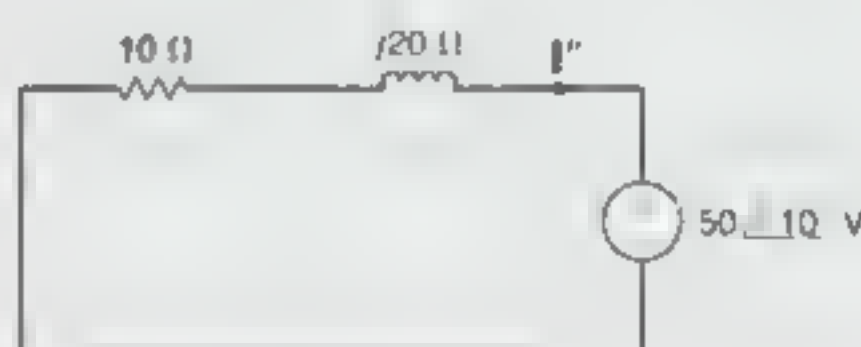
(a)



(a)



(b)



(b)

Figura 8.26 Circuitos utilizados para ilustrar a superposição.

Figura 8.27 Circuitos utilizados para ilustrar a superposição.

8.9 Exemplos de Aplicação

EXEMPLO DE APLICAÇÃO 8.18

A rede mostrada na Fig. 8.28 modela uma situação comum, porém, desagradável. O nó A, que apresenta a tensão $v_c(t)$ na saída de um sensor de temperatura, capta uma tensão de alta frequência, $v_{\text{ruído}}(t)$, causada por uma estação de rádio AM que opera nas vizinhanças. A frequência do ruído é de 700 kHz. Nesse cenário particular, a tensão do sensor, que representa uma temperatura, tende a variar ligeiramente. A questão que se coloca é: como modificar o circuito para reduzir o ruído na saída sem perturbar o sinal desejado, $v_c(t)$?

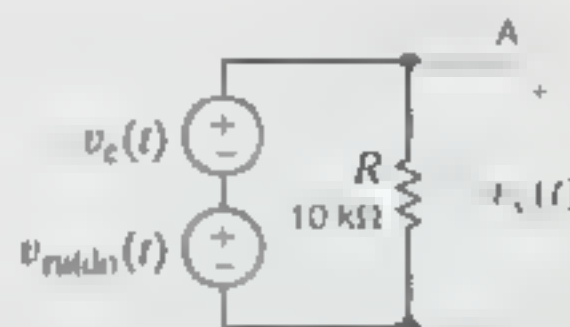


Figura 8.28 Modelo da captação do ruído de radiofrequência.

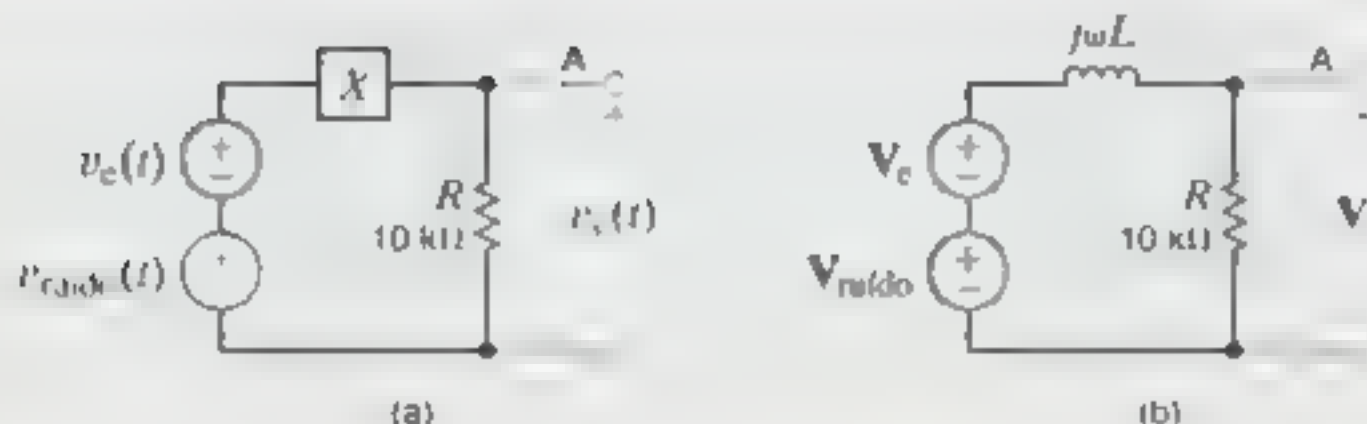


Figura 8.29 (a) Modelo utilizado para rejeitar a tensão V_{ruido} e (b) o componente requerido.

SOLUÇÃO

Considere a rede mostrada na Fig. 8.29a. Se o componente X apresenta uma alta impedância, ou seja, muito maior que R a 700 kHz, e uma impedância de zero na condição CC, será possível minorar o problema. Utilizando a divisão de tensão para se obter a tensão V_x do circuito mostrado na Fig. 8.29b, tem-se

$$V_x = \left[\frac{R}{R + j\omega L} \right] V_c$$

em que V_c e ω são V_c e 0, ou V_{ruido} e $2\pi(700 \times 10^3)$ rad/s. Na condição CC, $\omega = 0$, a impedância do indutor é nula, a razão

da divisão de tensão é unitária, V_x é igual a V_c , e V_x é igual a V_c . Porém, em 700 kHz, V_x é igual a V_{ruido} e a razão da divisão de tensão desejada deve ser muito pequena; isto é, a impedância do indutor deve ser maior que R , de modo que V_x se torna próximo de zero. Escolhendo-se uma redução de 90% do ruído na saída, obtém-se

$$\left| \frac{R}{R + j\omega L} \right| = \frac{1}{10} \quad \text{a } f = 700 \text{ kHz}$$

A solução dessa equação fornece $L = 22,6$ mH, valor este que é próximo dos valores padronizados para os indutores.

EXEMPLO DE APLICAÇÃO 8.19

O circuito mostrado na Fig. 8.30 é chamado de Conversor Geral de Impedância (ou GIC – *General Impedance Converter*). Deseja-se desenvolver uma expressão para a impedância Z_{eq} em função de Z_1 , Z_2 , Z_3 , Z_4 e Z_5 e, em seguida, utilizando resistores de valores idênticos e um capacitor de 1 μF , criar uma indutância equivalente de 1 H.

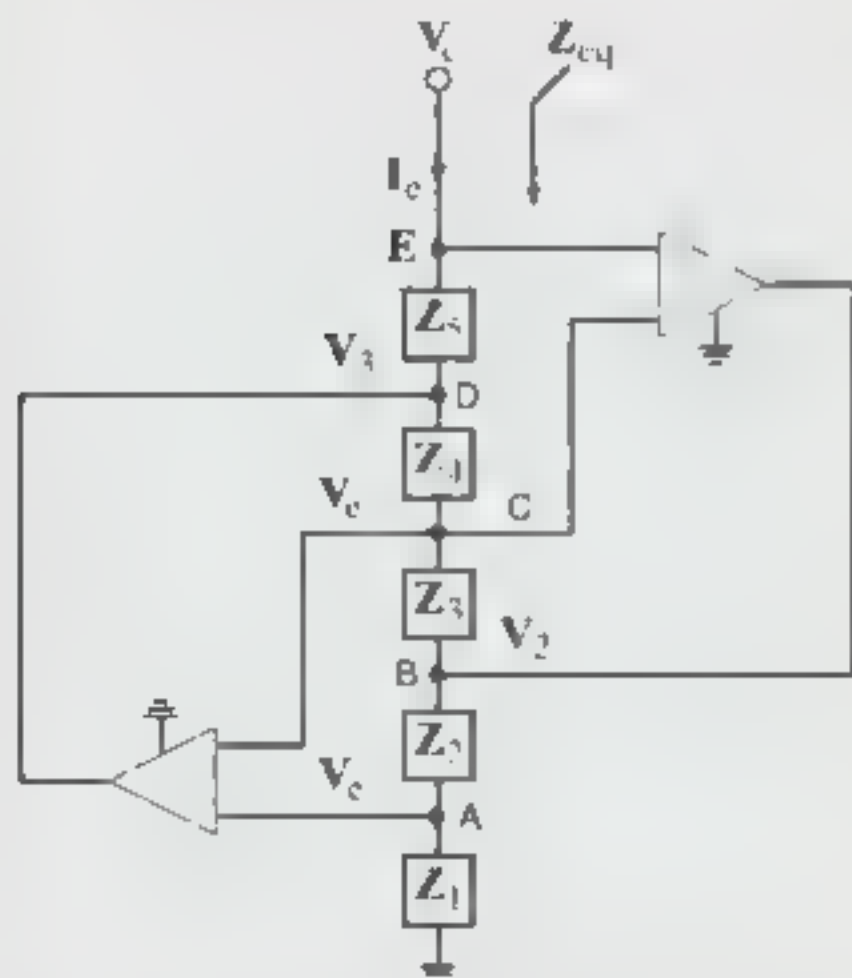


Figura 8.30 Conversor geral de impedância.

SOLUÇÃO

Neste caso, simplesmente emprega-se a hipótese de amplificador operacional ideal (op-amp ideal); isto é, não existe corrente entrando em nenhuma entrada do op-amp, e a tensão entre quaisquer terminais de entrada do op-amp é nula. Como resultado, a tensão em ambos os nós, A e C, é V_c . Em seguida, aplica-se a LKC em cada entrada do op-amp. No nó A,

$$\frac{V_2 - V_c}{Z_2} = \frac{V_c}{Z_1}$$

o que fornece

$$V_2 = V_c \left[1 + \frac{Z_2}{Z_1} \right] \quad (8.47)$$

Para o nó C, obtém-se

$$\frac{V_3 - V_c}{Z_3} = \frac{V_c}{Z_4}$$

Resolvendo para V_3 , tem-se

$$V_3 = V_c \left[1 + \frac{Z_3}{Z_4} \right] = V_c \left[\frac{Z_4 + Z_3}{Z_4} \right]$$

Com a substituição dos resultados da Eq. (8.47), pode-se expressar V_3 como

$$V_3 = V_c \left[1 + \frac{Z_2 Z_3}{Z_1 Z_4} \right] \quad (8.48)$$

Para o nó E, escreve-se

$$I_1 = \frac{V_i - V_3}{Z_1}$$

Em seguida, utilizando a expressão de V_3 na Eq. (8.48), obtém-se

$$I_c = V_c \begin{bmatrix} Z_2 Z_4 \\ Z_1 Z_3 Z_5 \end{bmatrix}$$

Finalmente, a impedância de interesse é

$$Z_{eq} = \frac{V_c}{I_c} = \begin{bmatrix} Z_2 Z_4 \\ Z_1 Z_3 Z_5 \end{bmatrix}$$

Agora, se $Z_1 = Z_3 = Z_5 = Z_2 = R$ e $Z_4 = 1/j\omega C$, então, Z_{eq} é calculada como

$$Z_{eq} = j\omega CR^2 = j\omega L_{eq}$$

Assim, o valor de R necessário para se obter uma indutância de 1 H é 1000 Ω . Neste ponto, deve-se responder à seguinte questão: por que todo este trabalho para se obter a indutância? A resposta é: dimensão e peso. Um indutor de 1 H seria muito grande e pesado. O GIC é de fácil construção a partir de componentes de circuito integrado, requer pouco espaço e pesa apenas alguns gramas!

8.10 Exemplos de Projeto

EXEMPLO DE PROJETO 8.20

No Capítulo 4 verificou-se que o op-amp propicia um método fácil e efetivo na produção de um ganho em tensão controlável. Com base nesses estudos preliminares, tem-se a expectativa de obter ganhos a partir desses dispositivos "ativos" em configurações similares àquela mostrada na Fig. 8.31a. Entretanto, um engenheiro experiente sugeriu que se poderia obter um determinado ganho a partir da configuração apropriada de componentes "passivos", conforme ilustrado na Fig. 8.31b, e propôs o circuito apresentado na Fig. 8.31c. Portanto, seja a utilização dessa configuração sugerida para atender ao projeto de um ganho de 10 a uma frequência de 1 kHz, considerando que a carga seja de 100 Ω .

SOLUÇÃO

O ganho em tensão da rede mostrada na Fig. 8.31c pode ser expresso como

$$\frac{V_o}{V_c} = \begin{bmatrix} Z \\ Z + \frac{1}{j\omega C} \end{bmatrix}$$

em que

$$Z = \frac{(j\omega L)R}{j\omega L + R}$$

A combinação dessas duas equações seguida do rearranjo dos termos fornece a expressão

$$\frac{V_o}{V_c} = \left[\frac{j\omega L}{j\left[\omega L - \frac{1}{\omega C}\right] + \frac{L}{CR}} \right]$$

Sabe-se que, para se obter uma amplificação, o denominador deve ser menor que o numerador. Além disso, o denominador será reduzido se as reatâncias do indutor e do capacitor forem de mesma magnitude, uma vez que possuem sinais opostos. Assim, selecionando-se os parâmetros de modo que $\omega^2 LC = 1$, a reatância do indutor será cancelada com a do capacitor. Nessas condições, o ganho é reduzido a

$$\frac{V_o}{V_c} = j\omega RC$$

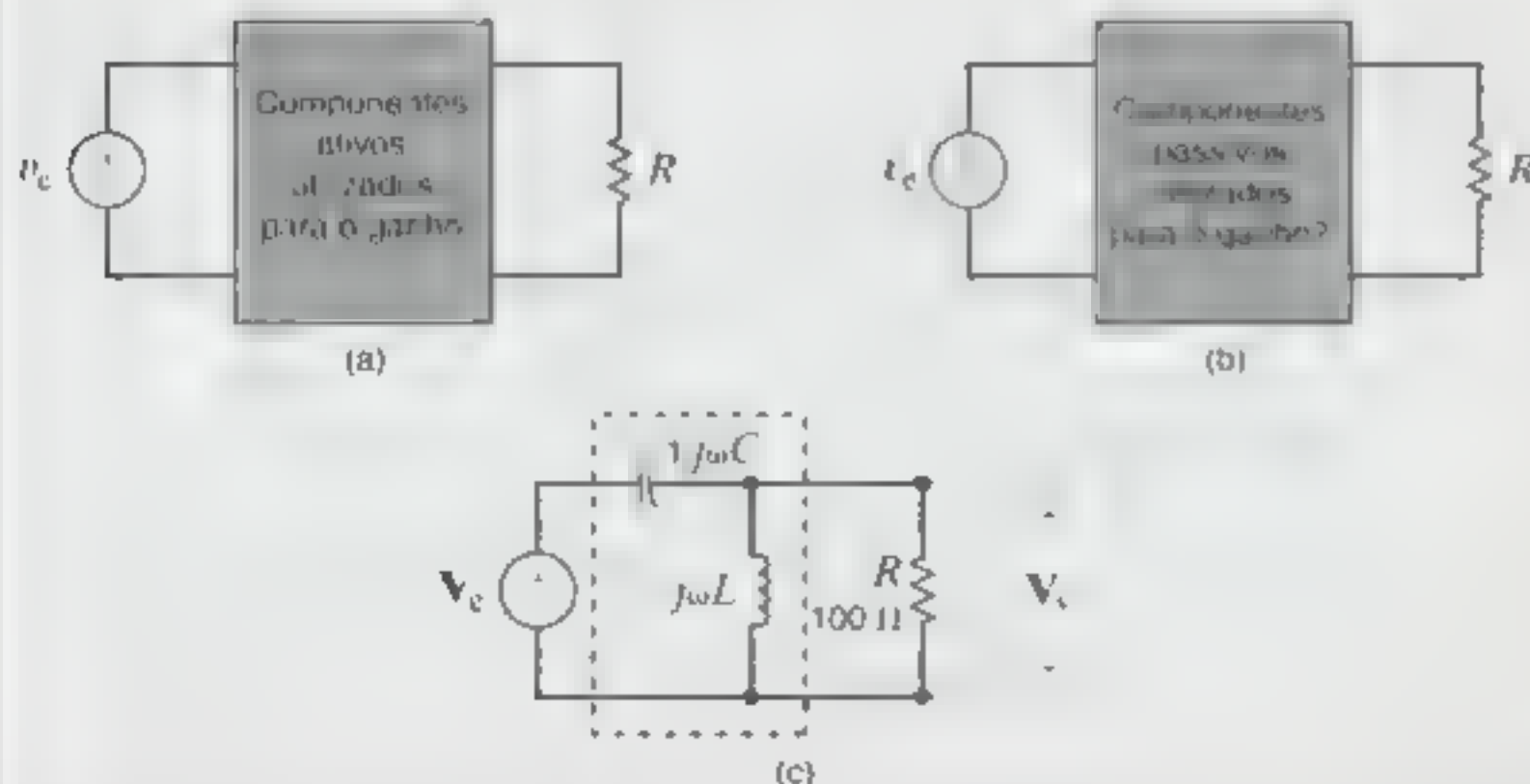


Figura 8.31 Configurações de circuito utilizadas no Exemplo 8.20.

Para os valores fornecidos da carga e da frequência, um valor de $15,9 \mu\text{F}$ para o capacitor propiciará o ganho requerido. O valor do indutor pode então ser obtido a partir da equação de restrição

$$\omega^2 LC = 1$$

que fornece $L = 1,59 \text{ mH}$. Deve-se notar que, se a frequência for modificada, as impedâncias tanto do indutor quanto do capacitor também serão alteradas, havendo como consequência uma alteração no ganho. Finalmente, será visto, em um capítulo posterior, que a equação $\omega^2 LC = 1$ é uma expressão extremamente importante que pode propiciar um efeito dramático nos circuitos,

EXEMPLO DE PROJETO 8.21

Um sinal harmônico, $v_1(t) = 2,5 \cos(\omega t)$ quando superposto a um nível CC de $V_2 = 2,5 \text{ V}$, gera um sinal de sincronismo de 0 a 5 V utilizado para controlar um microprocessador. Seja o projeto do circuito apropriado para uma frequência de oscilação do sinal de 1 GHz.

SOLUÇÃO

Conforme discutido no Capítulo 4, essa aplicação parece conduzir naturalmente ao uso de um op-amp somador. Entretanto, a frequência de oscilação (1 GHz) é muito maior que a frequência máxima suportada pela maioria dos op-amps – tipicamente inferior a 200 MHz. Como neste caso não é requerida nenhuma amplificação, deve-se projetar um op-amp somador que possa realizar o trabalho, embora seja menos preciso.

Considere o circuito mostrado na Fig. 8.32a, no qual as entradas $v_1(t)$ e V_2 sejam conectadas de modo a fornecer a saída

$v_2(t)$. Para essa aplicação, o componente A deve evitar que qualquer componente CC em $v_1(t)$ atinja a saída, porém deve permitir que um sinal de 1 GHz passe por ele. De modo análogo, o componente B deve permitir a passagem de V_2 enquanto bloqueia qualquer sinal de alta frequência. Assim, a impedância do componente A deve ser infinita para sinais CC e muito baixa para sinais de 1 GHz. Dessa forma, a impedância do componente B deve ser nula para sinais CC e muito alta para sinais de alta frequência. Os estudos anteriores indicaram que o componente A deve ser um capacitor e o componente B um indutor. O circuito resultante, chamado de *bias T*, é mostrado na Fig. 8.32b.

Os valores de C e L são dependentes tanto da frequência do sinal quanto da precisão requerida na operação de soma, e podem ser facilmente verificados utilizando-se a superposição para investigar a contribuição de cada entrada em $v_2(t)$. Na Fig. 8.33a, a tensão CC V_2 foi reduzida a zero e um circuito

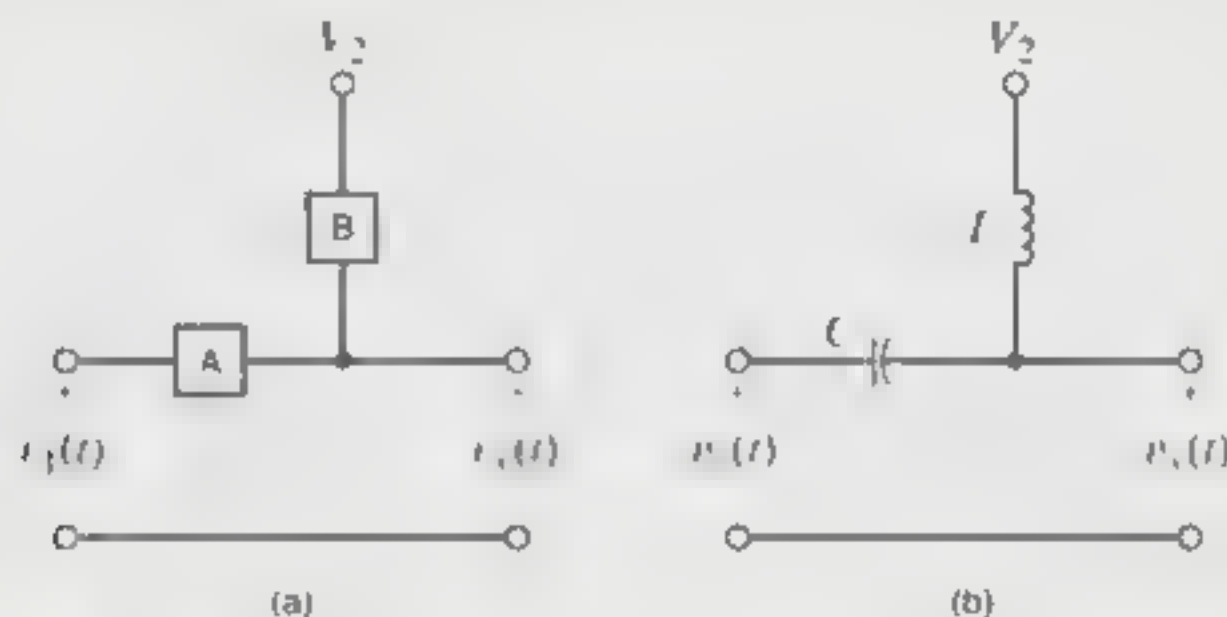


Figura 8.32 (a) Circuito somador passivo simples e (b) uma solução – o circuito bias T.

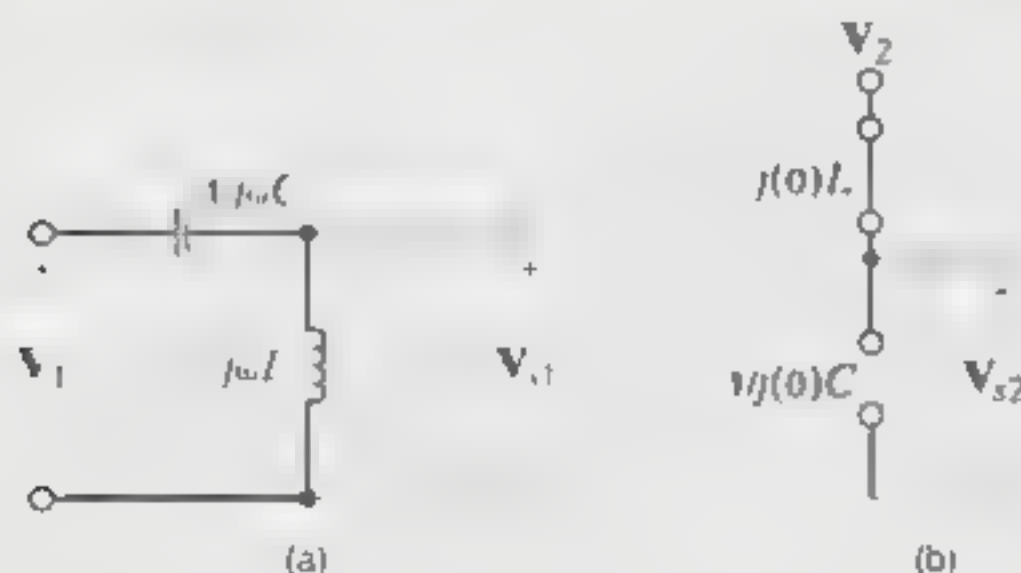


Figura 8.33 Análise do circuito bias T pela superposição de circuitos CA em regime estacionário com (a) $V_2 = 0$ e (b) $v_1(t) = 0$.

CA foi construído a uma frequência de 1 GHz, isto é, a frequência de $v_1(t)$. Utilizando a divisão de tensão, pode-se expressar a tensão de saída como

$$V_{s1} = \left[\frac{j\omega L}{j\omega L - \frac{j}{\omega C}} \right] V_1 = \left[\frac{\omega^2 LC}{\omega^2 LC - 1} \right] V_1 \quad 8.50$$

Observe que, para se obter um somador perfeito, a razão da divisão de tensão deve ser unitária. Entretanto, essa razão da divisão de tensão requer a condição não prática de $\omega^2 LC$ igual a infinito.

Em vez disso, o problema será desenvolvido escolhendo-se valores para as reatâncias indutiva e capacitiva. Conforme estabelecido anteriormente, a reatância capacitiva deve ser pequena; escolhe-se $1 \, \Omega$. E a reatância indutiva deve ser alta; $10 \, \text{k}\Omega$, por exemplo. Os valores resultantes para os valores de L e C são

$$C = \frac{1}{\omega X_C} = \frac{1}{2\pi \times 10^9} = 159 \, \text{pF}$$

e

$$L = \frac{X_L}{\omega} = 1,59 \, \mu\text{H}$$

Considera-se agora a tensão V_2 . Na Fig. 8.33b, a tensão $v_1(t)$ foi reduzida a zero e um circuito CA foi desenhado para sinais CC – a frequência de V_2 . Novamente, a divisão de tensão pode ser utilizada para expressar a tensão de saída. Entretanto, nota-se que as impedâncias do capacitor e do indutor são, respectivamente, infinita e unitária. Como resultado, a saída é *exatamente* igual a V_2 independentemente dos valores de C e L ! Assim, a tensão de saída consiste em duas tensões, uma em CC e outra a uma frequência de 1 GHz. A componente CC é exatamente igual a V_2 , isto é, 2,5 V. Pela Eq. (8.50), a componente ca a 1 GHz é

$$V = \left[\frac{j10.000}{j10.000 - j1} \right] 2,5 \angle 0^\circ = 2,50025 \angle 0^\circ \, \text{V}$$

Retornando-se ao domínio do tempo, a tensão de saída com três algarismos significativos, é expressa por

$$v_s(t) = 2,5 + 2,5 \cos[2\pi(10^9)t] \, \text{V}$$

RESUMO

- **A definição de função harmônica** A função harmônica $x(t) = X_M \sin(\omega t + \theta)$ possui uma amplitude X_M , uma frequência ω em radianos por segundo, um período de $2\pi/\omega$ e um ângulo de fase θ .
- **As definições de fase adiantada e fase atrasada** Se $x_1(t) = X_{M1} \sin(\omega t + \theta)$ e $x_2(t) = X_{M2} \sin(\omega t + \phi)$, $x_1(t)$ estará adiantada de $x_2(t)$ de um ângulo de $\theta - \phi$ radianos e $x_2(t)$ estará atrasada de $x_1(t)$ de um ângulo de $\theta - \phi$ radianos.
- **A definição de fasor** A tensão harmônica $v(t) = V_M \cos(\omega t + \theta)$ pode ser escrita na forma exponencial como $v(t) = \text{Re}[V_M e^{j(\omega t + \theta)}]$ e na forma fasorial como $V = V_M \angle \theta$.
- **A relação de fase em θ_v e θ_i para os elementos R , L e C** Se θ_v e θ_i representam os ângulos de fase da tensão entre os terminais e da corrente por meio de um elemento de circuito, então, $\theta_v = \theta_i$ se o elemento for um resistor, θ_v estará atrasado de 90° em relação a θ_i se o elemento for um indutor e θ_v estará adiantado de 90° em relação a θ_i se o elemento for um capacitor.
- **As impedâncias de R , L e C** A impedância, Z , é definida como a relação entre o fasor da tensão, V , e o fasor da corrente, I , em que $Z = R$ para um resistor, $Z = j\omega L$ para um indutor e $Z = 1/j\omega C$ para um capacitor.

- **Diagramas de fasores** Os diagramas de fasores podem ser utilizados para mostrar a relação entre a magnitude e a fase de várias tensões e correntes em uma rede.

Análise no domínio da frequência

1. Represente todas as tensões, $v(t)$ e todas as correntes, $i(t)$, como fasores e represente todos os elementos passivos por suas impedâncias ou admitâncias.
2. Resolva o problema para os fasores incógnitos no domínio da frequência (ω).
3. Transforme os agora conhecidos fasores de volta para o domínio do tempo.

Técnicas de solução para os problemas de regime estacionário de circuitos CA

Lei de Ohm
LKC e LKT
Análise nodal e análise dos laços
Princípio da superposição e troca de fonte
Teorema de Thévenin
Teorema de Norton

PROBLEMAS

8.1 Dada a corrente $i(t) = 5 \cos(400t - 120^\circ)$ A, determine o período da corrente e a frequência em Hertz.

8.2 Determine a relação de fase relativa das duas ondas a seguir.

$$v(t) = 10 \cos(377t - 30^\circ) \text{ V}$$

$$i(t) = 10 \cos(377t + 90^\circ) \text{ V}$$

8.3 Dadas a tensão e a corrente a seguir,

$$i(t) = 5 \sin(377t - 20^\circ) \text{ V}$$

$$v(t) = 10 \cos(377t + 30^\circ) \text{ V}$$

determine a relação de fase entre $i(t)$ e $v(t)$.

8.4 Determine os ângulos de fase para os quais $v_1(t)$ se adianta relativamente a $i_1(t)$ e $v_1(t)$ se adianta relativamente a $i_2(t)$, em que

$$v_1(t) = 4 \sin(377t + 25^\circ) \text{ V}$$

$$i_1(t) = 0,05 \cos(377t - 20^\circ) \text{ A}$$

$$i_2(t) = -0,1 \sin(377t + 45^\circ) \text{ A}$$

8.5 Calcule a corrente no capacitor da rede mostrada na Fig. P8.5 se a tensão de entrada vale

(a) $v_1(t) = 10 \cos(377t - 30^\circ) \text{ V}$.

(b) $v_2(t) = 12 \sin(377t + 60^\circ) \text{ V}$.

Forneça as respostas nos domínios do tempo e da frequência.

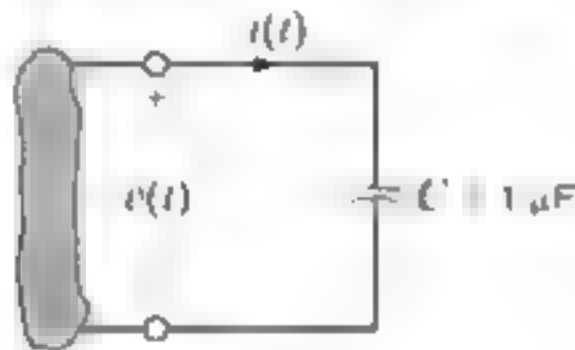


Figura P8.5

8.6 Determine a impedância Z no domínio da frequência, conforme mostrado na Fig. P8.6.

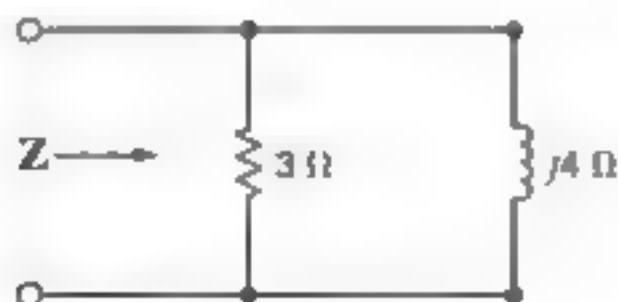


Figura P8.6

8.7 Determine a impedância, Z , mostrada na Fig. P8.7 a uma frequência de 60 Hz.

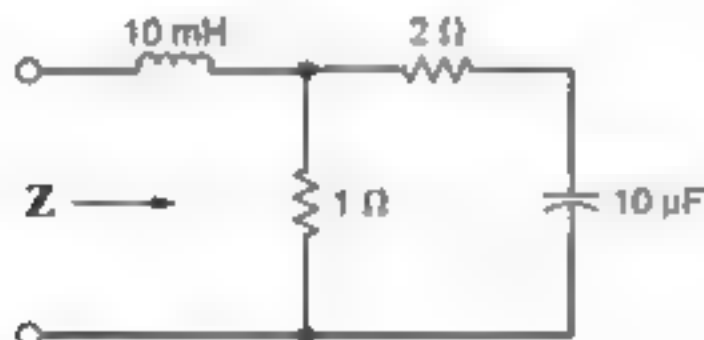


Figura P8.7

8.8 Determine a admitância equivalente do circuito mostrado na Fig. P8.8 considerando $\omega = 10 \text{ rad/s}$.

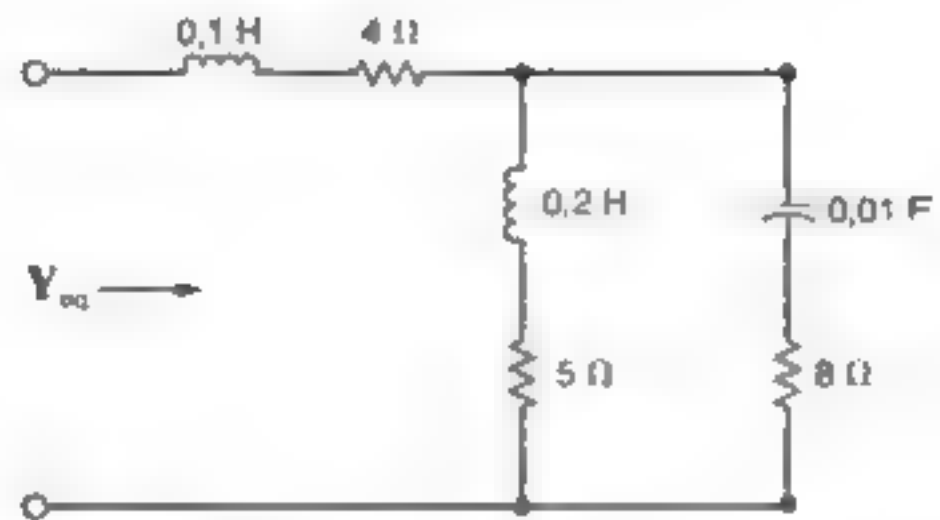


Figura P8.8

8.9 Determine a impedância equivalente da rede mostrada na Fig. P8.9.

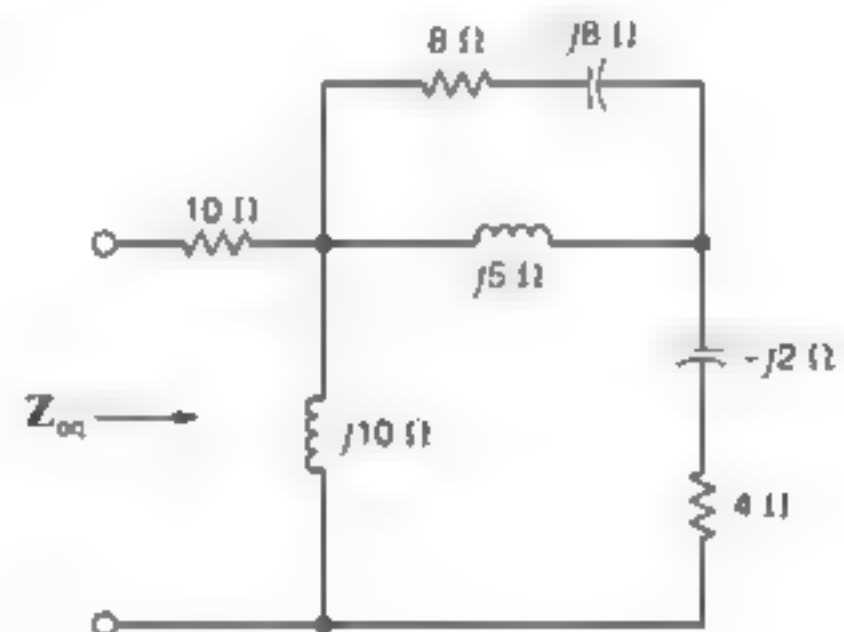


Figura P8.9

8.10 Determine a impedância Z no domínio da frequência conforme indicado na Fig. P8.10.

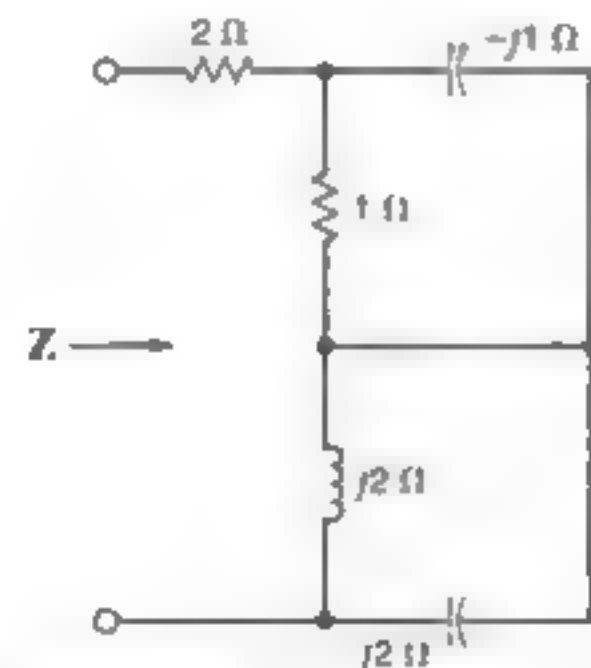


Figura P8.10

8.11 Determine a impedância Z da rede mostrada na Fig. P8.11.

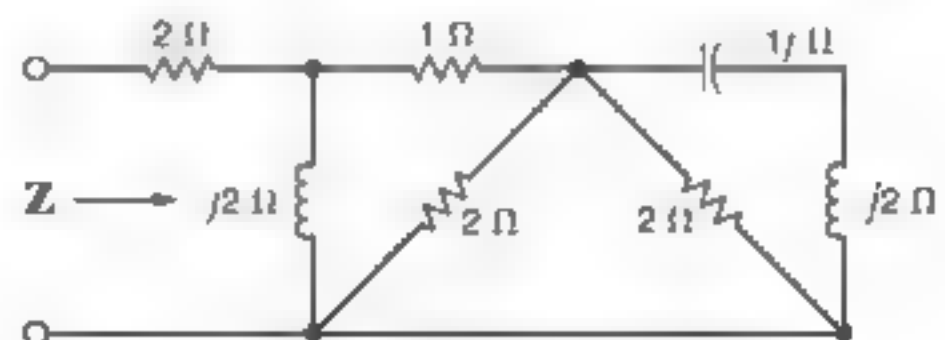


Figura P8.11

- 8.12** Determine a impedância, Z , mostrada na Fig. P8.12 a uma frequência de 400 Hz.

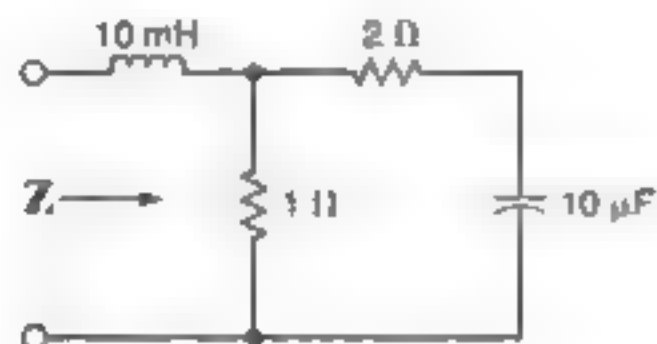


Figura P8.12

- 8.13** Determine a impedância, Z , mostrada na Fig. P8.13 a uma frequência de 60 Hz.

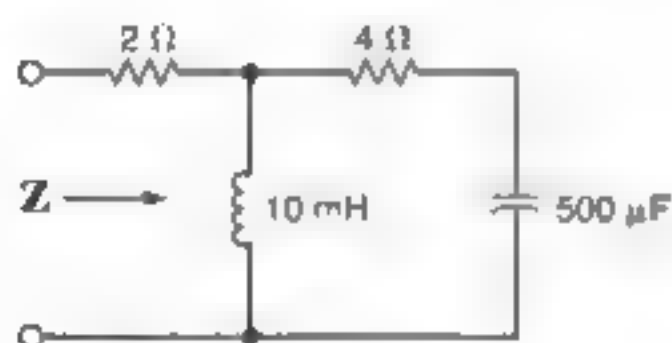


Figura P8.13

- 8.14** Determine a impedância Z no domínio da frequência, conforme mostrado na Fig. P8.14.

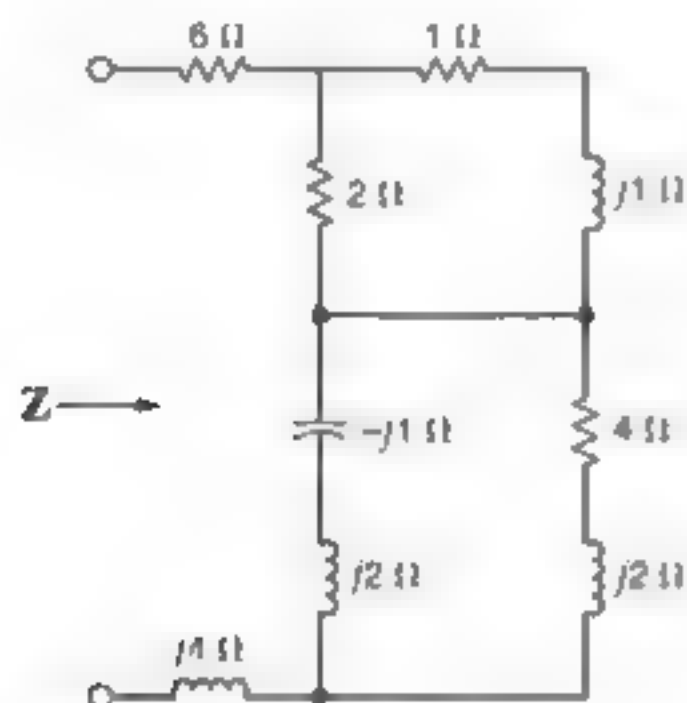


Figura P8.14

- 8.15** No circuito mostrado na Fig. P8.15, determine o valor da indutância de modo que a corrente esteja em fase com a fonte de tensão.

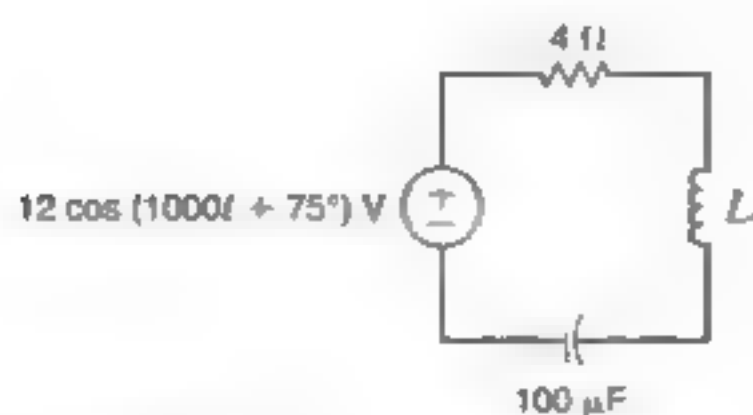


Figura P8.15

- 8.16** Determine o valor do capacitor C do circuito mostrado na Fig. P8.16 de modo que a impedância Z seja puramente resistiva a uma frequência de 60 Hz.

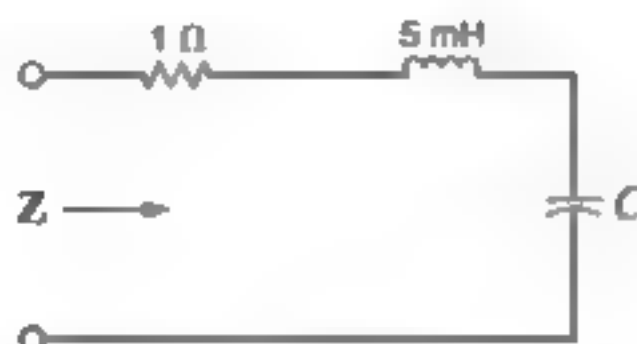


Figura P8.16

- 8.17** Determine o valor da capacitância, C , mostrada no circuito da Fig. P8.17 de modo que a corrente $i(t)$ esteja em fase com a fonte de tensão.

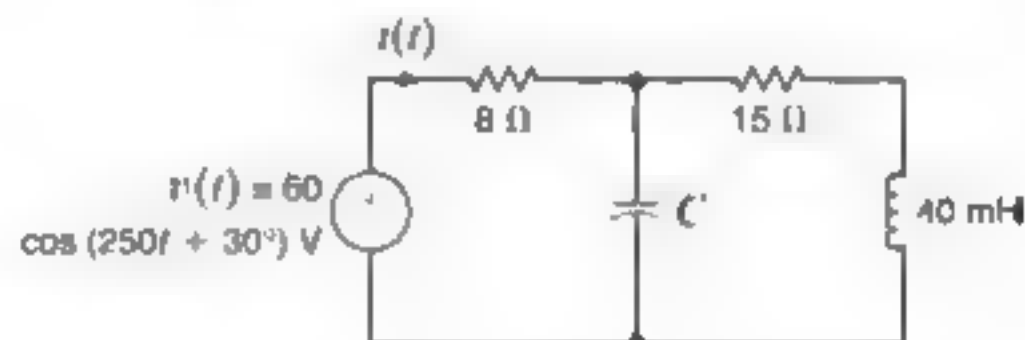


Figura P8.17

- 8.18** A impedância da rede mostrada na Fig. P8.18 é puramente real na frequência $f = 400$ Hz. Qual é o valor do capacitor C ?

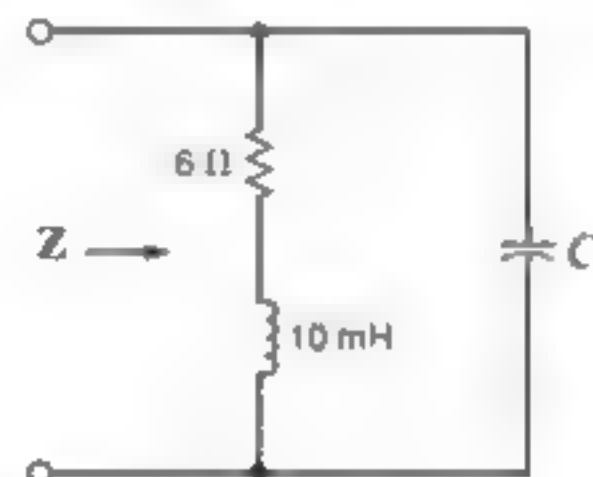


Figura P8.18

- 8.19** Determine a frequência na qual o circuito mostrado na Fig. P8.19 é puramente resistivo.



Figura P8.19

- 8.20** A uma frequência $\omega = 100$ rad/s, a admitância equivalente do circuito mostrado na Fig. P8.20 é igual a $0,1 + j0,2$ S. Calcule os valores de R e C .

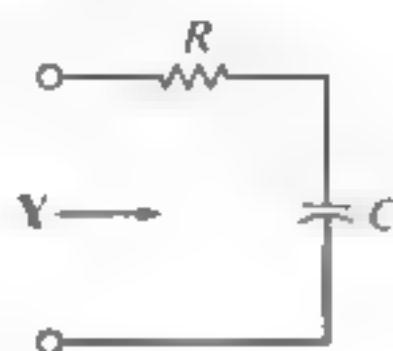


Figura P8.20

- 8.21** A admitância da caixa mostrada na Fig. P8.21 é $0,1 + j0,2 \text{ S}$ na frequência de 500 rad/s . Qual é o valor da impedância a 300 rad/s ?

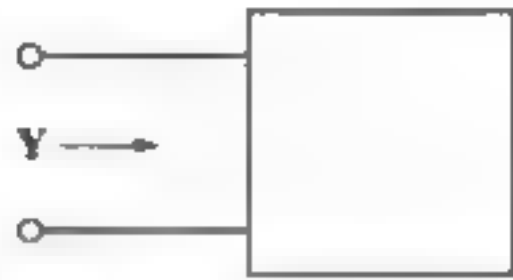


Figura P8.21

- 8.22** A impedância da caixa mostrada na Fig. P8.22 é $5 + j4 \Omega$ na frequência de 1000 rad/s . Qual é o valor da impedância a 1300 rad/s ?

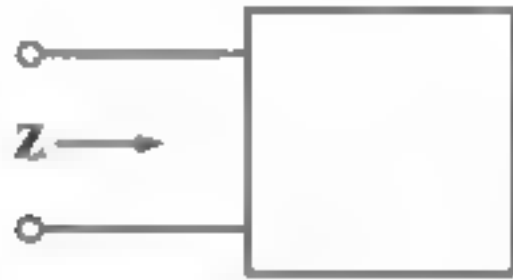


Figura P8.22

- 8.23** No diagrama da Fig. P8.23, $v(t) = 50 \cos(10t + 10^\circ) \text{ V}$ e $i(t) = 25 \cos(10t + 41^\circ) \text{ A}$. A impedância da CAIXA é indutiva ou capacitiva? Justifique sua resposta.

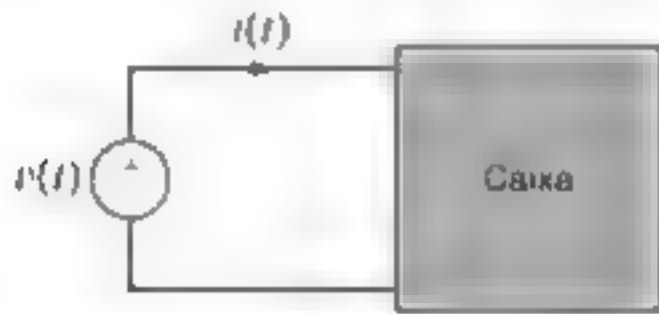


Figura P8.23

- 8.24** Determine o valor de ω no circuito mostrado na Fig. P8.24 de modo que o valor de pico de $i(t)$ seja de 2 A .

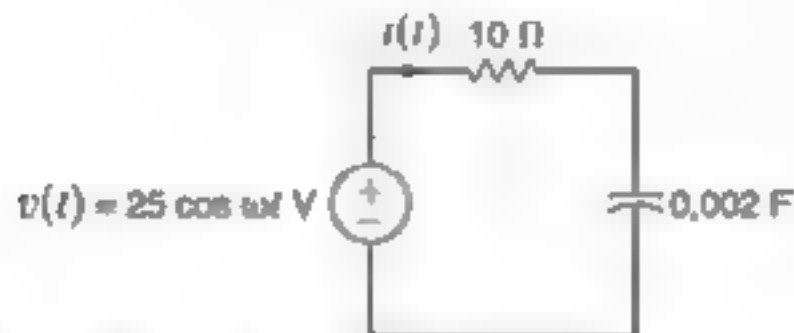


Figura P8.24

- 8.25** No diagrama da Fig. P8.25, quando $v(t) = 5 \cos 500t \text{ V}$, $i(t) = 0,4 \cos(500t - 30^\circ) \text{ A}$. Calcule $i(t)$ se $v(t) = 5 \cos 1000t \text{ V}$.

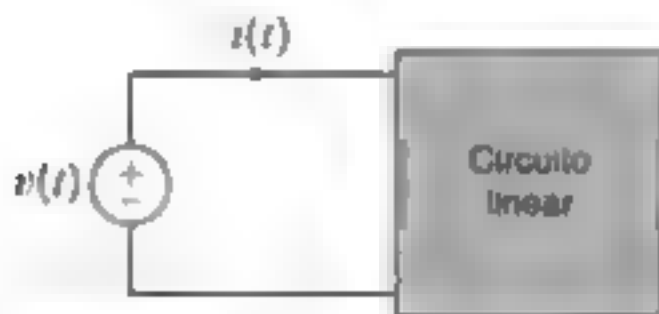


Figura P8.25

- 8.26** Desenhe a rede no domínio da frequência e calcule a tensão $v_C(t)$ do circuito mostrado na Fig. P8.26 considerando $i_1(t) = 200 \cos(10^5 t + 60^\circ) \text{ mA}$, $i_2(t) = 100 \sin(10^5 t + 90^\circ) \text{ mA}$ e

$v_C(t) = 10 \sin(10^5 t) \text{ V}$. Utilize também um diagrama de fasores para determinar a tensão $v_C(t)$.

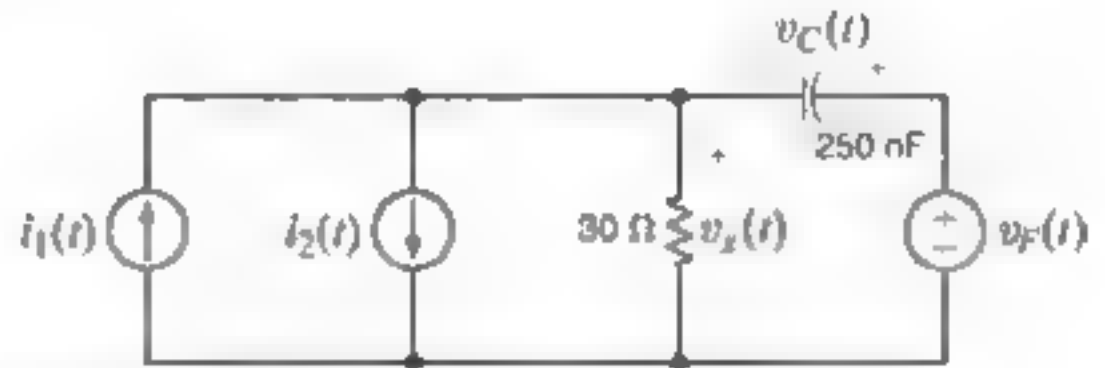


Figura P8.26

- 8.27** Determine as tensões $v_R(t)$ e $v_L(t)$ do circuito mostrado na Fig. P8.27 considerando que $v(t) = 50 \cos 10t \text{ V}$.

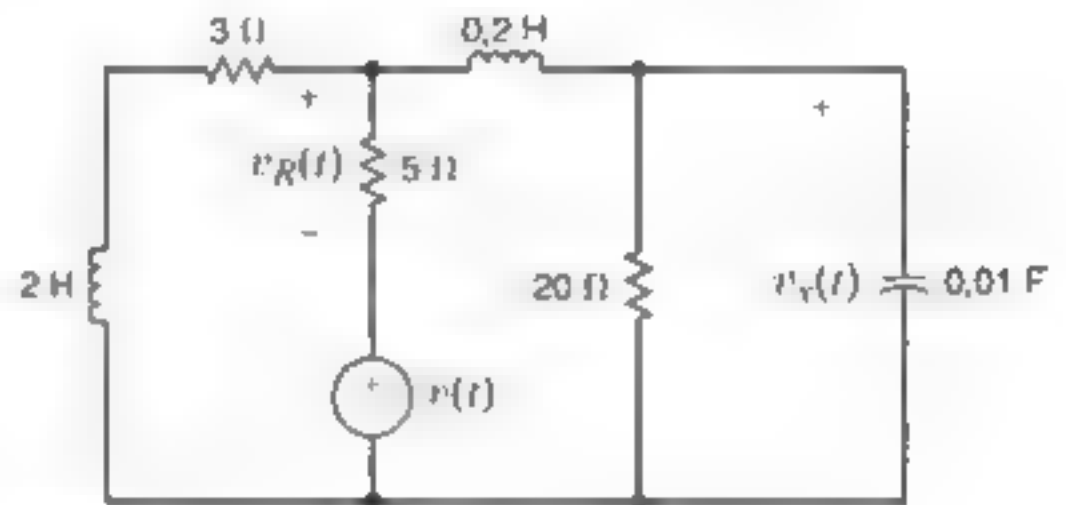


Figura P8.27

- 8.28** Calcule a tensão $v_C(t)$ do circuito mostrado na Fig. P8.28.

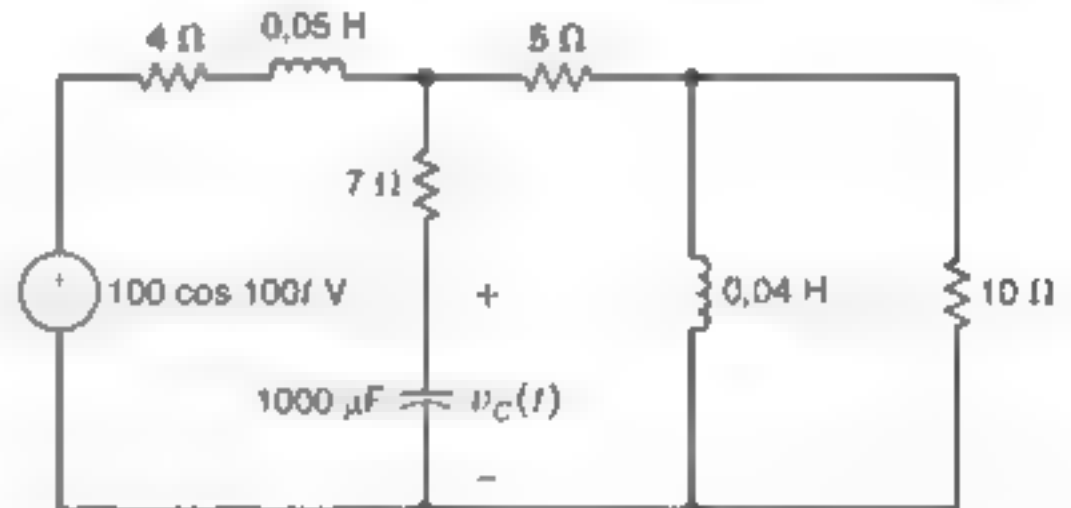


Figura P8.28

- 8.29** Calcule a corrente $i_1(t)$ do circuito mostrado na Fig. P8.29 considerando $v(t) = 50 \cos 100t \text{ V}$.

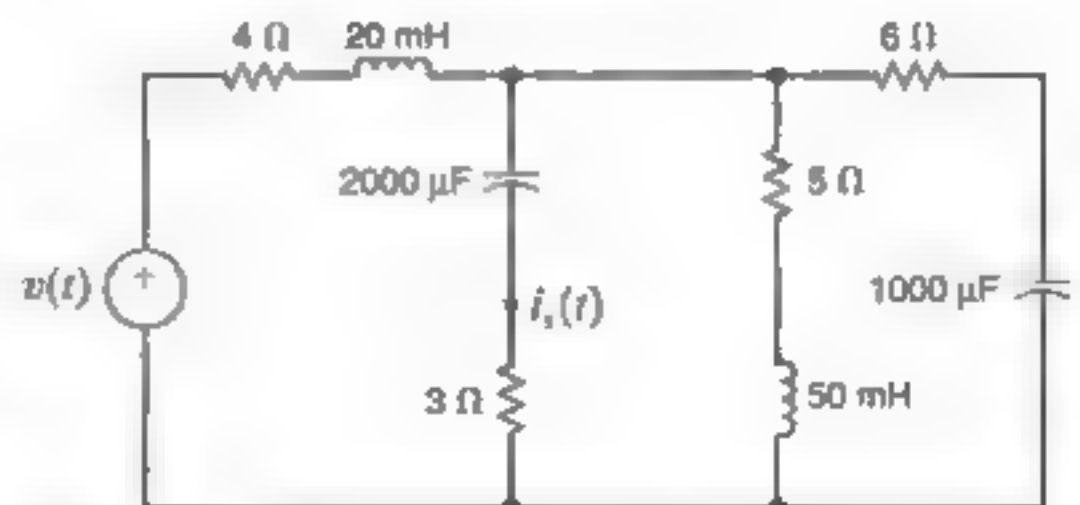


Figura P8.29

8.30 Calcule a tensão $v_s(t)$ e a corrente $i_s(t)$ do circuito mostrado na Fig. P8.30.

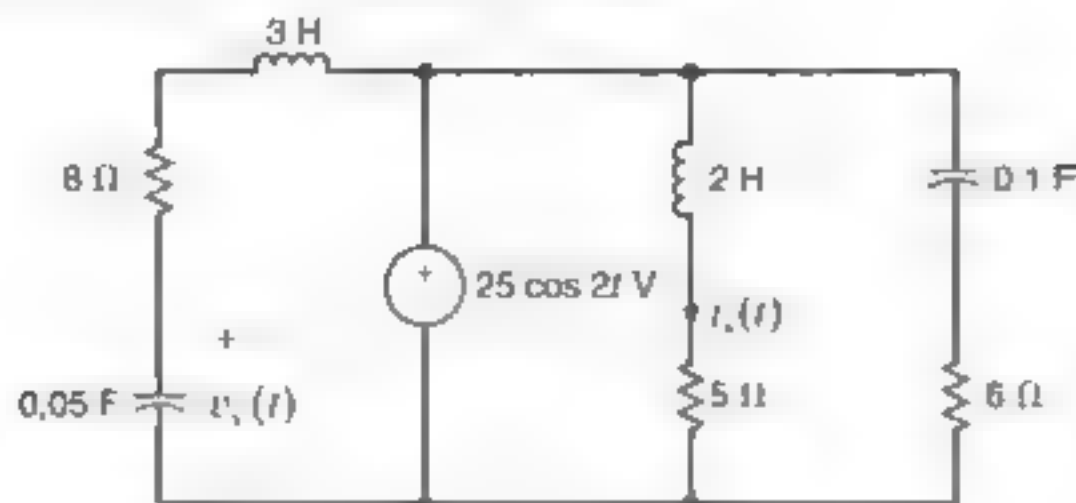


Figura P8.30

8.31 Calcule a tensão $v(t)$ do circuito mostrado na Fig. P8.31 sabendo que $i_1(t) = 7 \cos 100t$ A e $i_2(t) = 3 \cos (100t + 45^\circ)$ A.

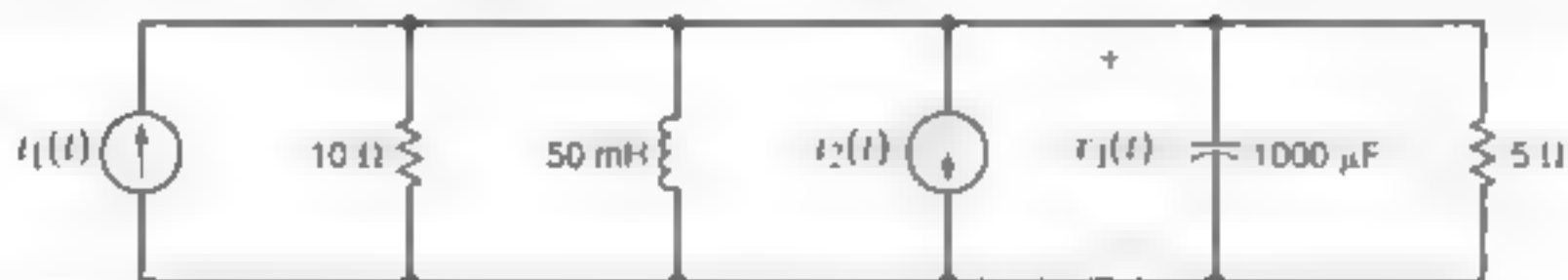


Figura P8.31

8.32 Calcule a tensão $v_s(t)$ do circuito mostrado na Fig. P8.32.

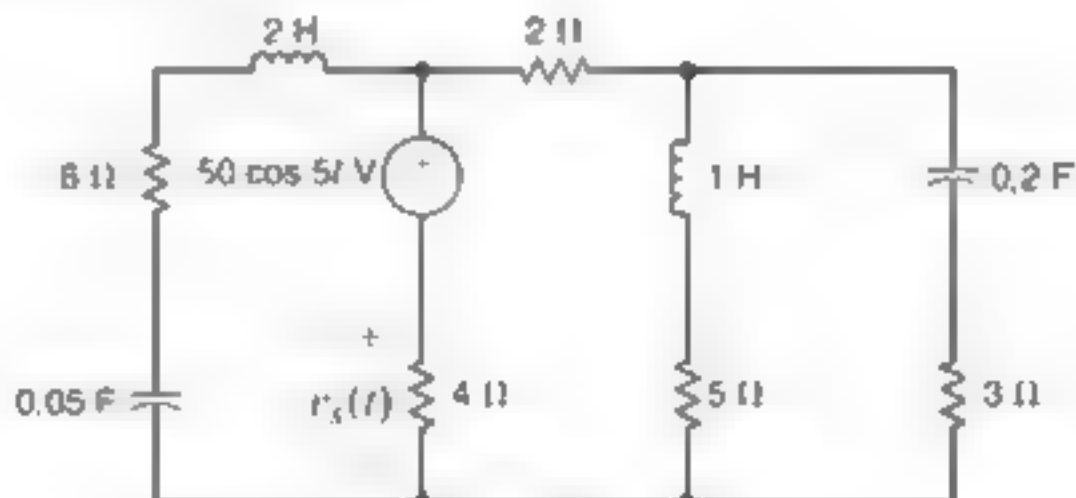


Figura P8.32

8.33 Calcule a tensão $v_s(t)$ do circuito mostrado na Fig. P8.33 sabendo que $v(t) = 50 \cos (10t - 30^\circ)$ V.

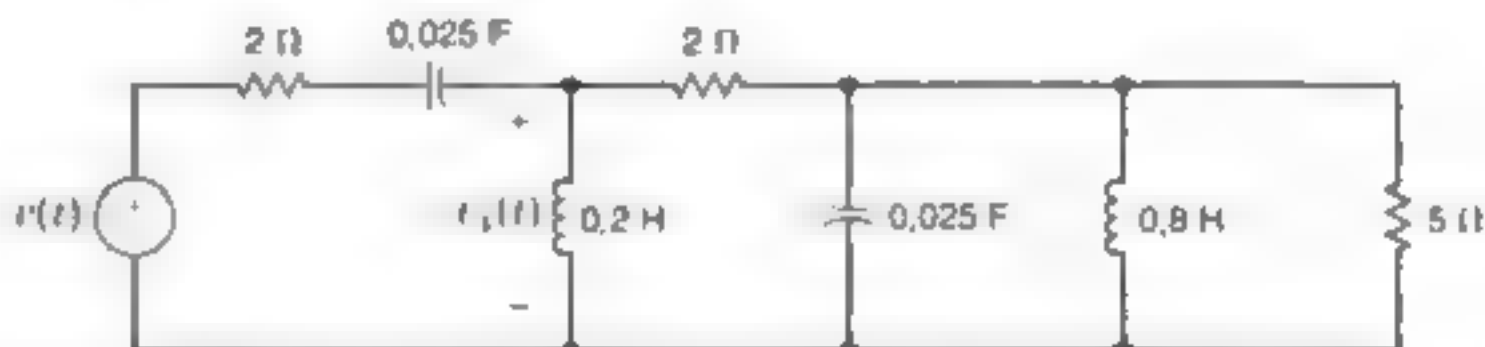


Figura P8.33

8.34 Calcule as correntes $i_1(t)$ e $i_2(t)$ e a tensão $v_s(t)$ do circuito mostrado na Fig. P8.34.

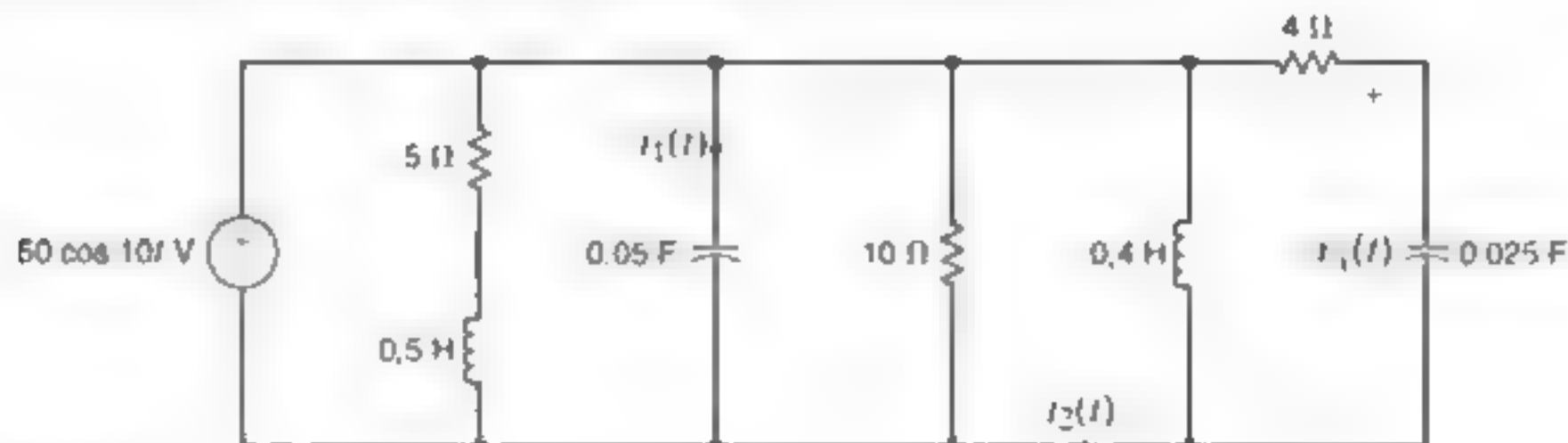


Figura P8.34

8.35 Determine as correntes $i_1(t)$ e $i_2(t)$ do circuito mostrado na Fig. P8.35.

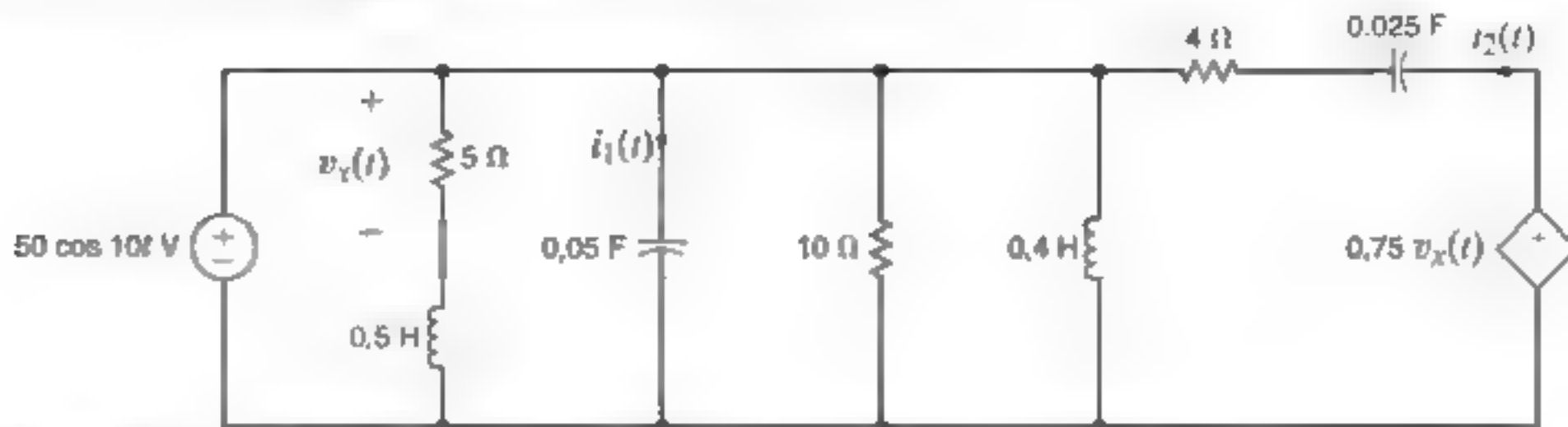


Figura P8.35

8.36 Calcule a tensão $v_x(t)$ do circuito mostrado na Fig. P8.36.

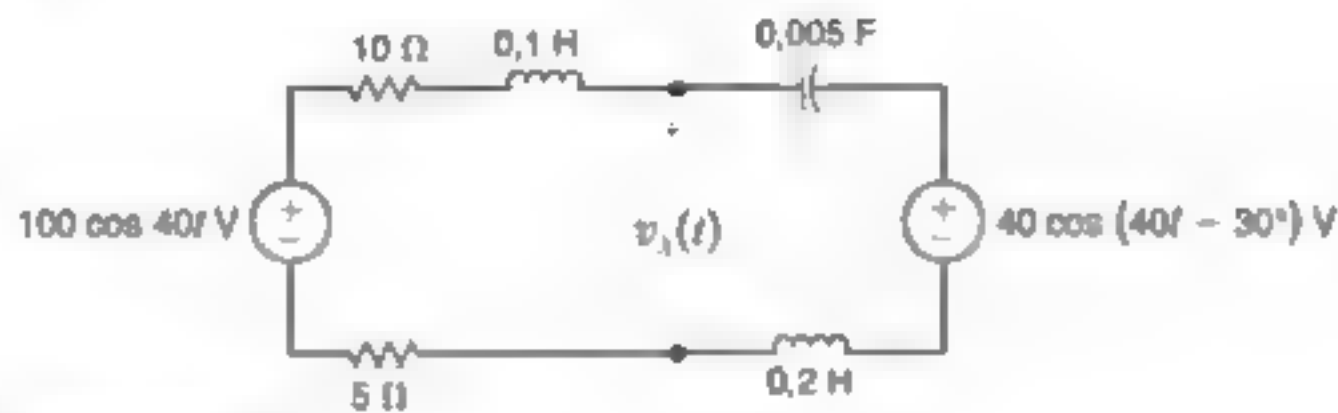


Figura P8.36

8.37 Determine a tensão $v_x(t)$ da rede mostrada na Fig. P8.37.

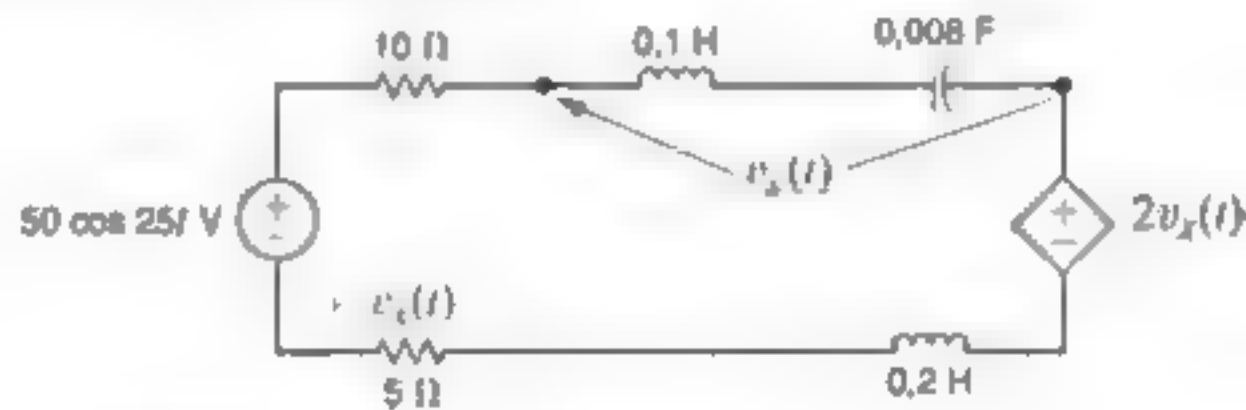


Figura P8.37

8.38 Determine as tensões $v_1(t)$ e $v_2(t)$ do circuito mostrado na Fig. P8.38.

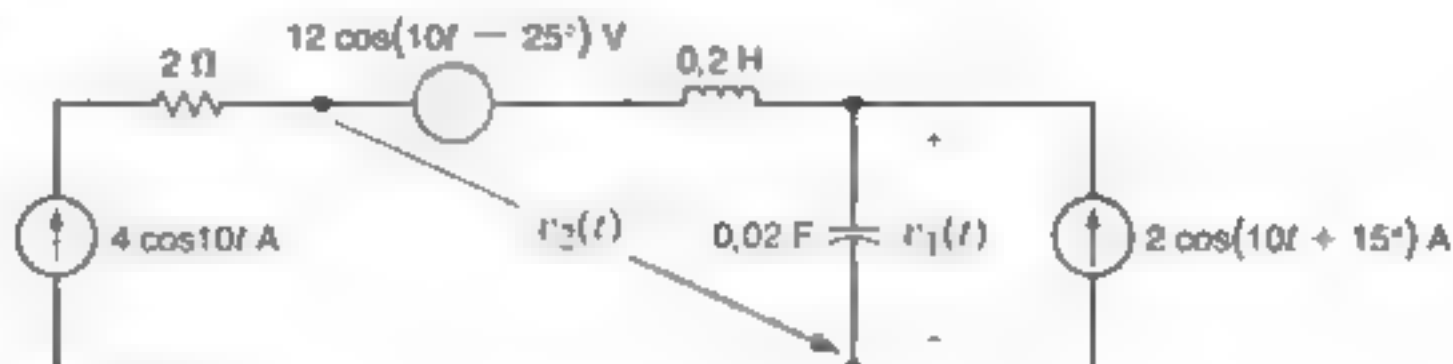


Figura P8.38

8.39 Determine a tensão V indicada no circuito da Fig. P8.39.

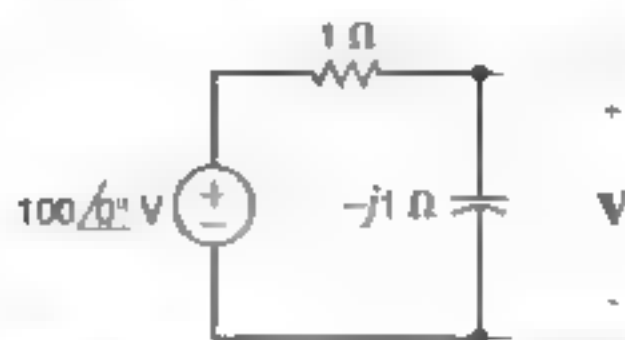


Figura P8.39

8.40 Determine a tensão V_s indicada no circuito da Fig. P8.40.

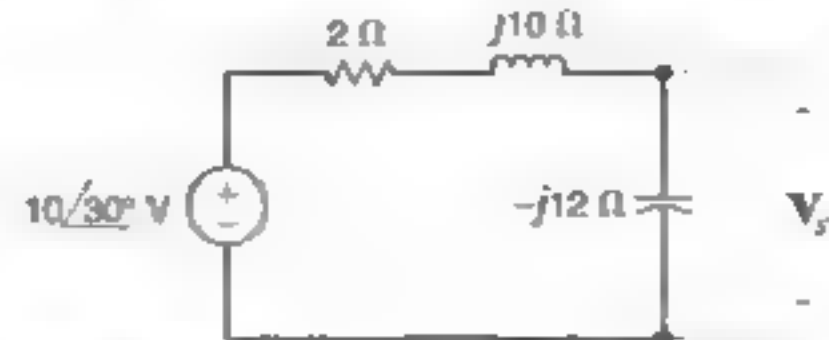


Figura P8.40

- 8.41** Determine a tensão V_x no domínio da frequência, conforme mostrado na Fig. P8.41.

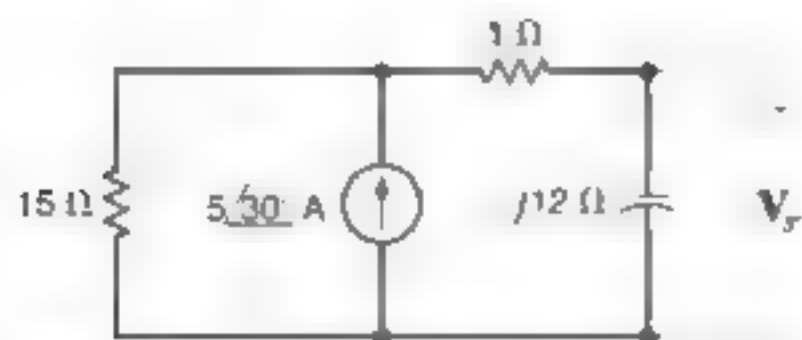


Figura P8.41

- 8.42** Determine a tensão V_x da rede mostrada na Fig. P8.42.

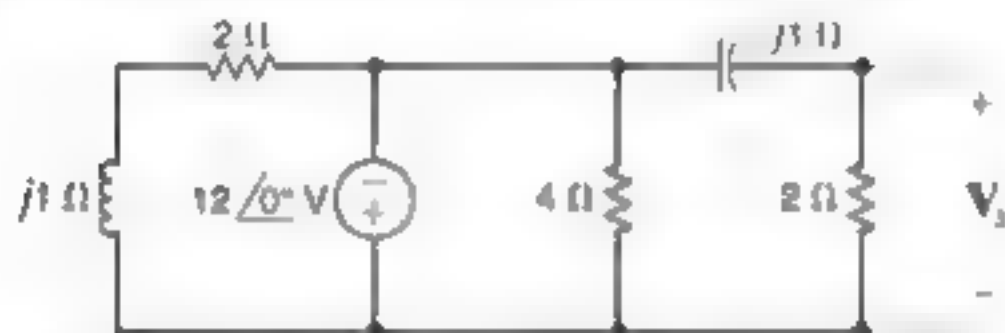


Figura P8.42

- 8.43** Determine a tensão V_x da rede mostrada na Fig. P8.43.

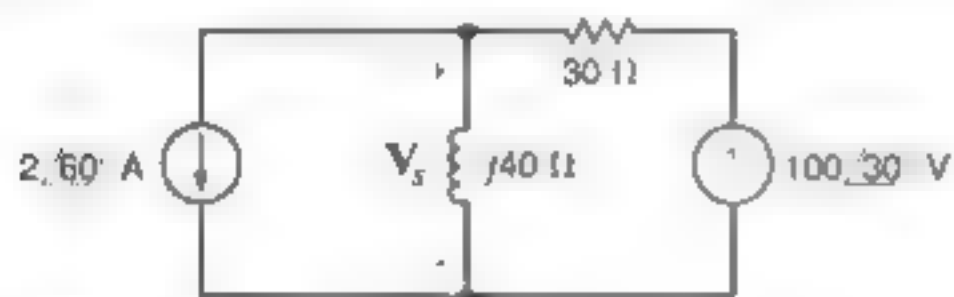


Figura P8.43

- 8.44** Dada a rede mostrada na Fig. P8.44, determine o valor de V_x , considerando $V_F = 24 \angle 0^\circ \text{ V}$.

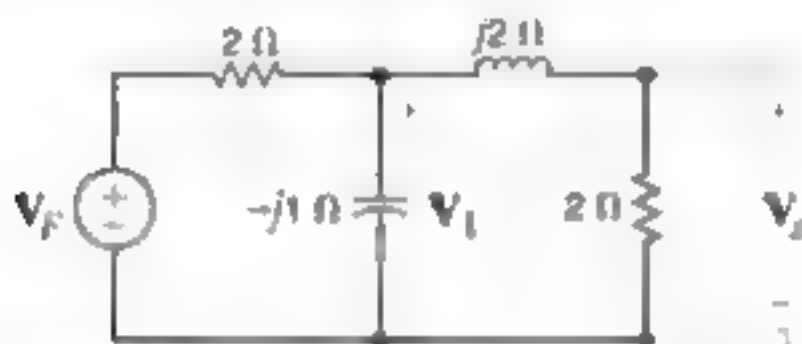


Figura P8.44

- 8.45** Considerando que a tensão $V_1 = 4 \angle 0^\circ \text{ V}$, determine a corrente I_x do circuito mostrado na Fig. P8.45.

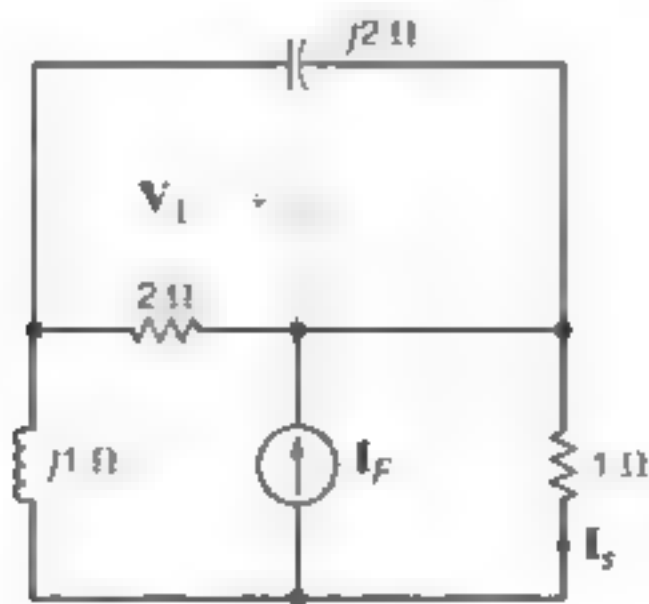


Figura P8.45

- 8.46** Determine a tensão V_x da rede mostrada na Fig. P8.46 considerando $V_1 = 4 \angle 0^\circ \text{ V}$.

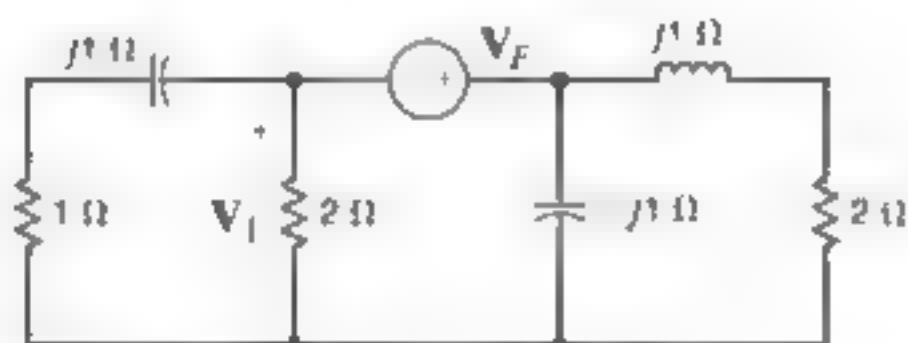


Figura P8.46

- 8.47** Na rede mostrada na Fig. P8.47, a tensão V_x é conhecida como $4 \angle 45^\circ \text{ V}$. Determine a impedância Z .

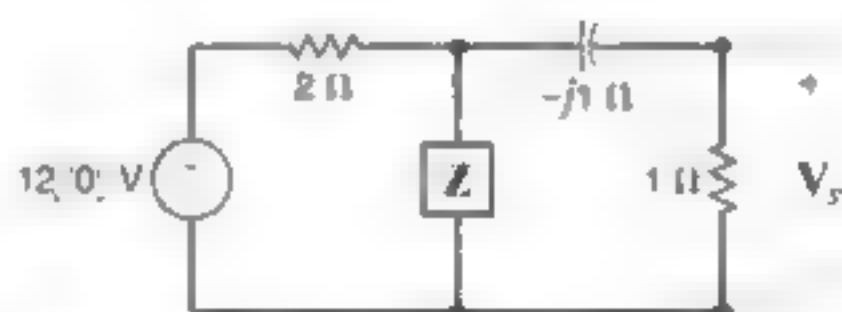


Figura P8.47

- 8.48** Na rede mostrada na Fig. P8.48 $I_1 = 4 \angle 0^\circ \text{ A}$. Determine a corrente I_x .

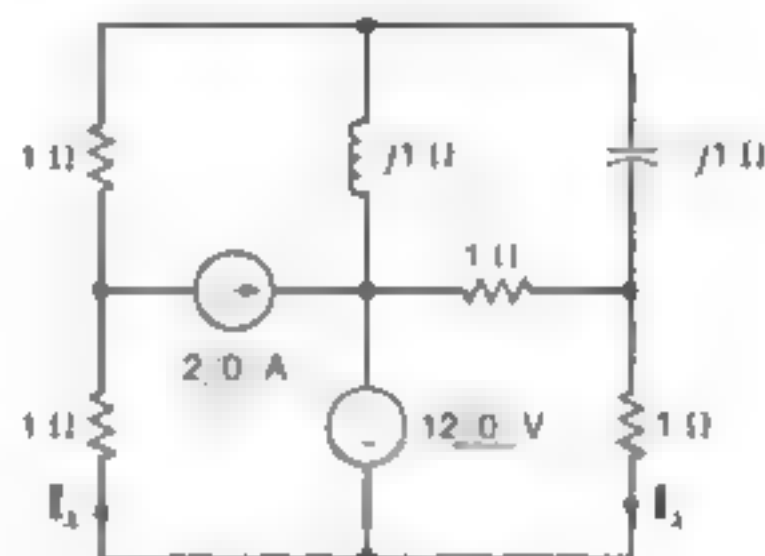


Figura P8.48

- 8.49** Considerando que no circuito mostrado na Fig. P8.49 a corrente $I_1 = 4 \angle 0^\circ \text{ A}$, determine a corrente I_x .

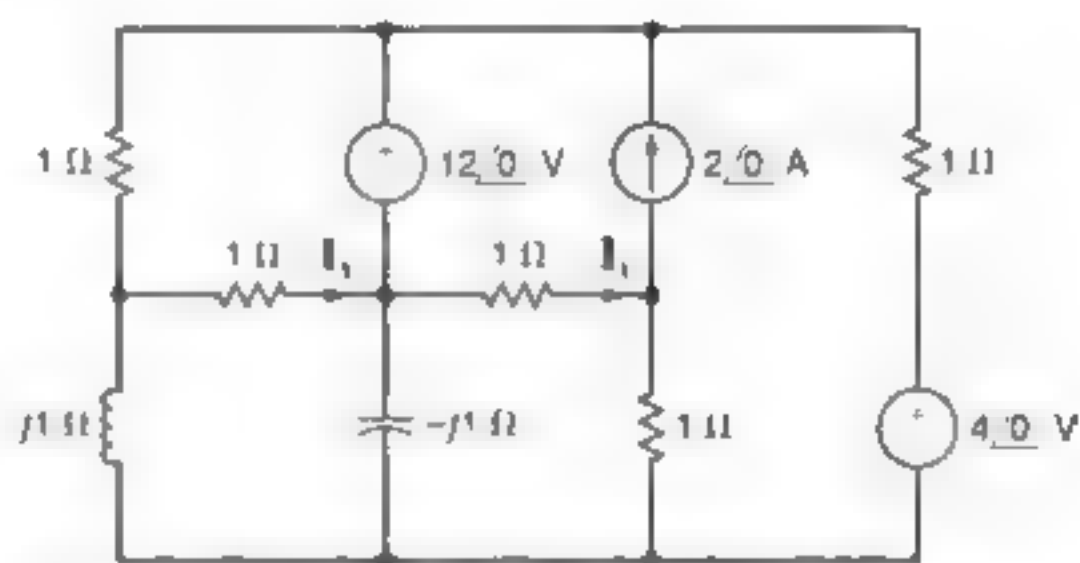


Figura P8.49

- 8.50** Considerando que no circuito mostrado na Fig. P8.50 a corrente $I_1 = 4 \angle 0^\circ$ A, determine a corrente I_x .

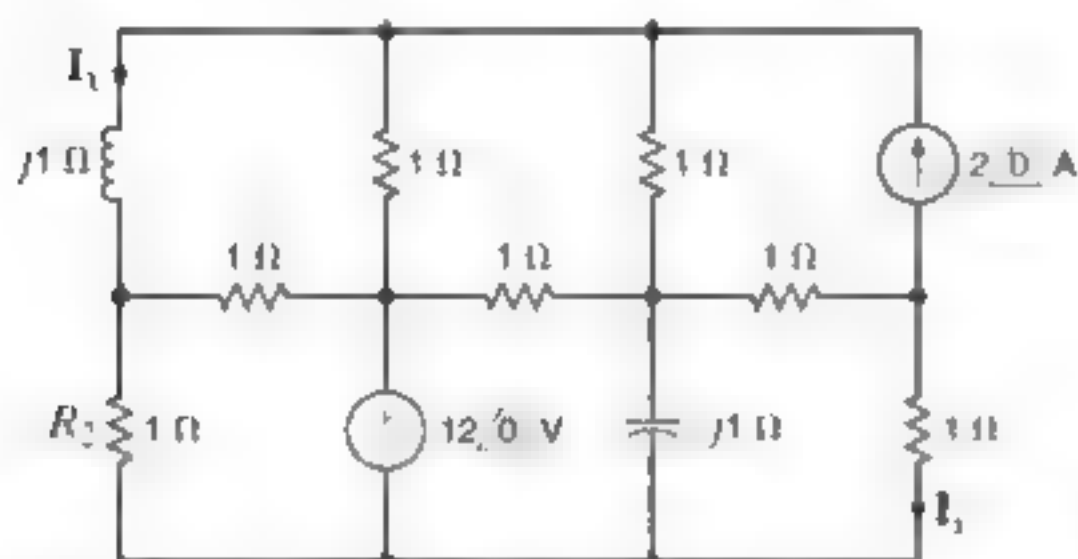


Figura P8.50

- 8.51** Utilizando a análise nodal, determine a corrente I_1 do circuito mostrado na Fig. P8.51.

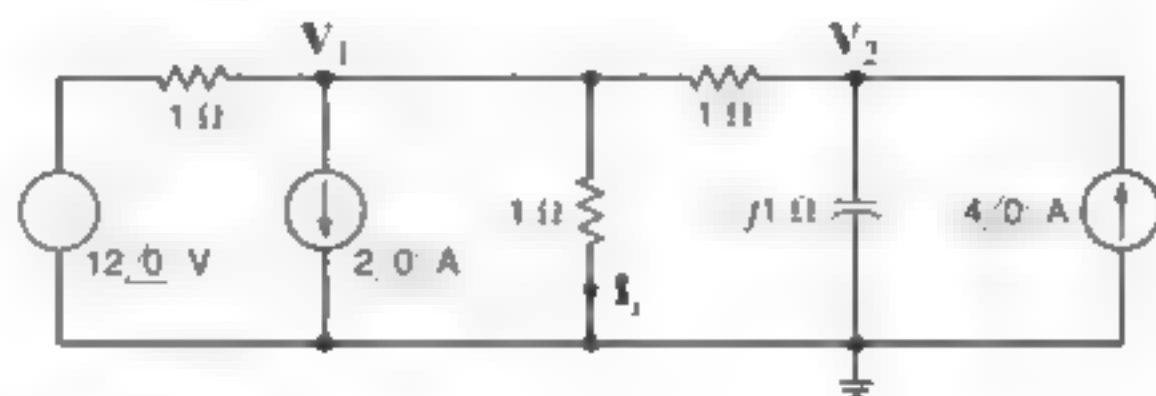


Figura P8.51

- 8.52** Utilize a análise nodal para determinar a corrente I_1 do circuito mostrado na Fig. P8.52.

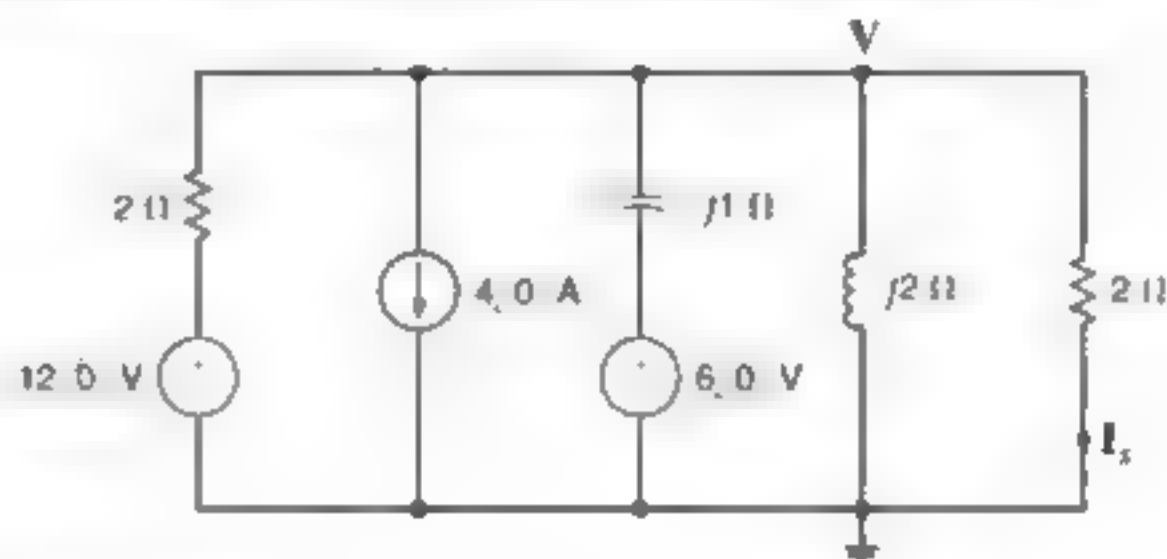


Figura P8.52

- 8.53** Determine a tensão V_1 da rede mostrada na Fig. P8.53, utilizando a análise nodal.

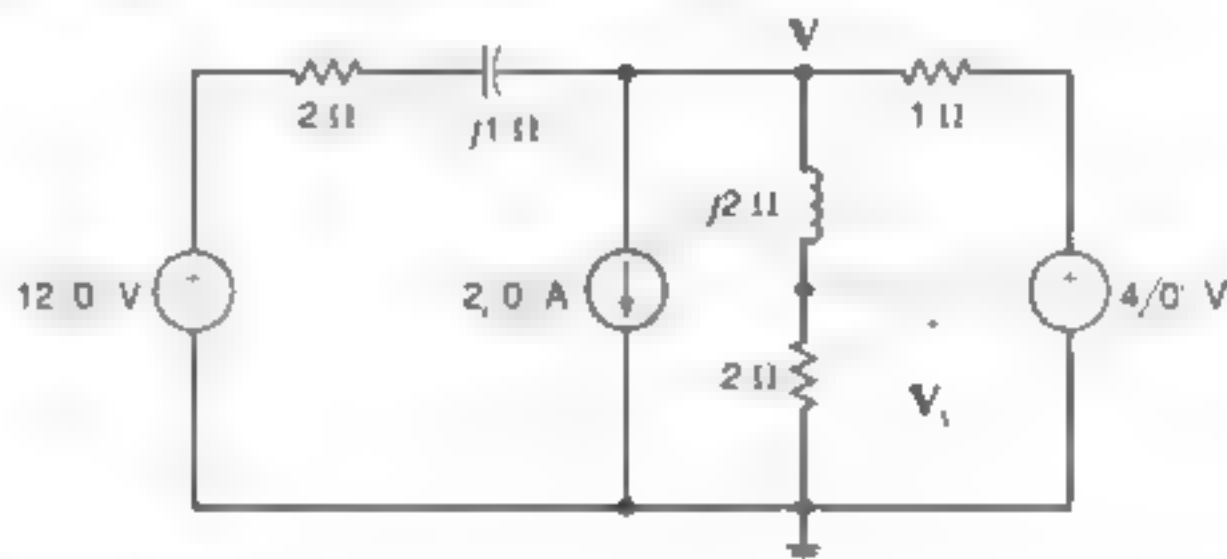


Figura P8.53

- 8.54** Utilize a técnica de superposição para determinar a corrente I_1 do circuito mostrado na Fig. P8.54.

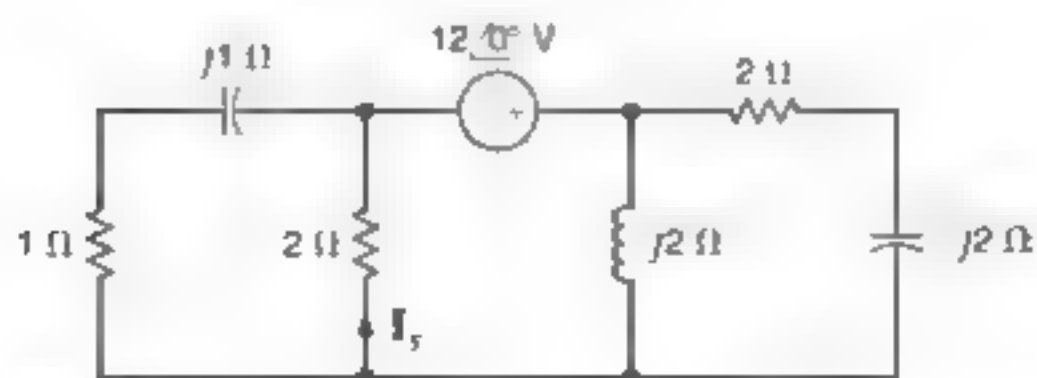


Figura P8.54

- 8.55** Utilize a análise nodal para determinar a tensão V_1 do circuito mostrado na Fig. P8.55.

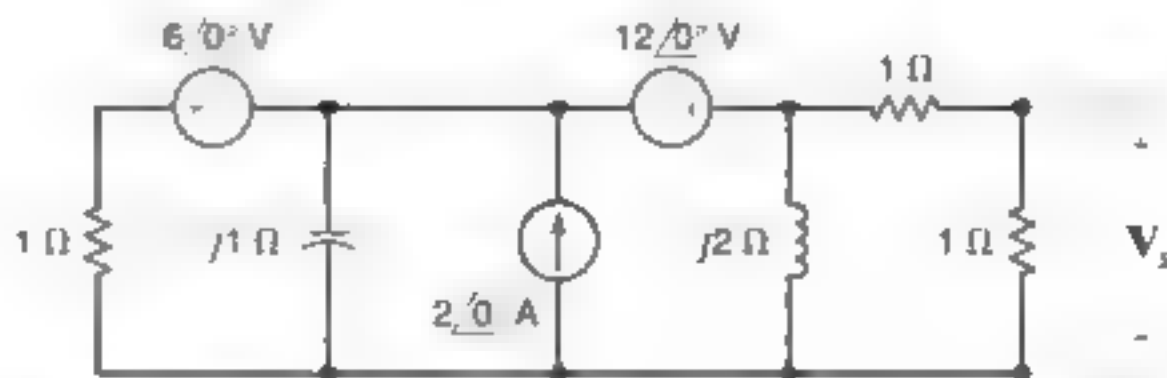


Figura P8.55

8.56 Determine a corrente I_x do circuito mostrado na Fig. P8.56 utilizando a análise nodal.

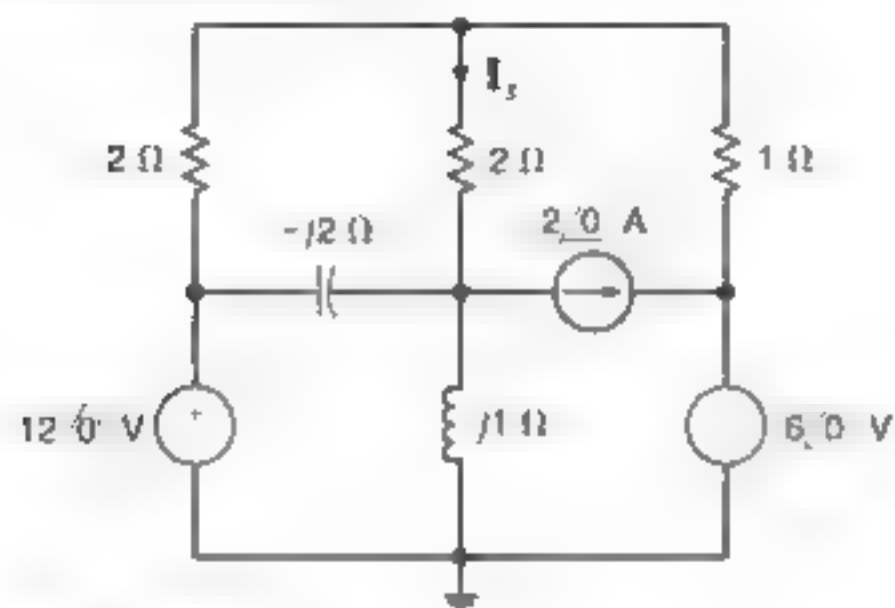


Figura P8.56

8.57 Utilize a análise nodal para determinar a corrente I_x do circuito mostrado na Fig. P8.57.

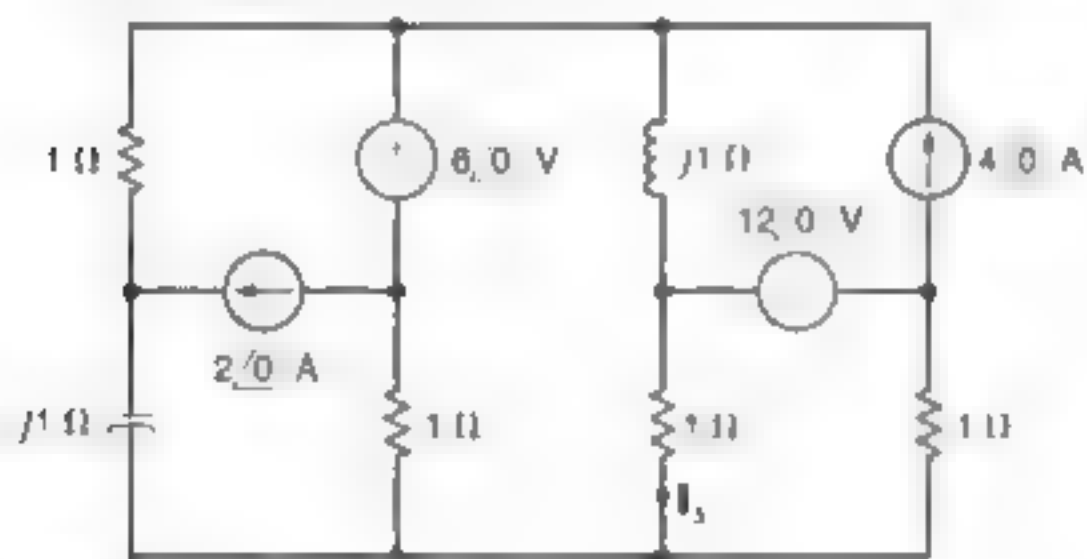


Figura P8.57

8.58 Utilize a análise nodal para determinar a tensão V_x do circuito mostrado na Fig. P8.58.

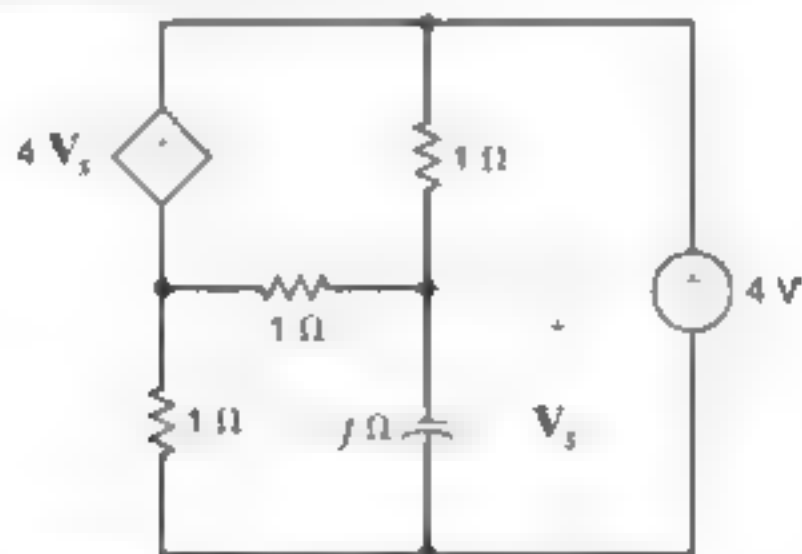


Figura P8.58

8.59 Utilize a análise nodal para determinar a tensão V_x da rede mostrada na Fig. P8.59.

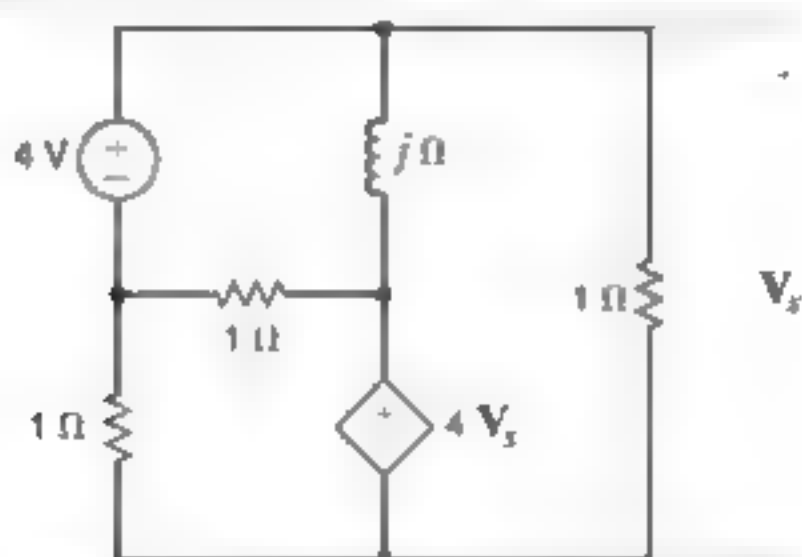


Figura P8.59

8.60 Utilize a análise nodal para determinar a tensão V_x do circuito mostrado na Fig. P8.60.

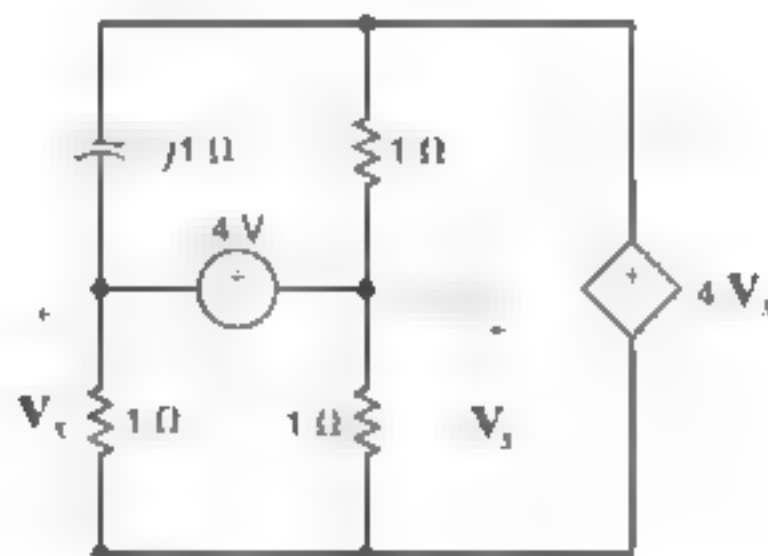


Figura P8.60

8.61 Utilize a análise nodal para determinar a tensão V_x do circuito mostrado na Fig. P8.61.

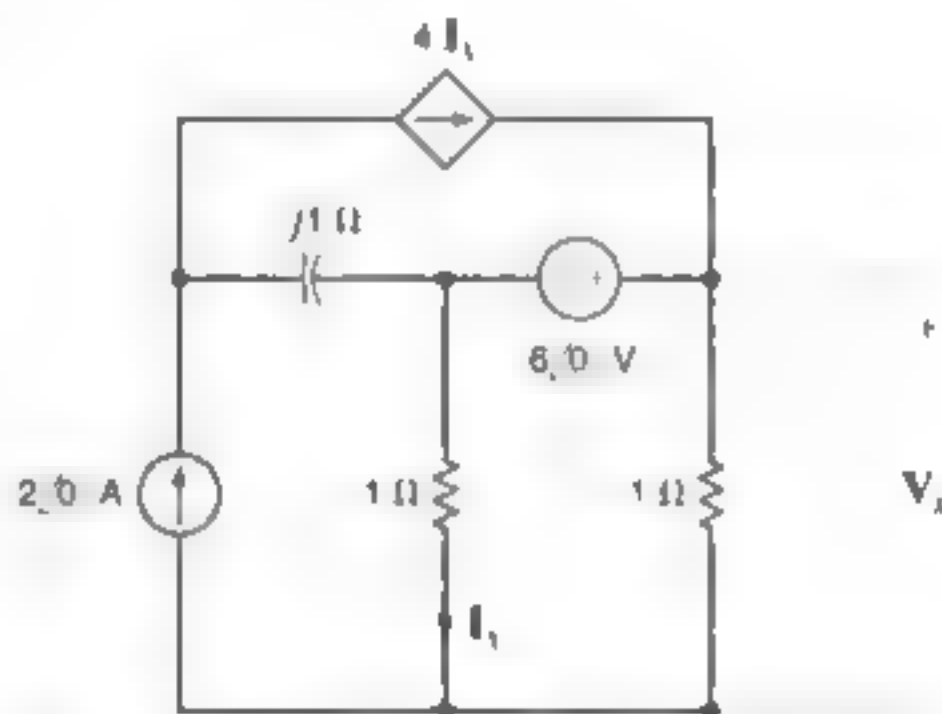


Figura P8.61

8.62 Utilize a análise nodal para determinar a tensão V_x da rede mostrada na Fig. P8.62.

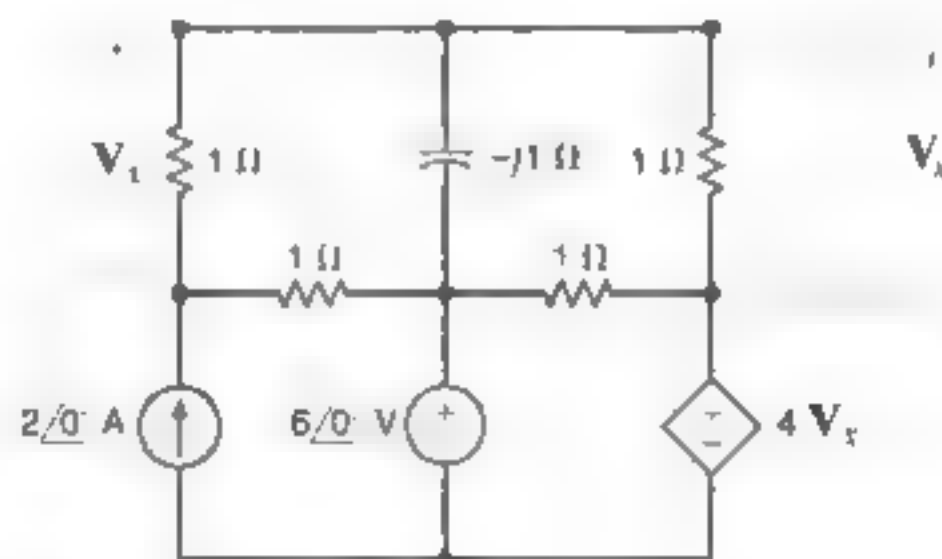


Figura P8.62

- 8.63** Utilize a análise nodal para determinar a tensão V_x do circuito mostrado na Fig. P8.63.

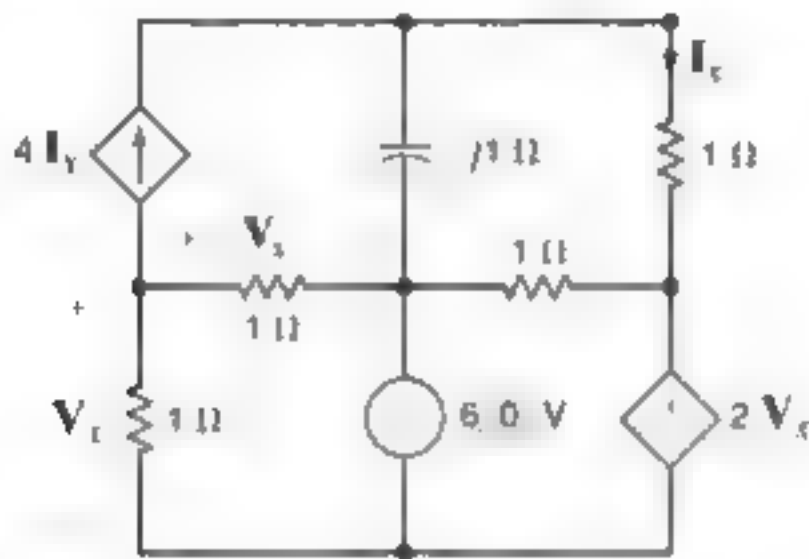


Figura P8.63

- 8.64** Utilize a análise nodal para determinar a tensão V_x do circuito mostrado na Fig. P8.64.

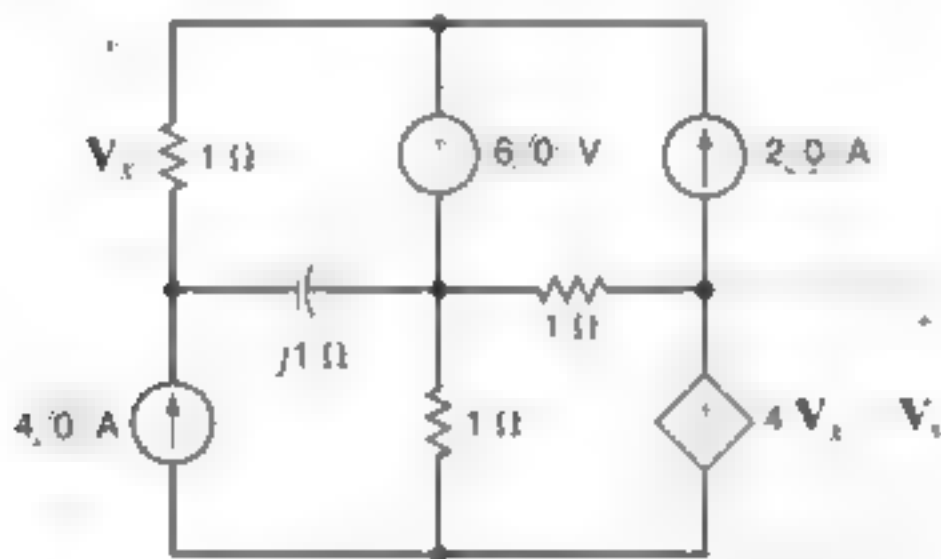


Figura P8.64

- 8.65** Utilize a análise nodal para determinar a corrente I_x do circuito mostrado na Fig. P8.65.

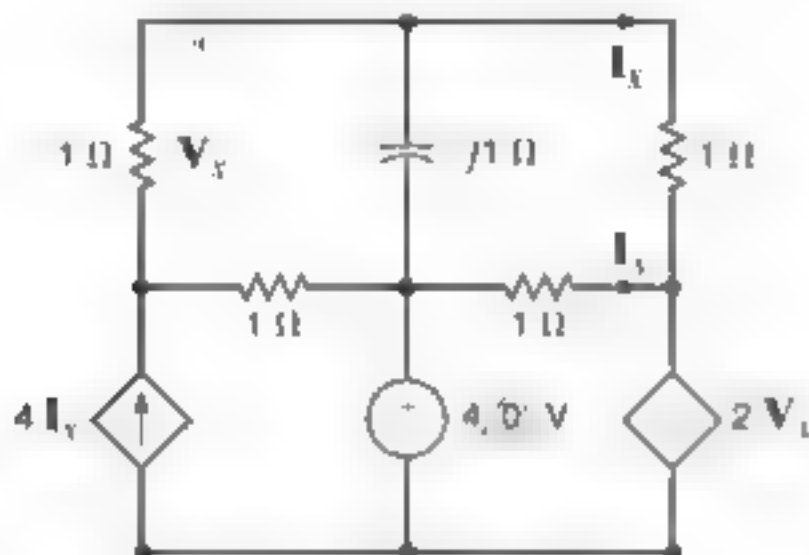


Figura P8.65

- 8.66** Utilize a análise nodal para determinar a tensão V_x do circuito mostrado na Fig. P8.66.

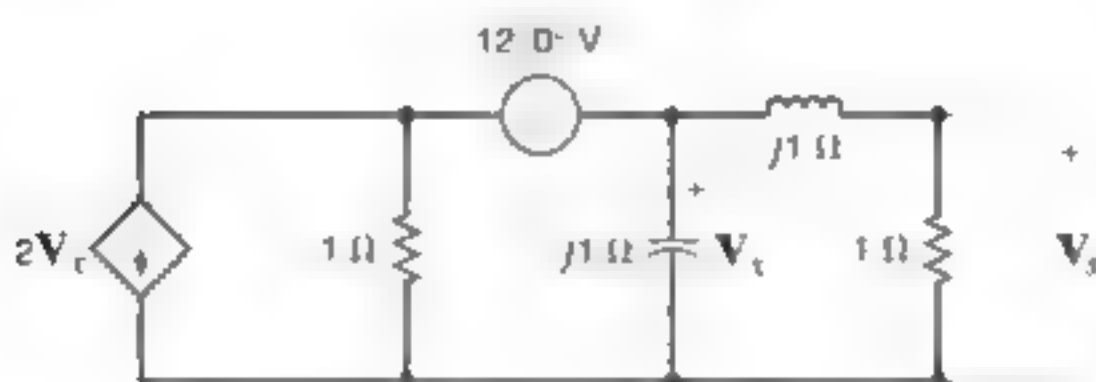


Figura P8.66

- 8.67** Determine a tensão entre os terminais do indutor do circuito mostrado na Fig. P8.67 utilizando a análise nodal.

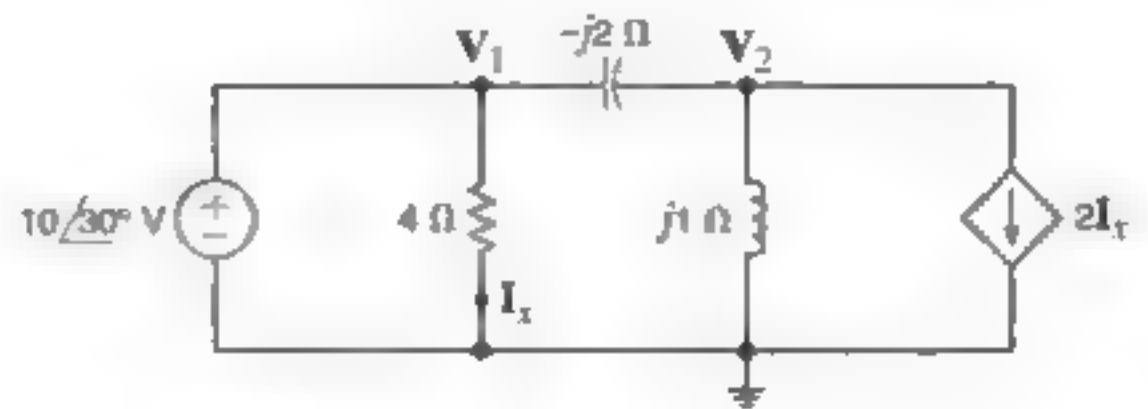


Figura P8.67

- 8.68** Utilize a análise das malhas para determinar a tensão V_x do circuito mostrado na Fig. P8.68.

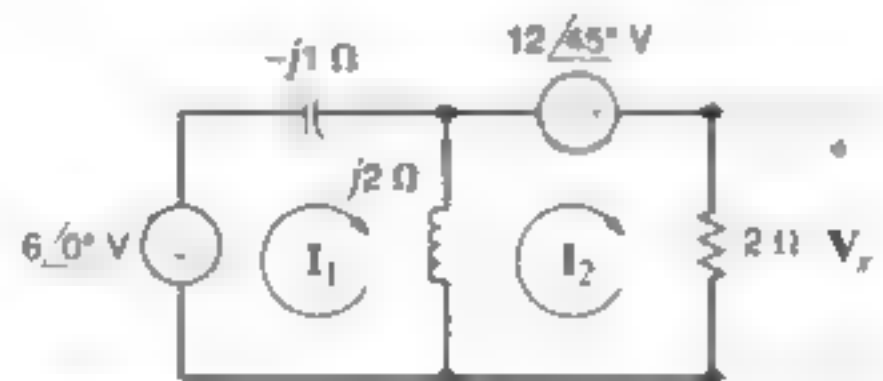


Figura P8.68

- 8.69** Utilize a análise das malhas para determinar a tensão V_x do circuito mostrado na Fig. P8.69.

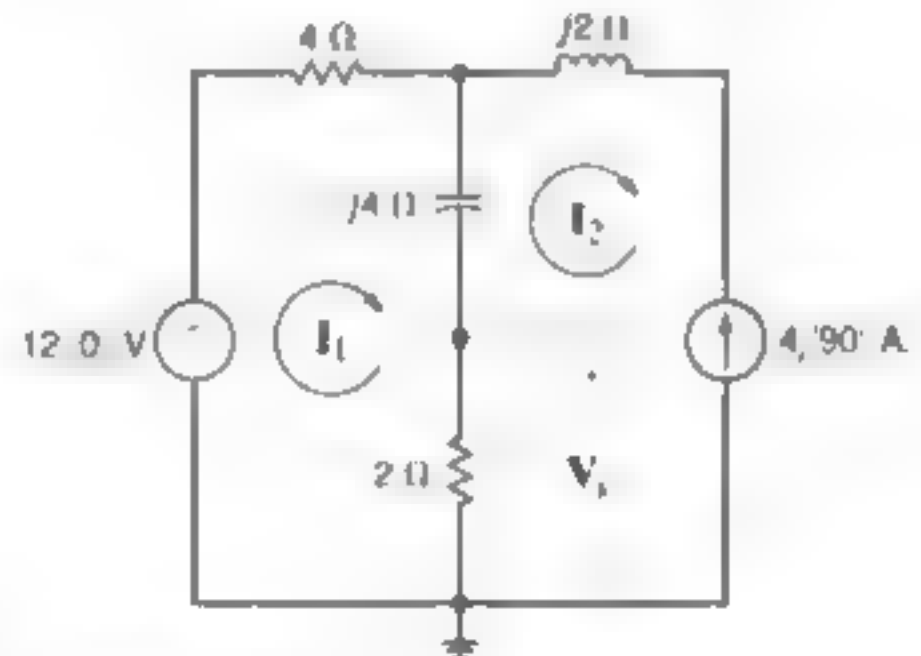


Figura P8.69

- 8.70** Utilize a análise dos laços para determinar a tensão V_x do circuito mostrado na Fig. P8.70.

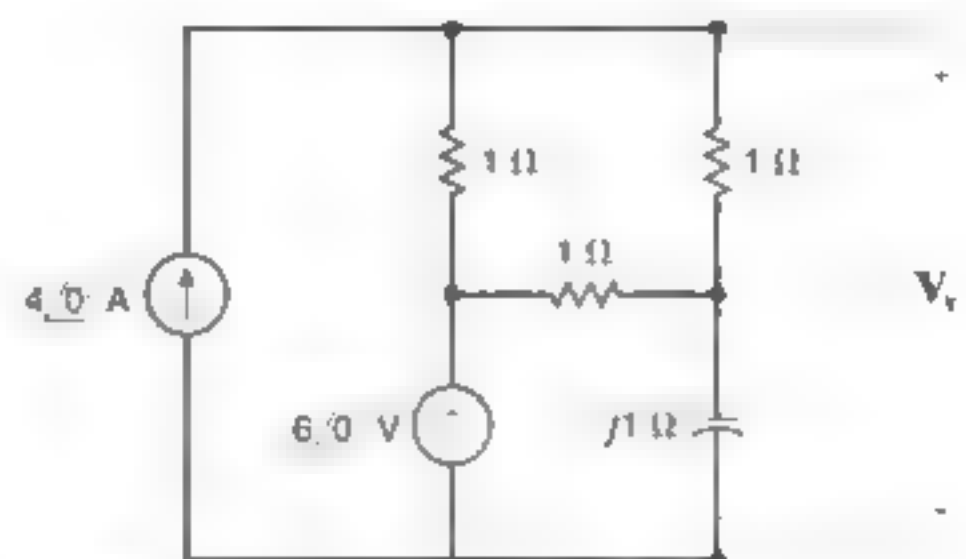


Figura P8.70

8.71 Utilize a análise dos laços para determinar a tensão V_x do circuito mostrado na Fig. P8.71

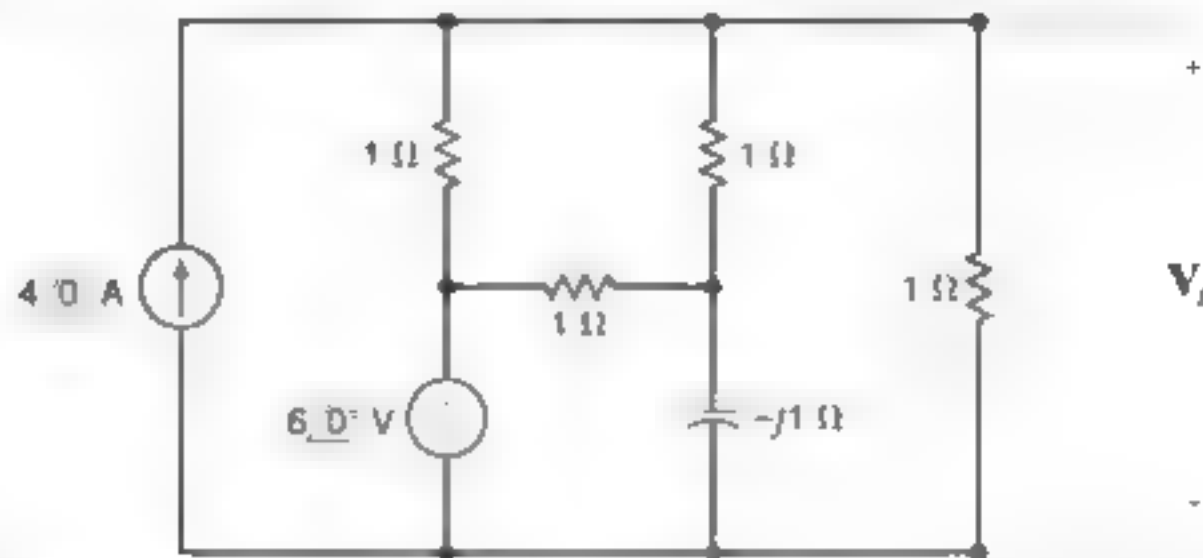


Figura P8.71

8.72 Utilize a análise dos laços para determinar a corrente I_x da rede mostrada na Fig. P8.72.

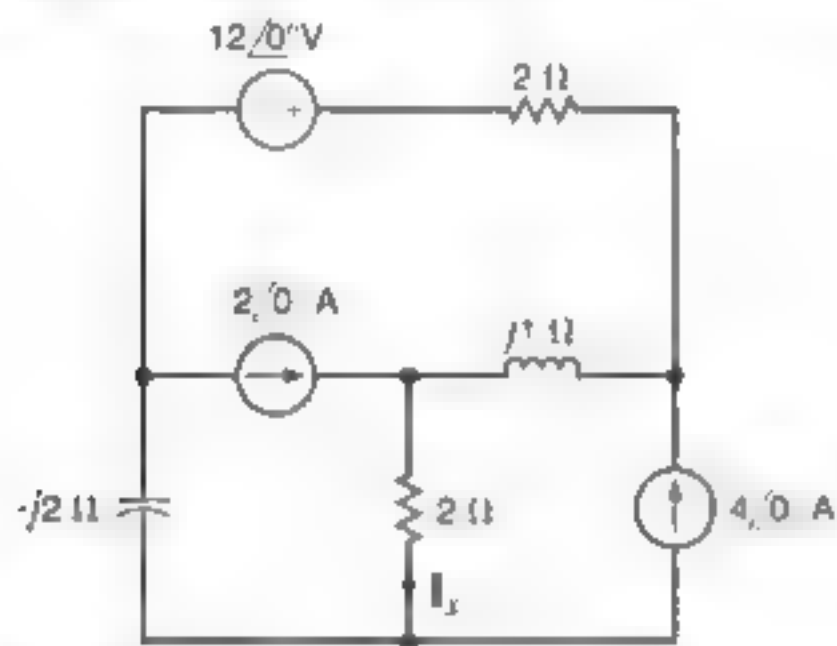


Figura P8.72

8.73 Determine a tensão V_x do circuito mostrado na Fig. P8.73 utilizando a análise das malhas.

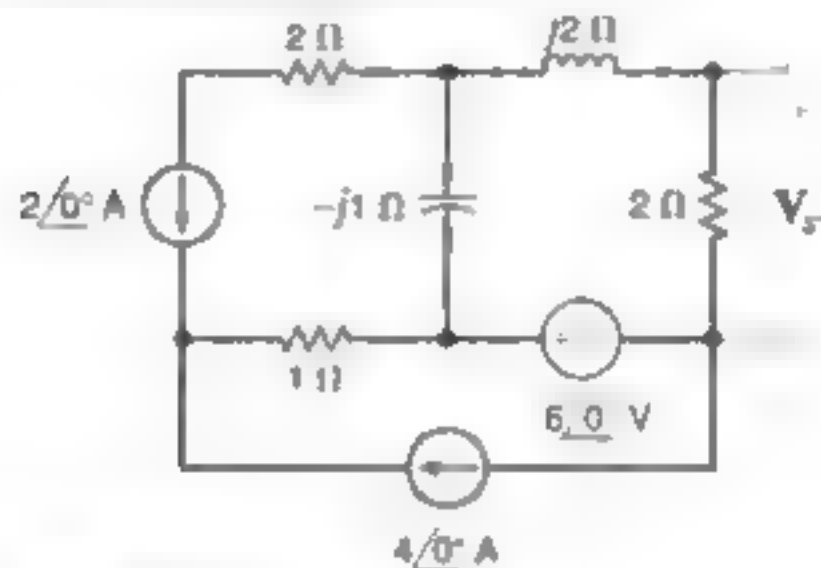


Figura P8.73

8.74 Utilize a análise das malhas para determinar a tensão V_x do circuito mostrado na Fig. P8.74.

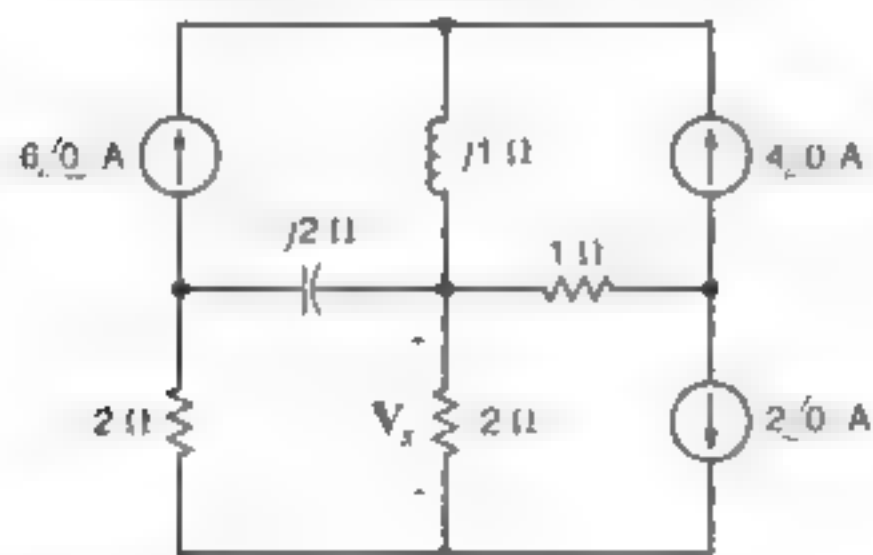


Figura P8.74

8.75 Utilize a análise dos laços para determinar a corrente I_x da rede mostrada na Fig. P8.75.

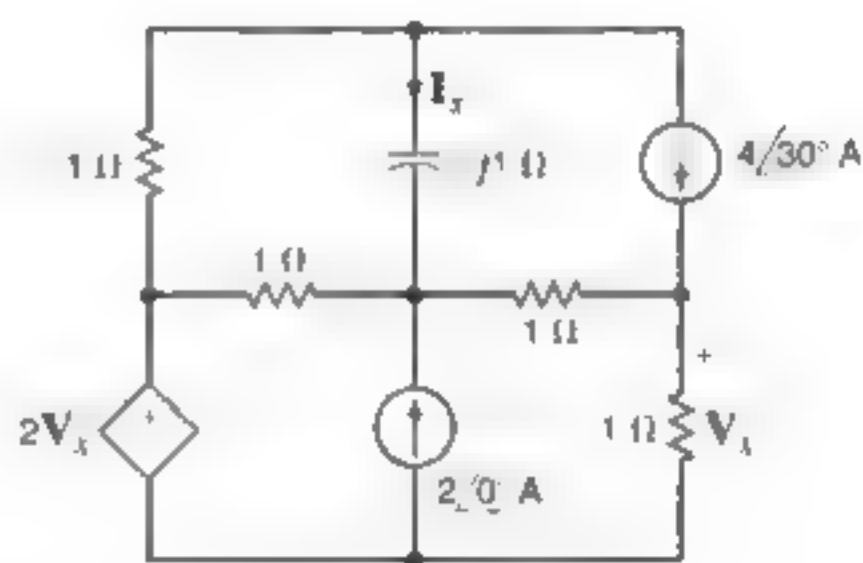


Figura P8.75

8.76 Determine a tensão V_x da rede mostrada na Fig. P8.76.

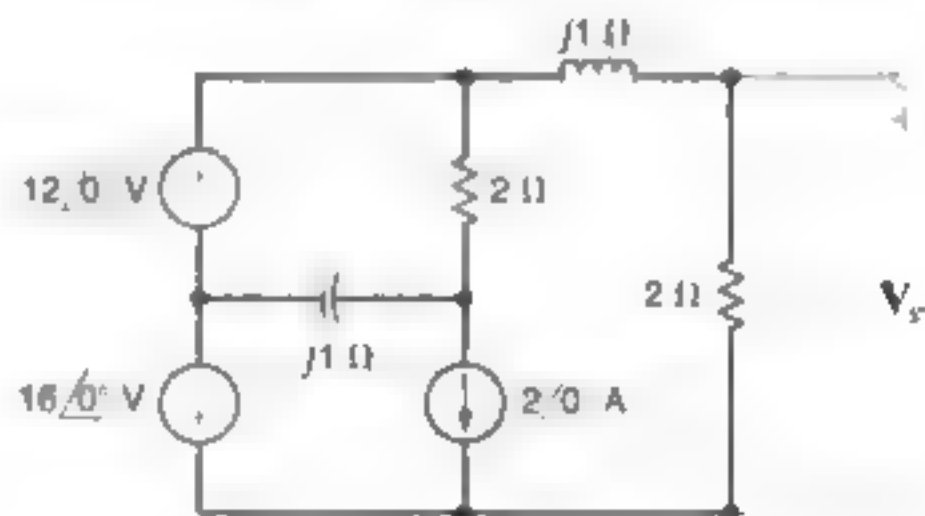


Figura P8.76

8.77 Determine a tensão V_x do circuito mostrado na Fig. P8.77.

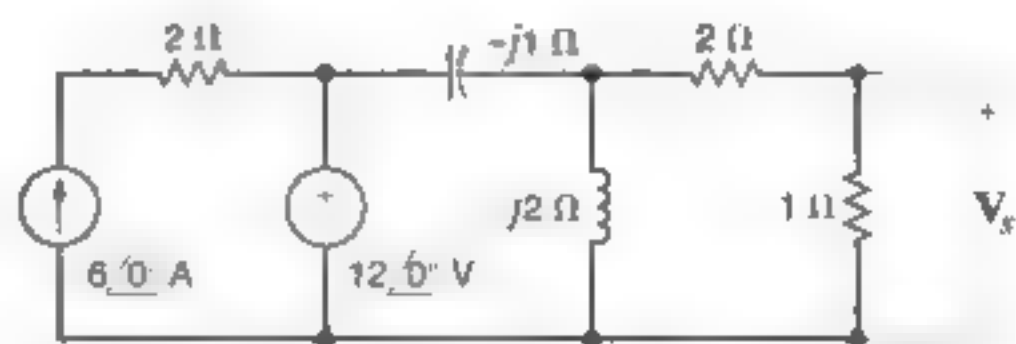


Figura P8.77

- 8.78 Determine a tensão V_x da rede mostrada na Fig. P8.78.

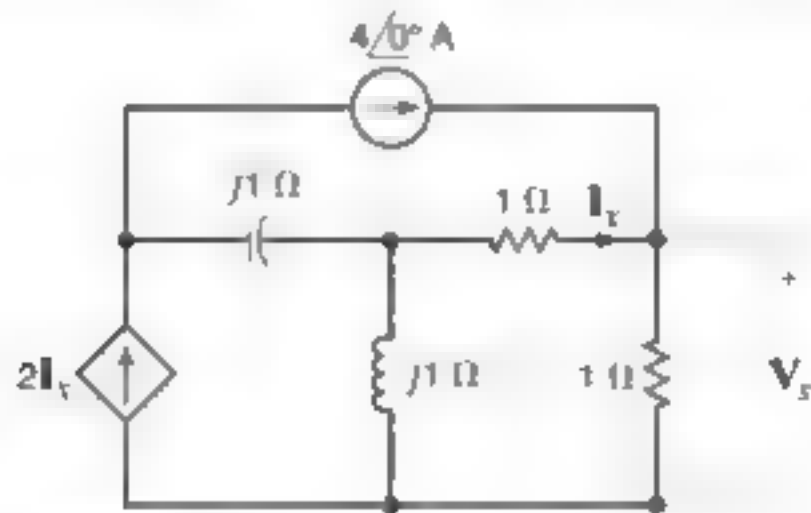


Figura P8.78

- 8.79 Utilize a análise dos laços para determinar a tensão V_x da rede mostrada na Fig. P8.79.

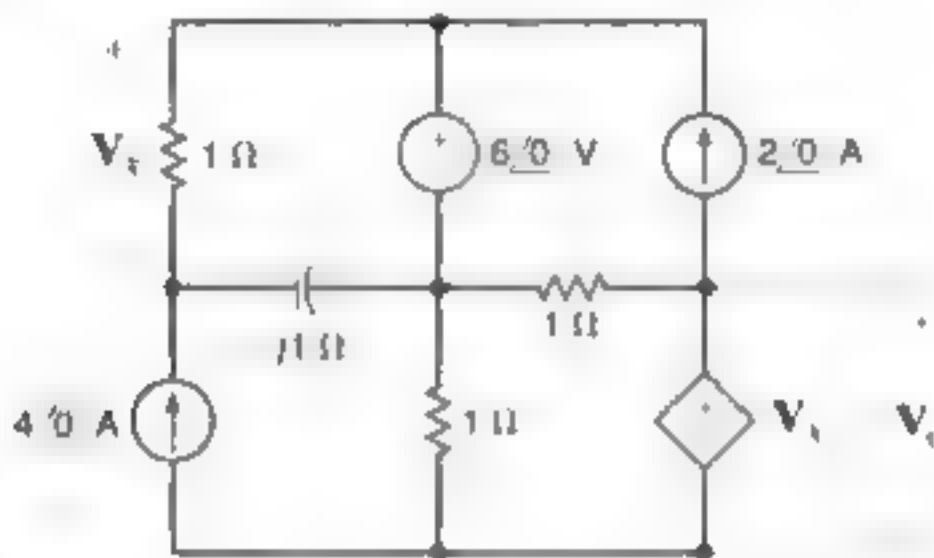


Figura P8.79

- 8.80 Utilize a análise dos laços para determinar a tensão V_x do circuito mostrado na Fig. P8.80.

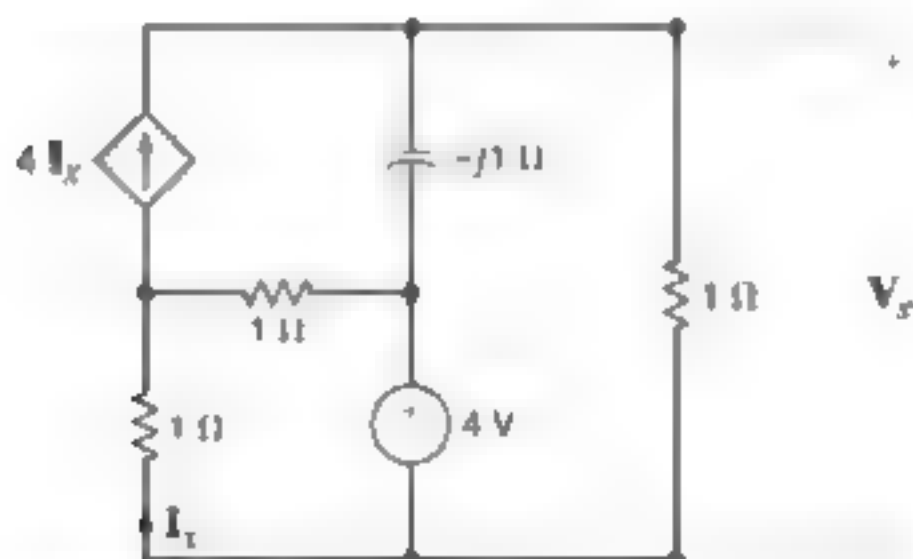


Figura P8.80

- 8.81 Utilize a análise dos laços para determinar a tensão V_x da rede mostrada na Fig. P8.81.

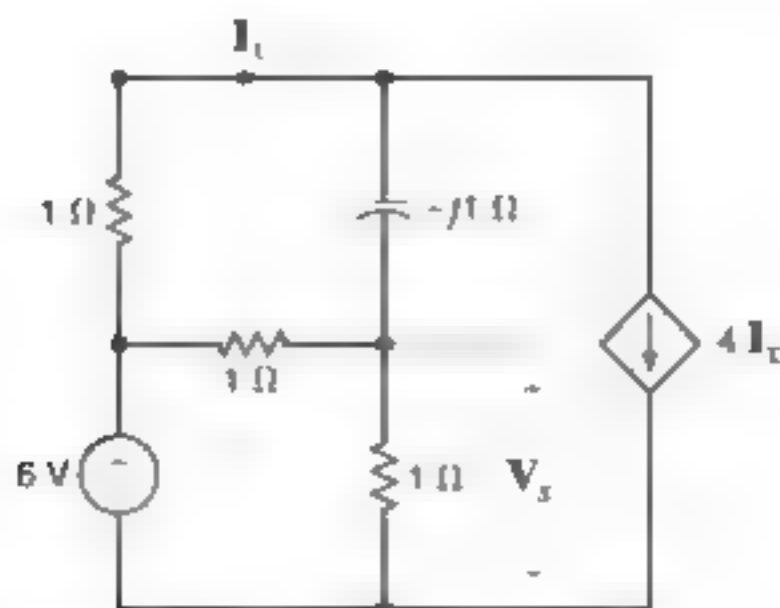


Figura P8.81

- 8.82 Utilize a análise dos laços para determinar a tensão V_x do circuito mostrado na Fig. P8.82.

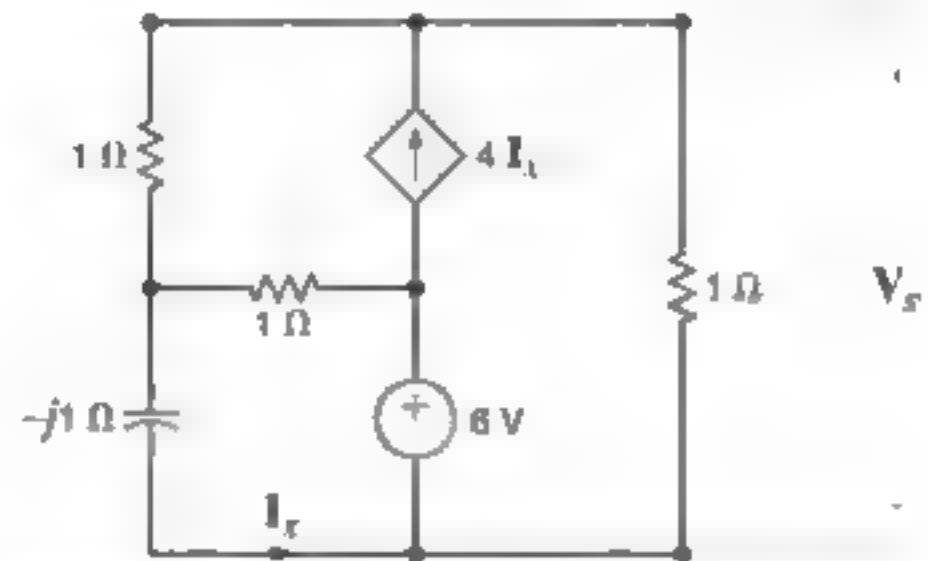


Figura P8.82

- 8.83 Utilize a análise dos laços para determinar a tensão V_x do circuito mostrado na Fig. P8.59.

- 8.84 Utilize a análise dos laços para determinar a tensão V_x da rede mostrada na Fig. P8.63.

- 8.85 Utilize a superposição para determinar a tensão V_x da rede mostrada na Fig. P8.85.

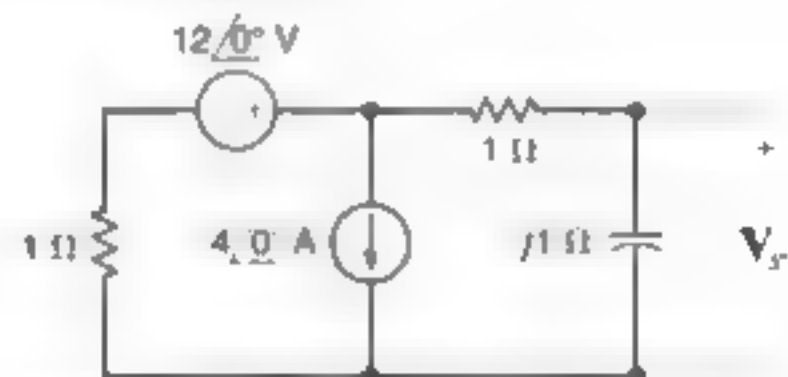


Figura P8.85

- 8.86 Utilize a superposição de efeitos para determinar a tensão V_x do circuito mostrado na Fig. P8.86.

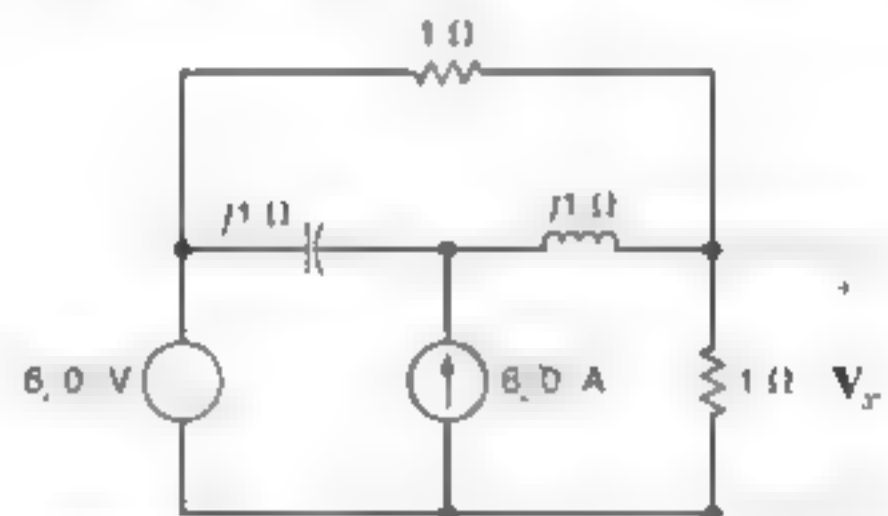


Figura P8.86

- 8.87 Utilizando a superposição de efeitos, determine a tensão V_x do circuito mostrado na Fig. P8.87.

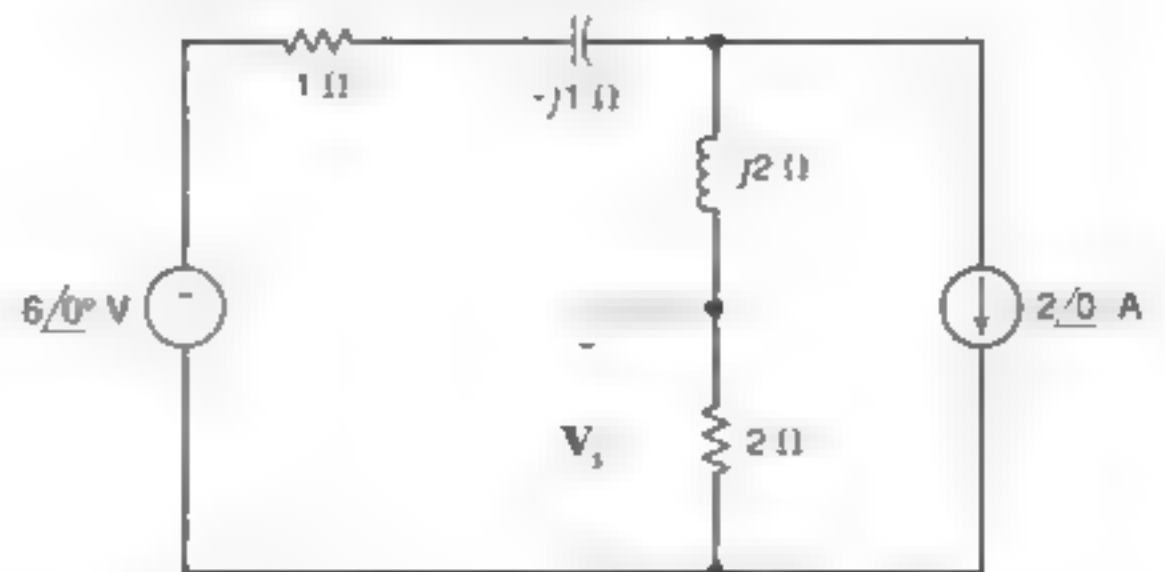


Figura P8.87

8.88 Determine a tensão V_x da rede mostrada na Fig. P8.88 utilizando a superposição de efeitos.

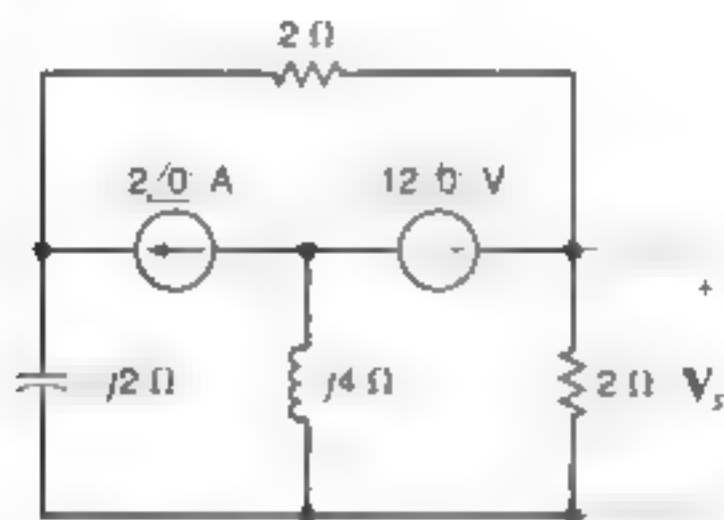


Figura P8.88

8.89 Determine a tensão V_x da rede mostrada na Fig. P8.89 utilizando a superposição de efeitos.

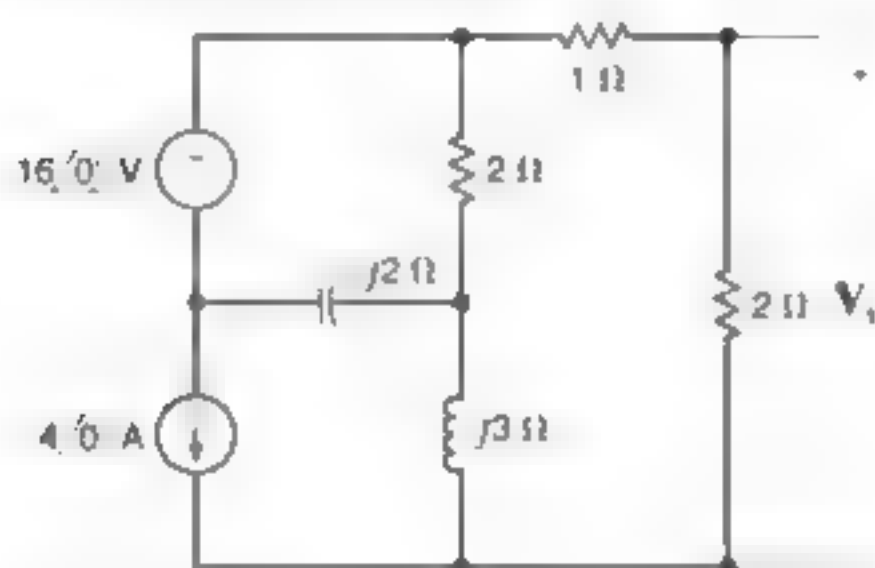


Figura P8.89

8.90 Utilize a superposição de efeitos para determinar a tensão V_x do circuito mostrado na Fig. P8.90.

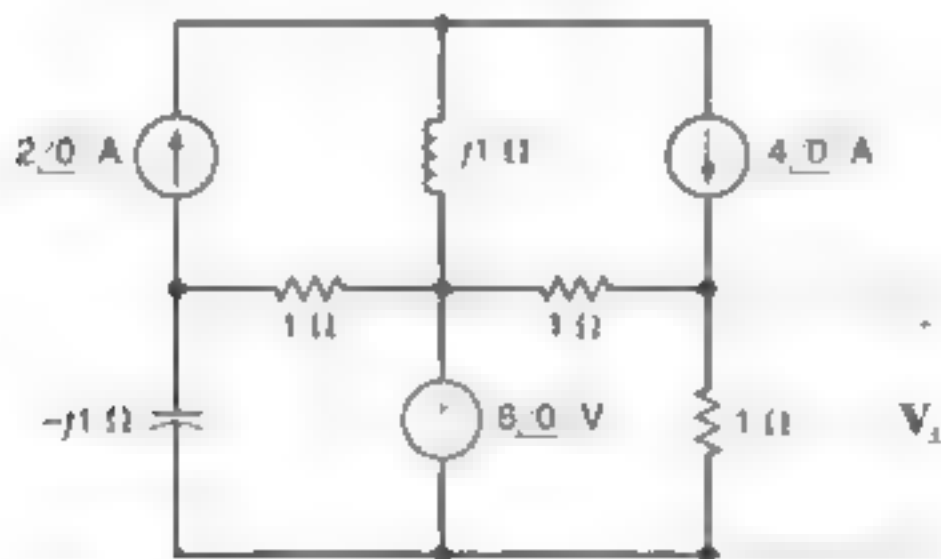


Figura P8.90

8.91 Utilize a superposição de efeitos para determinar a tensão V_x da rede mostrada na Fig. P8.91.

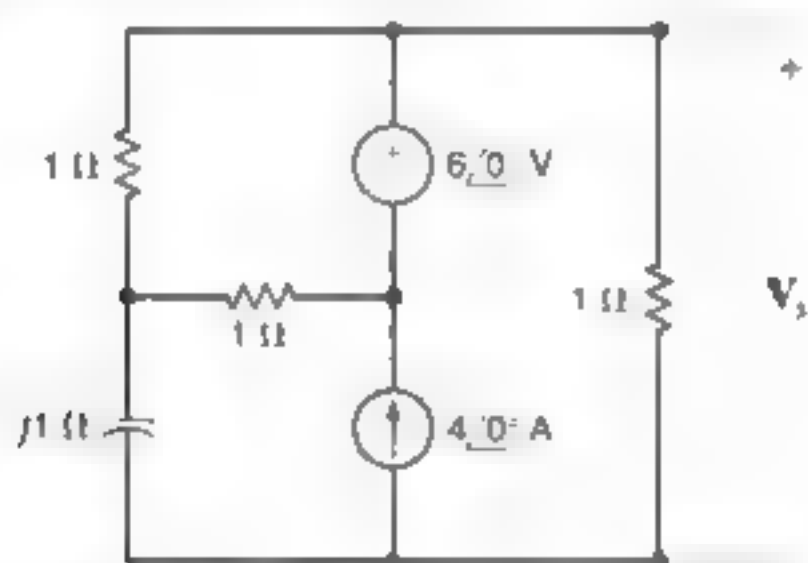


Figura P8.91

8.92 Utilize a superposição de efeitos para determinar a tensão V_x do circuito mostrado na Fig. P8.92.

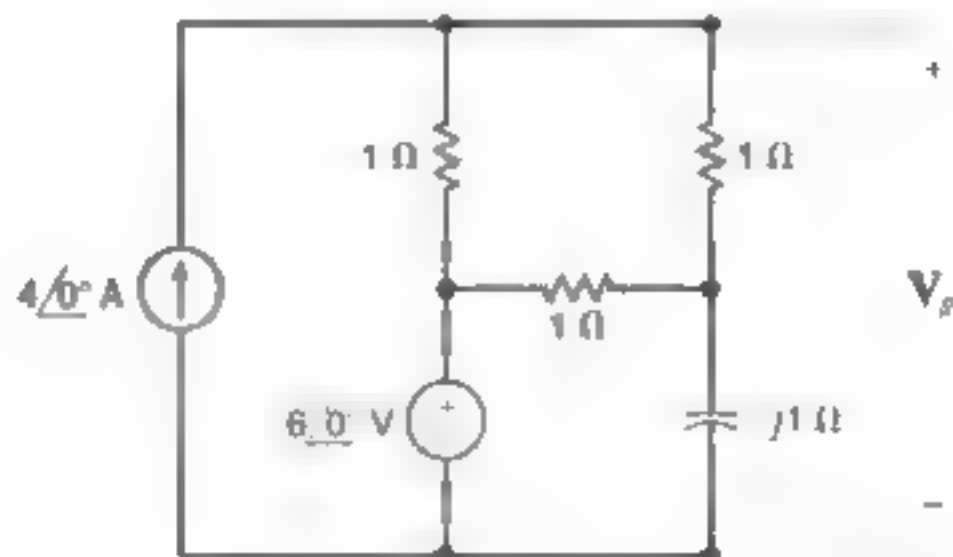


Figura P8.92

8.93 Utilize a troca de fontes para determinar a corrente I_x da rede mostrada na Fig. P8.93.

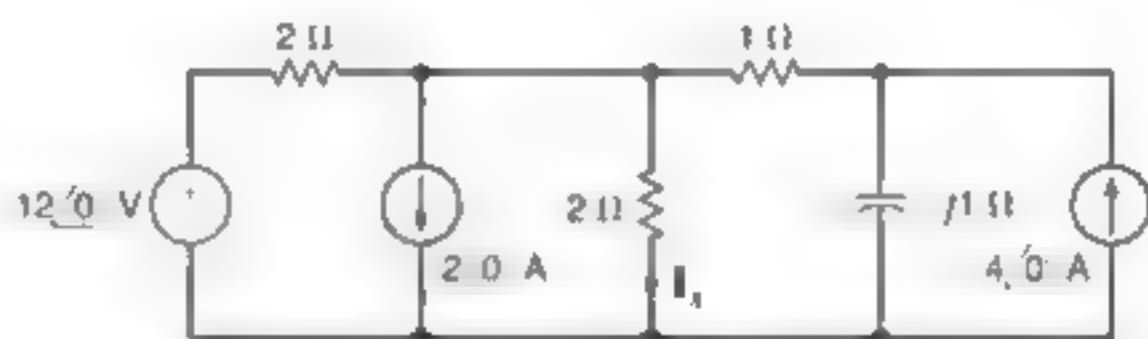


Figura P8.93

8.94 Utilize o conceito de transformação de fontes para determinar a corrente I_x da rede mostrada na Fig. P8.94.

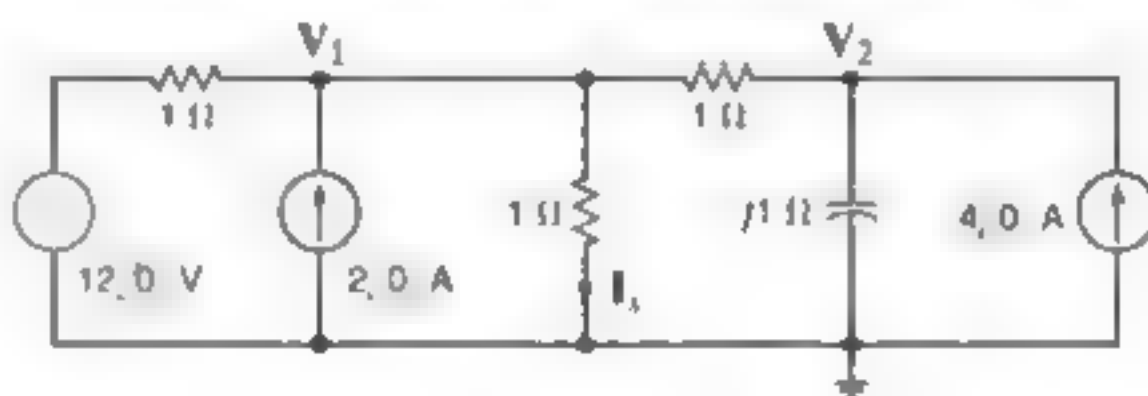


Figura P8.94

8.95 Utilize a troca de fontes para determinar a tensão V_x da rede mostrada na Fig. P8.95.

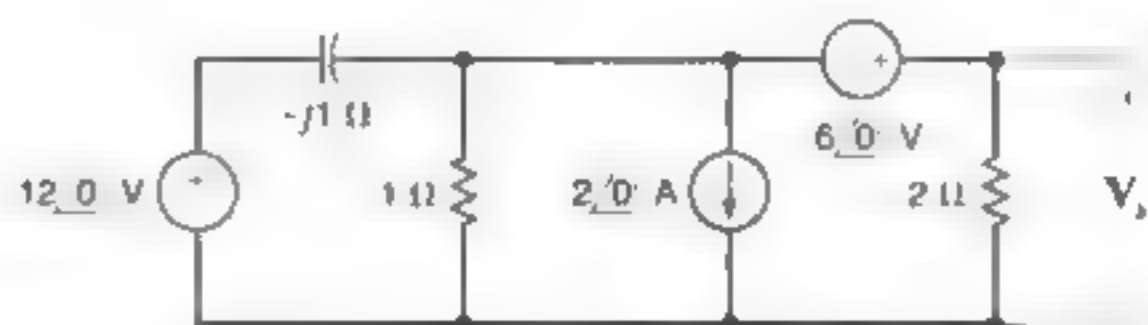


Figura P8.95

- 8.96** Utilize o conceito de transformação de fontes para determinar a corrente I_x da rede mostrada na Fig. P8.96.

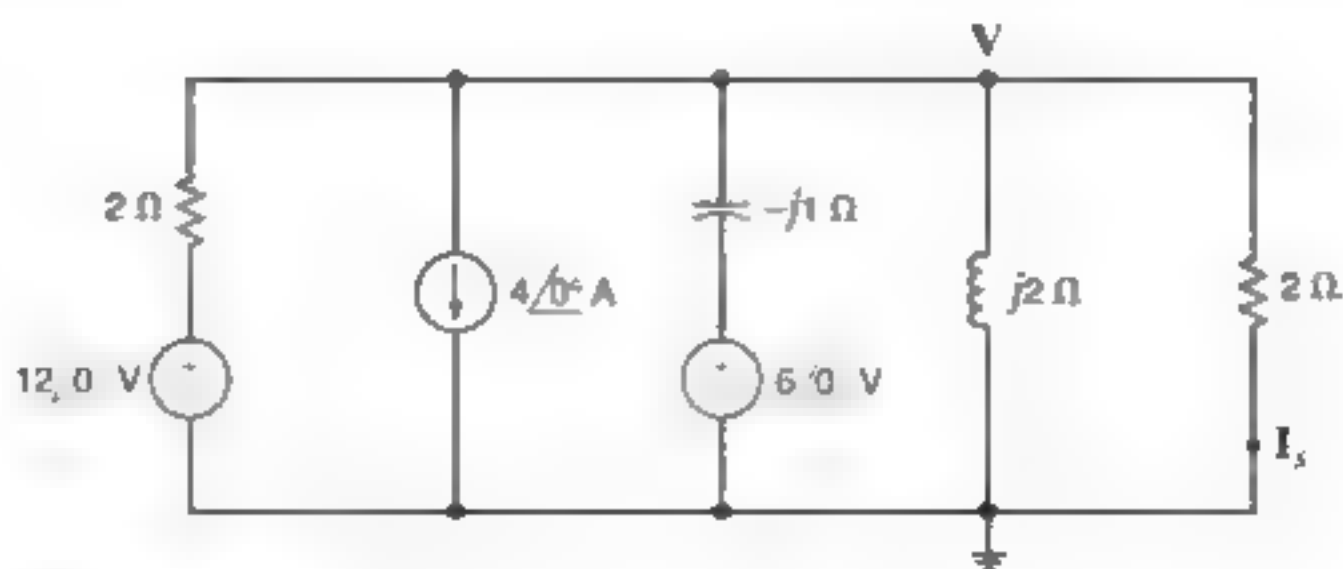


Figura P8.96

- 8.97** Utilize o conceito de transformação de fontes para determinar a tensão V_x do circuito mostrado na Fig. P8.97.

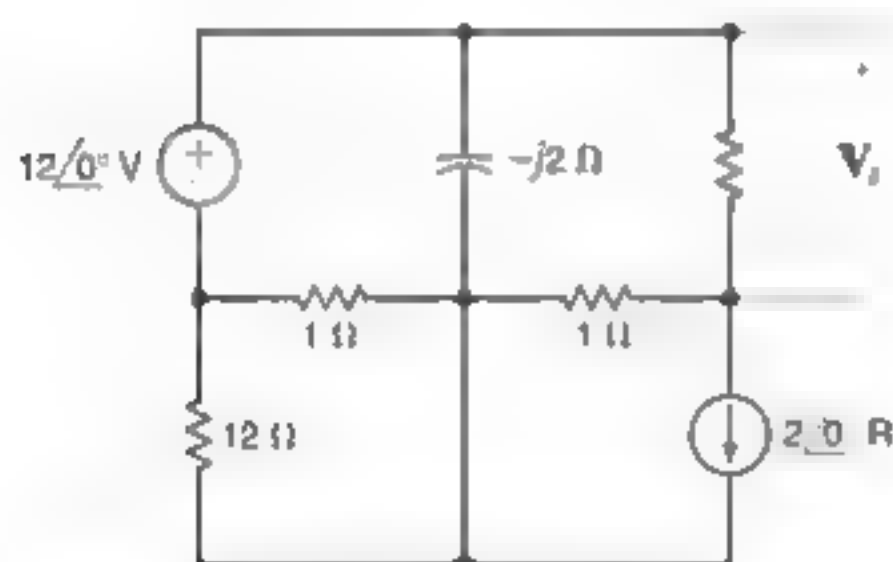


Figura P8.97

- 8.99** Utilize o conceito de transformação de fontes para determinar a corrente I_x do circuito mostrado na Fig. P8.99.

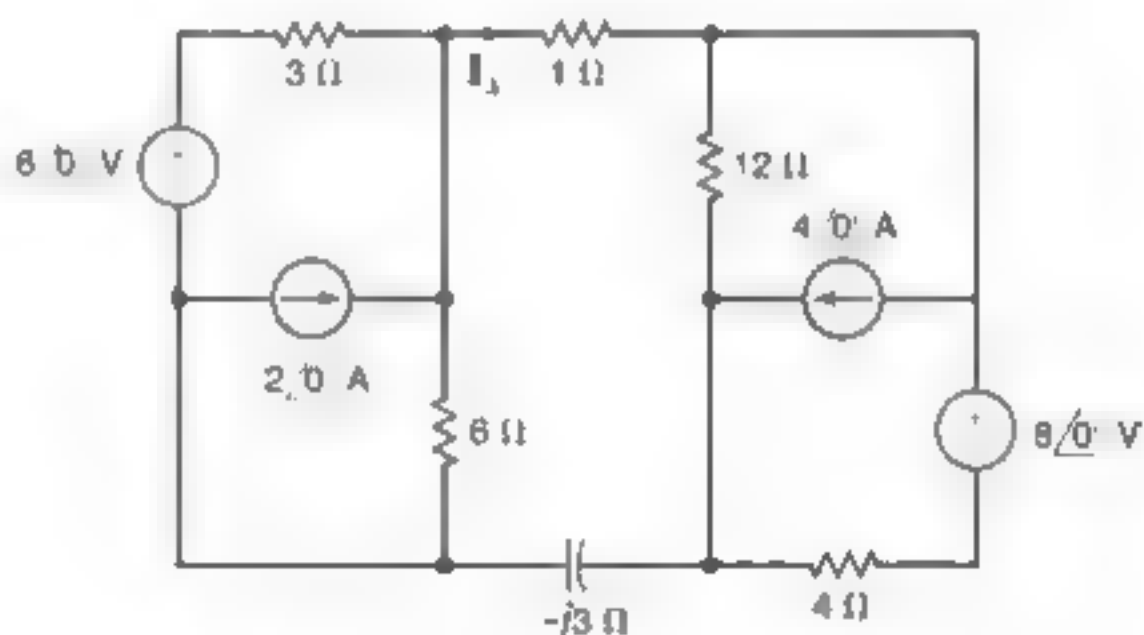


Figura P8.99

- 8.98** Utilize o conceito de transformação de fontes para determinar a tensão V_x do circuito mostrado na Fig. P8.98.

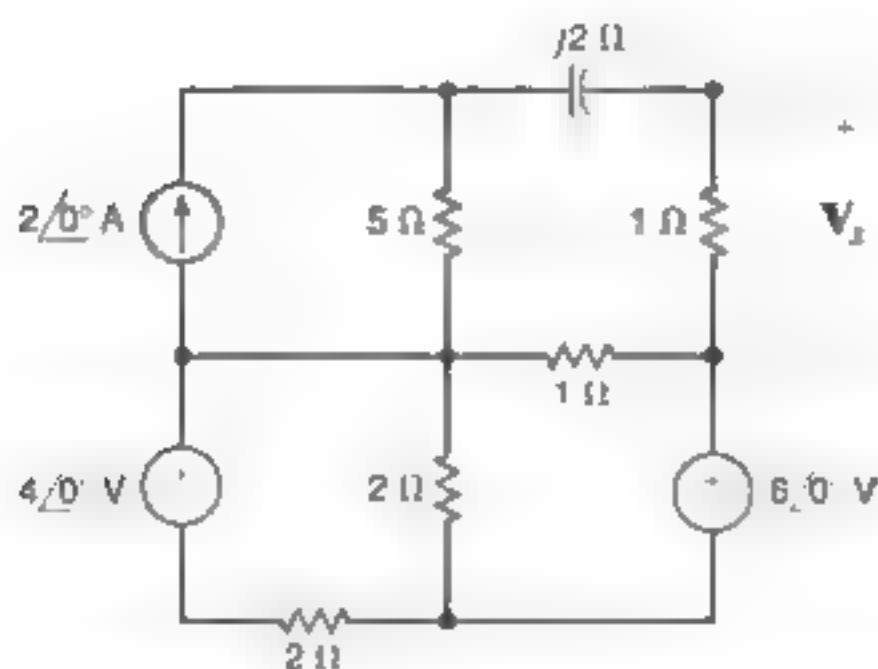


Figura P8.98

- 8.100** Utilize o conceito de transformação de fontes para determinar a corrente I_x da rede mostrada na Fig. P8.100.

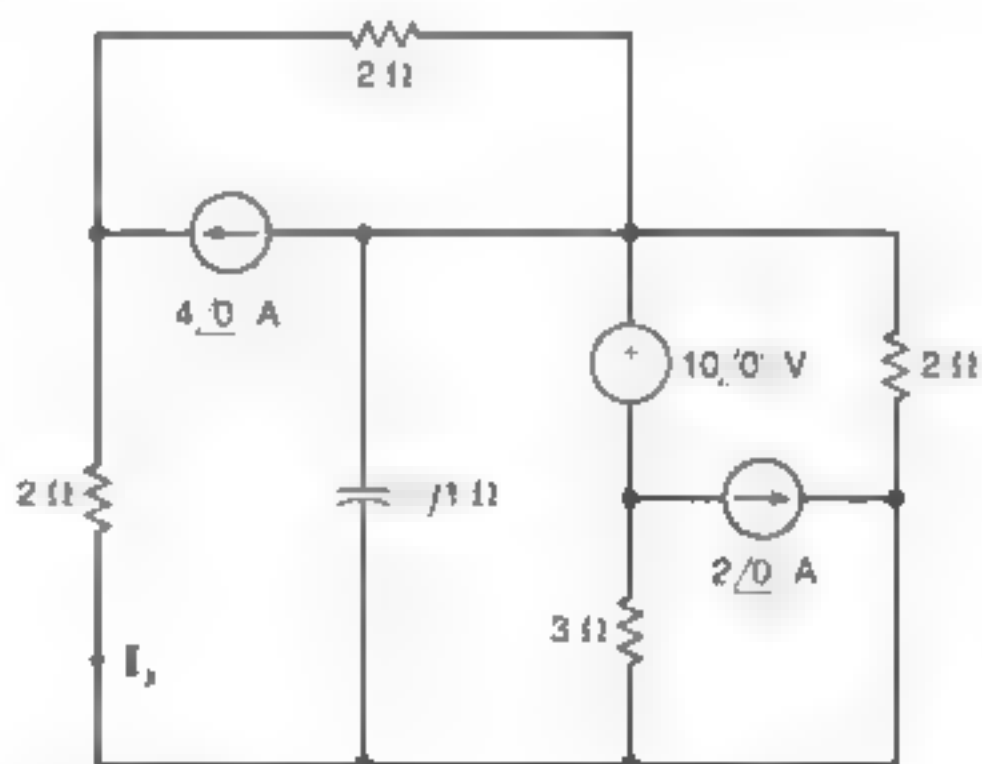


Figura P8.100

8.101 Utilize o teorema de Thévenin para determinar a tensão V_s do circuito mostrado na Fig. P8.101.

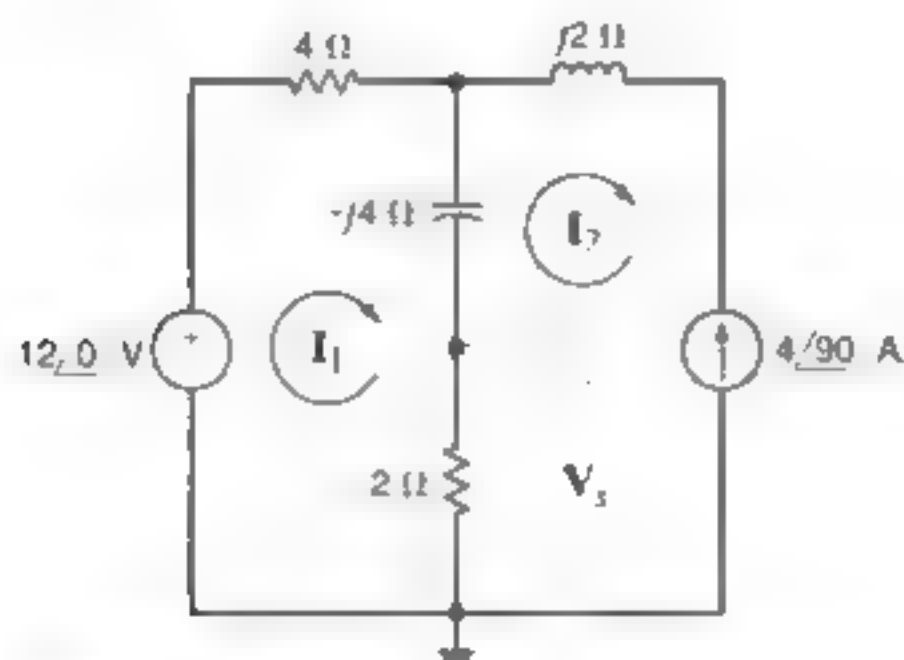


Figura P8.101

8.102 Aplique o teorema de Thévenin duas vezes para determinar a tensão V_s do circuito mostrado na Fig. P8.102.

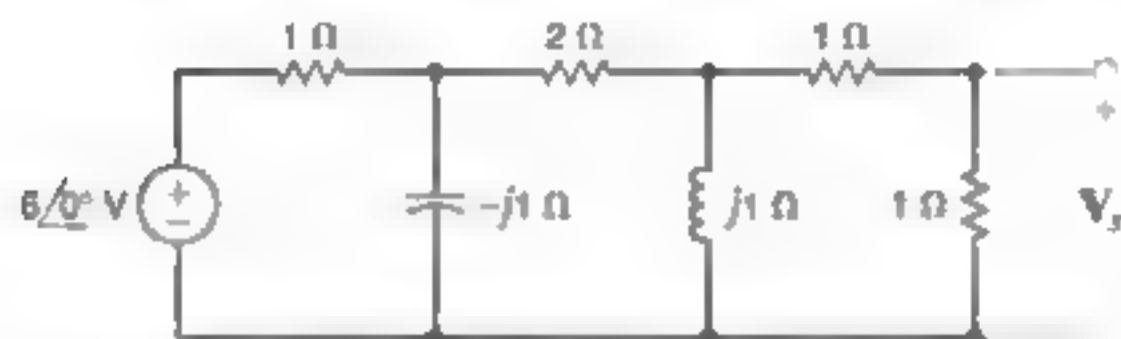


Figura P8.102

8.103 Utilize o teorema de Thévenin para determinar a corrente I_s da rede mostrada na Fig. P8.103.

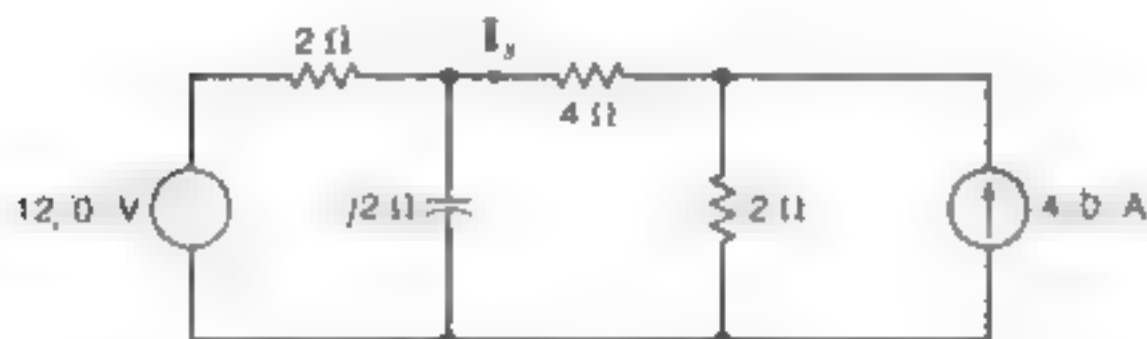


Figura P8.103

8.104 Utilize o teorema de Thévenin para determinar a corrente I_s do circuito mostrado na Fig. P8.104.

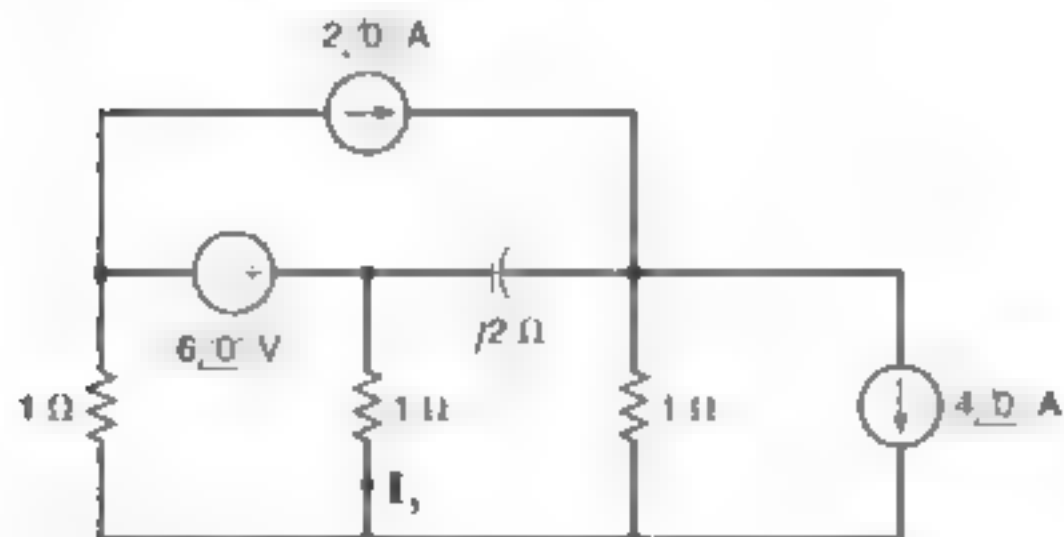


Figura P8.104

8.105 Utilize o teorema de Thévenin para determinar a tensão V_s do circuito mostrado na Fig. P8.105.

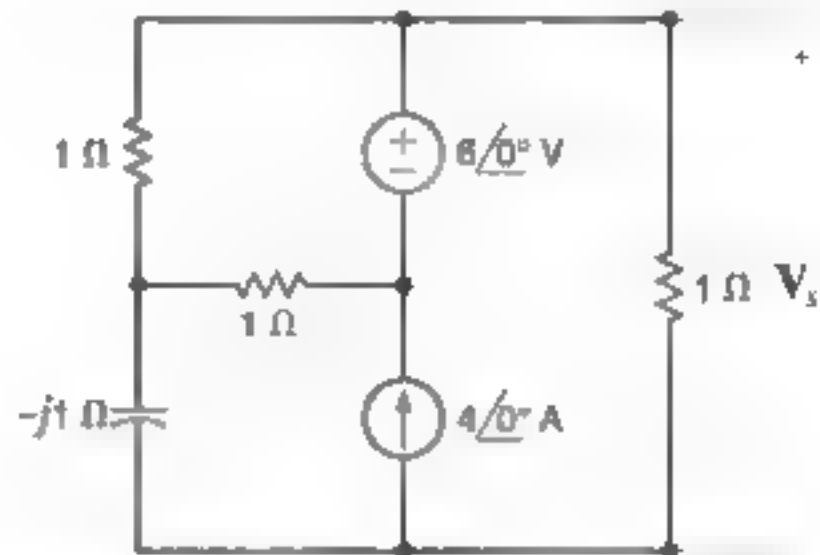


Figura P8.105

8.106 Utilize o teorema de Thévenin para determinar a tensão V_s da rede mostrada na Fig. P8.106.

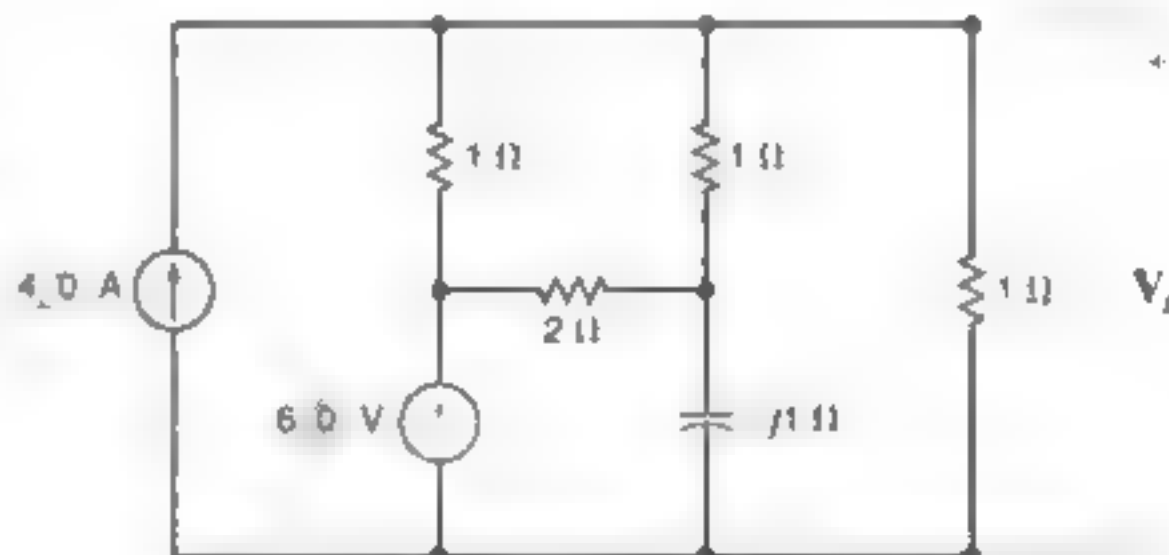


Figura P8.106

8.107 Utilize o teorema de Thévenin para determinar a tensão V_s da rede mostrada na Fig. P8.107.

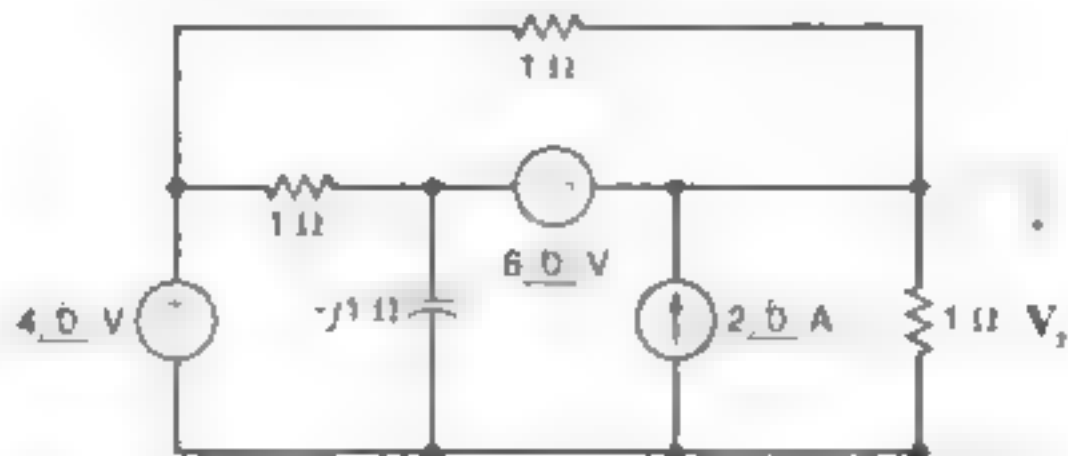


Figura P8.107

- 8.108** Utilize o teorema de Thévenin para determinar a corrente I_x da rede mostrada na Fig. P8.108.

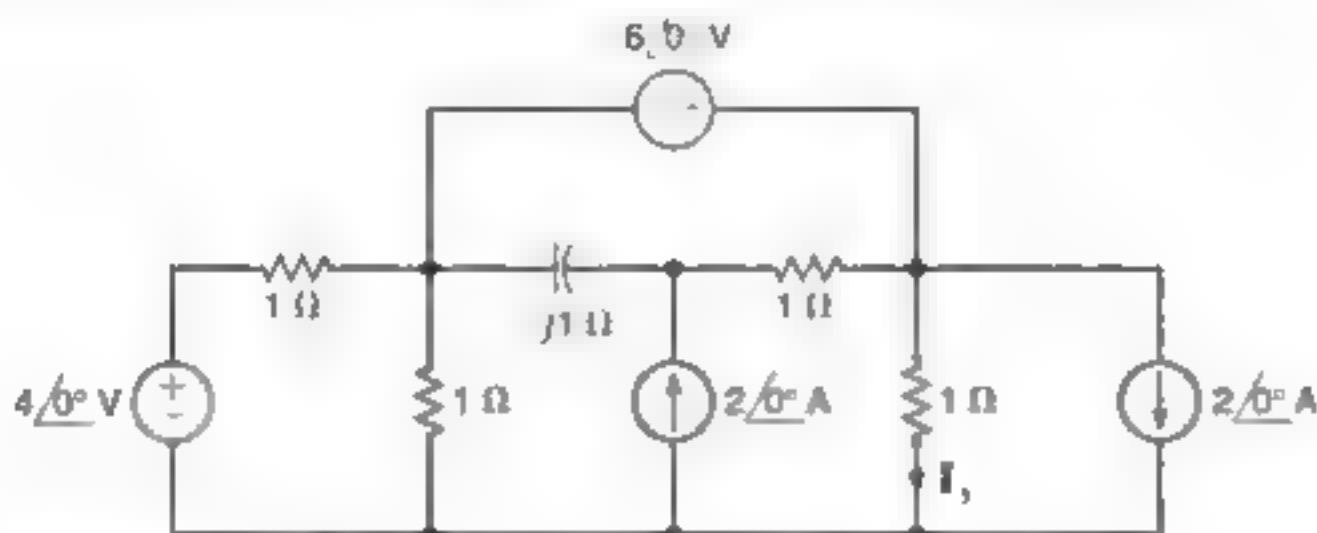


Figura P8.108

- 8.109** Utilize o teorema de Thévenin para determinar a tensão V_x da rede mostrada na Fig. P8.109.

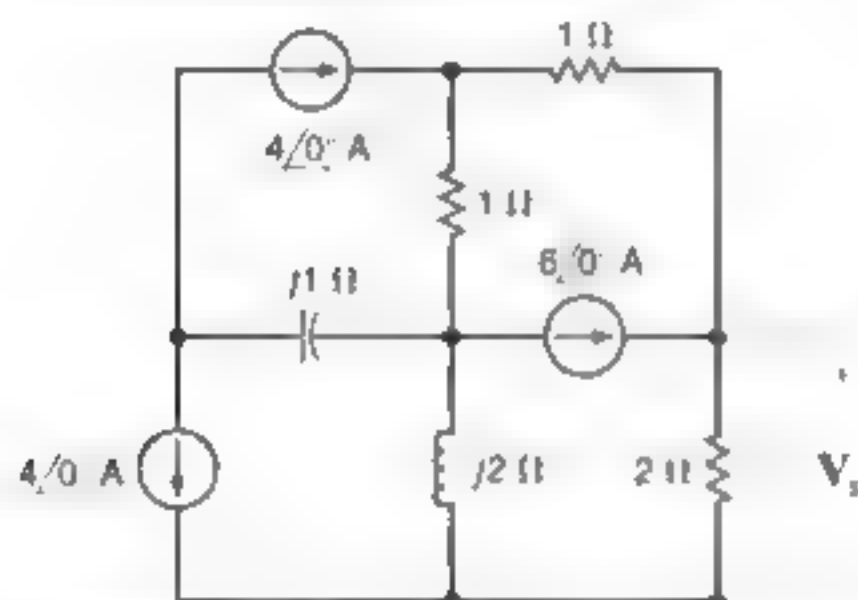


Figura P8.109

- 8.110** Dada a rede mostrada na Fig. P8.110, determine o equivalente de Thévenin da rede entre os terminais A-B.

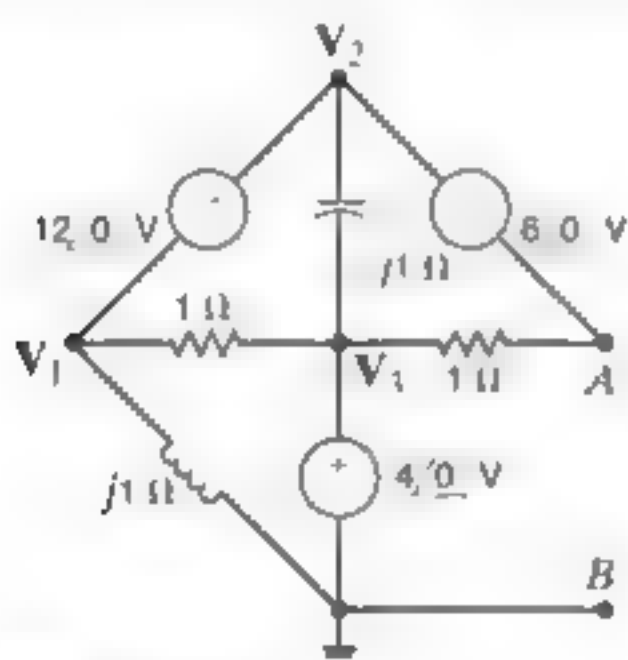


Figura P8.110

- 8.111** Determine a tensão V_x da rede mostrada na Fig. P8.111 utilizando o teorema de Thévenin.

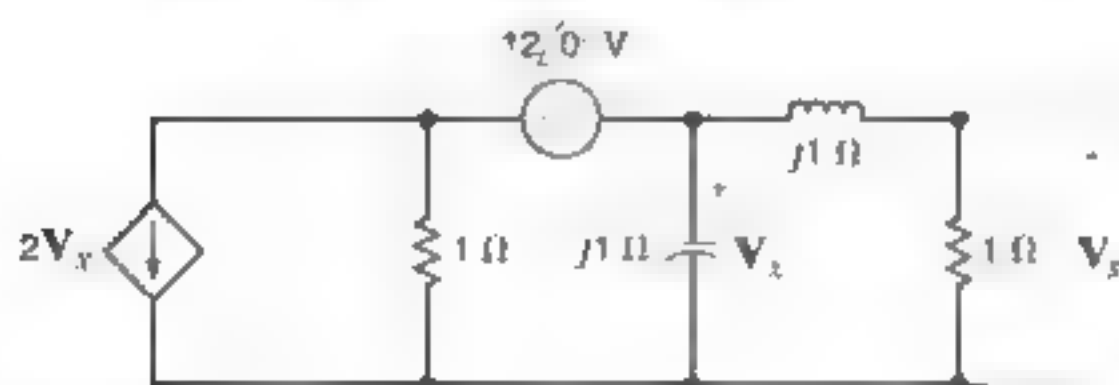


Figura P8.111

- 8.112** Determine o equivalente de Thévenin entre os terminais A-B para a rede mostrada na Fig. P8.112.

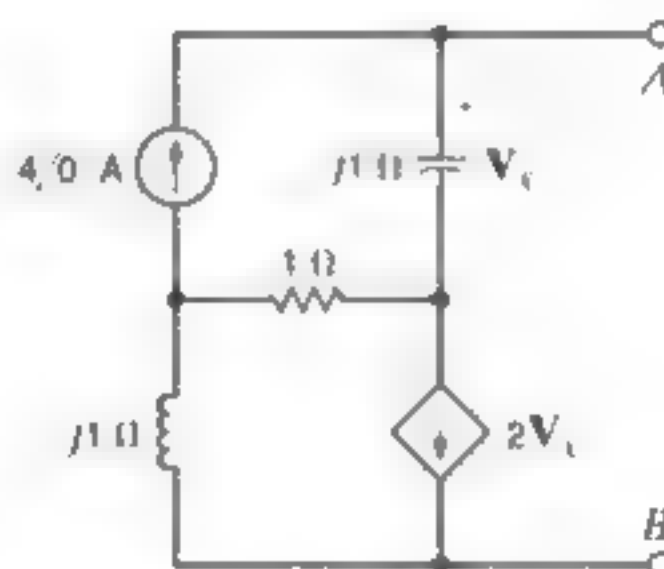


Figura P8.112

- 8.113** Determine a tensão V_x do circuito mostrado na Fig. P8.113 utilizando o teorema de Norton.

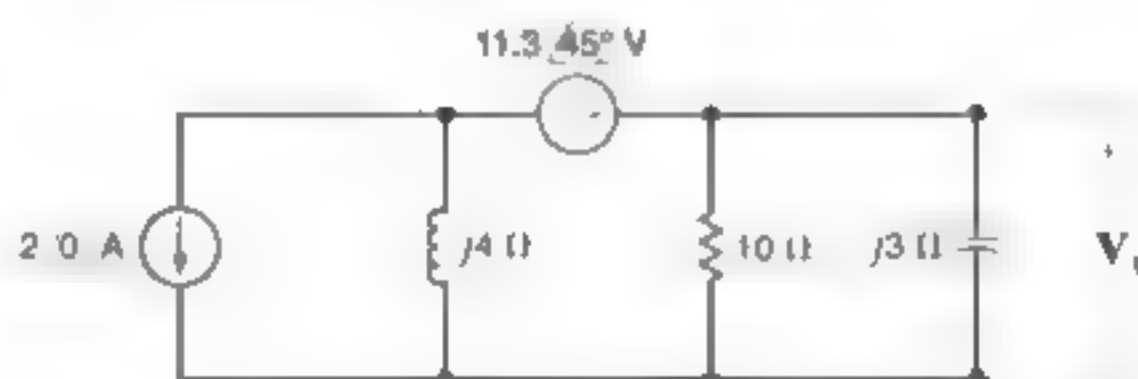


Figura P8.113

- 8.114** Determine a corrente I_x da rede mostrada na Fig. P8.114 utilizando o teorema de Norton.

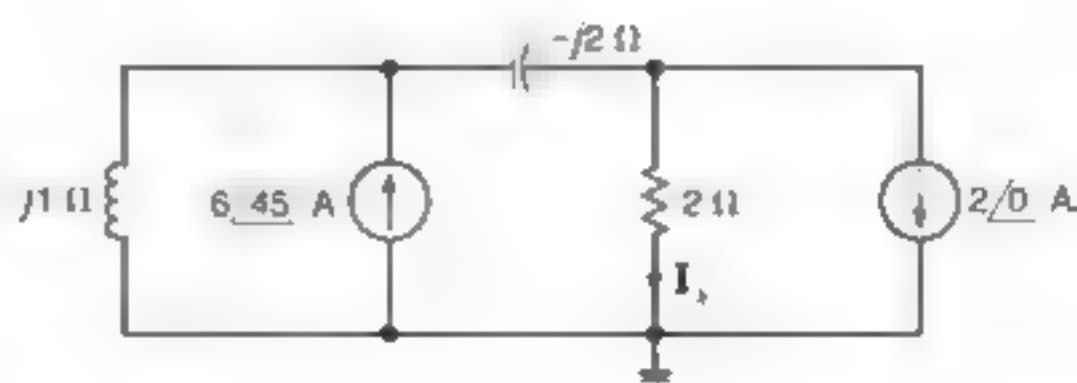


Figura P8.114

- 8.115** Utilize o teorema de Norton para determinar a corrente I_x do circuito mostrado na Fig. P8.103.

- 8.116** Utilize o teorema de Norton para determinar a corrente I_x do circuito mostrado na Fig. P8.104.

8.117 Utilize o teorema de Norton para determinar a tensão V_x da rede mostrada na Fig. P8.105.

8.118 Utilize o teorema de Norton para determinar a tensão V_x do circuito mostrado na Fig. P8.107.

8.119 Utilize o teorema de Norton para determinar a corrente I_x do circuito mostrado na Fig. P8.108.

8.120 Utilize o teorema de Norton para determinar a tensão V_x da rede mostrada na Fig. P8.120.

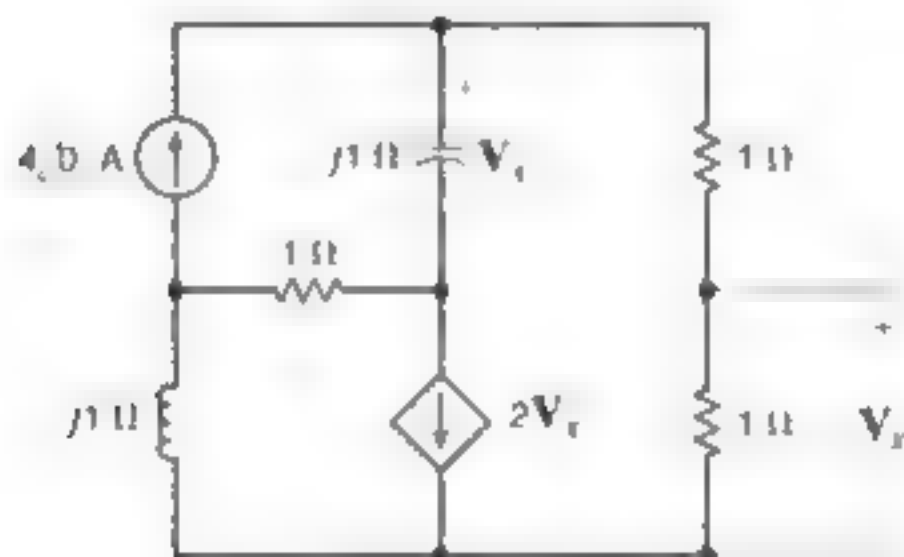


Figura P8.120

8.121 Determine a tensão V_x do circuito mostrado na Fig. P8.121 utilizando o teorema de Norton.

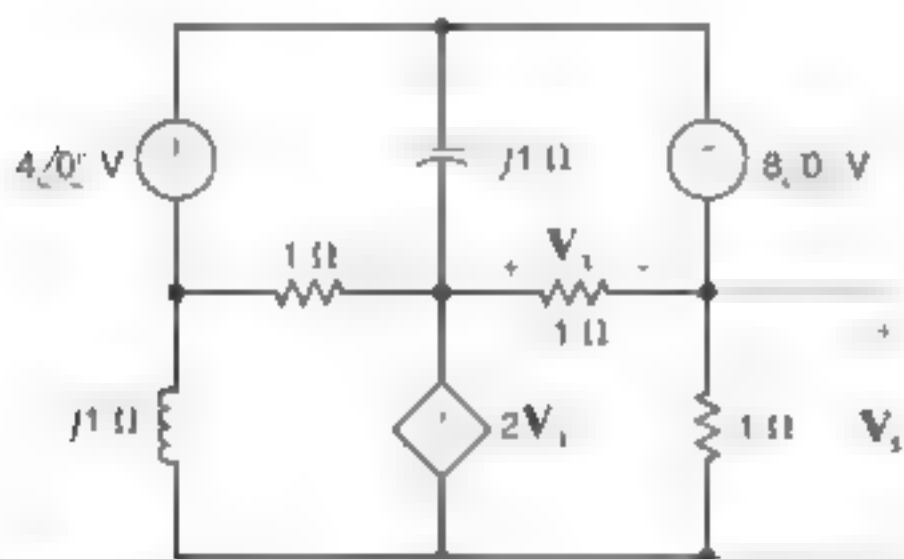


Figura P8.121

8.122 Utilize o teorema de Norton para determinar a tensão V_x do circuito mostrado na Fig. P8.122.

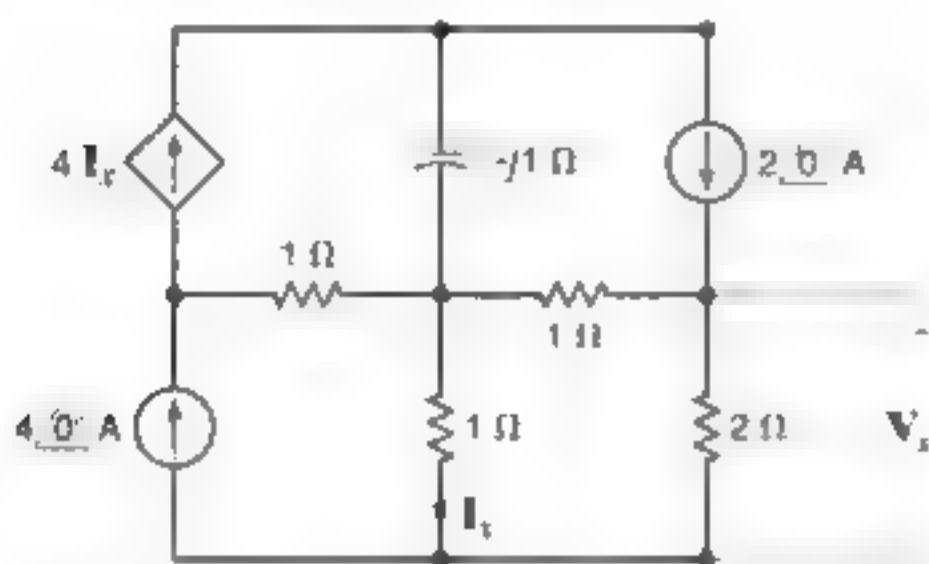


Figura P8.122

8.123 Utilize o teorema de Norton para determinar a tensão V_x do circuito mostrado na Fig. P8.61.

8.124 Utilize o conceito de transformação de fontes para determinar a tensão V_x do circuito mostrado na Fig. P8.124.

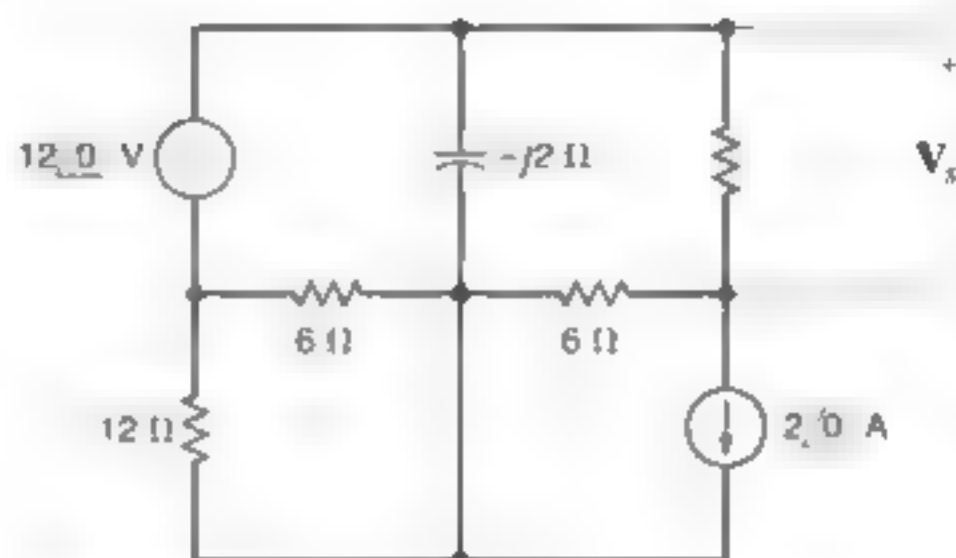


Figura P8.124

8.125 Calcule a impedância equivalente de Thévenin, Z_{Th} , do circuito mostrado na Fig. P8.125.

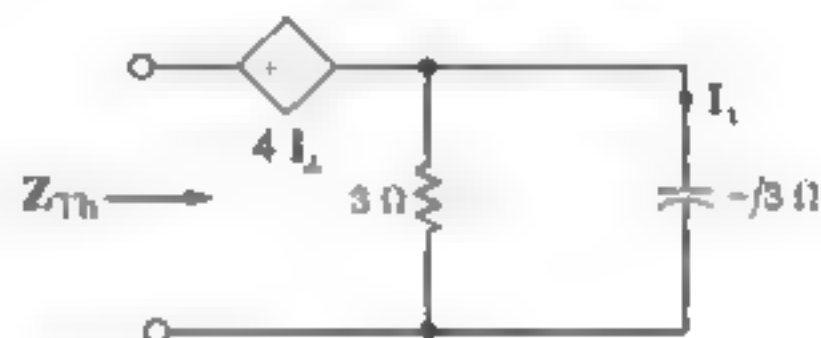


Figura P8.125

8.126 Determine o equivalente de Thévenin entre os terminais A-B da rede mostrada na Fig. P8.126.

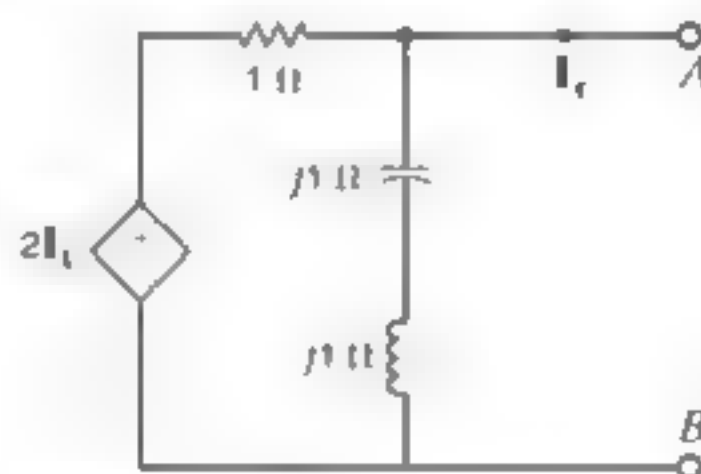


Figura P8.126

8.127 Determine o equivalente de Thévenin entre os terminais A-B da rede mostrada na Fig. P8.127.

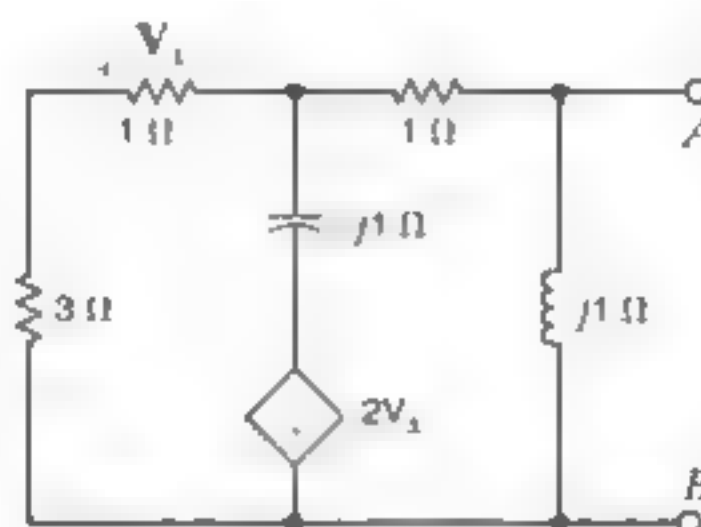


Figura P8.127

Resolva os problemas a seguir utilizando métodos computacionais.

8.128 Aplique o teorema de Norton para determinar a tensão V_x da rede mostrada na Fig. P8.128.

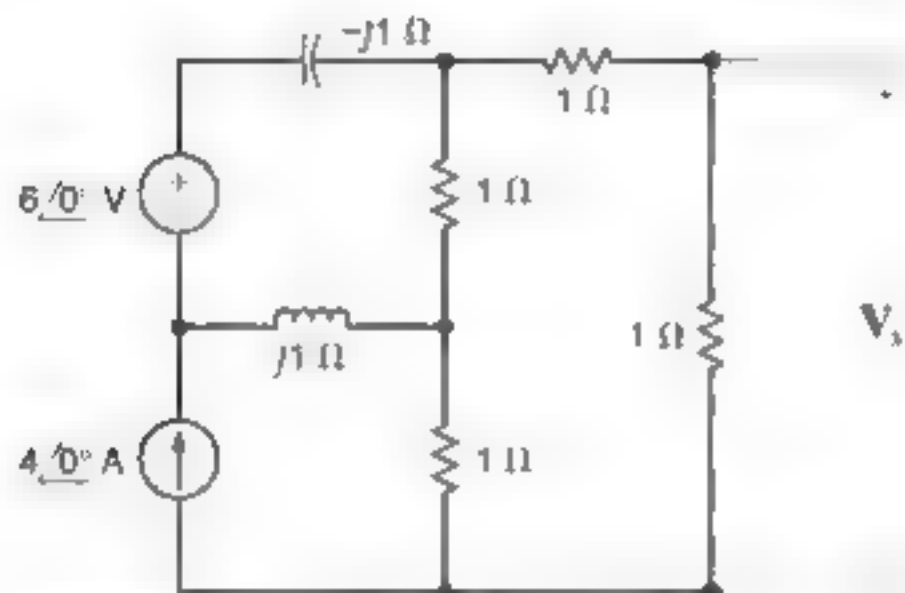


Figura P8.128

8.129 Determine a tensão V_x do circuito mostrado na Fig. P8.129.

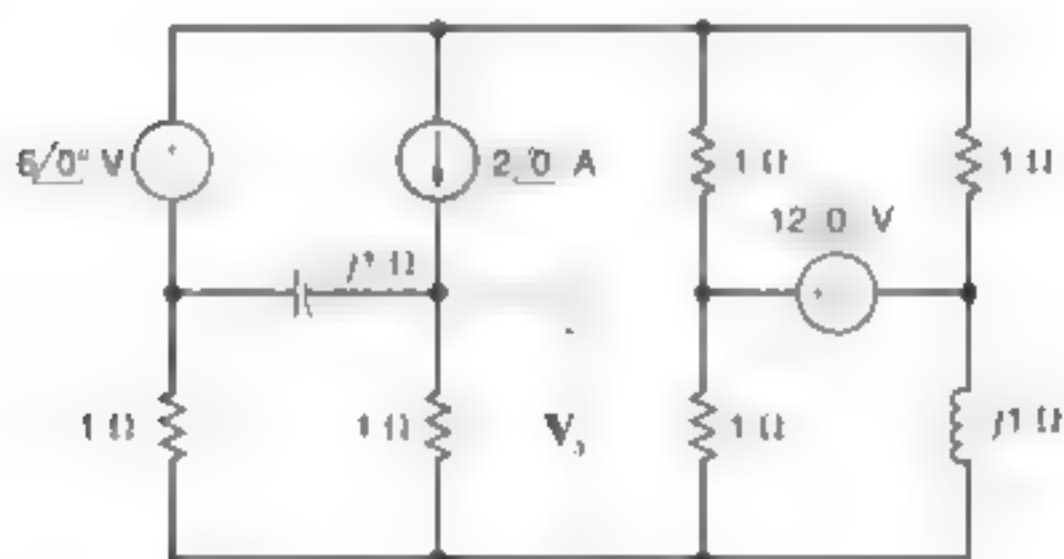


Figura P8.129

8.130 Determine as tensões nodais da rede mostrada na Fig. P8.130.

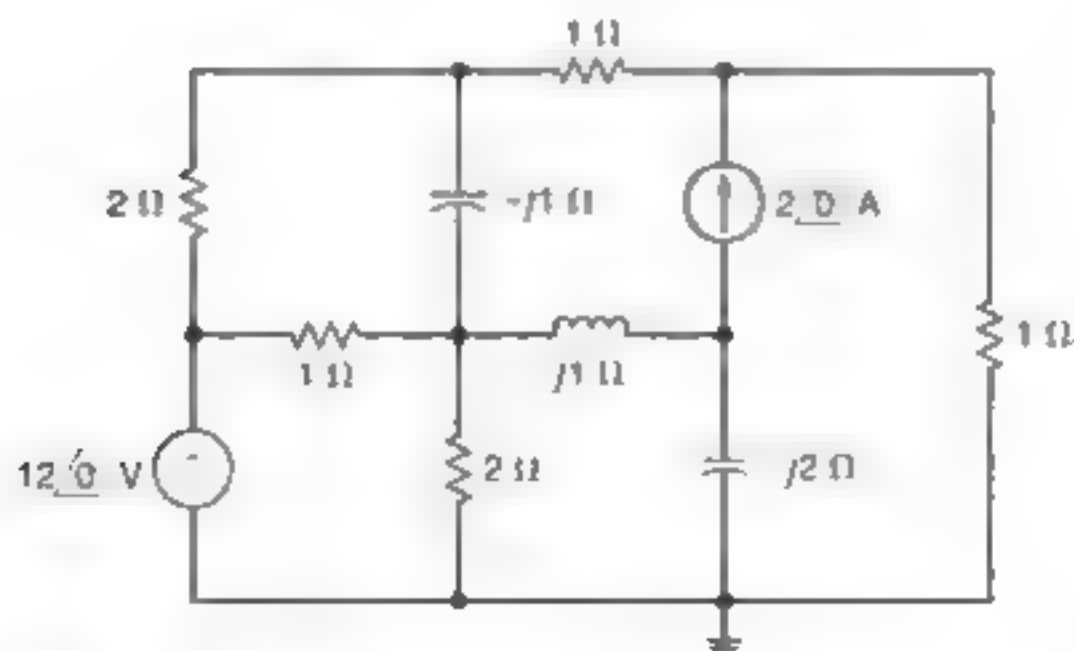


Figura P8.130

8.131 Determine a tensão V_x da rede mostrada na Fig. P8.131.

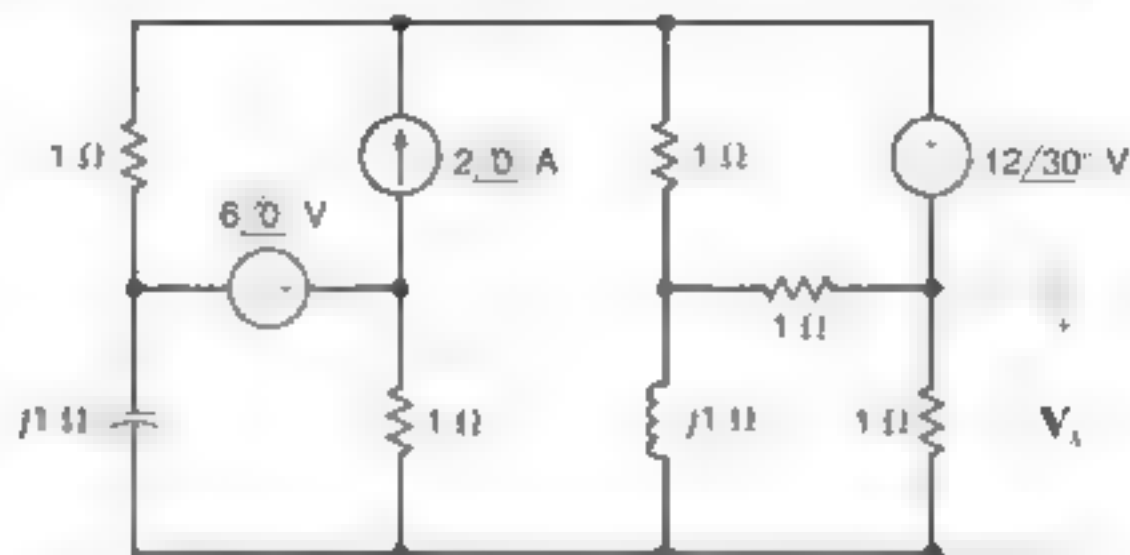


Figura P8.131

8.132 Utilize o teorema de Thévenin para determinar a corrente I_x da rede mostrada na Fig. P8.132.

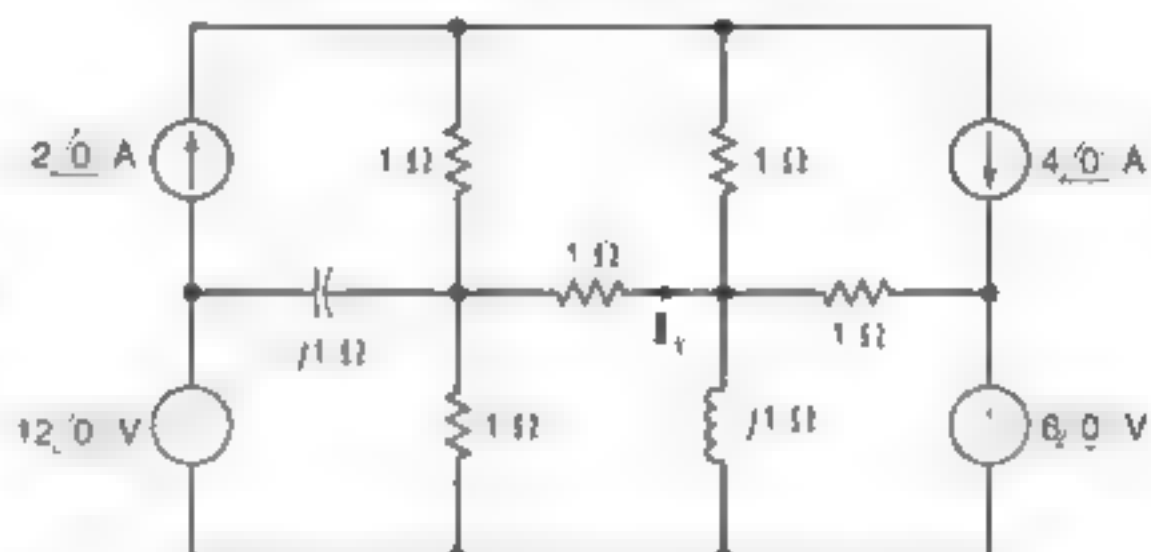


Figura P8.132

8.133 Utilize o programa MATLAB para determinar a corrente I_x da rede mostrada na Fig. P8.133.

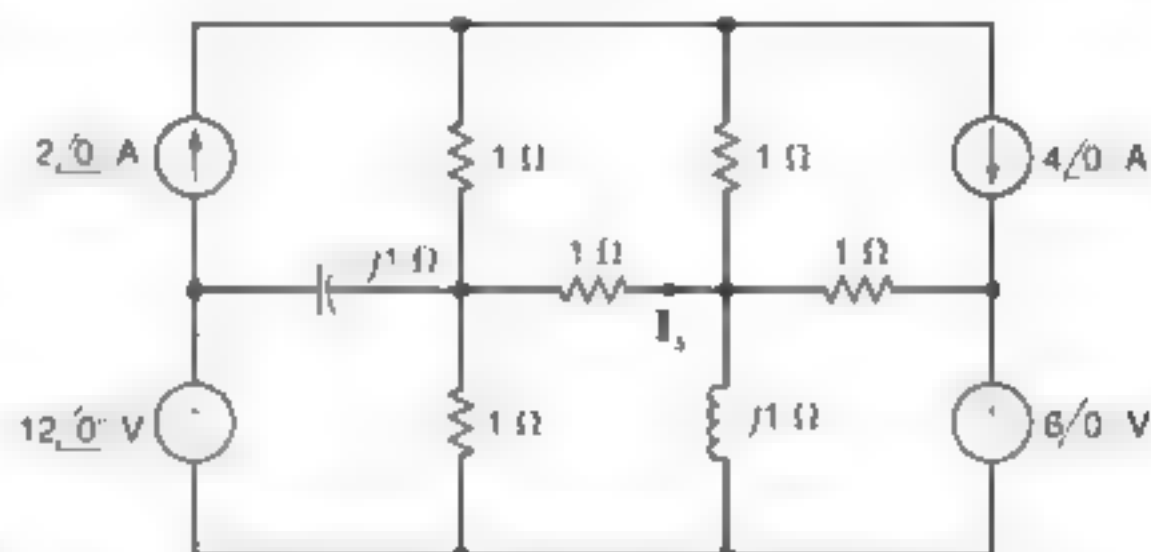


Figura P8.133

8.134 Utilize a análise nodal e a análise dos laços para determinar a corrente I_x da rede mostrada na Fig. P8.134.

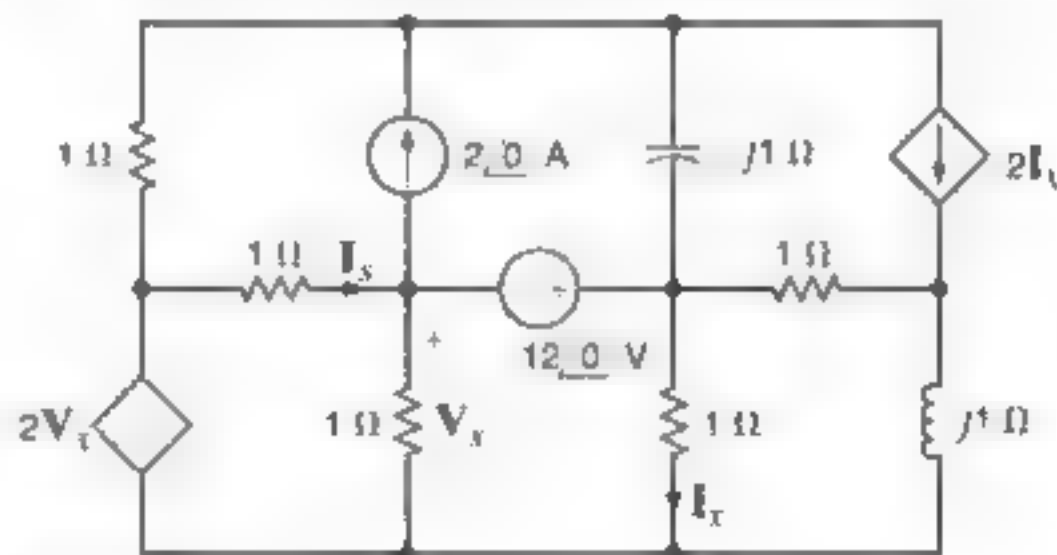


Figura P8.134

- 8.135** Dado o circuito mostrado na Fig. P8.135, em que frequência as magnitudes das correntes $i_C(t)$ e $i_L(t)$ são iguais?

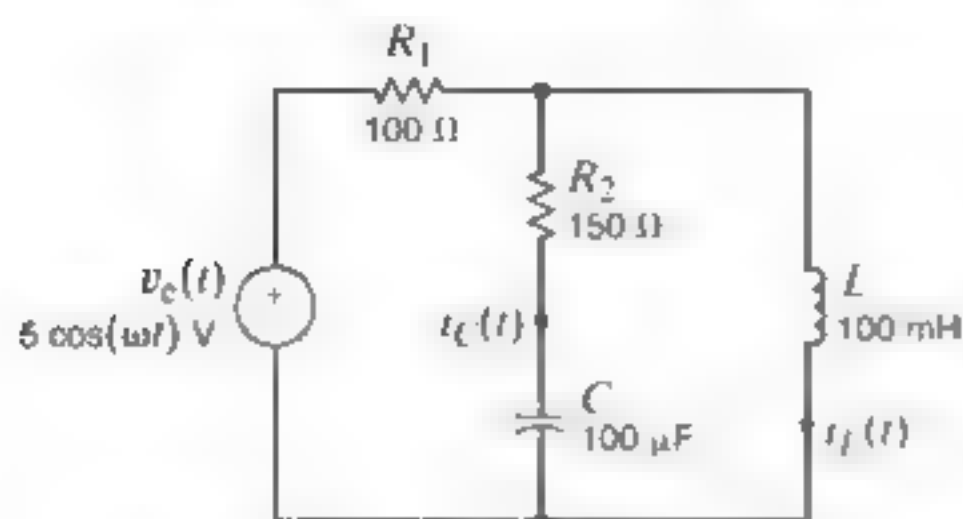


Figura P8.135

- 8.136** Considerando que a rede mostrada na Fig. P8.136 opere a uma frequência $f = 400$ Hz, determine a corrente I_x .

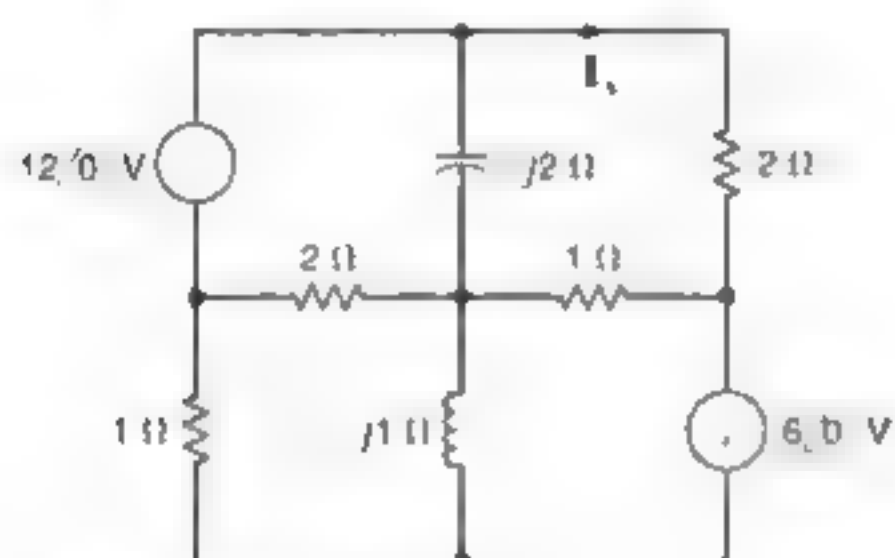


Figura P8.136

- 8.137** A rede mostrada na Fig. P8.137 opera a uma frequência $f = 60$ Hz. Determine a tensão V_x .

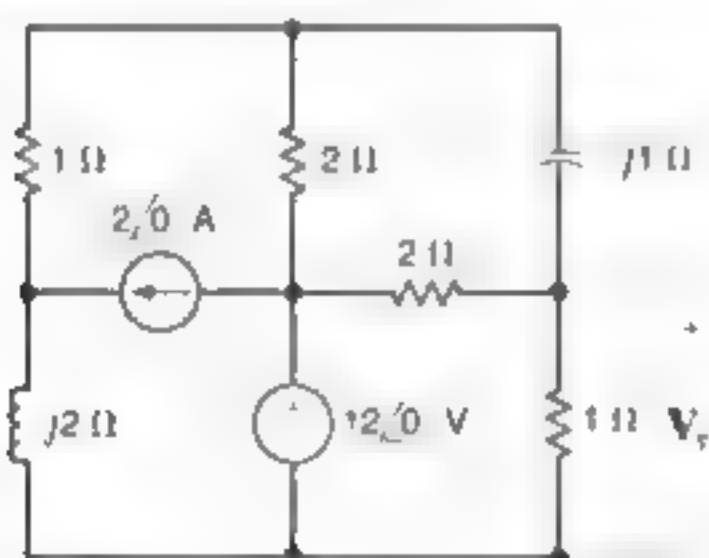


Figura P8.137

- 8.138** Determine a corrente I_x da rede mostrada na Fig. P8.138.

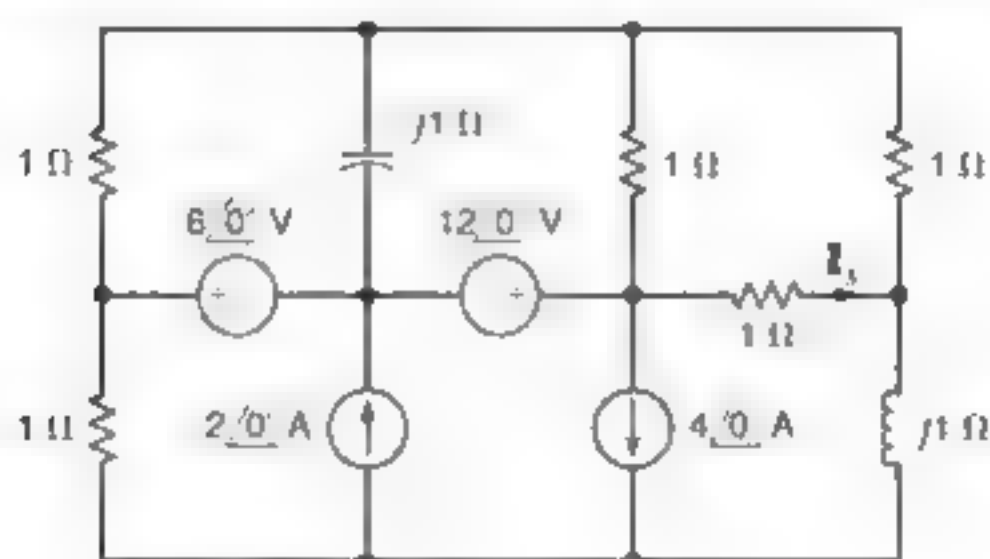


Figura P8.138

- 8.139** Determine a corrente I_x da rede mostrada na Fig. P8.139.

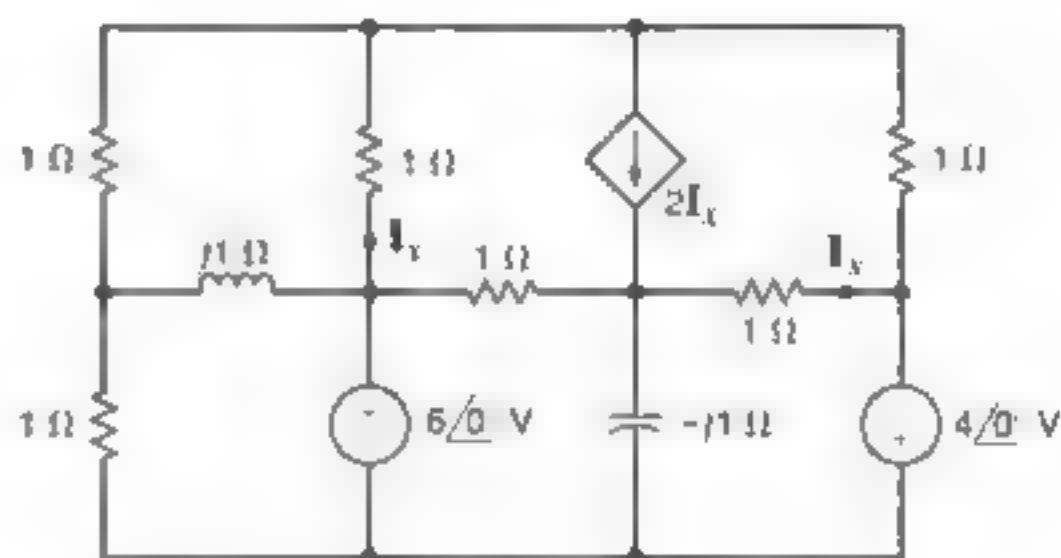


Figura P8.139

- 8.140** Determine a corrente I_x da rede mostrada na Fig. P8.140.

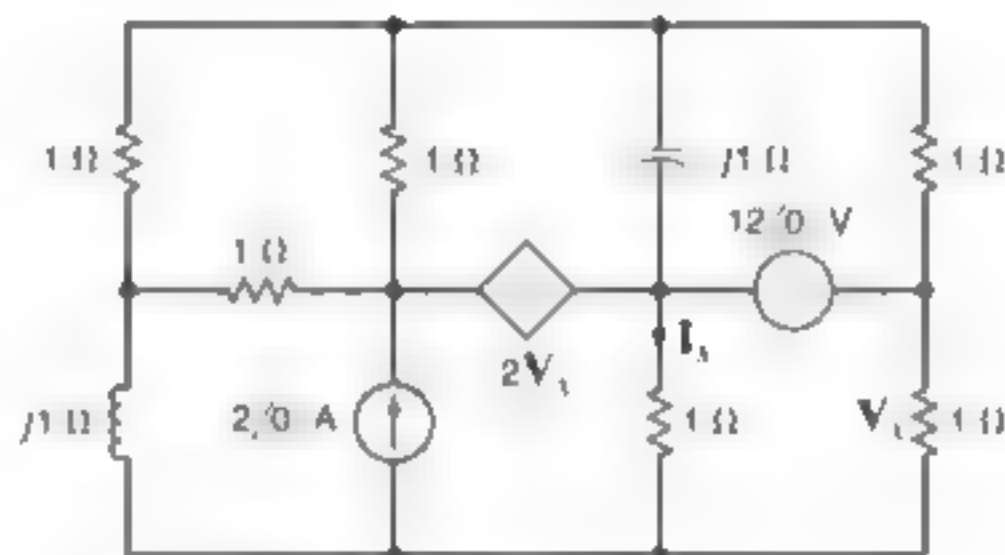


Figura P8.140

- 8.141** Determine a corrente I_x do circuito mostrado na Fig. P8.141.

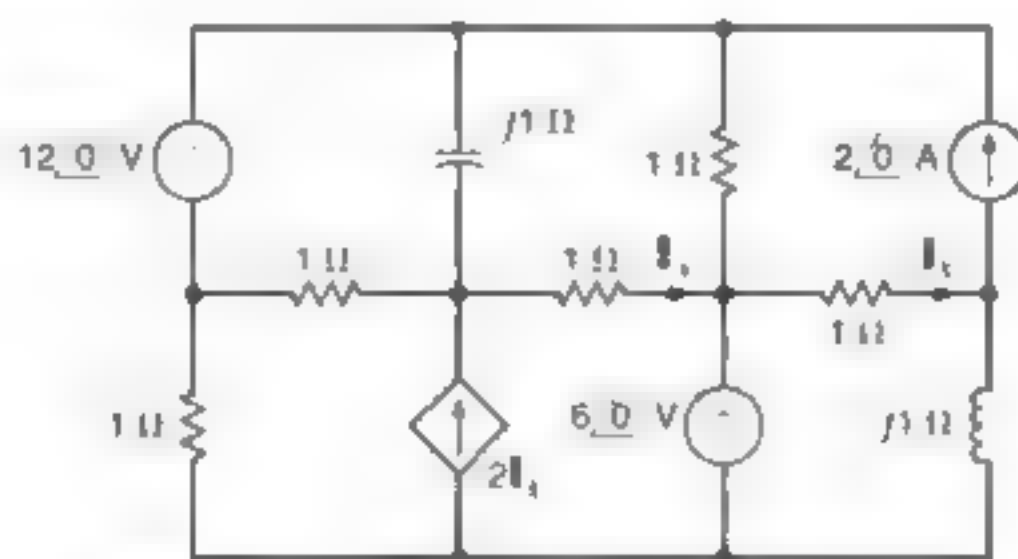


Figura P8.141

8.142 Determine a tensão $v_s(t)$ da rede mostrada na Fig. P8.142.

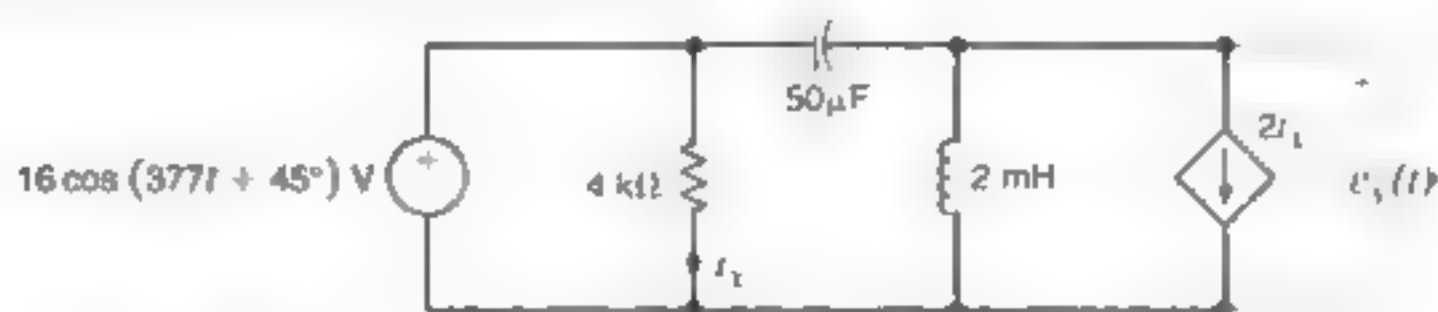


Figura P8.142

8.143 A rede mostrada na Fig. P8.143 opera a 60 Hz. Determine as correntes I_1 e I_2 .

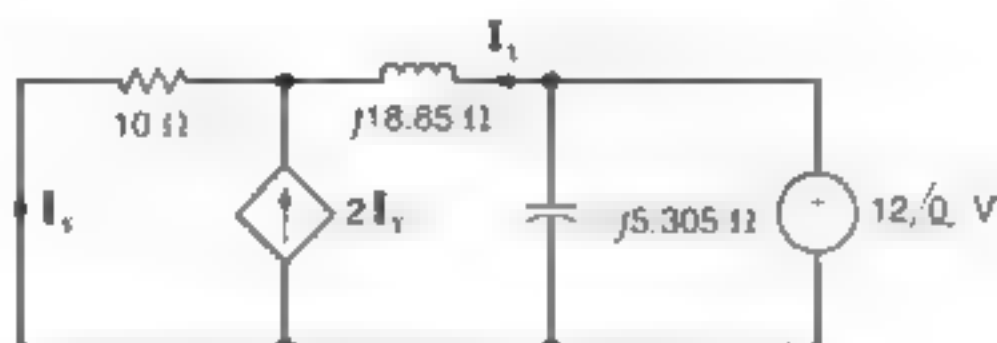


Figura P8.143

PROBLEMAS TÍPICOS DE EXAMES PROFISSIONAIS DE ENGENHARIA

8PEP-1 Determine a tensão V_x da rede mostrada na Fig. 8PEP-1.

- a. $4,62 \angle 30,4^\circ$ V
- b. $7,16 \angle -26,6^\circ$ V
- c. $3,02 \angle 24,3^\circ$ V
- d. $5,06 \angle -71,6^\circ$ V

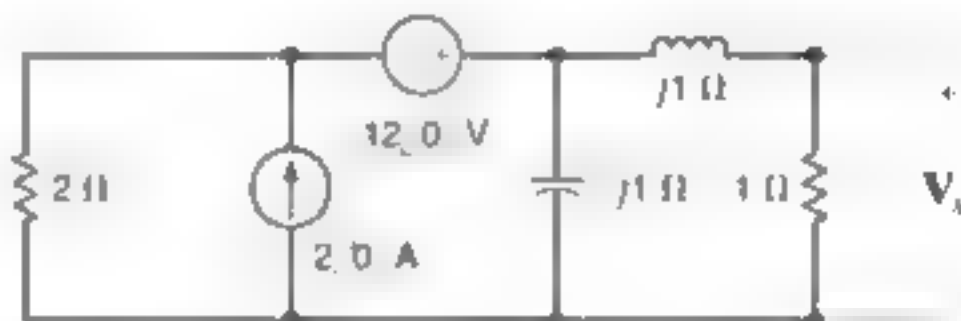


Figura 8PEP-1

8PEP-2 Determine a tensão V_x do circuito mostrado na Fig. 8PEP-2.

- a. $25,4 \angle 10,25^\circ$ V
- b. $20,1 \angle 4,63^\circ$ V
- c. $30,8 \angle 8,97^\circ$ V
- d. $18,3 \angle 12,32^\circ$ V

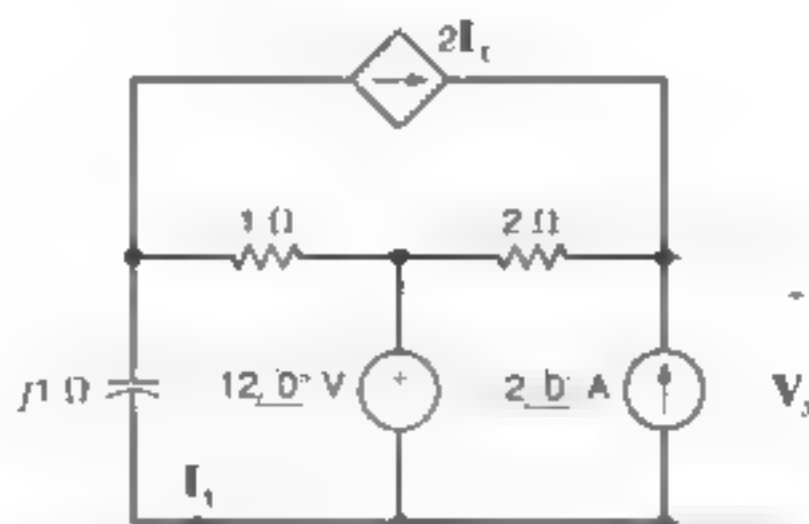


Figura 8PEP-2

8PEP-3 Determine a tensão V_x da rede mostrada na Fig. 8PEP-3.

- a. $8,24 \angle -30,96^\circ \text{ V}$
- b. $2,06 \angle 20,84^\circ \text{ V}$
- c. $16,96 \angle 45^\circ \text{ V}$
- d. $10,42 \angle 30^\circ \text{ V}$

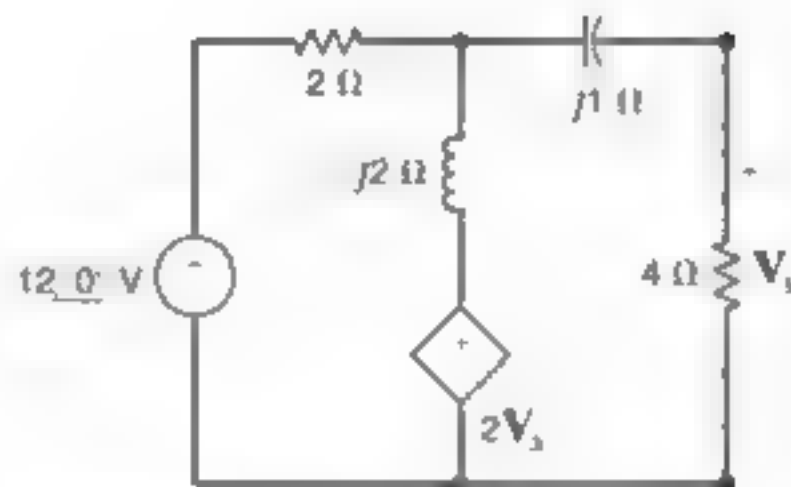


Figura 8PEP-3

8PEP-4 Determine o ganho de faixa média (na qual o acoplamento dos capacitores pode ser desprezado) do amplificador transistor de simples estágio mostrado na Fig. 8PEP-4.

- a. 110,25
- b. -133,33
- c. 26,67
- d. -95,75

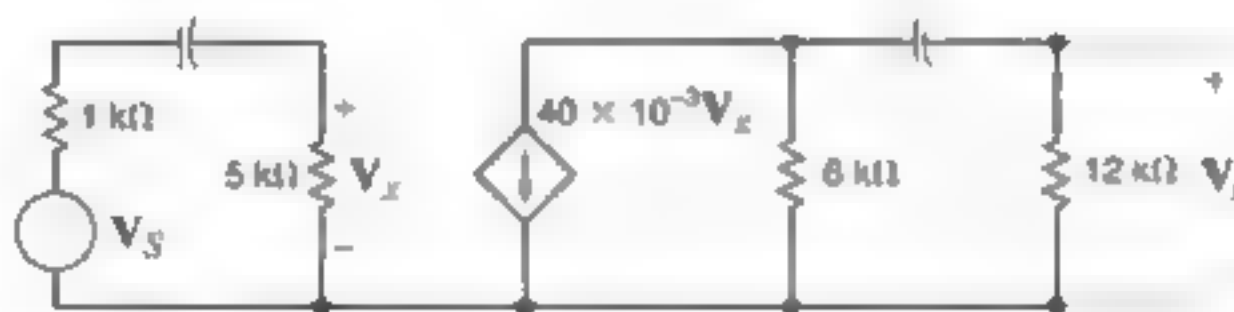


Figura 8PEP-4

8PEP-5 Qual é o fasor da corrente I_x do circuito mostrado na Fig. 8PEP-5?

- a. $6,32 \angle 30,31^\circ \text{ A}$
- b. $2,75 \angle 21,43^\circ \text{ A}$
- c. $1,48 \angle 32,92^\circ \text{ A}$
- d. $5,23 \angle 40,15^\circ \text{ A}$

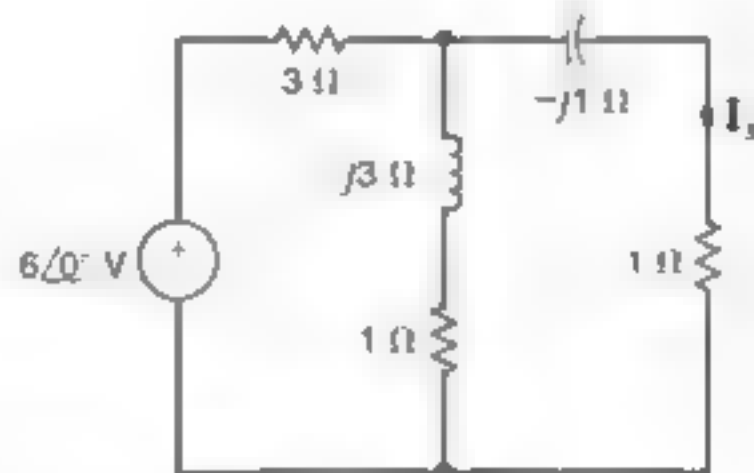
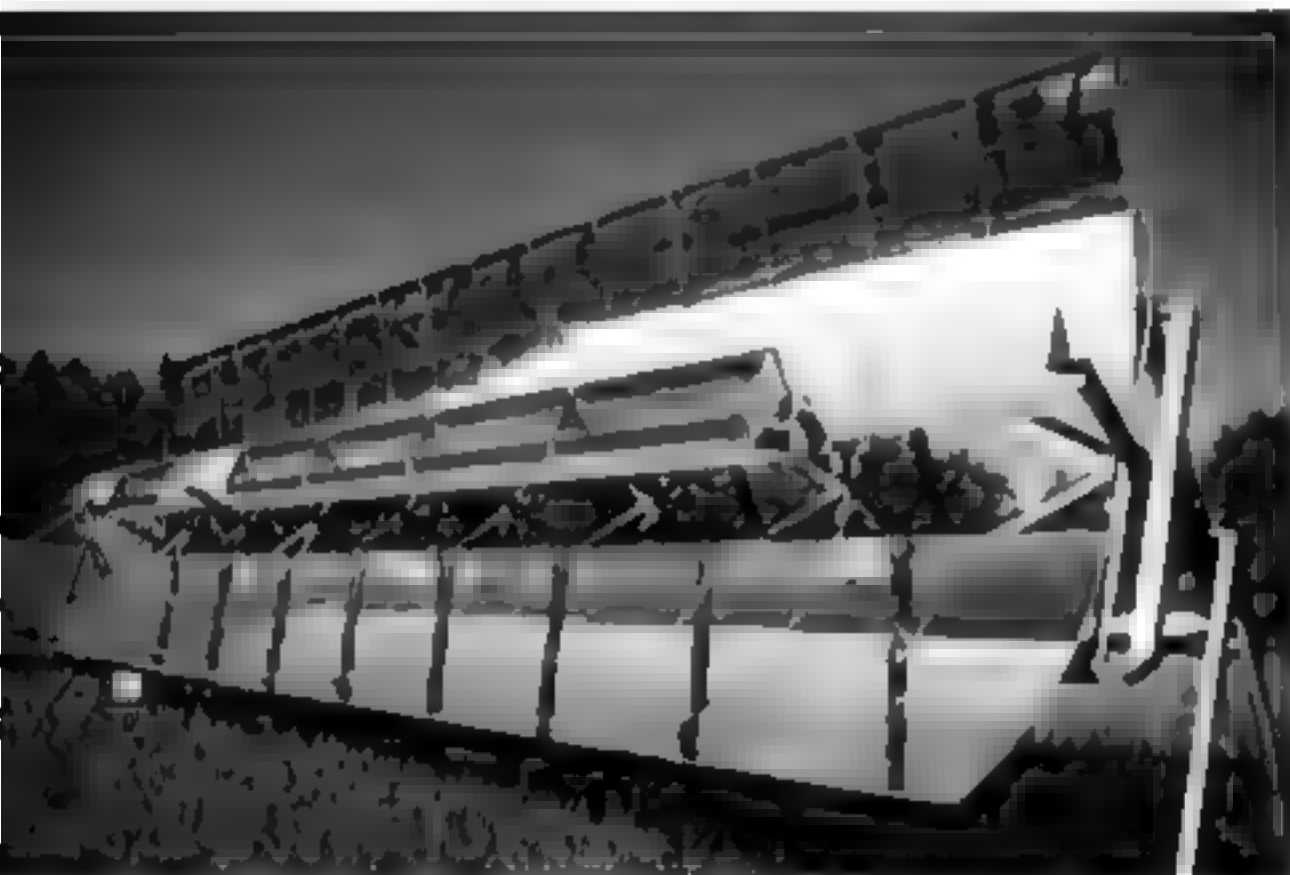


Figura 8PEP-5

ANÁLISE DA POTÊNCIA NO REGIME ESTACIONÁRIO



Mleny Photography/Alexander Hafemann/iStockphoto

AS METAS DE APRENDIZAGEM DESTE CAPÍTULO SÃO:

- Saber como calcular as potências média e instantânea nos circuitos CA
- Ser capaz de calcular a transferência de potência média máxima de uma carga em um circuito CA
- Saber como calcular o valor efetivo ou rms de uma forma de onda periódica
- Saber como calcular a potência real, a potência reativa, a potência complexa e o fator de potência nos circuitos CA
- Entender como corrigir o fator de potência nos circuitos CA
- Entender a importância da segurança e as consequências de se ignorá-la ao se trabalhar com potência

Sequência de espelhos solares A quantidade de energia solar que atinge a Terra diariamente é suficiente para atender a demanda de nossas casas e de estabelecimentos comerciais por aproximadamente 30 anos. Todavia, os sistemas de energia solar atualmente existentes são capazes de armazenar apenas uma minúscula fração dessa energia. O contínuo desafio da indústria da energia solar é desenvolver um conjunto de tecnologias que seja capaz de converter uma quantidade cada vez maior de energia solar em energia utilizável.

As três tecnologias que tentam capturar a energia solar de forma mais eficiente utilizam calhas parabólicas, sistemas de torres e sistemas de refletores parabólicos. As calhas parabólicas utilizam espelhos para multiplicar a energia solar de 30 a 60 vezes sua intensidade normal, conduzindo-a a um tubo receptor contendo óleo sintético na linha focal. As torres de energia focam milhares de espelhos a um receptor no topo da torre. Solar Two próxima a Barstow, CA, é a maior torre de energia solar do mundo. Os sistemas refletores parabólicos utilizam uma sequência de espelhos de modo a propiciar uma eficiência de conversão de 30%

— valor superior ao das demais tecnologias solares. O alinhamento da direção do espelho utilizando sistemas de controle com realimentação pode maximizar os raios solares efetivos percebidos pelos espelhos, mesmo nos dias nublados.

Este capítulo tem como objetivo preencher uma lacuna em seu estudo sobre análise de circuitos, qual seja, a determinação da potência média fornecida ou absorvida por cada elemento de um circuito CA. Essa potência real média é determinada pelo produto dos valores efetivos das tensões pelas correntes harmônicas — conforme esperado — porém, envolve também um fator de potência que depende da diferença entre suas fases. Os fatores de potência em avanço e em atraso são discutidos, e a potência complexa é introduzida como um termo comum na distribuição de potência. Independentemente da fonte de geração, a potência CA pode ser produzida de forma mais eficiente pela utilização do fator de potência. O uso desse fator está longe de ser um simples exercício acadêmico; ele é de importância vital para a compreensão de como é possível extrair uma maior quantidade de energia do Sol.

9.1 Potência Instantânea

Ao se empregar a convenção de sinais adotada nos capítulos anteriores, pode-se calcular a potência instantânea fornecida ou absorvida por qualquer dispositivo como o produto da tensão instantânea entre seus terminais pela corrente instantânea que passa por ele.

Considere o circuito mostrado na Fig. 9.1. Em geral, a tensão e a corrente no regime estacionário da rede podem ser expressas como

$$v(t) = V_M \cos(\omega t + \theta_v) \quad 9.1$$

$$i(t) = I_M \cos(\omega t + \theta_i) \quad 9.2$$

Assim, a potência instantânea será

$$p(t) = v(t)i(t) = V_M I_M \cos(\omega t + \theta_v) \cos(\omega t + \theta_i) \quad 9.3$$

Empregando-se a identidade trigonométrica

$$\cos \phi_1 \cos \phi_2 = \frac{1}{2} [\cos(\phi_1 - \phi_2) + \cos(\phi_1 + \phi_2)] \quad 9.4$$

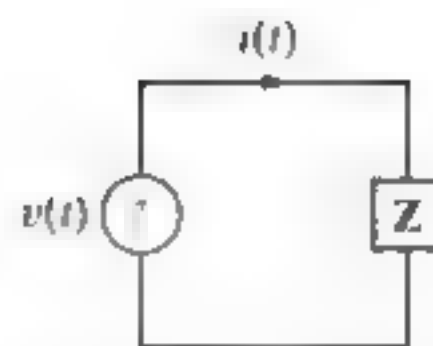


Figura 9.1 Rede CA simples.

obtém-se que a potência instantânea pode ser expressa como

$$p(t) = \frac{V_M I_M}{2} [\cos(\theta_v - \theta_i) + \cos(2\omega t + \theta_v + \theta_i)] \quad 9.5$$

Note que a potência instantânea consiste em dois termos. O primeiro termo é uma constante (ou seja, independente do tempo), e o segundo termo é uma onda cossenoidal cuja frequência é o dobro da frequência de excitação. Essa equação será analisada com mais detalhes na Seção 9.2.

EXEMPLO 9.1

No circuito mostrado na Fig. 9.1 considere $v(t) = 4 \cos(\omega t + 60^\circ)$ V e $Z = 2/30^\circ \Omega$. Deseja-se determinar as equações da corrente e da potência instantânea em função do tempo e representar graficamente essas funções junto com a tensão em um único gráfico para efeito de comparação.

SOLUÇÃO

Como

$$I = \frac{4 \angle 60^\circ}{2 \angle 30^\circ} = 2 \angle 30^\circ \text{ A}$$

Então,

$$i(t) = 2 \cos(\omega t + 30^\circ) \text{ A}$$

Pela Eq. (9.5),

$$p(t) = 4[\cos(30^\circ) + \cos(2\omega t + 90^\circ)] = 3,46 + 4 \cos(2\omega t + 90^\circ) \text{ W}$$

[atenção]

Observe que $p(t)$ possui um termo CC e uma onda cosseno-dal cuja frequência é o dobro da frequência de $v(t)$ ou $i(t)$.

A Fig. 9.2 mostra o gráfico dessa função, juntamente com as curvas da tensão e da corrente. Conforme pode ser visto na figura, a potência instantânea possui um termo constante, ou CC, e um segundo termo, no qual a frequência é o dobro da frequência da tensão ou da corrente.

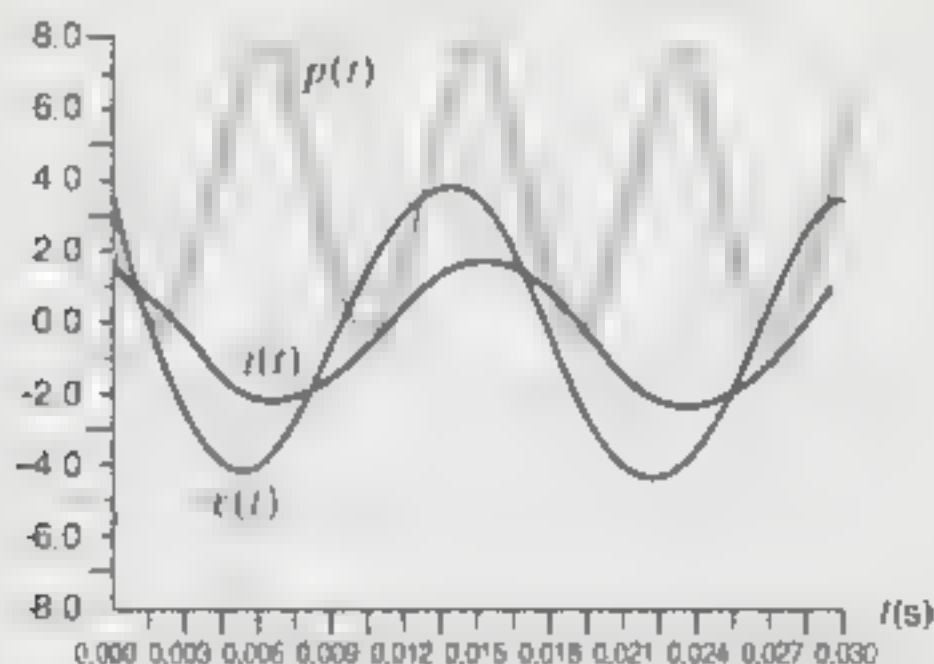


Figura 9.2 Curvas de $v(t)$, $i(t)$ e $p(t)$ para o circuito do Exemplo 9.1, utilizando $f = 60$ Hz.

9.2 Potência Média

O valor médio de qualquer forma de onda periódica (como, por exemplo, uma função senoidal) pode ser calculado integrando-se a função ao longo de um período completo e, em seguida, dividindo-se esse resultado pelo período. Portanto, se a tensão e a corrente forem expressas pelas Eqs. (9.1) e (9.2), respectivamente, a potência média será

$$P = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} p(t) dt$$

$$= \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} V_M I_M \cos(\omega t + \theta_v) \cos(\omega t + \theta_i) dt \quad 9.6$$

em que t_0 é um tempo arbitrário, $T = 2\pi/\omega$ é o período da tensão ou da corrente e a potência P é medida em watts. Na realidade, pode-se calcular a média da forma de onda referente a qualquer número inteiro de períodos, de modo que a Eq. (9.6) pode também ser expressa como

$$P = \frac{1}{nT} \int_{t_0}^{t_0+nT} V_M I_M \cos(\omega t + \theta_v) \cos(\omega t + \theta_i) dt \quad 9.7$$

em que n é um número inteiro e positivo.

Substituindo a Eq. (9.5) na expressão em (9.6), obtém-se

$$P = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} \frac{V_M I_M}{2} [\cos(\theta_v - \theta_i) + \cos(2\omega t + \theta_v + \theta_i)] dt \quad 9.8$$

Poder-se-ia, certamente, desenvolver a integração indicada; entretanto, com um pouco de percepção, pode-se determinar o resultado por inspeção. O primeiro termo é independente de t e, portanto, uma constante no processo de integração. Integrando a constante ao longo do período e dividindo pelo período, tem-

se como resultado, simplesmente, a constante original. O segundo termo é uma onda cossenoidal. Sabe-se, do cálculo, que o valor médio de uma onda cossenoidal ao longo de um período completo ou ao longo de um múltiplo inteiro do período é zero e, portanto, o segundo termo na Eq. (9.8) é nulo. Desta forma, a Eq. (9.8) reduz-se a

$$P = \frac{1}{2} V_M I_M \cos(\theta_v - \theta_i) \quad 9.9$$

[atenção]

Uma equação frequentemente utilizada para o cálculo da potência média.

Note que, sendo $\cos(-\theta) = \cos(\theta)$, o argumento da função cosseno pode ser tanto $\theta_v - \theta_i$, quanto $\theta_i - \theta_v$. Além disso, note que $\theta_v - \theta_i$ é o ângulo da impedância do circuito, conforme mostrado na Fig. 9.1. Portanto, para um circuito puramente resistivo, tem-se

$$P = \frac{1}{2} V_M I_M \quad 9.10$$

e, para um circuito puramente reativo, tem-se

$$P = \frac{1}{2} V_M I_M \cos(90^\circ) = 0$$

Uma vez que as impedâncias puramente reativas não absorvem a potência média, elas são geralmente chamadas de *componentes sem perdas*. A rede puramente reativa opera de modo a armazenar energia durante uma parte do período e liberar energia durante a outra parte.

EXEMPLO 9.2

Deseja-se determinar a potência média absorvida pela impedância mostrada na Fig. 9.3.

SOLUÇÃO

Pela figura nota-se que

$$I = \frac{V}{Z} = \frac{V_M \angle \theta_v}{2 + j2} = \frac{10 \angle 60^\circ}{2.83 \angle 45^\circ} = 3.53 \angle 15^\circ \text{ A}$$

Portanto,

$$I_M = 3.53 \text{ A} \quad \text{e} \quad \theta_i = 15^\circ$$

Logo,

$$P = \frac{1}{2} V_M I_M \cos(\theta_v - \theta_i)$$

$$= \frac{1}{2} (10)(3.53) \cos(60^\circ - 15^\circ)$$

$$= 12.5 \text{ W}$$

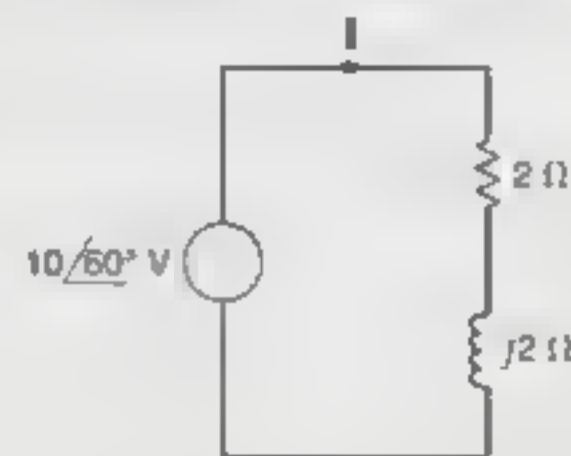


Figura 9.3 Exemplo de circuito RL.

Como o indutor não absorve potência, pode-se empregar a Eq. (9.10), considerando que V_M , naquela equação, é a tensão entre os terminais do resistor. Utilizando a divisão de tensão, obtém-se

$$V_R = \frac{(10 \angle 60^\circ)(2)}{2 + j2} = 7.07 \angle 15^\circ \text{ V}$$

e, portanto,

$$P = \frac{1}{2} (7,07)(3,53) \\ = 12,5 \text{ W}$$

Além disso, utilizando a lei de Ohm, poder-se-ia também empregar a expressão

$$P = \frac{1}{2} \frac{V_M^2}{R}$$

ou

$$P = \frac{1}{2} I_M^2 R$$

em que, mais uma vez, deve-se ter o devido cuidado e observar que V_M e I_M nessa equação referem-se à tensão entre os terminais do resistor e à corrente através dele, respectivamente

EXEMPLO 9.3

Para o circuito mostrado na Fig. 9.4, deseja-se determinar a potência média total absorvida e a potência média total fornecida.

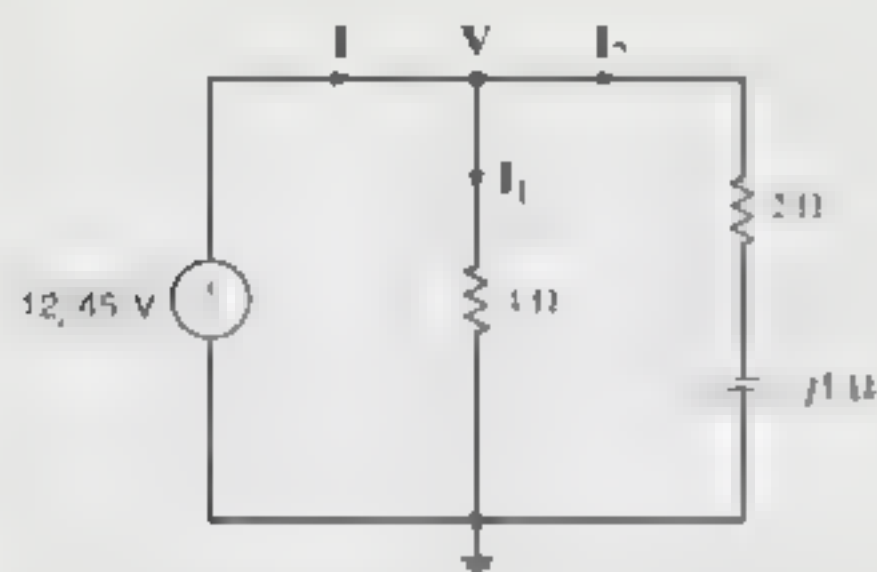


Figura 9.4 Circuito utilizado como exemplo para ilustrar o balanço de potência.

SOLUÇÃO

Pela figura nota-se que

$$I = \frac{12\angle 45^\circ}{4} = 3\angle 45^\circ \text{ A}$$

$$I_2 = \frac{12\angle 45^\circ}{2 - j1} = \frac{12\angle 45^\circ}{2,24\angle -26,57^\circ} = 5,36\angle 71,57^\circ \text{ A}$$

e, portanto,

$$I = I_1 + I_2 \\ = 3\angle 45^\circ + 5,36\angle 71,57^\circ \\ = 8,15\angle 62,10^\circ \text{ A}$$

A potência média absorvida no resistor de 4 Ω é

$$P_1 = \frac{1}{2} V_M I_M = \frac{1}{2} (12)(3) = 18 \text{ W}$$

A potência média absorvida no resistor de 2 Ω é

$$P_2 = \frac{1}{2} I_M^2 R = \frac{1}{2} (5,34)^2 (2) = 28,7 \text{ W}$$

Portanto, a potência média total absorvida é

$$P_A = 18 + 28,7 = 46,7 \text{ W}$$

Note que, se a tensão entre os terminais do resistor de 2 Ω fosse inicialmente calculada, poder-se-ia calcular a potência absorvida nesse resistor utilizando a expressão $1/2 V_M^2/R$.

A potência média total fornecida pela fonte é

$$P_T = \frac{1}{2} V_M I_M \cos(\theta_V - \theta_I) \\ = \frac{1}{2} (12)(8,15) \cos(45^\circ - 62,10^\circ) \\ = 46,7 \text{ W}$$

Assim, a potência média total fornecida é, certamente, igual à potência média total absorvida.

Avaliação do Aprendizado

E9.1 Determine a potência média absorvida por cada resistor da rede mostrada na Fig. E9.1.

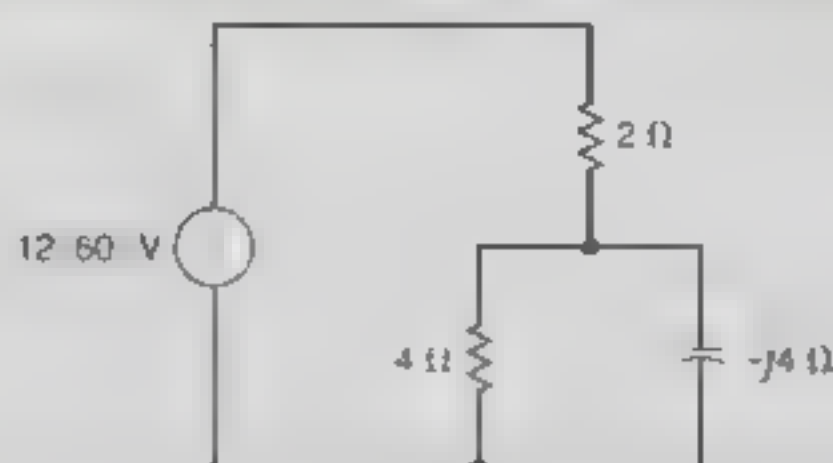
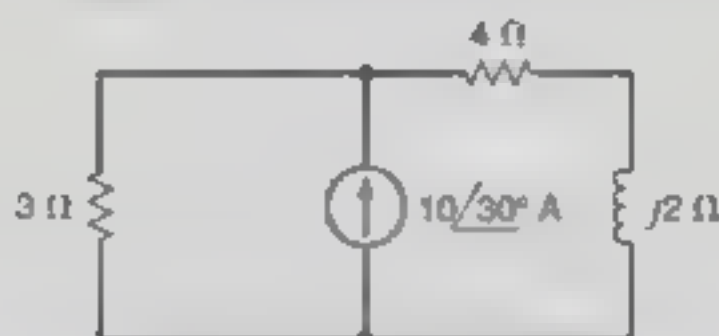


Figura E9.1

RESPOSTAS: $P_{2\Omega} = 7,20 \text{ W}$ e $P_{4\Omega} = 7,20 \text{ W}$.

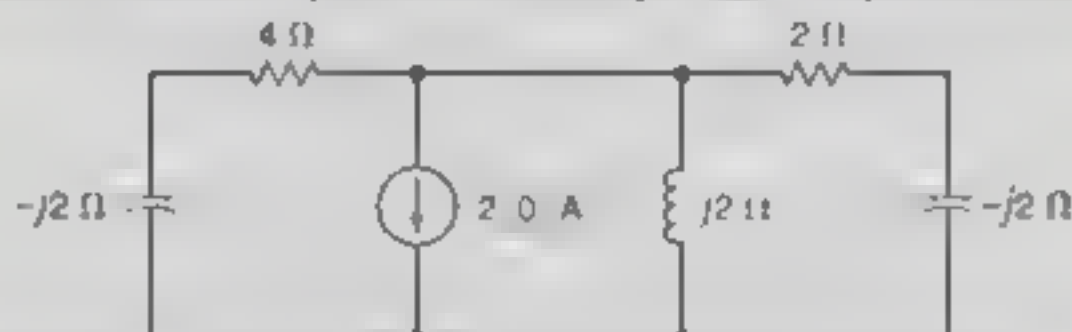
E9.2 Dada a rede mostrada na Fig. E9.2, determine a potência média absorvida por cada componente passivo do circuito e a potência média total fornecida pela fonte de corrente.



RESPOSTAS: $P_{3\Omega} \approx 56,60 \text{ W}$;
 $P_{4\Omega} \approx 33,96 \text{ W}$, $P_L = 0$ e
 $P_{FC} \approx 90,50 \text{ W}$.

Figura E9.2

E9.3 Determine a potência fornecida e a potência absorvida por cada componente do circuito mostrado na Fig. E9.3.



RESPOSTAS: $P_C = 0 \text{ W}$;
 $P_L = 0 \text{ W}$; $P_{4\Omega} \approx 1,78 \text{ W}$;
 $P_{2\Omega} \approx 2,22 \text{ W}$ e $P_{FC} \approx -4 \text{ W}$.

Figura E9.3

[atenção]

O princípio da superposição não é aplicável à potência, por quê?

Caso mais de uma fonte esteja presente na rede em que se deseja determinar a potência média, pode-se utilizar qualquer

das técnicas de análise de redes na obtenção da tensão e/ou corrente necessária para o cálculo da potência. Todavia, deve-se lembrar que, em geral, o princípio da superposição não pode ser aplicado à potência.

EXEMPLO 9.4

Considere a rede mostrada na Fig. 9.5. Deseja-se determinar a potência média total absorvida e fornecida por cada componente.

SOLUÇÃO

Pela figura nota-se que

$$I_2 = \frac{12 \angle 30^\circ}{2} = 6 \angle 30^\circ \text{ A}$$

e

$$I_1 = \frac{12 \angle 30^\circ - 6 \angle 0^\circ}{j1} = \frac{4,39 + j6}{j1} = 7,44 \angle -36,21^\circ \text{ A}$$

A potência absorvida pelo resistor de 2Ω é

$$P_2 = \frac{1}{2} V_M I_M = \frac{1}{2} (12)(6) = 36 \text{ W}$$

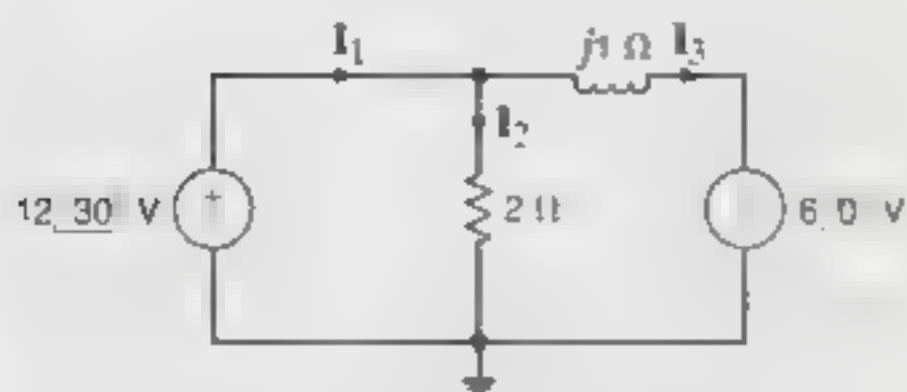
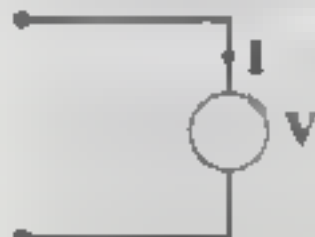


Figura 9.5 Exemplo de circuito RL com duas fontes.

[atenção]

Sob a condição a seguir:



Se $P = IV$ é positivo, a potência está sendo absorvida.
 Se $P = IV$ é negativo, a potência está sendo gerada.

De acordo com a direção de I_3 , a fonte de $6 \angle 0^\circ \text{ V}$ está absorvendo potência. A potência que ela absorve é dada por

$$\begin{aligned} P_6 &= \frac{1}{2} V_M I_M \cos(\theta_v - \theta_i) \\ &= \frac{1}{2} (6)(7,44) \cos[0^\circ - (-36,21^\circ)] \\ &= 18 \text{ W} \end{aligned}$$

Neste ponto surge uma questão óbvia: como é possível saber se a fonte de $6 \angle 0^\circ \text{ V}$ está fornecendo ou absorvendo potência em relação ao restante da rede? A resposta a essa pergunta é, na realidade, imediata. Ao se empregar a convenção passiva de sinais adotada nos capítulos anteriores — isto é, se o sentido de referência da corrente entra no terminal positivo da fonte e a resposta for positiva — a fonte estará absorvendo potência. Se a resposta for negativa, a fonte estará fornecendo potência ao restante do circuito. A convenção de sinais para um gerador poderia ser utilizada e, sob essas mesmas condições, a interpretação do sinal da resposta seria invertida. Note que uma vez adotada e utilizada a convenção de sinais, o sinal

da potência média apenas será negativo se a diferença de ângulo for maior que 90° (isto é, $|\theta_v - \theta_i| > 90^\circ$).

Para obter a potência fornecida à rede, calcula-se I_1 como

$$\begin{aligned} I_1 &= I_2 + I_3 \\ &= 6/30^\circ + 7,44 \angle -36,21^\circ \\ &= 11,29 \angle -7,10^\circ \text{ A} \end{aligned}$$

Portanto, a potência fornecida pela fonte de $12 \angle 30^\circ \text{ V}$ utilizando a convenção de sinais para um gerador será

$$\begin{aligned} P_F &= \frac{1}{2} (12)(11,29) \cos(30^\circ + 7,10^\circ) \\ &= 54 \text{ W} \end{aligned}$$

e, portanto, a potência absorvida é igual à potência fornecida.

Avaliação do Aprendizado

E9.4 Determine a potência média total absorvida e fornecida por cada componente da rede mostrada na Fig. E9.4

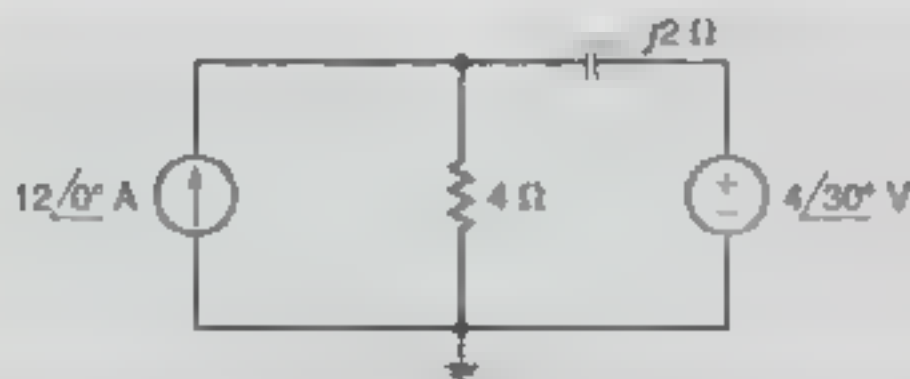


Figura E9.4

RESPOSTAS: $P_{FC} = -69,4 \text{ W}$;
 $P_{FT} = 19,8 \text{ W}$; $P_{4\Omega} = 49,6 \text{ W}$ e
 $P_C = 0$.

E9.5 Dada a rede mostrada na Fig. E9.5, determine a potência média total absorvida ou fornecida por cada componente.

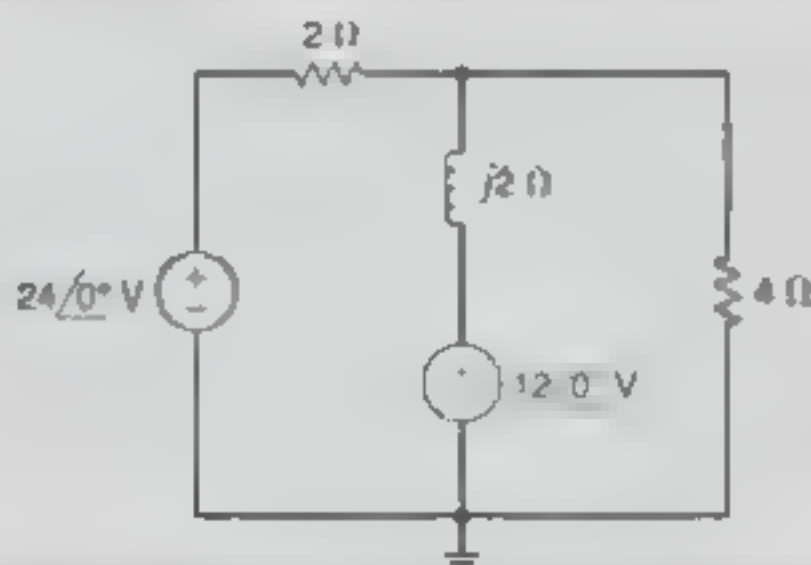


Figura E9.5

RESPOSTAS:
 $P_{24/0^\circ} = -55,4 \text{ W}$;
 $P_{12/0^\circ} = 5,5 \text{ W}$;
 $P_{2\Omega} = 22,2 \text{ W}$;
 $P_{4\Omega} = 27,7 \text{ W}$; $P_L = 0$

E9.6 Determine a potência média absorvida pelos resistores de 4Ω e 3Ω do circuito mostrado na Fig. E9.6

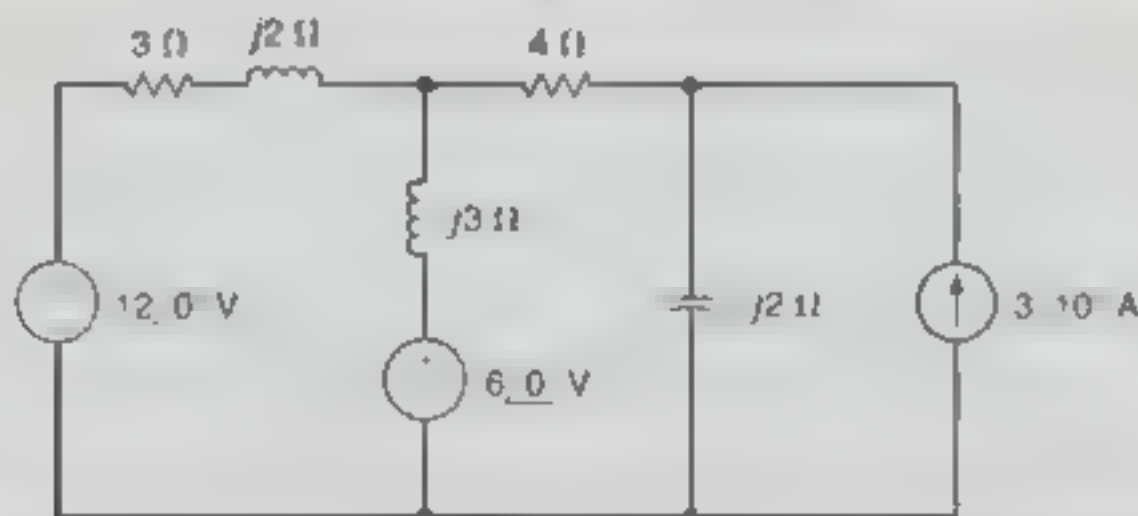


Figura E9.6

RESPOSTAS: $P_{4\Omega} = 9,86 \text{ W}$ e
 $P_{3\Omega} = 0,91 \text{ W}$.

9.3 Transferência Máxima de Potência Média

No estudo das redes resistivas, nos deparamos com o problema da potência máxima transferida a uma carga resistiva. Foi mos-

trado que se a rede, excluindo a carga, fosse representada por um circuito equivalente de Thévenin, ocorreria a transferência máxima de potência se o valor da carga resistiva fosse igual à resistência equivalente de Thévenin (isto é, $R_L = R_{Th}$). Reexamina-se agora essa característica no sentido de se determinar a impedância da carga, Z_L , da rede mostrada na Fig. 9.6, que resulta na maior potência média por ela absorvida

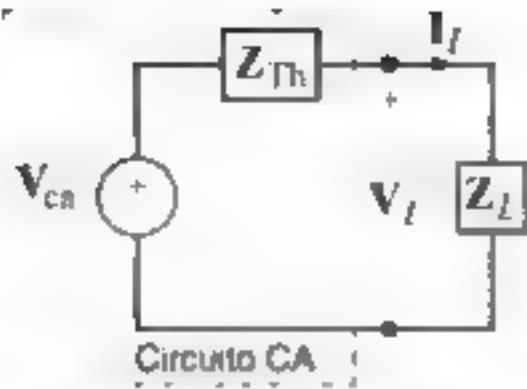


Figura 9.6 Circuito utilizado para analisar a transferência máxima de potência média.

A equação da potência média na carga é

$$P_L = \frac{1}{2} V_L I_L \cos(\theta_{v_L} - \theta_{i_L}) \quad 9.11$$

Os fasores representativos da corrente e da tensão na carga são dados pelas expressões

$$I_L = \frac{V_{ca}}{Z_{Th} + Z_L} \quad 9.12$$

$$V_L = \frac{V_{ca} Z_L}{Z_{Th} + Z_L} \quad 9.13$$

em que

$$Z_{Th} = R_{Th} + jX_{Th} \quad 9.14$$

e

$$Z_L = R_L + jX_L \quad 9.15$$

As magnitudes dos fasores corrente e tensão são expressas por

$$I_L = \frac{V_{ca}}{[(R_{Th} + R_L)^2 + (X_{Th} + X_L)^2]^{1/2}} \quad 9.16$$

$$V_L = \frac{V_{ca}(R_L + jX_L)}{[(R_{Th} + R_L)^2 + (X_{Th} + X_L)^2]^{1/2}} \quad 9.17$$

[atenção]

O conceito de casamento de impedância representa uma importante característica no projeto dos chips e das placas-mãe utilizadas nos computadores de alto desempenho. Para os chips de alta velocidade atualmente utilizados, com frequência de processamento de 3 GHz, e para as placas-mãe com velocidade *bus* acima de 1 GHz, o casamento de impedância é fundamental para a obtenção da velocidade requerida na propagação do sinal. Embora essa linha de transmissão de alta velocidade seja baseada em um circuito distribuído (discutido posteriormente nos cursos de engenharia elétrica), a técnica do casamento de impedância para a linha de transmissão é a mesma que a utilizada nos circuitos com parâmetros concentrados para a obtenção da transferência máxima de potência média.

Os ângulos de fase dos fasores corrente e tensão estão incluídos no termo $(\theta_{v_L} - \theta_{i_L})$. Note também que $\theta_{v_L} - \theta_{i_L} = \theta_{Z_L}$ e, além disso,

$$\cos \theta_{Z_L} = \frac{R_L}{(R_L^2 + X_L^2)^{1/2}} \quad 9.18$$

A substituição das Eqs. (9.16) a (9.18) na Eq. (9.11) fornece

$$P_L = \frac{1}{2} \frac{V_{ca}^2 R_L}{(R_{Th} + R_L)^2 + (X_{Th} + X_L)^2} \quad 9.19$$

a qual poderia, certamente, ser obtida diretamente da Eq. (9.16) utilizando $P_L = \frac{1}{2} I_L^2 R_L$. Novamente, um pouco de percepção faria com que algum trabalho fosse poupado. Do ponto de vista da maximização de P_L , V_{ca} é uma constante. A quantidade $(X_{Th} + X_L)$ não absorve potência e, portanto, qualquer valor não nulo dessa quantidade servirá apenas para reduzir P_L . Logo, pode-se eliminar esse termo escolhendo $X_L = -X_{Th}$. O problema, então, reduz-se à maximização da expressão

$$P_L = \frac{1}{2} \frac{V_{ca}^2 R_L}{(R_L + R_{Th})^2} \quad 9.20$$

Entretanto, essa é a mesma quantidade que foi maximizada no caso puramente resistivo quando foi selecionado $R_L = R_{Th}$. Portanto, para que a transferência de potência média para a carga mostrada na Fig. 9.6 seja máxima, Z_L deve ser escolhida de modo que

$$Z_L = R_L + jX_L = R_{Th} - jX_{Th} = Z_{Th}^* \quad 9.21$$

Finalmente, se a impedância da carga é puramente resistiva (isto é, $X_L = 0$), a condição para que ocorra a transferência máxima de potência média pode ser obtida através da expressão resultante da derivada

$$\frac{dP_L}{dR_L} = 0$$

em que P_L é a expressão representada pela Eq. (9.19) com $X_L = 0$. O valor de R_L que maximiza P_L sob a condição $X_L = 0$ é

$$R_L = \sqrt{R_{Th}^2 + X_{Th}^2} \quad 9.22$$

Estratégia para Solução de Problemas

Transferência Máxima de Potência Média

Etapas 1. Remova a carga Z_L e obtenha o equivalente de Thévenin para o circuito remanescente.

Etapas 2. Construa o circuito mostrado na Fig. 9.6.

Etapas 3. Selecione $Z_L = Z_{Th}^* = R_{Th} - jX_{Th}$ e em seguida $I_L = V_{ca}/2R_{Th}$ e a transferência máxima de potência média será igual a $\frac{1}{2} I_L^2 R_{Th} = V_{ca}^2/8R_{Th}$.

EXEMPLO 9.5

Dado o circuito mostrado na Fig. 9.7a, deseja-se obter o valor de Z_L para a transferência máxima de potência média. Além disso, deseja-se determinar o valor máximo da potência média transferida à carga.

SOLUÇÃO

Para resolver esse problema, determina-se o equivalente de Thévenin entre os terminais da carga. O circuito mostrado na Fig. 9.7b é utilizado no cálculo da tensão do circuito aberto, qual seja,

$$V_{ca} = \frac{4 \angle 0^\circ (2)}{6 + j1} (4) = 5,26 \angle -9,46^\circ \text{ V}$$

A impedância equivalente de Thévenin pode ser obtida a partir do circuito mostrado na Fig. 9.7c. Conforme mostrado na figura,

$$Z_{Th} = \frac{4(2 + j1)}{6 + j1} = 1,41 + j0,43 \, \Omega$$

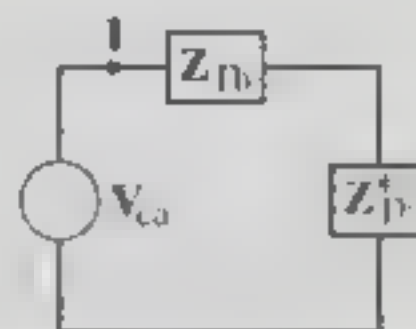
Portanto, Z_L para a transferência máxima de potência média vale

$$Z_L = 1,41 - j0,43 \, \Omega$$

[atenção]

Nessa análise de Thévenin,

1. Remova Z_L e obtenha a tensão entre os terminais do circuito aberto, V_{ca} .
2. Determine a impedância Z_{Th} nos terminais abertos com todas as fontes independentes nulas.
3. Construa o circuito da figura e determine I e P_L .

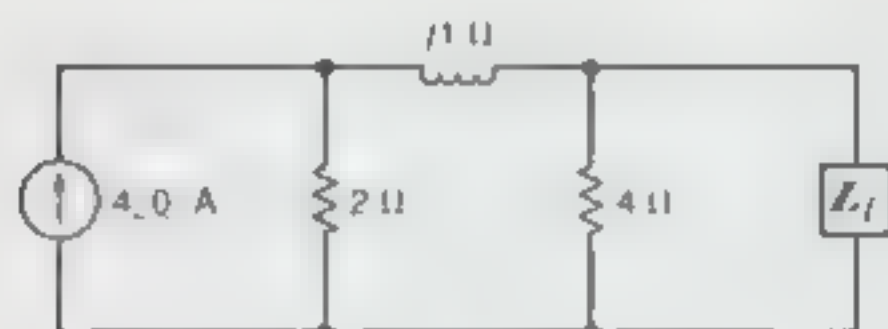


Com esse valor de Z_L , a corrente na carga será

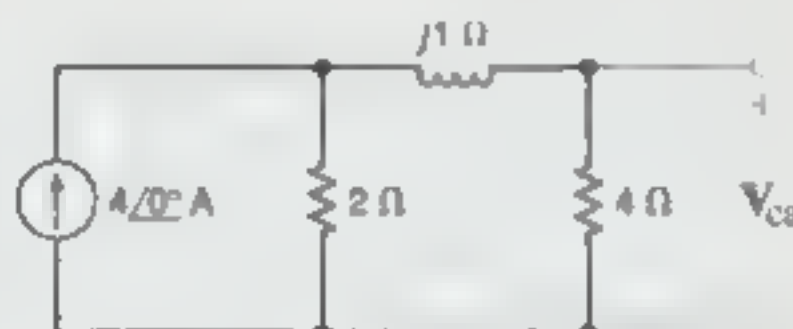
$$I = \frac{5,26 \angle -9,46^\circ}{2,82} = 1,87 \angle -9,46^\circ \text{ A}$$

Portanto, a potência média máxima transferida à carga será

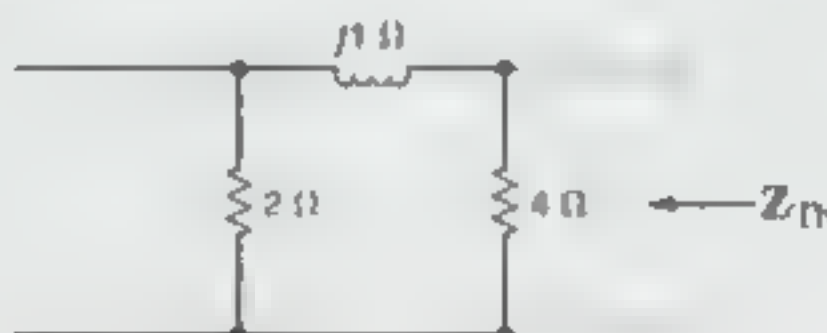
$$P_L = \frac{1}{2} I_M^2 R_L = \frac{1}{2} (1,87)^2 (1,41) = 2,47 \text{ W}$$



(a)



(b)



(c)

Figura 9.7 Circuitos utilizados para ilustrar a transferência máxima de potência média.

EXEMPLO 9.6

Para o circuito mostrado na Fig. 9.8a, deseja-se obter o valor de Z_L para o qual ocorre a transferência máxima de potência média. Além disso, deseja-se determinar o valor da potência média máxima fornecida à carga.

SOLUÇÃO

Inicialmente, reduz-se o circuito, com exceção da carga, ao equivalente de Thévenin. A tensão de circuito aberto pode ser

calculada com base na Fig. 9.8b. As equações desse circuito são

$$\begin{aligned} V_L + 4 &= (2 + j4)I \\ V_L &= 2I_1 \end{aligned}$$

Resolvendo para I_1 , obtém-se

$$I_1 = \frac{1 \angle -45^\circ}{\sqrt{2}}$$

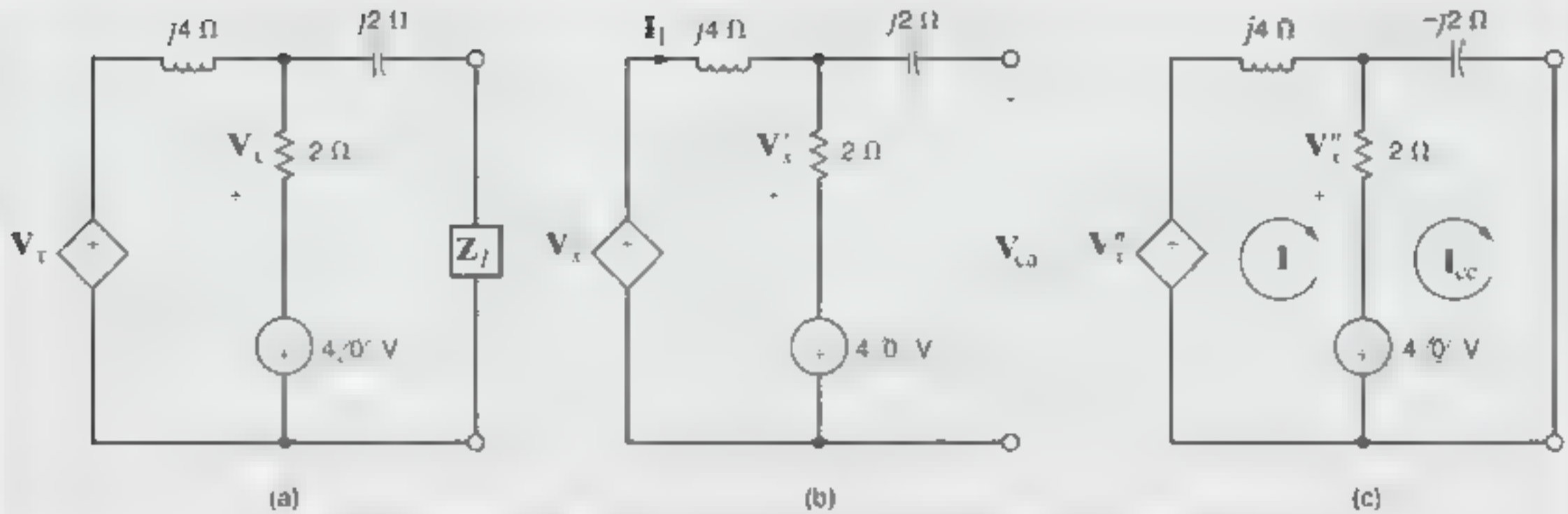


Figura 9.8 Circuitos utilizados para ilustrar a transferência máxima de potência média.

[atenção]

Quando existe uma fonte dependente, a tensão V_{co} e a corrente I_{cc} devem ser determinadas, e a impedância Z_{Th} deve ser calculada pela equação

$$Z_{Th} = \frac{V_{co}}{I_{cc}}$$

Assim, a tensão de circuito aberto fica

$$\begin{aligned} V_{co} &= 2I_1 - 4\angle 0^\circ \\ &= \sqrt{2}\angle -45^\circ - 4\angle 0^\circ \\ &= -3 - j1 \\ &= +3,16\angle -161,57^\circ \text{ V} \end{aligned}$$

A corrente do curto-circuito pode ser deduzida com base na Fig. 9.8c. As equações desse circuito são

$$\begin{aligned} V_x + 4 &= (2 + j4)I_1 - 2I_{cc} \\ 4 &= -2I_1 + (2 - j2)I_{cc} \\ V_x &= 2(I_1 - I_{cc}) \end{aligned}$$

A solução dessas equações para I_{cc} fornece

$$I_{cc} = (1 + j2) \text{ A}$$

A impedância equivalente de Thévenin será, portanto,

$$Z_{Th} = \frac{V_{co}}{I_{cc}} = \frac{3 + j1}{1 + j2} = 1 - j1 \Omega$$

Assim, para a transferência máxima de potência média, a impedância da carga deve ser

$$Z_L = 1 + j1 \Omega$$

Logo, a corrente nessa carga Z_L será,

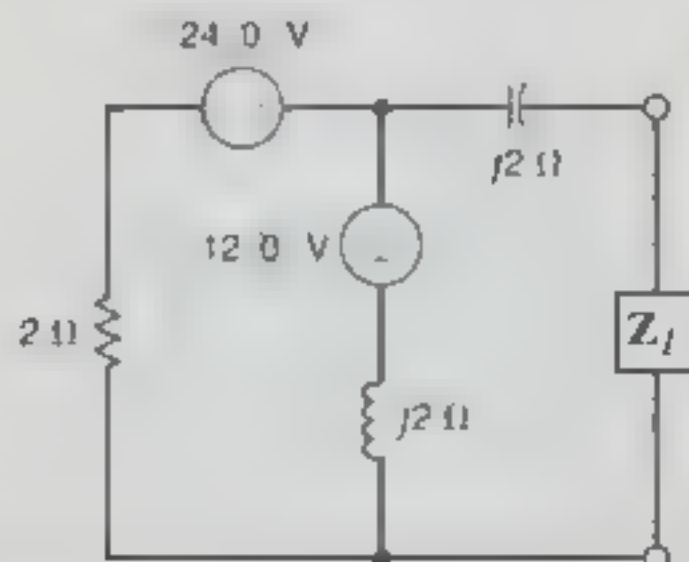
$$I_L = \frac{V_{co}}{Z_{Th} + Z_L} = \frac{-3 - j1}{2} = 1,58\angle -161,57^\circ \text{ A}$$

Portanto, a transferência máxima de potência média para a carga será

$$\begin{aligned} P_L &= \frac{1}{2} (1,58)^2 (1) \\ &= 1,25 \text{ W} \end{aligned}$$

Avaliação do Aprendizado

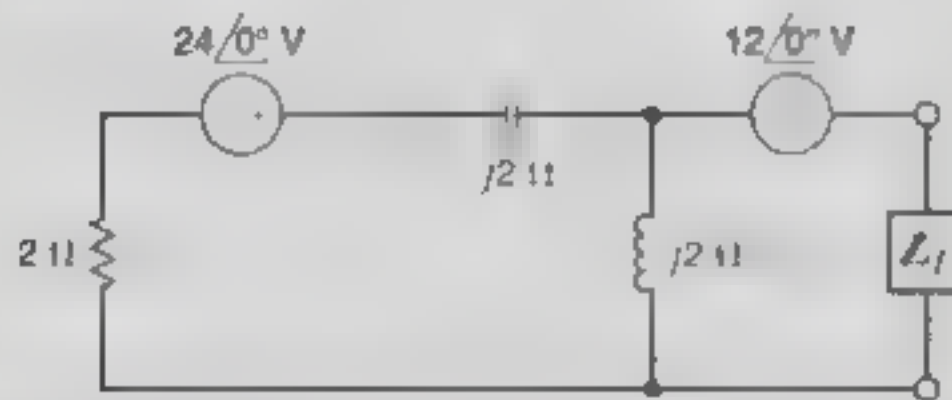
E9.7 Dada a rede mostrada na Fig. E9.7, obtenha Z_L para que ocorra a transferência máxima de potência média e a máxima potência média transferida à carga.



RESPOSTAS: $Z_L = 1 + j1 \Omega$ e $P_L = 45 \text{ W}$.

Figura E9.7

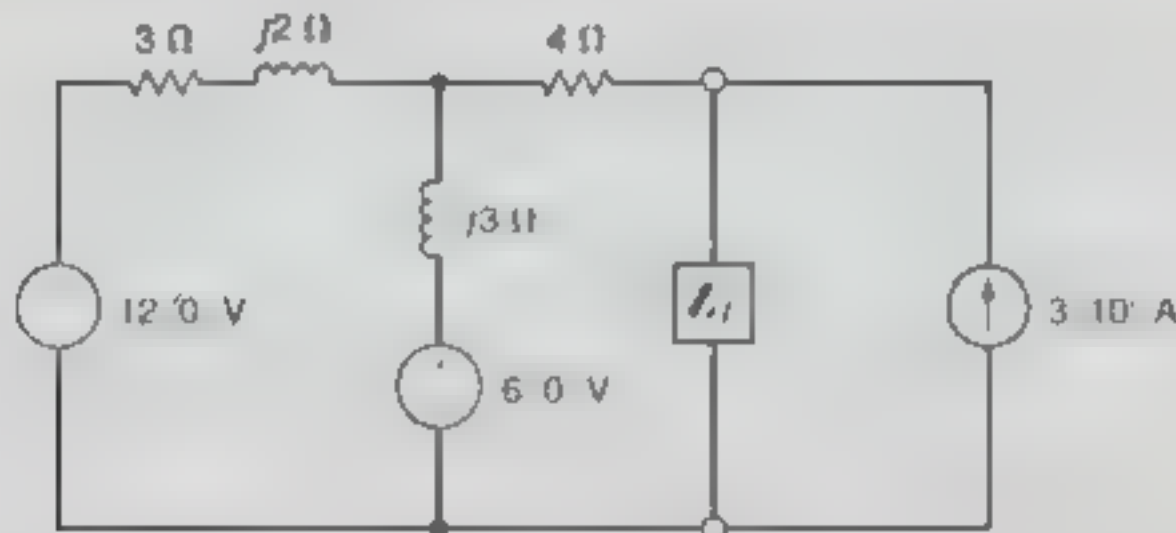
E9.8 Obtenha a impedância Z_L para que ocorra a transferência máxima de potência média e a máxima potência média transferida à carga da rede mostrada na Fig. E9.8.



RESPOSTAS: $Z_L = 2 - j2 \Omega$ e $P_L = 45 \text{ W}$.

Figura E9.8

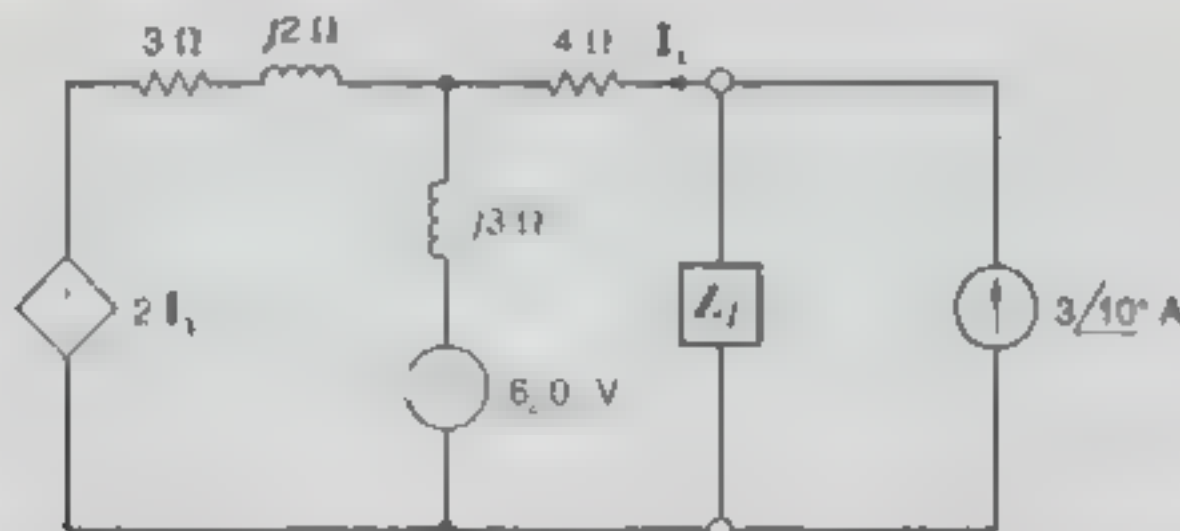
E9.9 Determine a impedância Z_L para que ocorra a transferência máxima de potência média e o valor da máxima potência média transferida à impedância Z_L da rede mostrada na Fig. E9.9.



RESPOSTAS:
 $Z_L = 4,79 - j1,68 \Omega$ e
 $P_L = 14,26 \text{ W}$

Figura E9.9

E9.10 Obtenha a impedância Z_L para que ocorra a transferência máxima de potência média e o valor da máxima potência média transferida à impedância Z_L da rede mostrada na Fig. E9.10.



RESPOSTAS:
 $Z_L = 5,67 - j2,2 \Omega$ e
 $P_L = 9,29 \text{ W}$.

Figura E9.10

9.4 Valores Efetivos ou rms

Nas seções precedentes a este capítulo, mostrou-se que a potência média absorvida por uma carga resistiva é diretamente dependente do tipo, ou tipos, de fontes que estejam fornecendo potência à carga. Por exemplo, se a fonte for CC, a potência média absorvida será $I^2 R$, e se a fonte for senoidal, a potência média será $1/2 I_m^2 R$. Embora esses dois tipos de formas de onda sejam extremamente importantes, eles não são, de forma alguma, as únicas formas de onda que serão encontradas na análise de circuitos. Portanto, uma técnica pela qual se possa comparar a *efetividade* de diferentes fontes no fornecimento de potência a uma carga resistiva será de grande utilidade.

Para que essa comparação seja possível, define-se o que é chamado de *valor efetivo de uma forma de onda periódica*, que

pode representar tanto uma tensão quanto uma corrente. Embora ambas as grandezas possam ser utilizadas, a corrente será empregada nessa definição. Assim, define-se o valor efetivo de uma corrente periódica como um valor constante ou CC, que fornece a mesma potência média a um resistor R . Essa corrente constante é representada por I_{eff} . Portanto, a potência média fornecida a um resistor como resultado dessa corrente será

$$P = I_{\text{eff}}^2 R$$

Analogamente, a potência média fornecida a um resistor por uma corrente periódica $i(t)$ é

$$P = \frac{1}{T} \int_0^{T} i^2(t) R dt$$

Igualando essas duas expressões, obtém-se

$$I_{\text{ef}} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^{T} i^2(t) dt} \quad 9.23$$

Note que esse valor efetivo é obtido primeiro elevando-se ao quadrado a corrente, calculando-se em seguida a média ou valor médio e, finalmente, determinando-se a raiz quadrada do re-

sultado. Assim, em termos matemáticos a Eq. (9.23) determina a raiz média quadrática, que é abreviada como rms (do inglês *root mean square*) e, portanto, a corrente I_{ef} é representada por I_{rms} .

Como o sinal CC é constante, o valor rms desse sinal é simplesmente um valor constante. Pode-se, agora, determinar o valor rms de outras formas de onda. A forma de onda mais importante é a senoidal e, portanto, essa será a forma de onda particular utilizada no exemplo a seguir.

EXEMPLO 9.7

Deseja-se calcular o valor rms da forma de onda $i(t) = I_M \cos(\omega t - \theta)$, que possui um período $T = 2\pi/\omega$.

SOLUÇÃO

A substituição dessa expressão na Eq. (9.23) fornece

$$I_{\text{rms}} = \left[\frac{1}{T} \int_0^T I_M^2 \cos^2(\omega t - \theta) dt \right]^{1/2}$$

Utilizando a identidade trigonométrica

$$\cos^2 \phi = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2\phi$$

verifica-se que a equação precedente pode ser expressa como

$$I_{\text{rms}} = I_M \left\{ \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{2\pi/\omega} \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos(2\omega t - 2\theta) \right] dt \right\}^{1/2}$$

Ao se utilizar os valores rms da tensão e da corrente, a potência pode ser escrita, em geral, como

$$P = V_{\text{rms}} I_{\text{rms}} \cos(\theta_v - \theta_i) \quad 9.25$$

A potência absorvida por um resistor R será

$$P = I_{\text{rms}}^2 R = \frac{V_{\text{rms}}^2}{R} \quad 9.26$$

Ao se lidar com tensões e correntes nas diversas aplicações elétricas, é importante saber se os valores indicados são máximos, médios, rms ou outro qualquer. Por exemplo, a conhecida

saída de 120 V ca das tomadas em uma residência. Neste caso, 120 V é o valor rms da tensão utilizada nas residências. O valor máximo ou de pico dessa tensão é $120\sqrt{2} = 170$ V. A tensão disponível nas tomadas elétricas poderia ser expressa como $170 \cos 377t$ V. O valor máximo ou de pico deve ser dado quando se escreve a tensão desta forma. Não deve haver dúvida sobre o fato de ser este o valor de pico. É prática comum especificar-se a tensão nominal dos aparelhos elétricos CA em termos da tensão rms. Por exemplo, ao examinar uma lâmpada incandescente, você notará a especificação de uma tensão nominal de 120 V, que representa seu valor rms. Por ora será adicionado o termo rms aos valores das tensões e correntes para indicar que o valor rms está sendo utilizado nos cálculos.

EXEMPLO 9.8

Determine o valor rms da forma de onda da corrente mostrada na Fig. 9.9 e utilize esse valor para calcular a potência média fornecida a um resistor de 2Ω através do qual essa corrente flui.

SOLUÇÃO

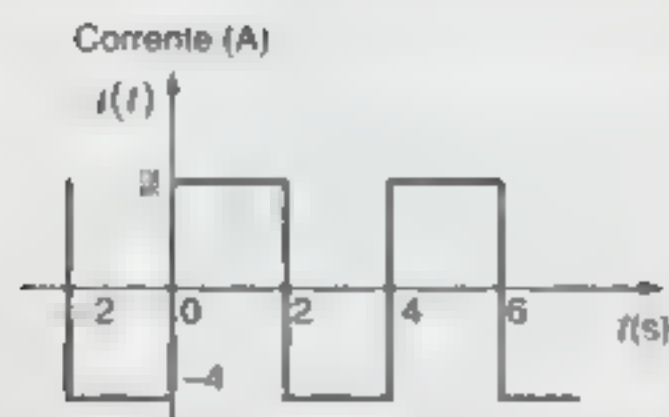
A forma de onda dessa corrente é periódica com um período $T = 4$ s. Seu valor rms é

$$\begin{aligned} I_{\text{rms}} &= \left\{ \frac{1}{4} \left[\int_0^2 (-4)^2 dt + \int_2^4 (-4)^2 dt \right] \right\}^{1/2} \\ &= \left[\frac{1}{4} \left(16t \Big|_0^2 + 16t \Big|_2^4 \right) \right]^{1/2} \\ &= 4 \text{ A} \end{aligned}$$

A potência média fornecida a um resistor de 2Ω através do qual flui essa corrente é

$$P = I_{\text{rms}}^2 R = (4)^2(2) = 32 \text{ W}$$

Figura 9.9 Forma de onda utilizada para ilustrar os valores rms.



EXEMPLO 9.9

Deseja-se calcular o valor rms da forma de onda de tensão mostrada na Fig. 9.10.

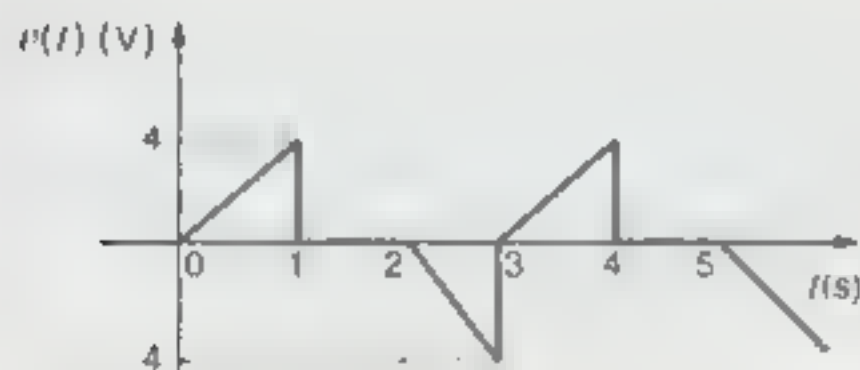


Figura 9.10 Forma de onda utilizada para ilustrar os valores rms.

SOLUÇÃO

A forma de onda é periódica com período $T = 3$ s. A equação da tensão na faixa de tempo $0 \leq t \leq 3$ s é

$$v(t) = \begin{cases} 4t \text{ V} & 0 < t \leq 1 \text{ s} \\ 0 \text{ V} & 1 < t \leq 2 \text{ s} \\ -4t + 8 \text{ V} & 2 < t \leq 3 \text{ s} \end{cases}$$

O valor rms é

$$\begin{aligned} V_{\text{rms}} &= \left\{ \frac{1}{3} \left[\int_0^1 (4t)^2 dt + \int_1^2 (0)^2 dt + \int_2^3 (8-4t)^2 dt \right] \right\}^{1/2} \\ &= \left[\frac{1}{3} \left(\frac{16t^3}{3} \Big|_0^1 + \left(64t - \frac{64t^2}{2} + \frac{16t^3}{3} \right) \Big|_2^3 \right) \right]^{1/2} \\ &= 1,89 \text{ V} \end{aligned}$$

Avaliação do Aprendizado

E9.11 Uma corrente com a forma de onda mostrada na Fig. E9.11 flui através de um resistor de 4Ω . Calcule a potência média fornecida ao resistor.



Figura E9.11

RESPOSTA: $P = 32 \text{ W}$.

E9.12 Uma corrente com a forma de onda mostrada na Fig. E9.12 flui por meio de um resistor de 10Ω . Determine a potência média fornecida ao resistor.

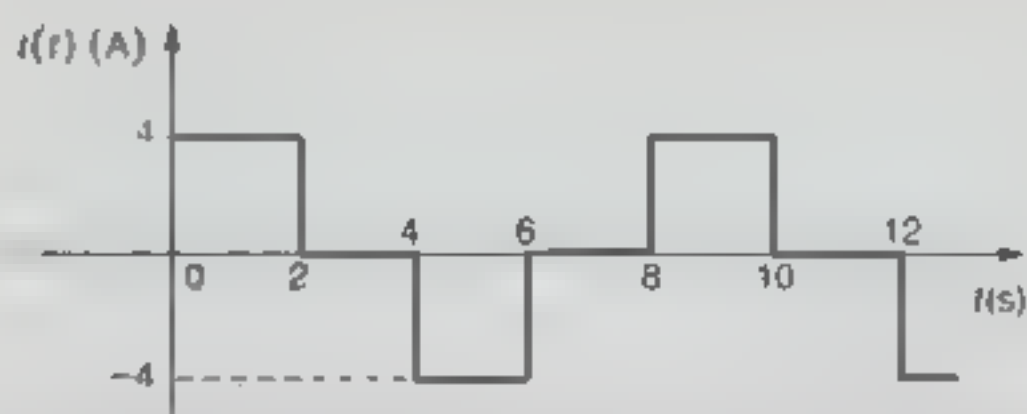
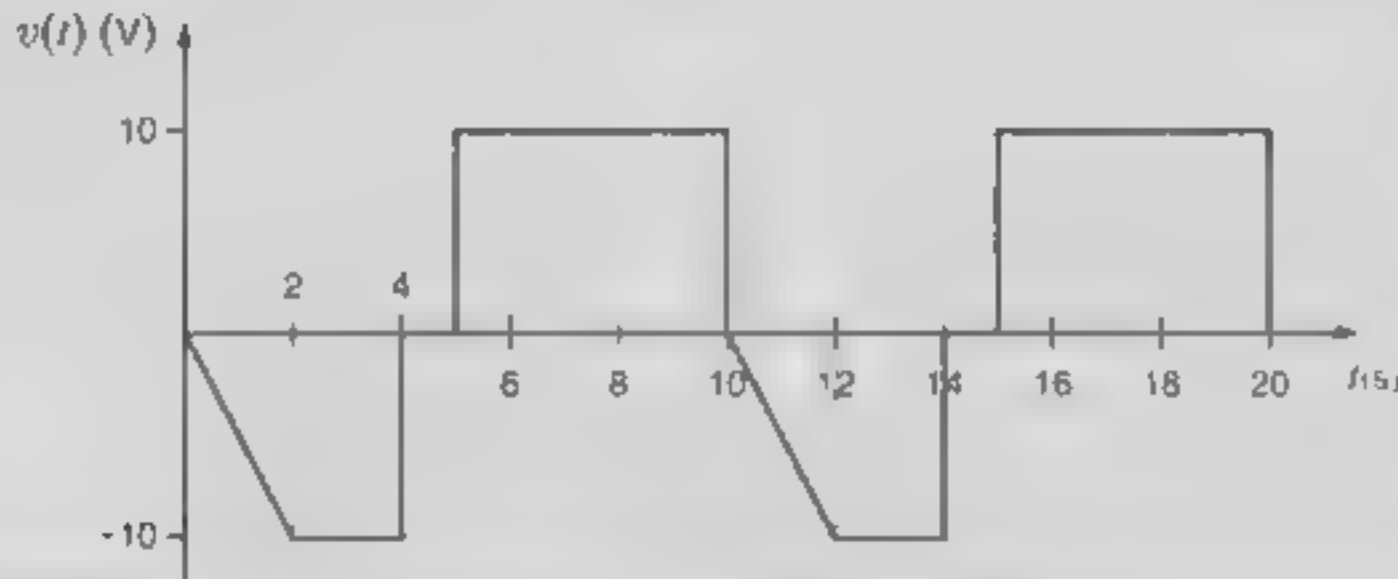


Figura E9.12

RESPOSTA: $P = 80 \text{ W}$.

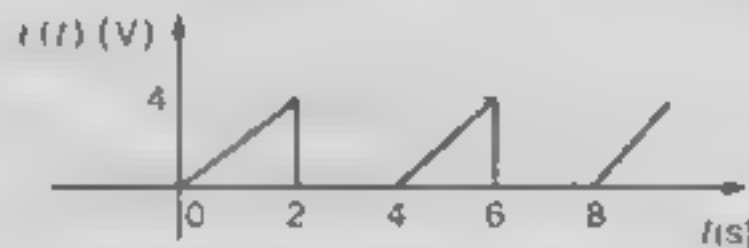
E9.13 A tensão entre os terminais de um resistor de $2\ \Omega$ é representada pela forma de onda mostrada na Fig. E9.13. Determine a potência média absorvida por esse resistor.



RESPOSTA: $P = 38,22\text{ W}$.

Figura E9.13

E9.14 Determine o valor rms da forma de onda da tensão mostrada na Fig. E9.14.



RESPOSTA: $V_{\text{rms}} = 1,633\text{ V}$.

Figura E9.14

9.5 O Fator de Potência

O fator de potência é uma grandeza muito importante. Seu valor se deve em parte ao impacto econômico gerado entre os consumidores industriais de grandes quantidades de energia. Nesta seção define-se cuidadosamente essa grandeza e, em seguida, ilustra-se seu significado por meio de alguns exemplos práticos.

Na Seção 9.4 foi mostrado que uma carga operando no regime estacionário CA consome uma potência média expressa por

$$P = V_{\text{rms}} I_{\text{rms}} \cos(\theta_v - \theta_i)$$

Serão, agora, definidos mais detalhadamente os termos dessa importante equação. O produto $V_{\text{rms}} I_{\text{rms}}$ é chamado de *potência aparente*. Embora o termo $\cos(\theta_v - \theta_i)$ seja adimensional e a unidade de P seja watts, a potência aparente normalmente é definida em volts-ampères (VA) ou quilovolts-ampères (kVA) de forma a distingui-la da potência média.

Pode-se, assim, definir o *fator de potência* (fp) como a razão entre a potência média e a potência aparente; isto é,

$$\text{fp} = \frac{P}{V_{\text{rms}} I_{\text{rms}}} = \cos(\theta_v - \theta_i) \quad 9.27$$

em que

$$\cos(\theta_v - \theta_i) = \cos\theta_{Z_L} \quad 9.28$$

O ângulo $\theta_v - \theta_i = \theta_{Z_L}$ é o ângulo de fase da impedância da carga e é geralmente chamado de *ângulo do fator de potência*. As duas posições extremas desse ângulo correspondem a uma carga puramente resistiva, na qual $\theta_{Z_L} = 0$ e o fp é igual a 1, e a uma carga puramente reativa, em que $\theta_{Z_L} = \pm 90^\circ$ e fp é nulo. Certamente, o valor do fp será unitário para uma carga que contenha os componentes R , L e C quando os valores desses componentes de circuito forem tais que um ângulo de fase nulo é obtido para uma particular frequência de operação.

Existe uma grande faixa para os ângulos do fator de potência entre $\pm 90^\circ$ e 0° . Por outro lado, se a carga for uma combinação RC equivalente, então o ângulo do fp estará situado entre os limites $-90^\circ < \theta_{Z_L} < 0^\circ$. Por outro lado, se a carga representar uma combinação RL equivalente, então o ângulo do fp estará entre os limites $0^\circ < \theta_{Z_L} < 90^\circ$. Naturalmente, poderia ocorrer alguma confusão na identificação do tipo de carga, uma vez que $\cos\theta_{Z_L} = \cos(-\theta_{Z_L})$. Para evitar esse problema, o fp é dito estar *em avanço* ou *em atraso*, em que esses dois termos referem-se à fase da corrente em relação à tensão. Uma vez que a corrente se adianta à tensão em uma carga RC , a carga possui um fp em avanço. Da mesma forma, uma carga RL possui um fp em atraso; portanto, as impedâncias das cargas $Z_L = 1 - j1\ \Omega$ e $Z_L = 2 + j1\ \Omega$ possuem fatores de potência de $\cos(-45^\circ) = 0,707$ em avanço e $\cos(26,57^\circ) = 0,894$ em atraso, respectivamente.

EXEMPLO 9.10

Uma carga industrial consome 88 kW com um fp de 0,707 em atraso de uma linha de 480 V rms. A resistência da linha de

transmissão desde o transformador da concessionária de energia até a planta é de $0,08\ \Omega$. Seja a determinação da potência que deve ser fornecida pela concessionária de energia (a) nas condições apresentadas e (b) caso o fp seja, por alguma razão,

alterado para 0,90 em atraso. (Do ponto de vista econômico, o fator de potência deve ser tão próximo da unidade quanto possível.)

SOLUÇÃO

a. O circuito equivalente para as condições fornecidas é mostrado na Fig. 9.11. Utilizando a Eq. (9.27), obtém-se a intensidade da corrente rms na planta:

$$\begin{aligned} I_{\text{rms}} &= \frac{P_L}{(\text{fp})(V_{\text{rms}})} \\ &= \frac{(88)(10^3)}{(0,707)(480)} \\ &= 259,3 \text{ A rms} \end{aligned}$$

A potência a ser fornecida pela concessionária de energia será

$$\begin{aligned} P_f &= P_L + (0,08)I_{\text{rms}}^2 \\ &= 88.000 + (0,08)(259,3)^2 \\ &= 93,38 \text{ kW} \end{aligned}$$

[atenção]

Procedimento

1. Dados P_L , fp e V_{rms} , determine I_{rms} .
 2. Em seguida, calcule $P_f = P_L + I_{\text{rms}}^2 R_{\text{linha}}$ em que R_{linha} é a resistência da linha.
- b. Suponha agora que o fp seja alterado para 0,90 em atraso e que a tensão permaneça constante em 480 V. A corrente rms da carga para essa condição é

$$\begin{aligned} I_{\text{rms}} &= \frac{P_L}{(\text{fp})(V_{\text{rms}})} \\ &= \frac{(88)(10^3)}{(0,90)(480)} \\ &= 203,7 \text{ A rms} \end{aligned}$$

Nessas condições a concessionária de energia deve gerar

$$\begin{aligned} P_f &= P_L + (0,08)I_{\text{rms}}^2 \\ &= 88.000 + (0,08)(203,7)^2 \\ &= 91,32 \text{ kW} \end{aligned}$$

Observe cuidadosamente a diferença entre os dois casos. A simples alteração no fp da carga de 0,707 em atraso para 0,90 em atraso produziu um efeito interessante. Note que, no primeiro caso, a companhia de energia deve gerar 93,38 kW de modo a suprir a planta com 88 kW de potência. Um baixo fator de potência significa que as perdas na linha serão altas — 5,38 kW. Todavia, no segundo caso, a companhia de energia precisa gerar apenas 91,32 kW para suprir a planta com a potência necessária, e as correspondentes perdas na linha são de apenas 3,32 kW.

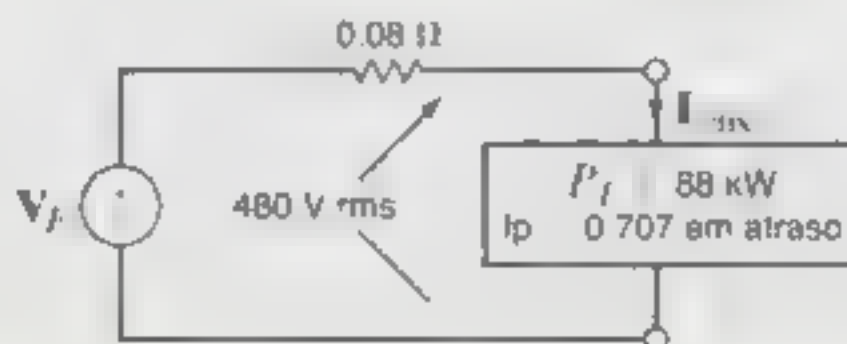


Figura 9.11 Exemplo de circuito para análise da mudança do fator de potência.

Esse exemplo indica claramente o impacto econômico do fator de potência da carga. O custo de produção de eletricidade de uma grande companhia geradora pode chegar, facilmente, à ordem de bilhões de dólares. Um fator de potência baixo na carga significa que os geradores devem ser capazes de conduzir mais corrente a uma tensão constante, devendo também fornecer potência para perdas superiores a $I_{\text{rms}}^2 R_{\text{linha}}$; isto é, para perdas superiores ao que seria necessário se o fator de po-

tência da carga fosse alto. Uma vez que as perdas na linha representam energia dissipada na forma de calor, sem nenhum benefício, as concessionárias insistem para que uma planta mantenha um alto fp, tipicamente 0,90 em atraso, e ajustam suas taxas para penalizar as plantas que não estejam de acordo com essas recomendações. Na próxima seção mostra-se uma simples e econômica técnica para se corrigir esse fator de potência.

Avaliação do Aprendizado

Ex. 9.15 Uma carga industrial consome 100 kW a um fator de potência de 0,707 em atraso. A linha de tensão de 60 Hz na carga é de 480 V rms. A resistência da linha de transmissão entre o transformador da companhia fornecedora de energia e a carga é de 0,1 Ω. Determine a economia de potência que poderia ser obtida se o fp fosse alterado para 0,94 em atraso.

RESPOSTA: A economia de potência seria de 3,771 kW

9.6 Potência Complexa

No estudo da potência associada ao comportamento estacionário dos circuitos CA, é conveniente introduzir uma outra grandeza, comumente chamada de *potência complexa*. Para desenvolver a relação entre essa grandeza e as demais que foram apresentadas nas seções anteriores, considere o circuito mostrado na Fig. 9.12.

A potência complexa é definida como

$$S = V_{\text{rms}} I_{\text{rms}}^* \quad 9.29$$

em que I_{rms}^* refere-se ao complexo conjugado de I_{rms} ; isto é, se $I_{\text{rms}} = I_{\text{rms}} \angle \theta_i = I_R + jI_I$, então $I_{\text{rms}}^* = I_{\text{rms}} \angle -\theta_i = I_R - jI_I$. A potência conjugada é, portanto, expressa como

$$S = V_{\text{rms}} \angle \theta_v I_{\text{rms}} \angle -\theta_i = V_{\text{rms}} I_{\text{rms}} \angle \theta_v - \theta_i \quad 9.30$$

ou

$$S = V_{\text{rms}} I_{\text{rms}} \cos(\theta_v - \theta_i) + jV_{\text{rms}} I_{\text{rms}} \sin(\theta_v - \theta_i) \quad 9.31$$

em que, certamente, $\theta_v - \theta_i = \theta_z$. Nota-se, da Eq. (9.31), que a parte real da potência complexa é, simplesmente, a *potência média* ou *real*. A parte imaginária de S é chamada de *potência em quadratura* ou *reativa*. Portanto, a potência complexa pode ser expressa na forma

$$S = P + jQ \quad 9.32$$

em que

$$P = \text{Re}(S) = V_{\text{rms}} I_{\text{rms}} \cos(\theta_v - \theta_i) \quad 9.33$$

$$Q = \text{Im}(S) = V_{\text{rms}} I_{\text{rms}} \sin(\theta_v - \theta_i) \quad 9.34$$

Conforme mostrado na Eq. (9.31), a magnitude da potência complexa é a chamada *potência aparente*, e o ângulo de fase da potência complexa é simplesmente o ângulo do fator de potência. A potência complexa, da mesma forma que a potência aparente, é medida em volts-ampères. A potência real é medida em watts e, para distinguir-se Q das demais grandezas, que na realidade possuem as mesmas dimensões, ela é medida em volts-ampères reativo, ou var.

As expressões estabelecidas nas Eqs. (9.33) e (9.34) são agora examinadas mais detalhadamente para os três componentes básicos de circuitos: o resistor R , o indutor L e o capacitor C . Para um resistor, $\theta_v - \theta_i = 0^\circ$, $\cos(\theta_v - \theta_i) = 1$ e $\sin(\theta_v - \theta_i) = 0$. Como resultado, o resistor absorve potência real ($P > 0$),

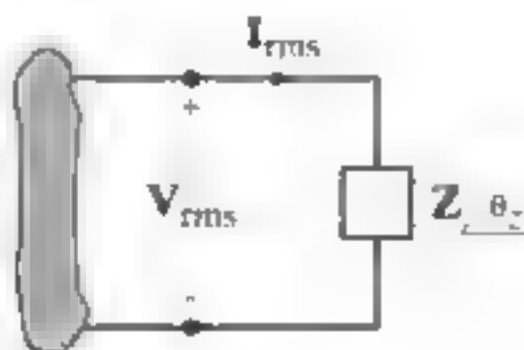


Figura 9.12 Circuito utilizado para explicar as relações de potência.

porém não absorve qualquer potência reativa ($Q = 0$). Para um indutor, $\theta_v - \theta_i = 90^\circ$, e

$$P = V_{\text{rms}} I_{\text{rms}} \cos(90^\circ) = 0$$

$$Q = V_{\text{rms}} I_{\text{rms}} \sin(90^\circ) > 0$$

Um indutor absorve potência reativa, porém não absorve potência real. Repetindo-se essa análise para um capacitor, tem-se que $\theta_v - \theta_i = -90^\circ$ e

$$P = V_{\text{rms}} I_{\text{rms}} \cos(-90^\circ) = 0$$

$$Q = V_{\text{rms}} I_{\text{rms}} \sin(-90^\circ) < 0$$

Um capacitor não absorve qualquer potência real; entretanto, a potência reativa é, agora, negativa. A questão que se coloca é: como interpretar uma potência reativa negativa? Retomando-se à Fig. 9.12, nota-se que a tensão e a corrente são especificadas de modo a atender à convenção passiva de sinais. Nesse caso, o produto da tensão pela corrente fornece a potência absorvida pela impedância naquela figura. Se a potência reativa absorvida pelo capacitor é negativa, então o capacitor deve fornecer potência reativa. O fato de o capacitor se comportar como uma fonte de potência reativa será utilizado na próxima seção, na qual será discutida a correção do fator de potência.

Verifica-se, assim, que os resistores absorvem apenas potência real, enquanto os indutores e os capacitores absorvem apenas potência reativa. Qual é a diferença básica entre esses componentes? Os resistores somente absorvem energia. Por outro lado, os capacitores e os indutores armazenam energia e, portanto, retornam essa energia para o circuito. Como os indutores e os capacitores somente absorvem potência reativa e não potência real, conclui-se que a potência reativa está relacionada ao armazenamento de energia nesses componentes.

Substitui-se, agora, a relação $V_{\text{rms}} = I_{\text{rms}} * Z$ na Eq. (9.29). Multiplicando-se $I_{\text{rms}} * I_{\text{rms}}^* = I_{\text{rms}} \angle \theta_i * I_{\text{rms}} \angle -\theta_i$, tem-se I_{rms}^2 . A potência complexa absorvida por uma impedância pode ser obtida multiplicando-se o quadrado da magnitude rms da corrente que flui através da impedância pela impedância.

$$S = V_{\text{rms}} I_{\text{rms}}^* = (I_{\text{rms}} Z) I_{\text{rms}}^* = I_{\text{rms}} I_{\text{rms}}^* Z = I_{\text{rms}}^2 Z = I_{\text{rms}}^2 (R + jX) = P + jQ \quad 9.35$$

A potência expressa pela Eq. (9.29) pode então ser obtida substituindo-se a corrente I_{rms} , ao invés de a tensão V_{rms} , ou seja,

$$S = V_{\text{rms}} I_{\text{rms}}^* = V_{\text{rms}} \left(\frac{V_{\text{rms}}}{Z} \right)^* = \frac{V_{\text{rms}}^2}{Z^*} = V_{\text{rms}}^2 Y^* = V_{\text{rms}}^2 (G + jB)^* = P + jQ \quad 9.36$$

Essa expressão mostra que é possível calcular a potência complexa absorvida por uma admitância pela multiplicação do quadrado da magnitude rms da tensão entre os terminais da admitância pelo conjugado da admitância. Suponha que o bloco do circuito da Fig. 9.12 contenha um capacitor. A admitância de um capacitor é $j\omega C$. Conectando-o à equação anterior, obtém-se

$$S = V_{\text{rms}}^2 (j\omega C)^* = -j\omega C V_{\text{rms}}^2 \quad 9.37$$

Observe o sinal negativo da potência complexa. Esse resultado está de acordo com a previsão de que um capacitor não absorve potência real, e se comporta como uma fonte de potência reativa.

Os diagramas apresentados na Fig. 9.13 ilustram melhor as relações entre as várias grandezas relacionadas à potência. Conforme mostrado na Fig. 9.13a, o fasor da corrente pode ser decomposto em duas componentes: uma que está em fase com V_{rms} e uma defasada de 90° com V_{rms} . As Eqs. (9.33) e (9.34) mostram que a componente em fase produz a potência real, e a componente defasada em 90° , chamada de *componente em quadratura*, produz a potência em quadratura ou reativa. Além disso, as Eqs. (9.33) e (9.34) indicam que

$$\tan(\theta) = \frac{Q}{P} \quad 9.38$$

Essa expressão relaciona o ângulo do fator de potência (fp) a P e Q , e é chamada de *triângulo de potência*.

As relações entre S , P e Q podem ser expressas através dos diagramas mostrados nas Figs. 9.13b e c. Na Fig. 9.13b as con-

dições descritas a seguir podem ser constatadas: se a potência Q for positiva, a carga será indutiva, o fator de potência estará em atraso e o número complexo S estará no primeiro quadrante. Caso Q seja negativa, a carga será capacitiva, o fator de potência estará em avanço e o número complexo S estará no quarto quadrante. Se a potência Q for nula, a carga será resistiva, o fator de potência será igual à unidade e o número complexo S estará sobre o eixo real positivo. A Fig. 9.13c ilustra as relações expressas pelas Eqs. (9.35) a (9.37) para uma carga indutiva.

No Capítulo 1 apresentou-se o teorema de Tellegen, o qual estabelece que a soma das potências absorvidas por todos os componentes de uma rede elétrica é igual a zero. Com base nesse teorema, pode-se também estabelecer que a potência complexa é conservada em uma rede CA — a potência complexa total fornecida a um número qualquer de cargas individuais é igual à soma das potências complexas fornecidas às cargas, independentemente de como estas estejam interconectadas.

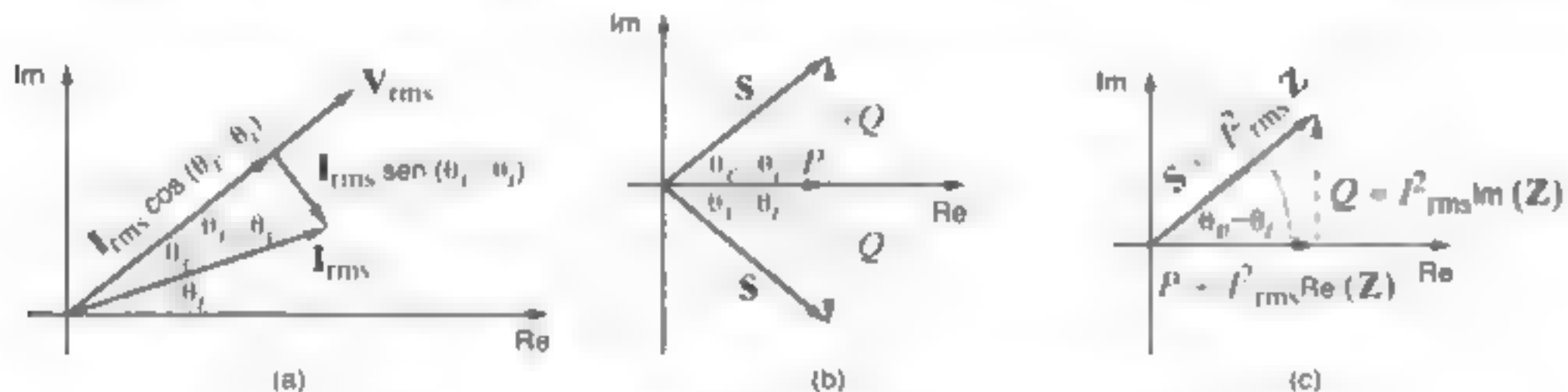


Figura 9.13 Diagrama ilustrativo das relações de potência.

Estratégia para Solução de Problemas

Determinação de P ou S

Se a tensão $v(t)$ e a corrente $i(t)$ forem conhecidas e desejar-se obter a potência P dada uma impedância $Z/\theta = R + jX$, dois procedimentos são viáveis, conforme mostrado a seguir:

Etapas 1. Determine V e I e, em seguida, calcule

$$P = V_{rms} I_{rms} \cos \theta \quad \text{ou} \quad P = V_{rms} I_{rms} \cos(\theta_v - \theta_i)$$

Etapas 2. Utilize I para calcular a parte real de S , isto é,

$$P = R_e(S) = I^2 R$$

O último método pode ser mais fácil de calcular do que o primeiro. Todavia, se a parte imaginária da impedância, X , não for nula, então,

$$P \neq \frac{V^2}{R}$$

o que é um erro comum. Além disso, as partes P e Q de S estão diretamente relacionadas à Z/θ e propiciam um modo conveniente de relacionar potência, corrente e impedância. Isto é,

$$\tan \theta = \frac{Q}{P}$$

$$S = I^2 Z$$

O exemplo a seguir ilustra a utilidade da potência complexa S .

EXEMPLO 9.11

Uma carga opera a 20 kW com um fator de potência fp = 0,8 em atraso. A tensão na carga é de 220 $\angle 0^\circ$ V rms a 60 Hz. A impedância da linha é de $0,09 + j0,3 \Omega$. Deseja-se determinar a tensão e o fator de potência na entrada da linha

SOLUÇÃO

O diagrama do circuito desse problema é mostrado na Fig. 9.14. Conforme ilustrado na Fig. 9.13,

$$S = \frac{P}{\cos \theta} = \frac{P}{\text{fp}} = \frac{20 \text{ (kW)}}{0,8} = 25 \text{ 000 VA}$$

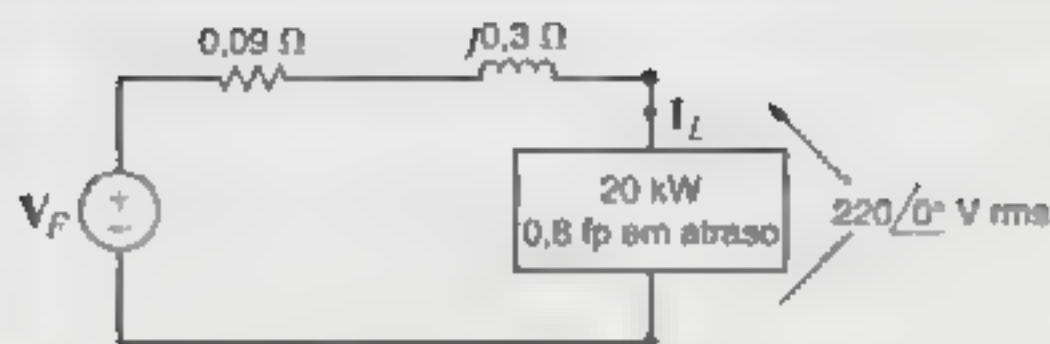


Figura 9.14 Exemplo de circuito para a análise de potência.

Portanto, na carga

$$S_L = 25.000 \angle \theta = 25.000 \angle 36,87^\circ = 20.000 + j15.000 \text{ VA}$$

Uma vez que $S_L = V_L I_L^*$,

$$I_L = \left[\frac{25.000 \angle 36,87^\circ}{220 \angle 0^\circ} \right]^* \\ = 113,64 \angle -36,87^\circ \text{ A rms}$$

As perdas de potência complexa na linha são

$$S_{\text{linha}} = I_L^2 Z_{\text{linha}} \\ = (113,64)^2 (0,09 + j0,3) \\ = 1162,26 + j3874,21 \text{ VA}$$

Conforme mencionado anteriormente, a potência complexa é conservada e, portanto, a potência complexa no gerador vale

$$S_g = S_L + S_{\text{linha}} \\ = 21.162,26 + j18.874,21 \\ = 28.356,25 \angle 41,73^\circ \text{ VA}$$

Assim, a tensão no gerador será

$$V_F = \frac{|S_g|}{I_L} = \frac{28.356,25}{113,64} \\ = 249,53 \text{ V rms}$$

e o fator de potência do gerador é

$$\cos(41,73^\circ) = 0,75 \text{ em atraso}$$

Este problema poderia ser resolvido utilizando a LKT. Por exemplo, a corrente da carga foi calculada como

$$I_L = 113,64 \angle -36,87^\circ \text{ A rms}$$

Logo, a queda da tensão na linha de transmissão é

$$V_{\text{linha}} = (113,64 \angle -36,87^\circ)(0,09 + j0,3) \\ = 35,59 \angle 36,43^\circ \text{ V rms}$$

Portanto, a tensão no gerador vale

$$V_F = 220 \angle 0^\circ + 35,59 \angle 36,43^\circ \\ = 249,53 \angle 4,86^\circ \text{ V rms}$$

Assim, a tensão no gerador é de 249,53 V rms. Além disso,

$$\theta_v - \theta_i = 4,86^\circ - (-36,87^\circ) = 41,73^\circ$$

e, portanto,

$$\text{fp} = \cos(41,73^\circ) = 0,75 \text{ em atraso}$$

[atenção]

1. Utilize a potência P_L , $\cos \theta$ e a tensão V_L rms para obter S_L e I_L , com base nas Eqs. (9.33) e (9.29), respectivamente.
2. Utilize I_L e Z_{linha} para obter S_{linha} utilizando a Eq. (9.35).
3. Utilize $S_g = S_{\text{linha}} + S_L$.
4. A equação $V_g = S_g / I_L^*$ fornece V_g e θ_v . Uma vez que $V_g = V_g \angle \theta_v$ e θ_i é a fase de I_L , $\text{fp} = \cos(\theta_v - \theta_i)$.

EXEMPLO 9.12

Duas redes A e B são conectadas por dois condutores cuja impedância total é $Z = 0 + j1 \Omega$, conforme mostrado na Fig. 9.15. As tensões nos terminais das redes são $V_A = 120 \angle 30^\circ \text{ V rms}$ e $V_B = 120 \angle 0^\circ \text{ V rms}$. Deseja-se determinar a potência média que flui entre as redes e identificar qual é a fonte e qual é a carga.

SOLUÇÃO

Conforme mostrado na Fig. 9.15,

$$I = \frac{V_A - V_B}{Z} \\ = \frac{120 \angle 30^\circ - 120 \angle 0^\circ}{j1} \\ = 62,12 \angle 15^\circ \text{ A rms}$$

A potência fornecida pela rede A é

$$P_A = |V_A| |I| \cos(\theta_{V_A} - \theta_I) \\ = (120)(62,12) \cos(30^\circ - 15^\circ) \\ = 7200,4 \text{ W}$$

A potência absorvida pela rede B é

$$P_B = |V_B| |I| \cos(\theta_{V_B} - \theta_I) \\ = (120)(62,12) \cos(0^\circ - 15^\circ) \\ = 7200,4 \text{ W}$$

Se a potência realmente fluisse da rede B para a rede A, os sinais resultantes para P_A e P_B deveriam ser negativos.

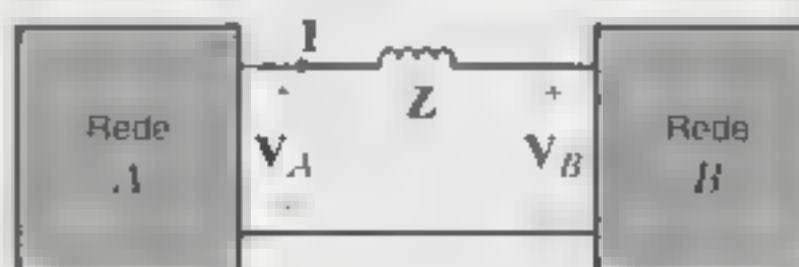


Figura 9.15 Rede utilizada no Exemplo 9.12.

Avaliação do Aprendizado

E9.16 Uma carga industrial requer 40 kW a um fator de potência $fp = 0,84$ em atraso. A tensão na carga é de $220 \angle 0^\circ$ V rms a 60 Hz. A impedância da linha de transmissão é de $0,1 + j0,25 \Omega$. Determine as perdas de potência real e reativa na linha e as potências real e reativa necessárias na entrada da linha de transmissão.

RESPOSTAS:

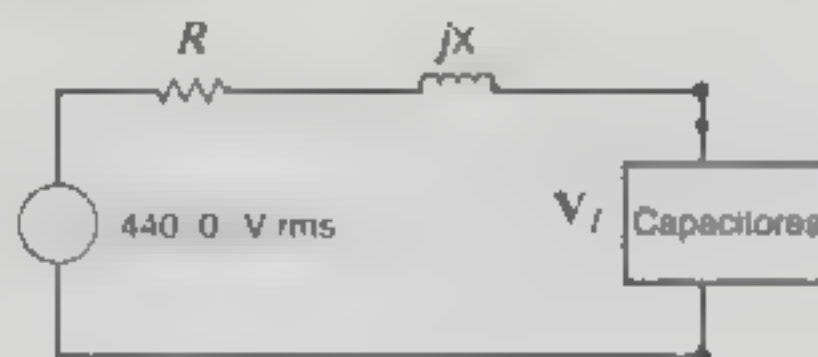
$$\begin{aligned} P_{\text{linha}} &= 4,685 \text{ kW}; \\ Q_{\text{linha}} &= 11,713 \text{ kvar}; \\ P_F &= 44,685 \text{ kW e} \\ Q_F &= 37,55 \text{ kvar.} \end{aligned}$$

E9.17 Uma carga requer 60 kW a um fator de potência $fp = 0,85$ em atraso. A tensão na linha de 60 Hz na carga é de $220 \angle 0^\circ$ V rms. Se a impedância da linha de transmissão é de $0,12 + j0,18 \Omega$, determine a tensão na linha e o fator de potência na entrada.

RESPOSTAS:

$$\begin{aligned} V_L &= 284,6 \angle 5,8^\circ \text{ V rms e} \\ fp_L &= 0,792 \text{ em atraso} \end{aligned}$$

E9.18 A fonte do circuito mostrado na Fig. E9.18 fornece 40 kW a um fator de potência de 0,9 em atraso. As perdas real e reativa do cabo alimentador da linha de transmissão são de 1,6 kW e 2,1 kvar, respectivamente. Determine a tensão na carga e as potências real e reativa absorvidas pela carga.



RESPOSTAS:

$$\begin{aligned} V_L &= 416,83 \angle -1,62^\circ \text{ V}; \\ P_L &= 38,4 \text{ kW e} \\ Q_L &= 12,27 \text{ kvar.} \end{aligned}$$

Figura E9.18

E9.19 Determine o fator de potência da fonte e a tensão $v_s(t)$ da rede mostrada na Fig. E9.19. Considere $f = 60$ Hz.



RESPOSTAS:

$$\begin{aligned} fp_s &= 0,9457 \text{ em atraso e} \\ v_s(t) &= 765,94 \cos(377t - 7,77^\circ) \text{ V.} \end{aligned}$$

Figura E9.19

9.7 Correção do Fator de Potência

As plantas industriais que necessitam de uma grande quantidade de energia possuem uma ampla variedade de cargas. Todavia, tendo em vista a natureza das cargas, estas normalmente possuem um fator de potência em atraso. Considerando os resultados obtidos no Exemplo 9.10, é natural que se questione sobre a existência de alguma técnica apropriada para se elevar o fator de potência de uma carga. Uma vez que uma carga típica pode ser um banco de motores de indução ou qualquer outro equipamento de valor elevado, uma técnica que permita a elevação do fp deve ser economicamente viável.

Para responder a essa questão, examina-se o circuito esquemático mostrado na Fig. 9.16. Uma carga industrial típica com fp em atraso é alimentada por uma fonte elétrica. Também mostrado está o triângulo de potência para a carga. O fp da carga é $\cos(\theta_{\text{orig}})$. Para se melhorar o fator de potência, necessita-se reduzir o ângulo do triângulo de potência mostrado na Fig. 9.16. Com base na Eq. (9.38), sabe-se que a tangente desse ângulo é igual à razão entre Q e P . Seria possível diminuir o ângulo pelo aumento de P . Esta não é uma solução economicamente atrativa, uma vez que o aumento do consumo de potência aumentaria a conta mensal da concessionária de energia elétrica.

A outra opção para se reduzir esse ângulo é diminuir Q . Como a potência Q poderia ser reduzida? Lembre-se, da se-

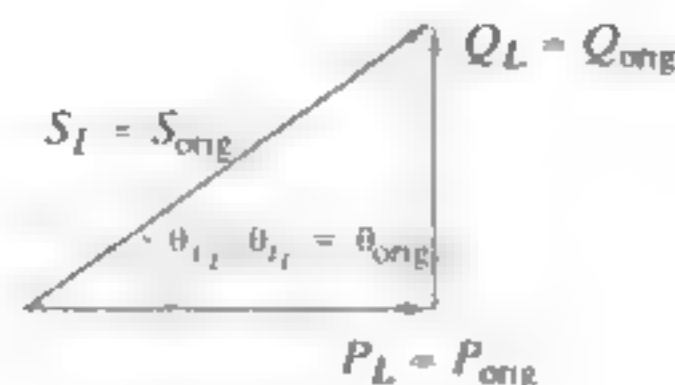
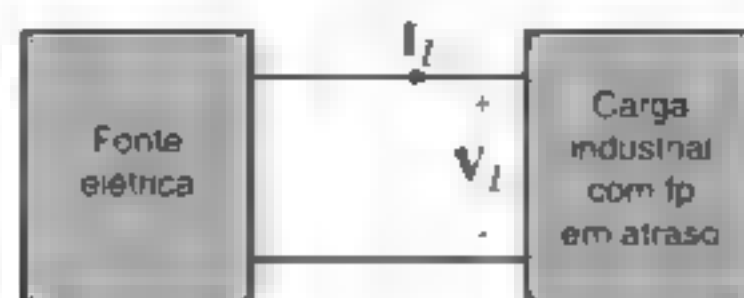


Figura 9.16 Diagrama esquemático para a correção do fator de potência.

ção anterior, de que um capacitor opera como uma fonte de potência reativa e não absorve potência real. Suponha que um capacitor seja conectado em paralelo com a carga industrial, conforme mostrado na Fig. 9.17. Os correspondentes triângulos de potência para esse diagrama também são mostrados na Fig. 9.17 Definindo-se

$$S_{\text{orig}} = P_{\text{orig}} + jQ_{\text{orig}} = |S_{\text{orig}}| \angle \theta_{\text{orig}}$$

e

$$S_{\text{novo}} = P_{\text{orig}} + jQ_{\text{novo}} = |S_{\text{novo}}| \angle \theta_{\text{novo}}$$

Assim, com a inclusão do capacitor, tem-se

$$S_{\text{novo}} = S_{\text{orig}} + S_{\text{cap}}$$

Portanto,

$$S_{\text{cap}} = S_{\text{novo}} - S_{\text{orig}}$$

$$= (P_{\text{novo}} + jQ_{\text{novo}}) - (P_{\text{orig}} + jQ_{\text{orig}})$$

$$= j(Q_{\text{novo}} - Q_{\text{orig}})$$

$$= j(Q_{\text{cap}})$$

Lembre-se, das Eqs. (9.36) e (9.37), que, em geral,

$$S = V_{\text{rms}}^2 / Z^*$$

e, para um capacitor,

$$Z^* = 1/j\omega C$$

de modo que

$$S_{\text{cap}} = Q_{\text{cap}} = -j\omega C V_{\text{rms}}^2$$

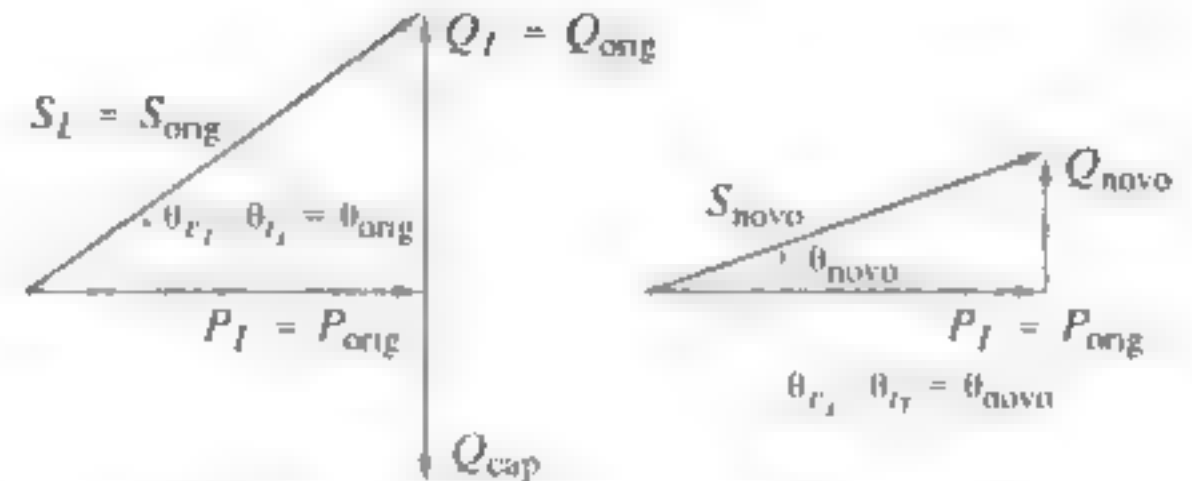
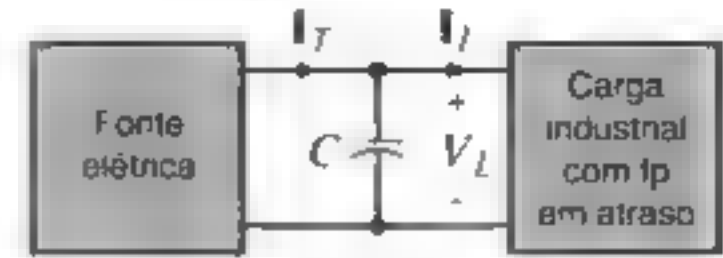


Figura 9.17 Diagrama de correção do fator de potência pela inclusão de um capacitor.

Essa equação pode ser utilizada na obtenção do valor necessário de C para se atender ao novo valor do ângulo especificado para o fator de potência ilustrado na Fig. 9.17.

Portanto, pode-se obter um fator de potência específico para a carga total (carga industrial e capacitor) simplesmente pela seleção criteriosa de um capacitor e sua colocação em paralelo com a carga original. Em geral deseja-se que o fator de potência seja alto e, portanto, o ângulo do fator de potência deve ser pequeno [isto é, quanto maior o fator de potência desejado, menor o ângulo $(\theta_{vL} - \theta_{IT})$].

EXEMPLO 9.13

Todos os meses as concessionárias de energia elétrica enviam para as residências uma conta referente à quantidade de energia elétrica que foi consumida. Em geral, o custo da energia é expresso em centavos por kWh e consiste em no mínimo duas componentes: (1) o custo da demanda, que cobre o custo das linhas de transmissão, postes, transformadores e outros, e (2) o custo da energia, que cobre o custo da produção de energia elétrica nas plantas de potência. O custo da energia é objeto de regulação da indústria de geração de eletricidade onde, nos Estados Unidos, é o consumidor quem escolhe a concessionária de sua preferência.

Naquele país, é comum uma indústria que opere com um baixo fator de potência ter que pagar mais à concessionária fornecedora de energia elétrica. Suponha que uma indústria opere a uma tensão de 277 V rms e necessite de 500 kW a um fator de potência de 0,75 em atraso. Admita um custo da energia de R\$ 0,02/kWh e um custo de demanda de R\$ 3,50/kW por mês se o fator de potência estiver entre 0,9 e 1,0 em atraso, e de R\$ 5,00/kVA por mês se o fator de potência for menor que 0,9 em atraso.

O custo mensal da energia será de $500 \times 24 \times 30 \times \text{R\$ } 0,02 = \text{R\$ } 7.200,00$. Pode-se calcular o custo mensal da demanda

com um fator de potência de 0,75 em atraso. A potência complexa absorvida pela indústria é

$$S_{\text{orig}} = \frac{500}{0,75} \angle \cos^{-1}(0,75) = 666,67 \angle 41,4^\circ = 500 + j441 \text{ kVA}$$

O custo da demanda mensal é de $666,67 \times \text{R\$ } 5,00 = 3.333,35$. O total da conta de energia fornecida será $\text{R\$ } 7.200 + \text{R\$ } 3.333,35 = \text{R\$ } 10.533,35$ por mês.

Considere a instalação de um banco de capacitores, conforme mostrado na Fig. 9.18, para corrigir o fator de potência e reduzir o custo da demanda. Esse custo será mais favorável, dependendo exclusivamente da correção do fator de potência para 0,9 em atraso. O custo mensal será o mesmo se o fator de potência for corrigido para 0,9 ou 1,0. A potência complexa absorvida pelos equipamentos da indústria e pelo banco de capacitores será

$$S_{\text{novo}} = \frac{500}{0,9} \angle \cos^{-1}(0,9) = 555,6 \angle 25,84^\circ = 500 + j242,2 \text{ kVA}$$

O custo mensal da demanda para os equipamentos industriais juntamente com o banco de capacitores será de $500 \times \text{R\$ } 3,50 = \text{R\$ } 1.750,00$ por mês. A potência média absorvida pelo banco de capacitores é desprezível se comparada à potência média absorvida pelos equipamentos da indústria, portanto, o custo

mensal da energia permanece em R\$ 7.200,00 por mês. Com o banco de capacitores instalado, o total da conta de energia fornecida será de R\$ 7.200 + R\$ 1.750,00 = R\$ 8.950,00 por mês.

Quantos kvars de capacitância são necessários para corrigir o fator de potência para 0,9 em atraso?

$$S_{\text{novo}} - S_{\text{orig}} = S_{\text{cap}} = (500 + j242,2) - (500 + j441) = -j198,8 \text{ kvar}$$

Admita um custo de R\$ 100,00 por kvar para instalar o banco de capacitores na indústria para um custo de instalação de R\$ 19.880,00. Em quanto tempo o custo de instalação do banco de capacitores será recuperado? A diferença no custo mensal de demanda sem o banco e com o banco é de R\$ 3.333,35 – R\$ 1.750,00 = R\$ 1.583,35. Dividindo esse valor pelo custo de instalação do banco tem-se R\$ 19.880,00 / R\$ 1.583,35 = 12,56 meses



Figura 9.18 Banco de capacitores. (Cortesia de Jeremy Nelms, Taiquin Electric Cooperative, Inc.)

EXEMPLO 9.14

Os caiaques plásticos são fabricados através de um processo chamado de rotomoldagem, cujo diagrama é mostrado na Fig. 9.19. O plástico fundido é injetado em um molde que é então posto a girar relativamente ao eixo do caiaque até que o plástico esfrie, apresentando como resultado uma peça única oca. Suponha que os motores de indução utilizados para girar os moldes consumam 50 kW a um fator de potência $\text{fp} = 0,8$ em atraso de uma linha cuja tensão é de $220 \angle 0^\circ \text{ V rms}$, a 60 Hz. Deseja-se elevar o fp para 0,95 em atraso colocando-se um banco de capacitores em paralelo com a carga.

SOLUÇÃO

O diagrama do circuito desse problema é mostrado na Fig. 9.20. A potência $P_L = 50 \text{ kW}$ e, como $\cos^{-1} 0,8 = 36,87^\circ$, $\theta_{\text{orig}} = 36,87^\circ$. Portanto,

$$Q_{\text{orig}} = P_{\text{orig}} \tan \theta_{\text{orig}} = (50)(10^3)(0,75) = 37,5 \text{ kvar}$$

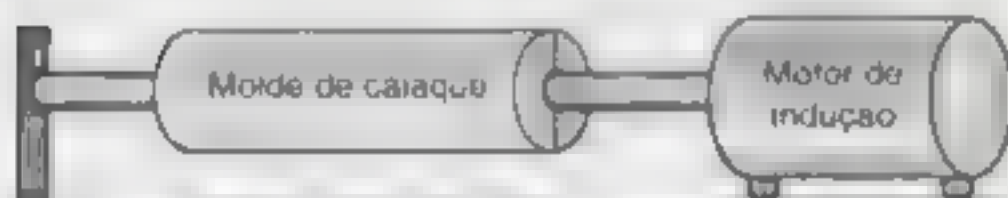


Figura 9.19 Processo de fabricação por rotomoldagem.

Logo,

$$S_{\text{orig}} = P_{\text{orig}} + jQ_{\text{orig}} = 50.000 + j37.500$$

e

$$S_{\text{cap}} = 0 + jQ_{\text{cap}}$$

Uma vez que o fator de potência requerido é de 0,95,

$$\begin{aligned} \theta_{\text{novo}} &= \cos^{-1}(\text{pf}_{\text{novo}}) = \cos^{-1}(0,95) \\ &= 18,19^\circ \end{aligned}$$

Então,

$$\begin{aligned} Q_{\text{novo}} &= P_{\text{orig}} \tan \theta_{\text{novo}} \\ &= 50.000 \tan(18,19^\circ) \\ &= 16.430 \text{ var} \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} Q_{\text{novo}} - Q_{\text{orig}} &= Q_{\text{cap}} = -\omega CV^2 \text{ rms} \\ 16.430 - 37.500 &= -\omega CV^2 \text{ rms} \end{aligned}$$

A solução dessa equação para C fornece

$$\begin{aligned} C &= \frac{21.070}{(377)(220)^2} \\ &= 1155 \mu\text{F} \end{aligned}$$

Utilizando um capacitor desse valor em paralelo com a carga industrial, cria-se, do ponto de vista da concessionária fornecedora de energia, uma carga cujo fator de potência é de 0,95 em atraso. Todavia, os parâmetros da carga real permanecem inalterados. Nessas condições, a corrente fornecida pela concessionária ao fabricante do caiaque é menor e, portanto, eles podem utilizar condutores menores para a mesma potência. Ou, se a dimensão dos condutores é fixa, as perdas na linha serão menores, uma vez que essas perdas dependem do quadrado da corrente.

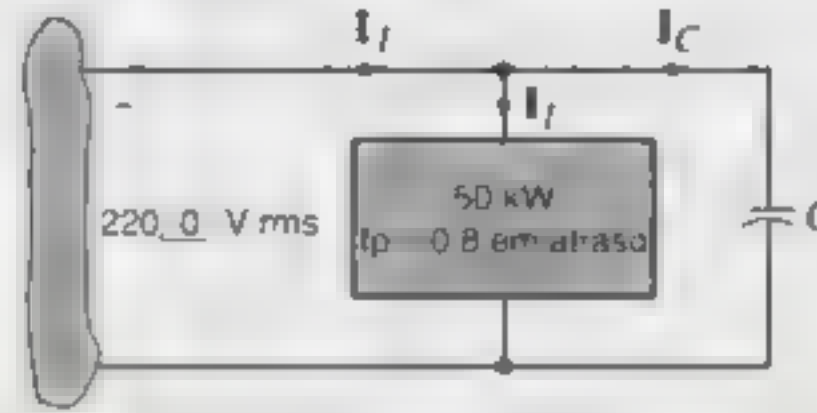


Figura 9.20 Exemplo de circuito para a correção do fator de potência.

Estratégia para Solução de Problemas

Correção do Fator de Potência

Etapa 1. Obtenha Q_{orig} , a partir de P_L e θ_{orig} , ou o fp_{orig} equivalente.

Etapa 2. Obtenha θ_{novo} , a partir do fp_{novo} desejado.

Etapa 3. Determine $Q_{\text{novo}} = P_{\text{orig}} \tan \theta_{\text{novo}}$.

Etapa 4. $Q_{\text{novo}} - Q_{\text{orig}} = Q_{\text{cap}} = -\omega CV^2 \text{ rms}$.

Avaliação do Aprendizado

E9.20 Calcule o valor do capacitor necessário para alterar o fator de potência no exercício de Avaliação do Aprendizado E9.15 para 0,95 em atraso.

RESPOSTA: $C = 773 \mu\text{F}$.

E9.21 Determine o valor do capacitor a ser instalado em paralelo com a carga do circuito mostrado na Fig. E9.21 de modo que o fator de potência da fonte seja de 0,95 em atraso para uma frequência $f = 60 \text{ Hz}$.

RESPOSTA: $C = 546,2 \mu\text{F}$

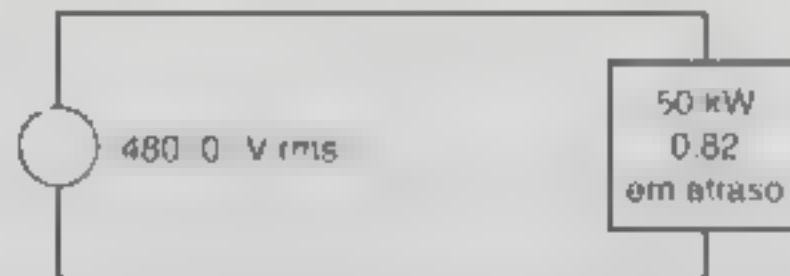


Figura E9.21

9.8 Circuitos Monofásicos com Três Condutores

O circuito CA monofásico simples com três condutores, como mostrado na Fig. 9.21, é um importante circuito a ser analisado, uma vez que ele é uma rede CA de potência típica encontrada nas residências. Note que as fontes de tensão são iguais; isto é, $V_{an} = V_{nb} = V$. Assim, as magnitudes são iguais e as fases são iguais (uma única fase). A tensão entre fases $V_{ab} = 2V_{an} = 2V_{nb} = 2V$. Nas residências, lâmpadas e pequenos aparelhos são conectados entre uma fase e o neutro n , e os utensílios maiores (maiores consumidores de energia), como aquecedores de água e condicionadores de ar, são conectados entre as fases. As lâmpadas operam a 120 V rms e os grandes aparelhos operam a aproximadamente 240 V rms.

Duas cargas idênticas podem, agora, ser conectadas ao sistema monofásico com três cabos utilizando condutores ideais,

conforme mostrado na Fig. 9.21b. Com base nessa figura pode-se escrever

$$I_{aA} = \frac{V}{Z_L}$$

e

$$I_{bB} = \frac{V}{Z_L}$$

A LKC aplicada ao ponto N fornece

$$\begin{aligned} I_{nN} &= -(I_{aA} + I_{bB}) \\ &= -\left(\frac{V}{Z_L} + \frac{V}{Z_L}\right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Observe que não existe corrente no fio neutro e, portanto, ele poderia ser removido sem afetar o restante do sistema; isto é, todas as tensões e correntes não seriam alteradas. Alguém fi-

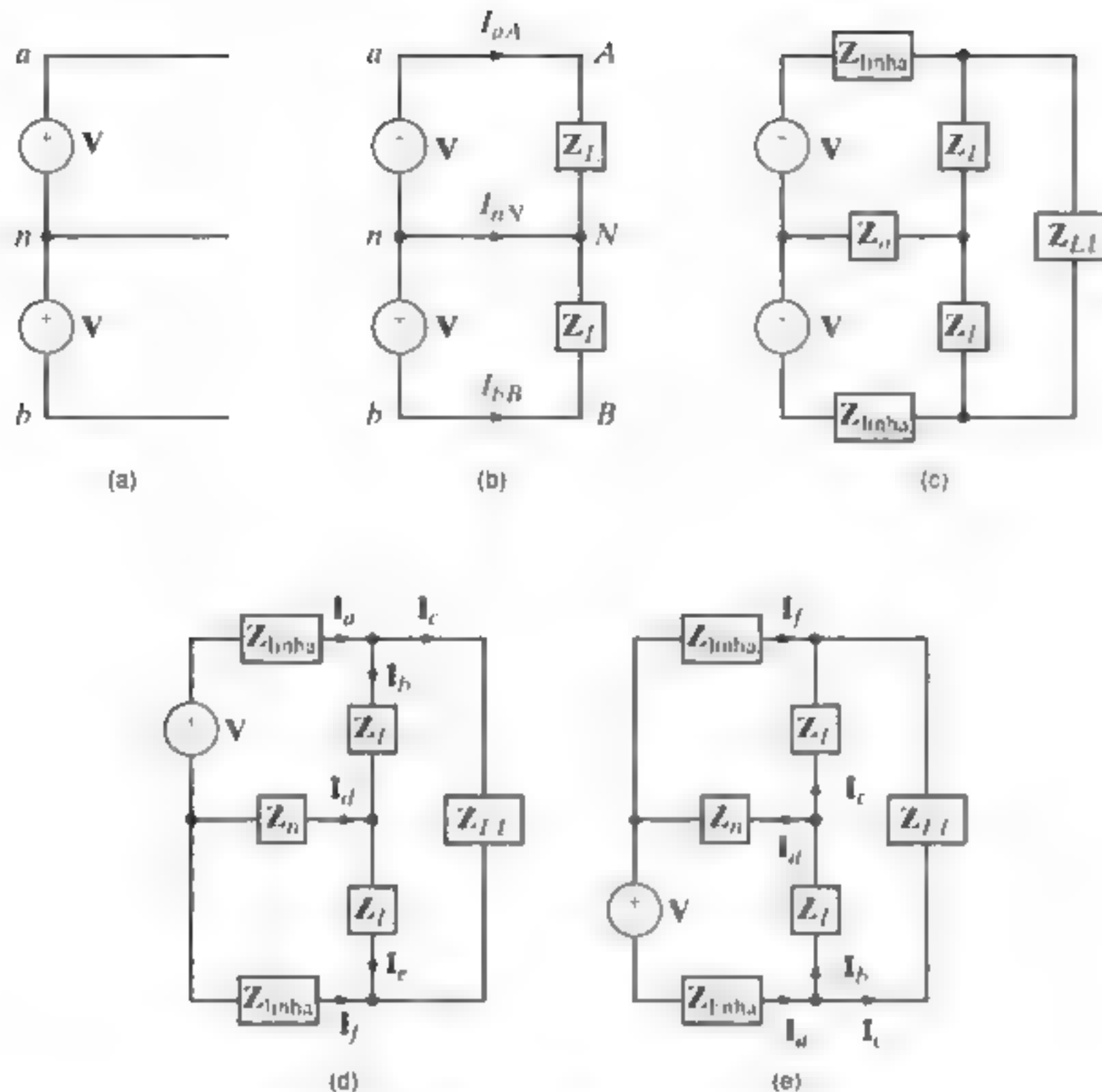


Figura 9.21 Sistema monofásico com três condutores.

caria naturalmente curioso em saber o alcance da simplicidade apresentada por esse sistema. Por exemplo, o que ocorreria se cada linha de fase possuísse uma impedância, se o condutor neutro tivesse uma impedância associada a ele e se existisse uma carga entre as fases? Para explorar essas questões, considere o circuito mostrado na Fig. 9.21c. Embora esse circuito possa ser examinado através das diversas técnicas apresentadas nos capítulos anteriores, a simetria da rede sugere que o princípio da superposição possa conduzir a algumas importantes conclusões sem que seja necessário recorrer a um trabalho muito árduo. Empregando o princípio da superposição, são considerados os dois

circuitos mostrados nas Figs. 9.21d e e. As correntes na rede da Fig. 9.21d são nomeadas arbitrariamente. Devido à relação simétrica entre as Figs. 9.21d e e, as correntes na rede da Fig. 9.21e correspondem diretamente àsquelas indicadas na Fig. 9.21d. Se os dois *fasores* das correntes forem adicionados em cada ramo, obter-se-á que a corrente no fio neutro é novamente nula. Uma corrente nula no fio neutro é um resultado direto da natureza simétrica da rede. Caso as impedâncias das linhas de fase Z_{linha} ou as impedâncias das cargas Z_L não sejam iguais, a corrente no fio neutro será diferente de zero. Esses conceitos serão diretamente utilizados no estudo das redes com três fases no Capítulo 11.

EXEMPLO 9.15

Um circuito residencial com três condutores de uma única fase é mostrado na Fig. 9.22a. Os tempos de utilização de lâmpadas, de um aparelho de som estéreo e de um fogão elétrico para um período de 24 horas são mostrados na Fig. 9.22b. Seja o cálculo da energia utilizada ao longo de 24 horas expressa em quilowatt-hora. Admitindo que esse período represente um dia típico e que a taxa cobrada pela concessionária fornecedora de energia elétrica seja de R\$ 0,08/kWh, estime o valor da conta de energia consumida em um mês de 30 dias.

SOLUÇÃO

A aplicação da análise nodal ao circuito da Fig. 9.22a fornece

$$\begin{aligned} I_{aA} &= I_f + I_R \\ I_{bB} &= -I_f - I_R \\ I_{nN} &= I_f - I_L \end{aligned}$$

As magnitudes das correntes de cada carga podem ser obtidas através dos correspondentes níveis de potência como se segue.

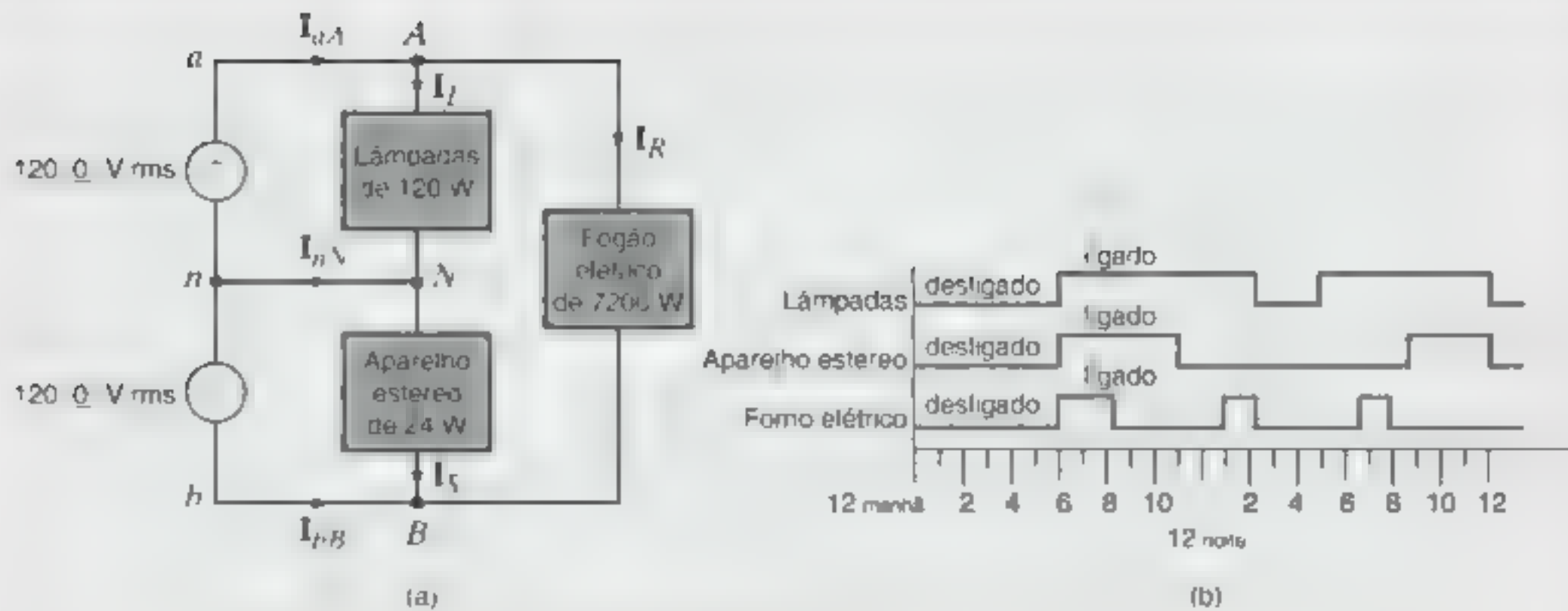


Figura 9.22 Rede residencial de três condutores e utilização dos utensílios domésticos.

$$I_L = \frac{P_L}{V_{an}} = \frac{120}{120} = 1 \text{ A rms}$$

$$I_S = \frac{P_S}{V_{nh}} = \frac{24}{120} = 0.2 \text{ A rms}$$

$$I_R = \frac{P_R}{V_{ah}} = \frac{7200}{240} = 30 \text{ A rms}$$

A energia utilizada é simplesmente a integral da potência fornecida pelas duas fontes no período de 24 horas. Uma vez que as magnitudes das tensões são constantes, pode-se expressar a energia fornecida pelas fontes como

$$E_{an} = V_{an} \int I_{aA} dt$$

$$E_{nh} = V_{nh} \int I_{nV} dt$$

As integrais I_{aA} e I_{nV} podem ser determinadas graficamente com base na Fig. 9.22b.

$$\int_{12 \text{ months}}^{12 \text{ months}} I_{aA} dt = 4I_L + 15I_S = 135$$

$$\int_{12 \text{ months}}^{12 \text{ months}} -I_{hB} dt = 8I_S + 4I_R = 121.6$$

Portanto, a energia diária correspondente a cada fonte e a energia total são calculadas e valem

$$E_{an} = 16.2 \text{ kWh}$$

$$E_{nh} = 14.6 \text{ kWh}$$

$$E_{total} = 30.8 \text{ kWh}$$

Para o período de 30 dias de um mês, com uma taxa da concessionária fornecedora de R\$ 0,08/kWh, o custo da energia consumida será

$$\text{Custo} = (30.8)(30)(0.08) = \text{R\$73,92}$$

Tipicamente, o consumo de energia é medido através de medidores, como os mostrados na Fig. 9.23, os quais são dis-

positivos contadores de sinais, colocados do lado de fora das residências

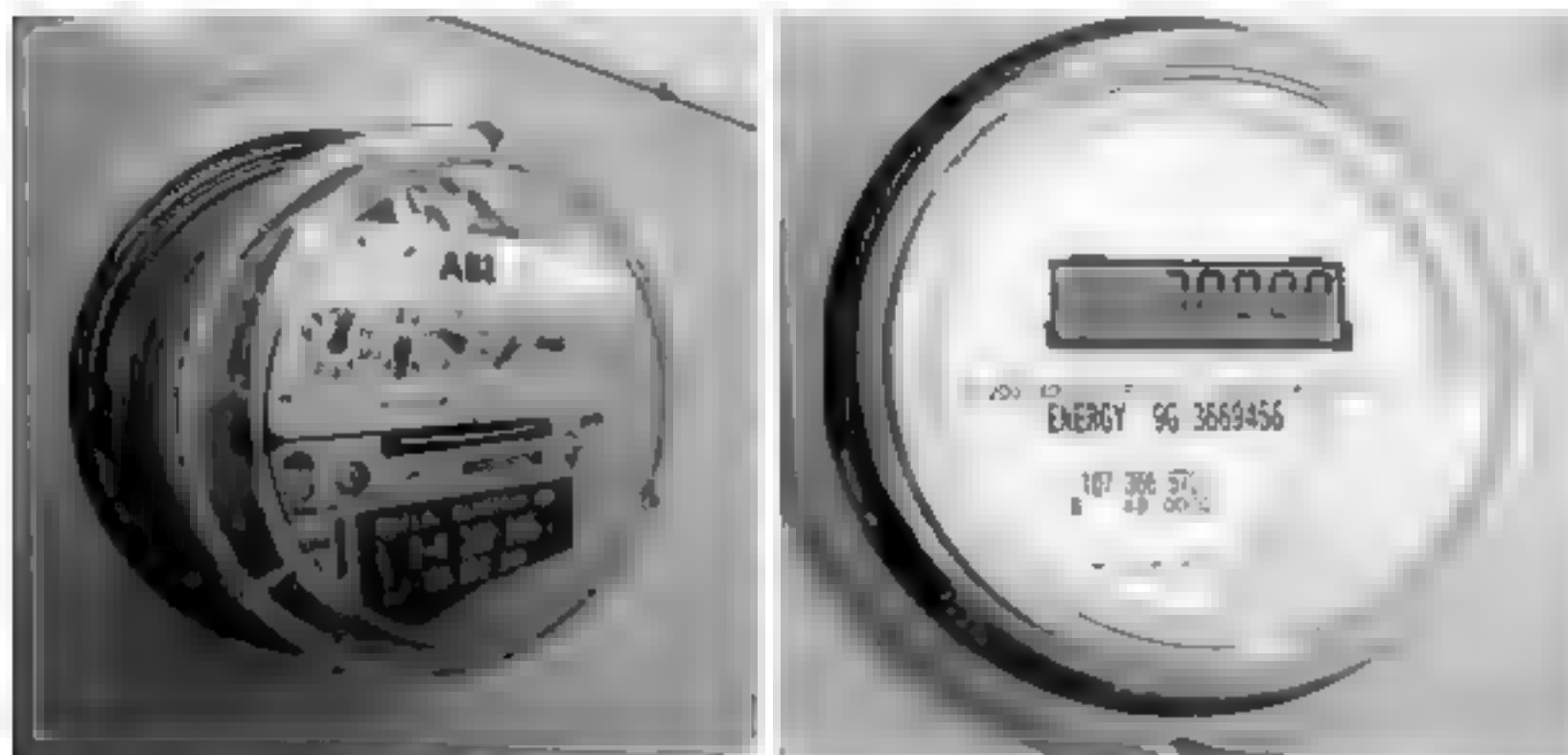


Figura 9.23 Medidores de energia elétrica utilizados para medir o consumo de energia nas residências. (À esquerda, cortesia da Comstock/Punchstock; à direita, cortesia de Robert Llewellyn/Workbook Stock/Jupiter Images)

9.9 Considerações sobre Segurança

Embora este livro, em princípio, seja dedicado à teoria da análise de circuitos, deve-se reconhecer que a maioria dos estudantes, nesta fase do aprendizado, começará a relacionar a teoria aos equipamentos elétricos e sistemas com os quais estarão trabalhando em seu cotidiano. Por isso parece recomendável interromper, por um instante, alguns aspectos teóricos e gastar algum tempo discutindo um tema muito prático e de grande relevância: a segurança. A segurança elétrica é um tópico muito amplo e diversificado, e poderiam ser gastos diversos volumes escritos para dar um tratamento completo a esse assunto. Em vez disso, a discussão aqui apresentada se limitará a alguns poucos conceitos introdutórios que serão ilustrados através de exemplos.

É difícil imaginar que alguém na sociedade tenha alcançado a adolescência sem ter experimentado alguma forma de choque elétrico. Se o choque foi de uma descarga eletrostática ou do contato acidental com um circuito elétrico energizado, a resposta provavelmente foi a mesma — uma reação muscular imediata e involuntária. Em ambos os casos, a causa da reação é a corrente que flui através do corpo. A gravidade do choque depende de diversos fatores, dos quais os mais importantes são a intensidade, a duração e o caminho percorrido pela corrente através do corpo.

O efeito do choque elétrico varia muito de pessoa para pessoa. A Fig. 9.24 mostra as reações que ocorrem, em geral, como resultado de uma corrente CA de 60 Hz que flui através do corpo de uma mão à outra, com o coração no caminho percorrido. Observe que existe uma faixa de correntes, entre cerca de 0,1 a 0,2 A, que provavelmente é fatal. Os níveis de corrente nesse intervalo são capazes de produzir fibrilação ventricular, um distúrbio nas contrações normais dos músculos do coração. A recuperação dos batimentos cardíacos geralmente não ocorre sem a intervenção médica imediata. Os níveis de corrente acima do intervalo fatal tendem a fazer com que o músculo cardíaco se contraia intensamente e, se o choque for removido imediatamente, o coração pode voltar a seu batimento por si só.

A tensão necessária para produzir uma dada corrente depende da qualidade do contato do corpo e da impedância deste entre os pontos de contato. A tensão eletrostática, como a que pode ser produzida deslizando-se no assento de um carro em um dia seco de inverno, pode ser da ordem de 20.000 a 40.000 V, e a corrente que flui ao se tocar a maçaneta de uma porta é da ordem de 40 A. No entanto, o percurso para o fluxo da corrente é, na maioria das vezes, sobre a superfície do corpo, e sua duração é de apenas alguns microssegundos. Apesar de tal choque poder ser desastroso para alguns componentes eletrônicos, ele não causa mais do que um pequeno desconforto e irritação a um ser humano.

Os eletrodomésticos utilizados nas residências normalmente precisam de 120 ou 240 V rms para seu funcionamento. Apesar de o nível de tensão ser pequeno se comparado ao choque eletrostático, o potencial para danificar o indivíduo e o equipamento é muito maior. É mais provável que o contato acidental resulte em um fluxo de corrente entre as mãos ou entre uma mão e um pé — ambos sujeitando o coração ao choque. Devido



Figura 9.24 Efeitos do choque elétrico. (De C. F. Dalziel e W. R. Lee, "Lethal Electric Currents", *IEEE Spectrum*, fevereiro de 1969, pp. 44–50, e C. F. Dalziel, "Electric Shock Hazard", *IEEE Spectrum*, fevereiro de 1972, pp. 41–50.)

à variação relativamente lenta (baixa frequência) da corrente de 60 Hz, esta tende a penetrar mais profundamente no corpo, ao contrário do que ocorre com as variações mais rápidas (alta frequência), que tendem a permanecer na superfície do corpo. Além disso, a fonte de energia possui a capacidade de sustentar o fluxo de corrente sem perdas. Assim, a discussão a seguir concentra-se principalmente nos danos associados ao sistema elétrico CA de 60 Hz.

O sistema monofásico de três condutores introduzido anteriormente é comum, mas não utilizado exclusivamente para a distribuição de energia elétrica em residências. Dois aspectos importantes desse ou de qualquer sistema que não foram mencionados anteriormente e estão relacionados à segurança são circuitos com fusíveis e aterramento.

Cada ramo de circuito, independentemente do tipo de carga que ele atende, é protegido contra o fluxo de corrente excessiva por fusíveis ou disjuntores. Circuitos de tomadas são geralmente limitados a 20 A e circuitos de luz a 15 A. Certamente, esses níveis de corrente não protegem as pessoas de choques mortais. O objetivo principal desses recursos de limitação de corrente é o de proteger um equipamento.

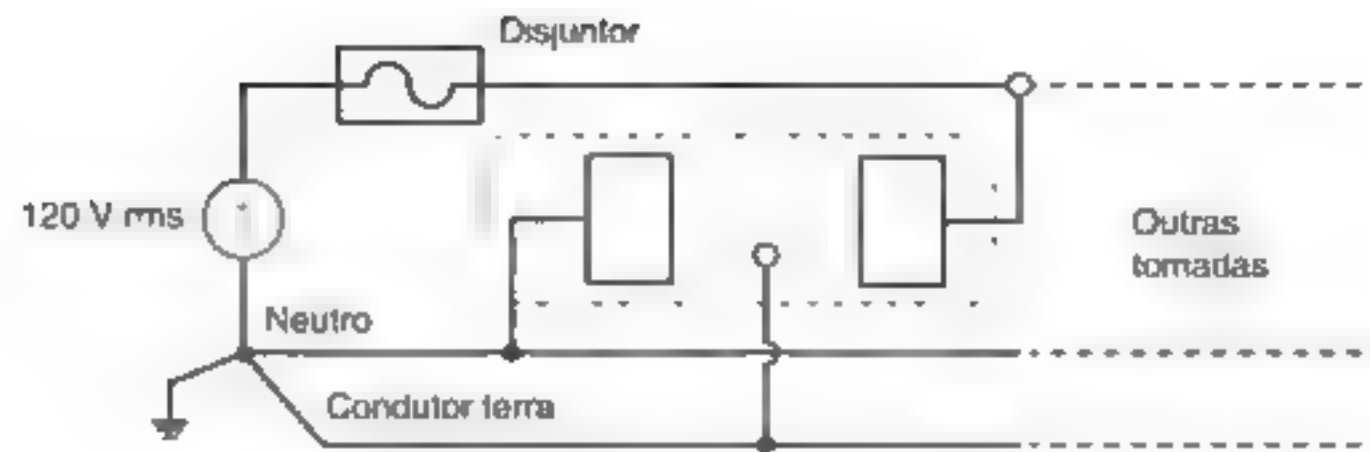


Figura 9.25 Tomada residencial com pino terra.

O condutor neutro do sistema elétrico está conectado ao terra em vários pontos do sistema e, em particular, na chegada dos condutores a uma residência. A conexão com o terra pode ser através de vara dirigida ao solo ou por contato de um cano metálico de água fria que esteja enterrado. Os ramos de circuitos de 120 V saindo do quadro de distribuição (ou caixa de fusíveis)

consistem geralmente em três condutores, e não em dois, conforme foi mostrado na Fig. 9.21. O terceiro condutor é o fio terra, conforme mostrado na Fig. 9.25.

O condutor terra pode parecer redundante, já que ele não participa da operação normal de uma carga que poderia estar conectada ao receptáculo. Seu papel é ilustrado no exemplo a seguir.

EXEMPLO 9.16

Joe possui uma bancada no porão de sua casa onde ele usa uma variedade de ferramentas elétricas como furadeiras, serras e lixadeiras. O piso do porão é de concreto e, por estar abaixo da superfície da terra, normalmente está úmido. O concreto úmido é relativamente bom condutor. Joe não sabe que o isolamento do fio de sua furadeira elétrica está partido e o fio está em contato com (ou em curto com) a carcaça metálica da furadeira, como mostrado na Fig. 9.26. Estaria Joe correndo algum perigo ao utilizar a furadeira?

SOLUÇÃO

Sem o condutor terra conectado à carcaça metálica da ferramenta, Joe receberia um choque considerável, talvez fatal, quando tentasse utilizar a ferramenta. A tensão entre sua mão e o seu pé seria de 120 V, e a corrente através de seu corpo estaria limitada pela resistência de seu corpo e o piso de concreto. Certamente, os disjuntores do circuito não funcionariam. No entanto, se o condutor terra estivesse presente e devidamente conectado à carcaça da furadeira, esta permaneceria no potencial do terra, o condutor de 120 V entraria em curto com o solo, o disjuntor do circuito desarmaria e Joe continuaria vivo para fazer outros furos.

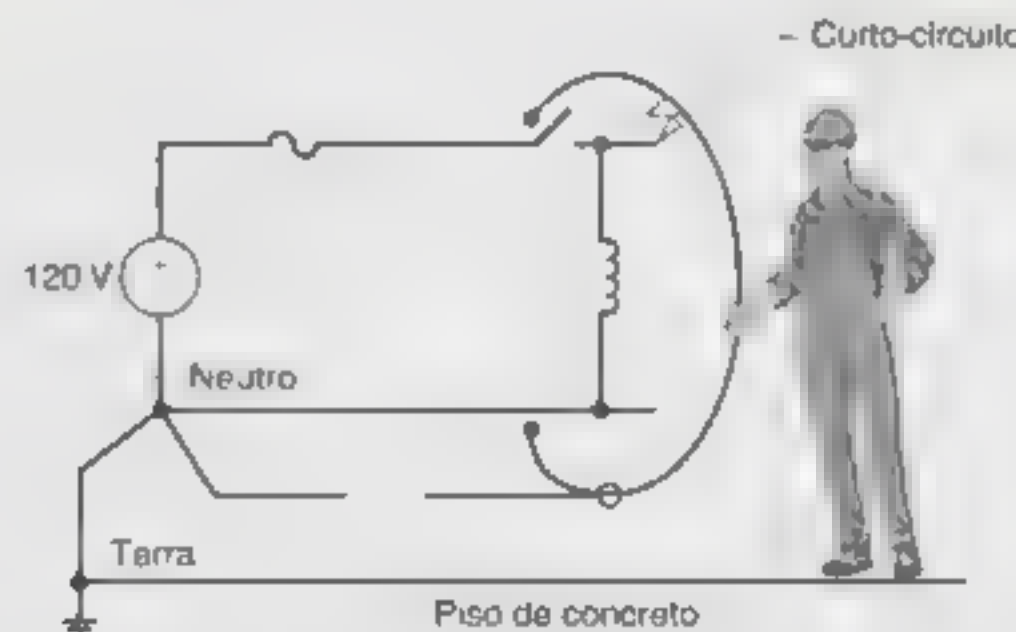


Figura 9.26 Circuito defeituoso, quando a carcaça do equipamento não é aterrada através do cabo de alimentação.

Foi mencionado anteriormente que o disjuntor do circuito ou fusível não pode fornecer proteção eficaz contra um choque elétrico. Existe, porém, um tipo especial de equipamento chamado de interruptor de falha do terra (GFI — *ground-fault interrupter*) que oferece proteção pessoal. Esse dispositivo detecta o fluxo de corrente fora do circuito normal. Considere o circuito da Fig. 9.26. Nas condições normais de operação segura, a corrente no condutor neutro deve ser a mesma que no fio

da fase. Se em algum instante a corrente na fase não foi igual à corrente no neutro, então um fluxo de corrente secundário foi, de alguma forma, estabelecido, criando uma condição insegura. Esse fluxo secundário é chamado de falha. Por exemplo, o fluxo irregular no contexto da Fig. 9.26 ocorre através de Joe e do piso de concreto. O GFI detecta essa falha e, em resposta, abre o circuito. Seu princípio de operação é ilustrado pelo exemplo a seguir.

EXEMPLO 9.17

Seja a descrição da operação de um GFI.

SOLUÇÃO

Considere a ação do circuito magnético mostrado na Fig. 9.27. Sob condições normais de operação, as correntes i_1 e i_2 são iguais, e se as bobinas nos condutores do neutro e da fase forem idênticas, conforme aprendido nos cursos de física básica, o fluxo magnético na carcaça será nulo. Consequentemente, nenhuma tensão será induzida na bobina sensora.

Caso ocorra uma falha na carga, aparecerá uma corrente fluindo no condutor terra e talvez na própria terra; assim, as correntes i_1 e i_2 não serão mais iguais, o fluxo magnético não

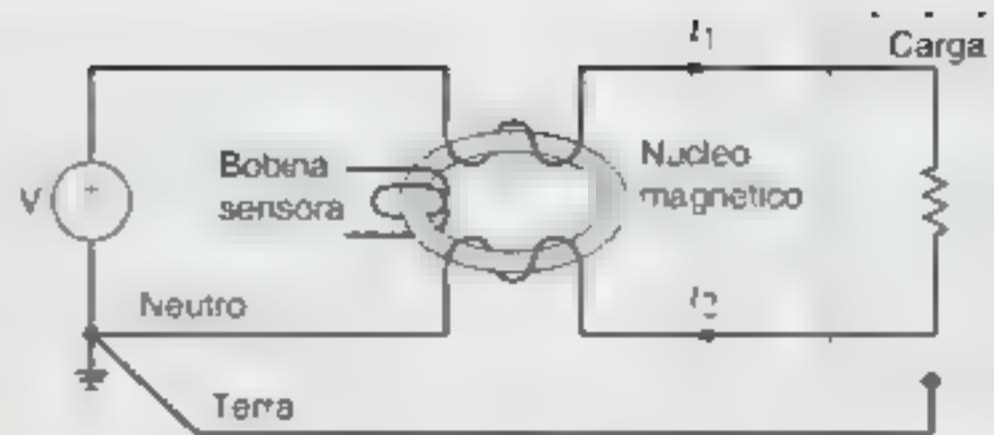


Figura 9.27 Circuito interruptor de falha do terra.

será nulo e uma tensão será induzida na bobina sensora. Essa tensão pode ser utilizada para ativar um circuito disjuntor. Essa é a essência de um equipamento GFI.

Os interruptores de falha de aterramento são disponíveis em várias configurações, entre as quais pode-se citar os disjuntores. Eles são necessários nos ramos de circuito que atendem a tomadas em áreas como banheiros, porões, garagens e construções externas. Esses dispositivos irão operar com as correntes de falha do terra, cujos valores são da ordem de alguns miliampêres. Infelizmente, o GFI é um dispositivo relativamente novo e as normas elétricas não são retroativas. Desse modo, poucas são as antigas residências que os possuem.

As exigências para instalação e manutenção de sistemas elétricos são detalhadamente definidas por diversas normas

estabelecidas para a proteção tanto da pessoa quanto da propriedade. Uma instalação, uma modificação ou um reparo de equipamentos e sistemas elétricos somente deve ser realizado por pessoas devidamente qualificadas. Os assuntos aqui estudados sobre a análise de circuitos não fornecem esse tipo de qualificação.

Os exemplos a seguir ilustram os potenciais danos que podem ser causados em situações do cotidiano. Inicia-se revisando a situação descrita no exemplo anterior.

EXEMPLO 9.18

Suponha que um homem esteja trabalhando no telhado de um trailer com uma furadeira elétrica manual. Ainda é cedo na parte da manhã, o homem está descalço e o orvalho cobre o teto do trailer. A ponta do fio terra foi removida da tomada da furadeira. Será que o homem vai levar um choque caso o fio da fase entre em curto com a carcaça da furadeira?

SOLUÇÃO

Para analisar esse problema, deve-se construir um modelo que represente adequadamente a situação descrita. Em seu livro *Medical Instrumentation* (Houghton Mifflin Company, Boston, 1978), John G. Webster sugere os seguintes valores para a resistência de um corpo humano: $R_{\text{pele}}(\text{seca}) = 15 \text{ k}\Omega$, $R_{\text{pele}}(\text{molhada}) = 150 \Omega$, $R_{\text{extremidades}}(\text{braço ou perna}) = 100 \Omega$ e $R_{\text{tronco}} = 200 \Omega$.

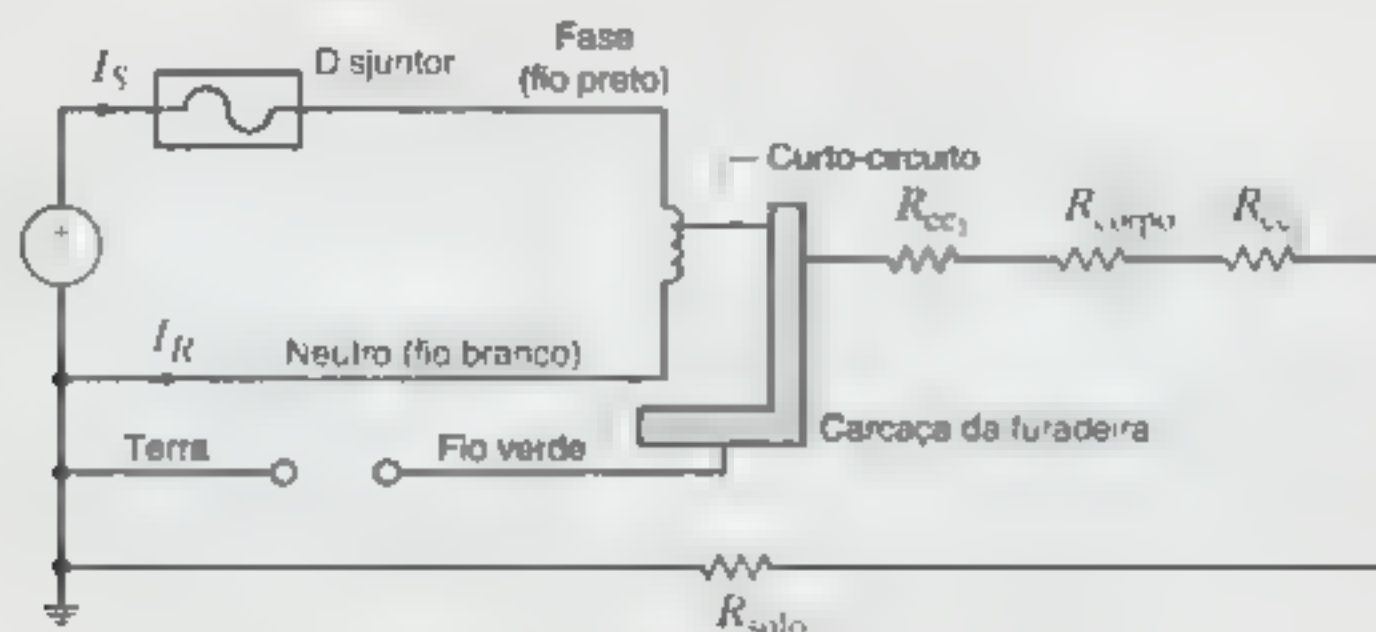


Figura 9.28 Modelo utilizado no Exemplo 9.18.

O modelo da rede é mostrado na Fig. 9.28. Note que, uma vez que o fio terra está em circuito aberto, existe um caminho fechado a partir da fase, passando pelo curto, do corpo humano, do trailer e do solo. Para as condições estabelecidas anteriormente, admite-se que as resistências da superfície de contato R_{cc1} e R_{cc2} são de $150 \, \Omega$ cada uma. A resistência do corpo, R_{corpo} , consistindo em braço, tronco e perna, é de $400 \, \Omega$. A resistência do trailer é supostamente nula e a resistência estimada do solo, R_{solo} , desde o piso do trailer até o solo propriamente dito, é admitida como de $1 \, \Omega$. Portanto, a magnitude da corrente através do corpo, desde a mão até o pé, seria

$$\begin{aligned} I_{corpo} &= \frac{120}{R_{cc1} + R_{corpo} + R_{cc2} + R_{solo}} \\ &= \frac{120}{701} \\ &= 171 \, \text{mA} \end{aligned}$$

Uma corrente dessa intensidade pode, facilmente, causar uma parada cardíaca

Uma proteção adicional seria fornecida se o disjuntor fosse um interruptor de falha do terra (GFI).

EXEMPLO 9.19

Dois meninos estão jogando bola no quintal. Para se refrescar, eles decidem pular na piscina. A piscina possui um forro de vinil, fazendo com que a água esteja isolada eletricamente da terra. O que os dois não sabem é que há uma falha no terra em uma das lâmpadas da piscina. Um dos meninos pula e, ainda de pé dentro da piscina com água até o peito, puxa o outro menino, que está segurando a escada que está aterrada, conforme mostrado na Fig. 9.29a. Qual é o impacto dessa ação?

SOLUÇÃO

A ação mostrada na Fig. 9.29a é modelada conforme indicado na Fig. 9.29b. Note que, por causa da falha no terra, existe

um caminho da corrente através dos dois meninos. Admitindo que as resistências de falha, da piscina e da escada sejam aproximadamente nulas, a magnitude da corrente através dos dois meninos será

$$\begin{aligned} I &= \frac{120}{(3R_{\text{menino}}) + 3(3R_{\text{contato úmido}}) + R_{\text{escada}}} \\ &= \frac{120}{950} \\ &= 126 \, \text{mA} \end{aligned}$$

Esse nível de corrente causaria um choque grave em ambos os meninos. O menino situado fora da piscina poderia sofrer uma parada cardíaca.

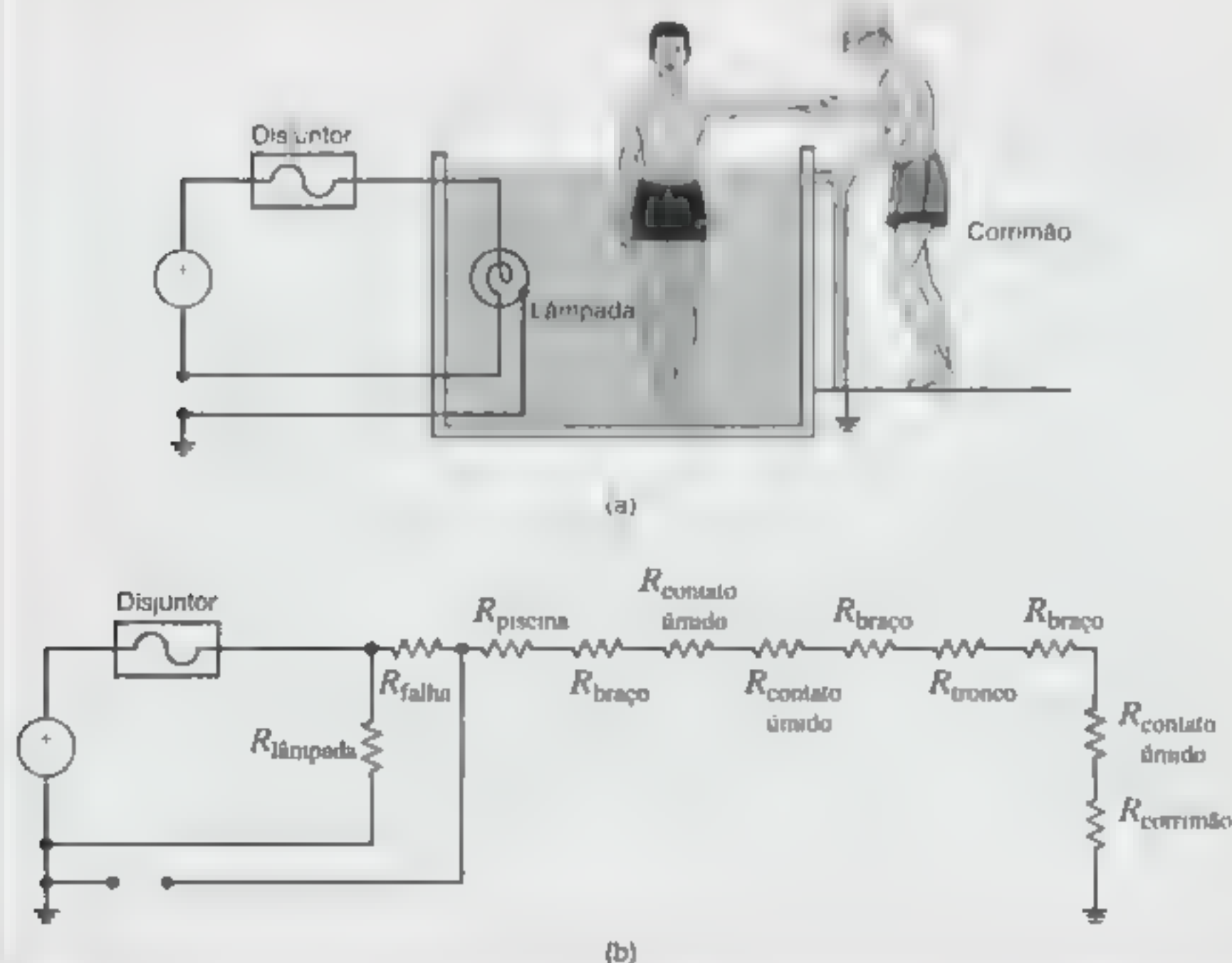


Figura 9.29 Diagramas utilizados no Exemplo 9.19.

EXEMPLO 9.20

Uma paciente em um ambulatório tem preso ao seu antebraço esquerdo um estimulador de músculos. Sua taxa cardíaca está sendo monitorada por um eletrocardiógrafo (ECG) com dois eletrodos diferenciais sobre o coração e o eletrodo terra é afixado em seu tornozelo direito. Essa situação é ilustrada na Fig. 9.30a. O estimulador atua como uma fonte de corrente que conduz 150 mA através do músculo a partir do eletrodo ativo até o eletrodo passivo. Se o técnico do ambulatório, por engano, decide conectar o eletrodo passivo do estimulador ao eletrodo terra do eletrocardiógrafo para conseguir um terra comum, haveria algum risco para a paciente?

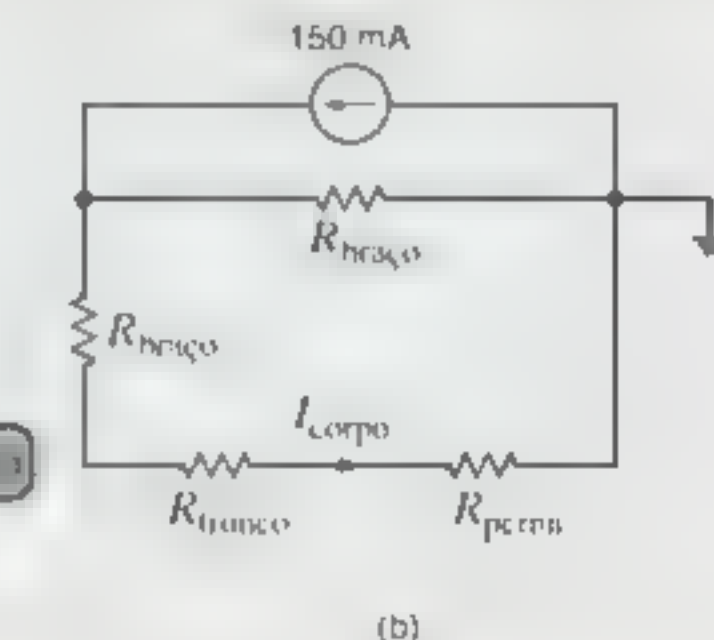
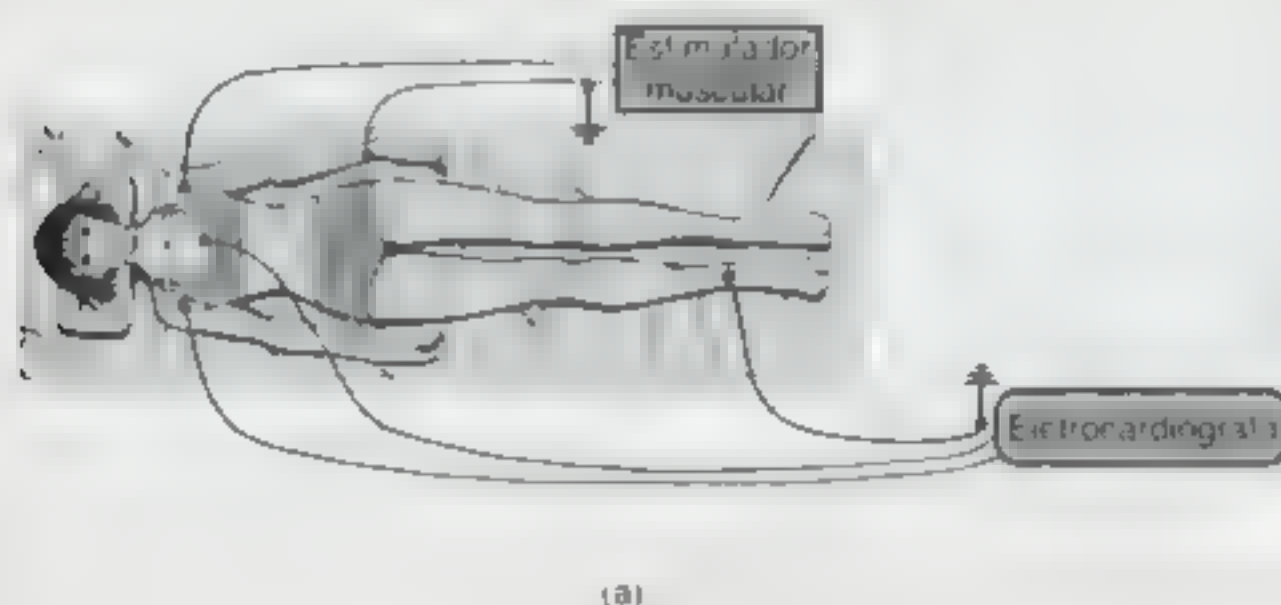


Figura 9.30 Esquemas utilizados no Exemplo 9.20.

SOLUÇÃO

Quando o eletrodo passivo do estimulador está conectado ao eletrodo terra do eletrocardiógrafo, a rede equivalente mostrada na Fig. 9.30b ilustra os dois caminhos para a corrente do estimulador: um através da metade de um braço e outro através da metade de um braço e do corpo. Utilizando o conceito de divisão de corrente, a corrente através do corpo será

$$I_{\text{corpo}} = \frac{(150)(10^{-3})(50)}{50 + 50 + 200 + 100} = 19 \text{ mA}$$

Portanto, um nível perigosamente alto de corrente fluirá do estimulador pelo corpo para o terra do eletrocardiógrafo.

EXEMPLO 9.21

Um paciente cardíaco com marca-passo ignorou as regras do hospital e está escutando música em um aparelho de som de baixa qualidade. O aparelho apresenta um ruído amplificado de 60 Hz que chega a ser irritante. O paciente decide desmontar parcialmente o aparelho, na tentativa de eliminar o ruído. Durante essa tarefa, ao segurar um dos fios da caixa de som, o outro tocou no eletrodo do marca-passo. Quais os riscos dessa situação?

SOLUÇÃO

Pode-se supor que a pele do paciente esteja úmida e que a tensão de 60 Hz sobre os fios das caixas seja de apenas 10 mV. Assim, o modelo do circuito nesse caso seria o mostrado na Fig. 9.31.

A corrente que passa através do coração seria

$$I = \frac{(10)(10^{-3})}{150 + 100 + 200} = 22.2 \mu\text{A}$$

Sabe-se que uma corrente de 10 μA aplicada diretamente ao coração é potencialmente fatal.

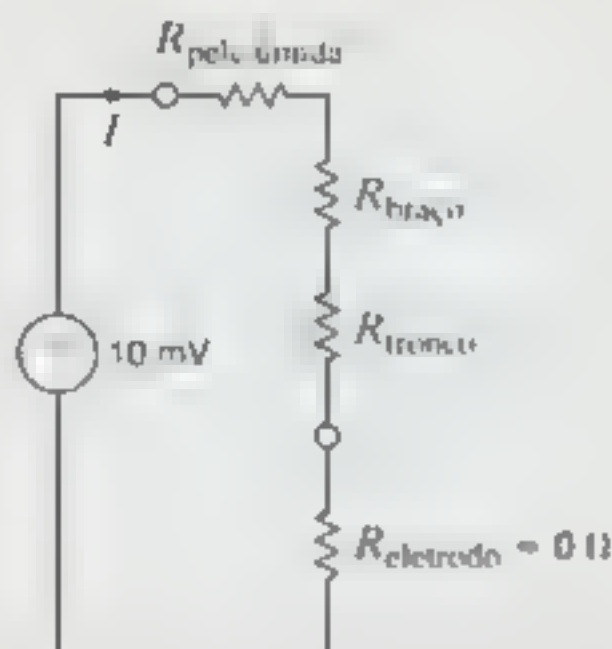


Figura 9.31 Modelo do circuito para o Exemplo 9.21.

EXEMPLO 9.22

Ao manobrar em área lamacenta, o operador de um guindaste acidentalmente tocou em uma linha de alta tensão, conforme ilustrado na Fig. 9.32a. O potencial da linha era de 7200 V. O condutor neutro estava aterrado ao poste. Quando o operador do guindaste percebeu o que aconteceu, ele pulou do guindaste e correu em direção ao poste, que estava a uma distância de 10 metros. Ele foi eletrocutado enquanto corria. Como pode ser explicado esse trágico acidente?

SOLUÇÃO

As condições mostradas na Fig. 9.32a podem ser modeladas conforme mostrado na Fig. 9.32b. O guindaste ficou a um potencial de 7200 V em relação ao terra. Portanto, existia um gradiente de 720 V/m ao longo da superfície da terra entre o guindaste e o poste. O trecho entre o guindaste e o poste é modelado como uma resistência. Considerando que o passo do homem seja de 1 m, a diferença de potencial entre seus pés seria de aproximadamente 720 V. Um homem de pé no mesmo local com os pés juntos estaria protegido.

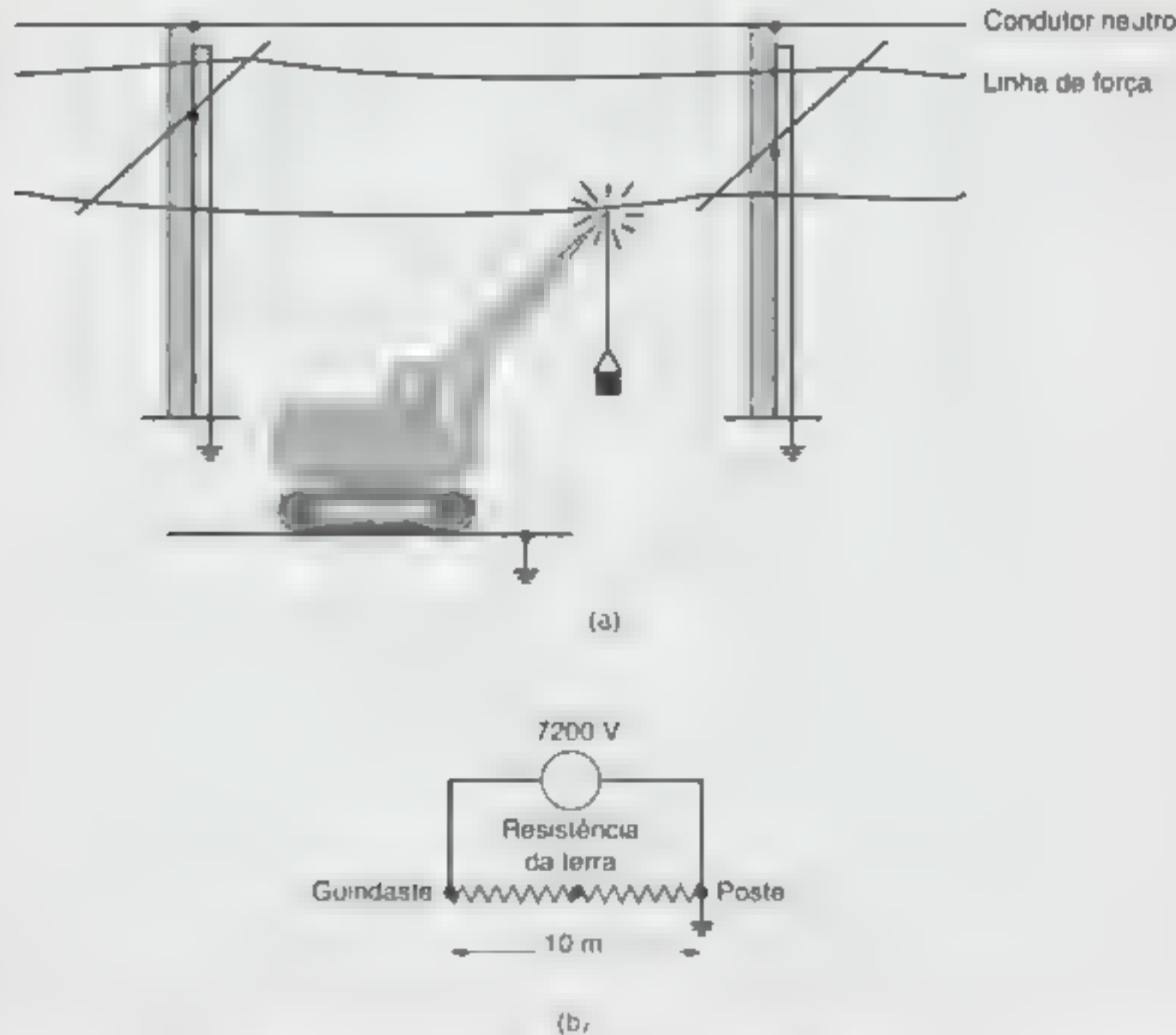


Figura 9.32 Ilustrações utilizadas no Exemplo 9.22.

Os exemplos desta seção foram escolhidos na tentativa de ilustrar alguns dos perigos que existem em trabalhos ou diversões na proximidade de condutores de energia elétrica. No pior dos casos, deixar de prevenir um acidente elétrico pode resultar em morte. Entretanto, mesmo os contatos elétricos não fatais podem causar queimaduras ou quedas. Portanto, deve-se estar sempre atento em garantir não somente a própria segurança, mas também a segurança das pessoas que trabalham e se divertem.

[atenção]

Procedimentos de segurança.

As diretrizes relacionadas a seguir ajudarão a minimizar as chances de acidentes.

1. Evite trabalhar com sistemas elétricos energizados.
2. Considere que um sistema elétrico está sempre energizado, a menos que você possa verificar com certeza que não está.
3. Nunca faça reparos ou alterações que não estejam de acordo com as normas em vigor.
4. Não trabalhe sozinho em sistemas elétricos potencialmente perigosos.
5. Caso uma outra pessoa esteja paralisada por um circuito elétrico energizado, desligue a fonte de energia do circuito o mais rápido possível. Se isso não puder ser feito, utilize algum material não condutor, como tábuas secas, varas, cintos ou artigos de vestimenta, para separar o corpo do contato. Atue rapidamente, porém, assegure-se de estar protegido.
6. Ao manipular equipamentos metálicos longos, tais como escadas, antenas e similares, ao ar livre, esteja permanentemente atento às linhas de distribuição e evite qualquer possibilidade de contato com elas.

Avaliação do Aprendizado

Ex. 9.22 Uma mulher está dirigindo seu carro em uma tempestade violenta. Enquanto espera no cruzamento, uma linha de distribuição cai sobre o seu carro e entra em contato com o chassi do veículo. A tensão na linha é de 7200 V.

- Admitindo que a resistência do carro seja desprezível, qual é o nível da corrente que passará pelo corpo da mulher se ela, segurando a maçaneta da porta com a mão seca, descer do carro e pisar no chão molhado?
- Caso ela permaneça no carro, o que acontecerá?

RESPOSTA: (a) $I = 463 \text{ mA}$, sua saída do veículo seria uma atitude extremamente perigosa e (b) ela estaria protegida.

A segurança ao se lidar com eletricidade deve ser sempre uma consideração primordial. Independentemente da eficiência e conveniência de uma rede elétrica para uma aplicação em particular, ela não terá valor algum se for perigosa à vida humana.

O dispositivo de segurança mostrado na Fig. 9.33, que também é utilizado na detecção de falhas, é um tipo de sensor de proximidade que indicará se um circuito está energizado pelo simples contato com o condutor do lado de fora de seu capamento isolante. Esse é um dispositivo que, em geral, todos os eletricitistas possuem e é extremamente útil nos trabalhos que envolvem circuitos elétricos.

Além das inúmeras mortes que ocorrem a cada ano devido a acidentes elétricos, os incêndios resultantes do uso indevido da fiação elétrica e dos equipamentos de distribuição somam um prejuízo de milhões de dólares por ano.

Para evitar a perda de vidas e danos à propriedade, procedimentos e especificações bem detalhados têm sido estabelecidos para a construção e operação de sistemas elétricos no sentido de garantir uma operação segura desses sistemas. O *National Electrical Code ANSI C1* (ANSI — American National Standards Institute) é o guia mais importante. Todavia, existem outros códigos: por exemplo, o código nacional de segurança elétrica, ANSI C2, que lida com as exigências de segurança para equipamentos de utilidade pública. Nos Estados Unidos, o

Underwriters' Laboratory (UL) testa todos os tipos de equipamentos e sistemas para assegurar que eles sejam seguros para uso do público em geral. Encontra-se o selo UL em todos os tipos de equipamentos elétricos utilizados em residências, tais como eletrodomésticos e extensões.

A energia elétrica possui um papel importante na vida cotidiana. Ela é extremamente importante à saúde e ao bem-estar em geral. Todavia, se não for utilizada apropriadamente, ela pode ser fatal.

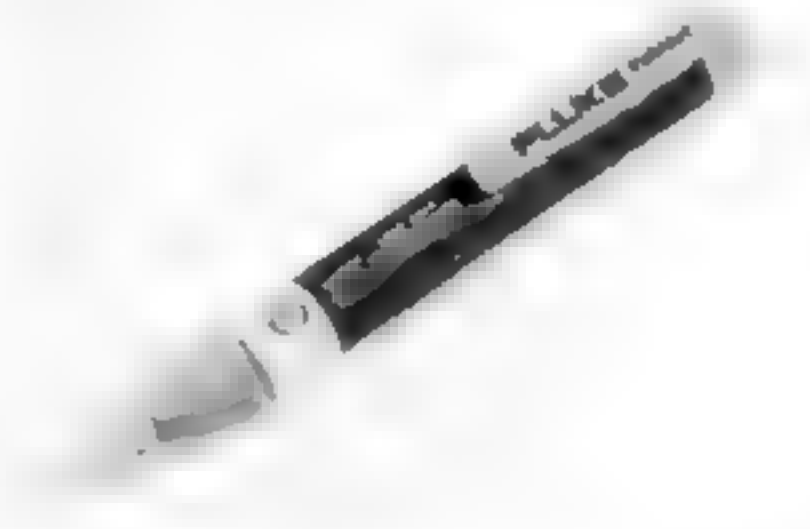


Figura 9.33 Dispositivo moderno para detecção de falhas. (Cortesia da Fluke Corporation. Reproduzido sob permissão.)

9.10 Exemplos de Aplicação

Os exemplos de aplicações orientadas a seguir ilustram a utilização prática do material estudado neste capítulo.

EXEMPLO DE APLICAÇÃO 9.23

Por questões de segurança, o *National Electrical Code* (órgão nacional de regulamentação nos Estados Unidos) restringe a 20 A o valor nominal da corrente nos disjuntores utilizados nos ramos de circuito que alimentam as lâmpadas de 120 V das residências. Além disso, as normas também requerem uma margem de segurança de 25% nos casos de cargas de iluminação contínua. Nessas condições, determine o número de lâmpadas de 100 W que podem ser instaladas em um ramo do circuito.

SOLUÇÃO

O modelo para o ramo do circuito é mostrado na Fig. 9.34. A corrente que passa por cada uma das lâmpadas de 100 W é

$$I_{\text{lâmpada}} = 100/120 = 0,833 \text{ A rms}$$

Utilizando a recomendação de margem de segurança, a corrente estimada para cada lâmpada será 25% maior, isto é,

$$I_{\text{lâmpada}} = (1,25)(0,83) = 1,04 \text{ A rms}$$

Portanto, o número máximo de lâmpadas a serem instaladas em um ramo do circuito com disjuntor é

$$n = 20/1,04 = 19 \text{ unidades}$$

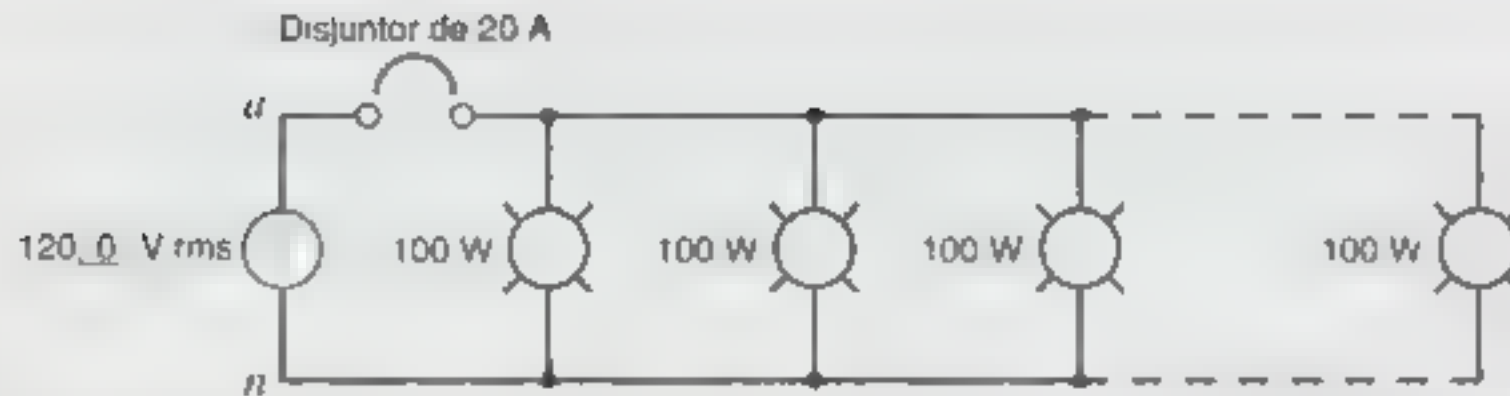


Figura 9.34 Um ramo de circuito de 20 A para instalações de lâmpadas em uma residência

EXEMPLO DE APLICAÇÃO 9.24

Um cortador de grama elétrico requer 12 A rms a 120 V, porém, opera abaixo de 110 V rms sem falhar. A 110 V rms, a corrente necessária é de 13,1 A rms, conforme mostrado na Fig. 9.35. Determine o comprimento máximo para uma extensão que possa ser utilizada com uma fonte de potência de 120 V rms, considerando que a extensão seja feita de

1. um fio com bitola 16 (4 mΩ/pé)
2. um fio com bitola 14 (2,5 mΩ/pé)

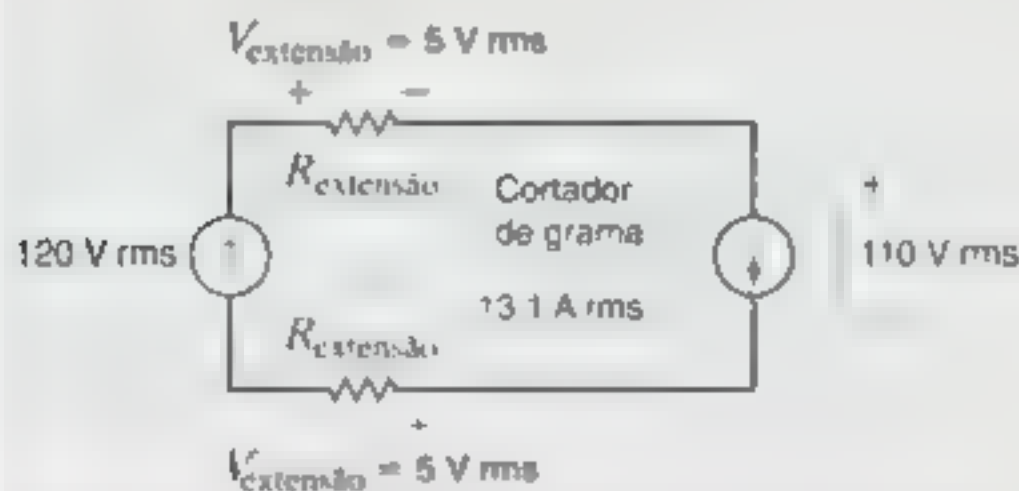


Figura 9.35 Modelo do circuito utilizado no Exemplo 9.24.

SOLUÇÃO

A queda de tensão entre os terminais da extensão é

$$V_{\text{extensão}} = (2)(13,1)R_{\text{extensão}} = 10 \text{ V rms}$$

ou

$$R_{\text{extensão}} = 0,382 \, \Omega$$

Chamando de $\ell_{\text{extensão}}$ o comprimento da extensão, então para um fio com bitola 16, obtém-se

$$\ell_{\text{extensão}} = \frac{R_{\text{extensão}}}{0,004} = 95,5 \text{ pés}$$

e para um fio com bitola 14,

$$\ell_{\text{extensão}} = \frac{R_{\text{extensão}}}{0,0025} = 152,8 \text{ pés}$$

EXEMPLO DE APLICAÇÃO 9.25

Enquanto sentada em uma cadeira em sua casa lendo um livro, uma pessoa nota que, com certa periodicidade, o condicionador de ar liga seu compressor e, nesse instante, a intensidade das luzes da casa diminui. Pode-se investigar esse fenômeno utilizando o circuito monofásico com três condutores mostrado na Fig. 9.36a e alguns requisitos de corrente típicos para um condicionador de ar de 10.000 Btu/h, admitindo uma resistência de linha de 0,5 Ω.

SOLUÇÃO

Uma lâmpada de 60 W pode ser modelada aproximadamente por sua resistência equivalente:

$$P_{\text{lâmpada}} = \frac{V_{\text{rms}}^2}{R_{\text{lâmpada}}}$$

ou

$$R_{\text{lâmpada}} = 240 \, \Omega$$

Quando a unidade de ar condicionado é ligada pela primeira vez, a corrente necessária é de 40 A, conforme mostrado na Fig. 9.36b. Quando o motor do compressor ganha velocidade, a corrente necessária cai rapidamente para um valor estacionário de 10 A, conforme mostrado na Fig. 9.36c. Pode-se, assim, comparar a tensão entre os terminais de fixação das lâmpadas, V_{AN} , tanto no instante do acionamento do compressor quanto na condição de regime estacionário.

[atenção]

Procedimento

1. Determine a resistência da lâmpada.
2. Utilize uma alta fonte de corrente para representar a corrente transiente do condicionador de ar e uma baixa fonte de corrente para representar o regime estacionário da corrente.
3. Determine a queda de tensão entre os terminais da lâmpada durante a operação nos regimes transiente e estacionário.

Utilizando o princípio da superposição, obtém-se, inicialmente, a parcela de V_{AN} causada pelas fontes de tensão. O circuito apropriado é mostrado na Fig. 9.36d. Utilizando a divisão de tensão, tem-se que

$$V_{AN1} = V_{AN} \left(\frac{R_{\text{lâmpada}}}{R_{\text{lâmpada}} + 2R_L} \right)$$

ou

$$V_{AN1} = 119,50 \text{ V rms}$$

A Fig. 9.36e fornecerá a contribuição a V_{AN} causada pela corrente de 10 A do regime estacionário. Utilizando a divisão de corrente para calcular a corrente através da lâmpada, obtém-se

$$V_{AN2} = \left\{ I_{AB} \left(\frac{R_L}{R_{\text{lâmpada}} + 2R_L} \right) \right\} R_{\text{lâmpada}}$$

$$V_{AN2} = -4,98 \text{ V rms}$$

Portanto, o valor de V_{AN} no regime estacionário é

$$V_{AN} = V_{AN1} + V_{AN2} = 114,52 \text{ V rms}$$

Na partida, a expressão de V_{AN2} pode ser utilizada com $I_{AB} = 40 \text{ A}$, o que fornece $V_{AN2} = -19,92 \text{ V rms}$. O valor resultante para V_{AN} é

$$V_{AN} = V_{AN1} + V_{AN2} = 119,50 - 19,92 = 99,58 \text{ V rms}$$

A tensão fornecida aos terminais de alimentação da lâmpada na partida é 13% menor do que o valor durante o regime estacionário, o que resulta em uma diminuição momentânea da intensidade da luz.

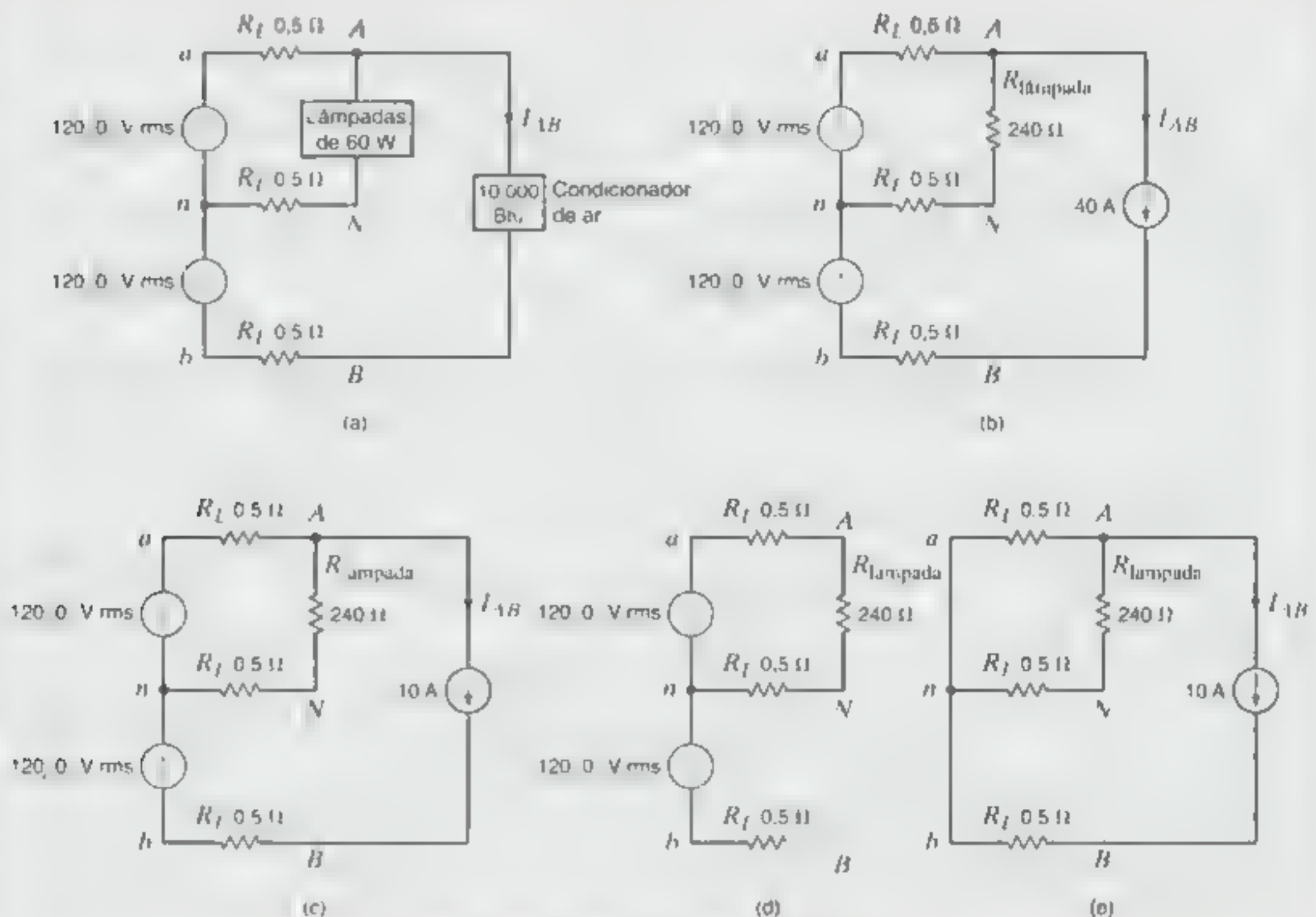


Figura 9.36 Redes utilizadas no Exemplo 9.25.

EXEMPLO DE APLICAÇÃO 9.26

Muitas máquinas de secar roupas operam ligadas a uma tomada de 240 V rms e possuem um seletor de temperatura do tipo baixa, média e alta. Seja a análise da forma pela qual a secadora gera calor para secar uma roupa e o modo pelo qual ela regula a temperatura.

SOLUÇÃO

Inicialmente, considera-se o calor gerado. Um modelo simples para essa situação é mostrado na Fig. 9.37a, no qual um componente resistivo de aquecimento é conectado entre os terminais da fonte de 240 V rms . Para uma máquina secadora específica, a resistência do componente de aque-

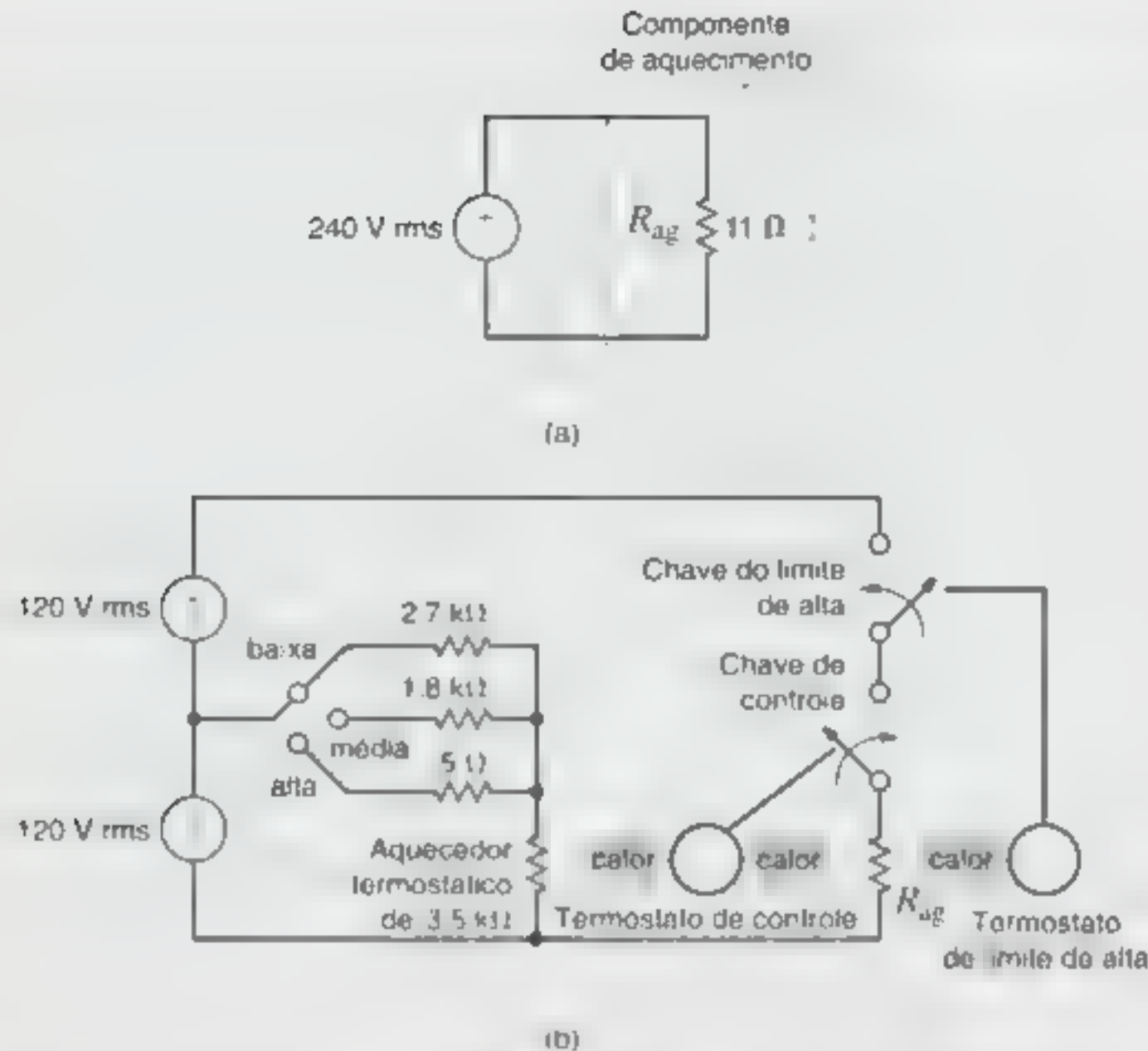


Figura 9.37 Esquema parcial de uma secadora de roupas residencial: (a) componente de aquecimento e (b) sistema de controle.

cimento é da ordem de 11Ω . A corrente através desse componente é

$$I_{ar} = \frac{240}{11} = 21,81 \text{ A rms} \quad 9.39$$

Como o componente é resistivo, a tensão e a corrente estão em fase. A dissipação de potência vale

$$P_{ag} = I_{ar}^2 R_{ag} = (21,81)^2 (11) = 5236 \text{ W}$$

Este valor, superior a 5 kW, representa uma potência muito alta! Observe, entretanto, que esta será a potência dissipada na condição em que o componente estará conectado à fonte de 240 V rms durante 100% do tempo. Manipulando-se o percentual do tempo que o componente é energizado, pode-se controlar a potência média e, assim, a temperatura média.

Um método padronizado para o controle da temperatura muito utilizado é mostrado esquematicamente na Fig. 9.37b, em que um circuito monofásico padrão residencial, alimentado por três condutores, potencializa o componente de aquecimento a 240 V rms e um circuito de controle a 120 V rms. O seletor de temperatura é conectado a três resistores. A seleção para cada temperatura faz com que uma corrente distinta flua através do aquecedor termostático, o qual é caracterizado por um outro resistor. Cada posição do seletor altera a temperatura do aquecedor termostático que controla o ajuste da temperatura. Pode-se calcular a potência dissipada no aquecedor termostático para cada ajuste de temperatura. Considerando que R_x seja a resistência correspondente ao ajuste do seletor, tem-se

$$P_m = I_m^2 R_m = \left(\frac{120}{R_m + R_x} \right)^2 R_m \quad \left\{ \begin{array}{l} 1,3 \text{ W para a seleção de baixa temperatura} \\ 1,79 \text{ W para a seleção de temperatura média} \\ 4,1 \text{ W para a seleção de alta temperatura} \end{array} \right. \quad 9.40$$

Pode-se observar que a dissipação de potência do aquecedor termostático é a menor para a seleção de baixa temperatura, e aumenta quando o seletor se move para a posição de alta temperatura.

Considere agora a questão crítica do sistema de controle da temperatura. O aquecedor termostático é localizado adjacente ao controle termostático (muito similar àqueles utilizados para controlar o aquecimento e resfriamento das residências em que se ajusta manualmente a temperatura). Na secadora, o aquecedor termostático atua conforme o ajuste desejado. Se a temperatura no termostato for superior à ajustada, o seletor do termostato abre, deixando de energizar o componente de aquecimento, fazendo com que ele esfrie. Quando o termostato perceber que a temperatura está muito baixa, o seletor do termostato fecha, energizando o componente e aumentando a temperatura. Desta forma, o seletor do termostato abre e fecha ao longo de um ciclo de secagem, mantendo a temperatura correta conforme a seleção realizada através do seletor de temperatura.

Note que todos os cálculos foram realizados para níveis de potência, e não para temperaturas. As temperaturas exatas do componente de aquecimento, do aquecedor termostático e do termostato em si dependem de como o calor se movimenta no interior da secadora – uma questão termodinâmica que não pode ser respondida com um simples diagrama de circuito.

Finalmente, observe o limite de alta do termostato e sua correspondente seleção. Este termostato é instalado muito

próximo do componente de aquecimento. Se o termostato de controle falhar, não haverá controle da temperatura e pode-se esperar um problema. O termostato na posição limite de alta detecta essas temperaturas excessivas e desenergiza o componente de aquecimento. Uma vez reduzida a temperatura, a operação normal pode ser restabelecida. Assim, o limite de alta do termostato é utilizado para proteger a secadora e, por extensão, a residência.

9.11 Exemplo de Projeto

O exemplo de aplicação orientada a seguir ilustra a utilização prática dos conceitos estudados neste capítulo.

EXEMPLO DE PROJETO 9.27

Um circuito comercial monofásico com três condutores de 60 Hz utilizando lâmpadas de baixo desempenho serve para iluminação, aquecimento e como cargas de motores, conforme mostrado na Fig. 9.38a. As cargas de iluminação e aquecimento são, essencialmente, resistências puras e, portanto, possuem fatores de potência (fp) unitários, enquanto as cargas de motores possuem fp em atraso.

Deseja-se projetar uma configuração balanceada para a rede e determinar sua viabilidade econômica utilizando o procedimento a seguir.

- Calcule as correntes da fase e do neutro, bem como a potência complexa e o fator de potência (fp) para cada fonte.
- Em seguida, mova a carga de aquecimento (painel H) para a fase *b*, conforme mostrado na Fig. 9.38b. Esta condição é chamada de "balanceamento" de carga. Repita a análise do item (a).
- Admita que as resistências dos condutores, da fase e do neutro sejam de $0,05 \, \Omega$ cada e que possuam efeito desprezível nos resultados do item (a). Estime as perdas nas linhas do sistema para (a) e (b). Se as cargas em questão operam 24 horas por dia e 365 dias por ano, a um custo de R\$ 0,08/kWh, qual a quantidade de energia (e de dinheiro)

que será economizada ao se operar com o sistema balanceado?

SOLUÇÃO

- a. As intensidades das correntes em rms são

$$I_L = I_H = \frac{P}{V} = \frac{5000}{120} = 41,67 \text{ A rms}$$

c

$$I_M = \frac{10\,000}{240} = 41,67 \text{ A rms}$$

Além disso,

$$\theta_M = \cos^{-1}(0,8) = -36,9^\circ$$

Portanto,

$$\begin{aligned} I_a &= I_L + I_H + I_M \\ &= 41,67 \angle 0^\circ + 41,67 \angle 0^\circ + 41,67 \angle -36,9^\circ \\ &= 119,4 \angle -12,1^\circ \text{ A rms} \end{aligned}$$

As correntes nas linhas do neutro e da fase *b* são

$$I_n = I_L + I_H = 83,34 \angle 0^\circ \text{ A rms}$$

$$I_b = 41,67 \angle -36,9^\circ \text{ A rms}$$

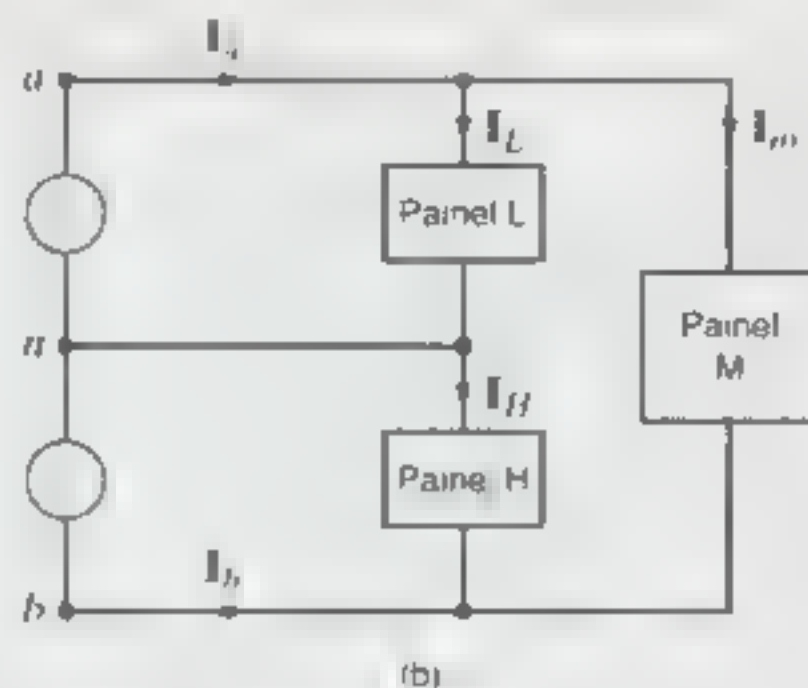
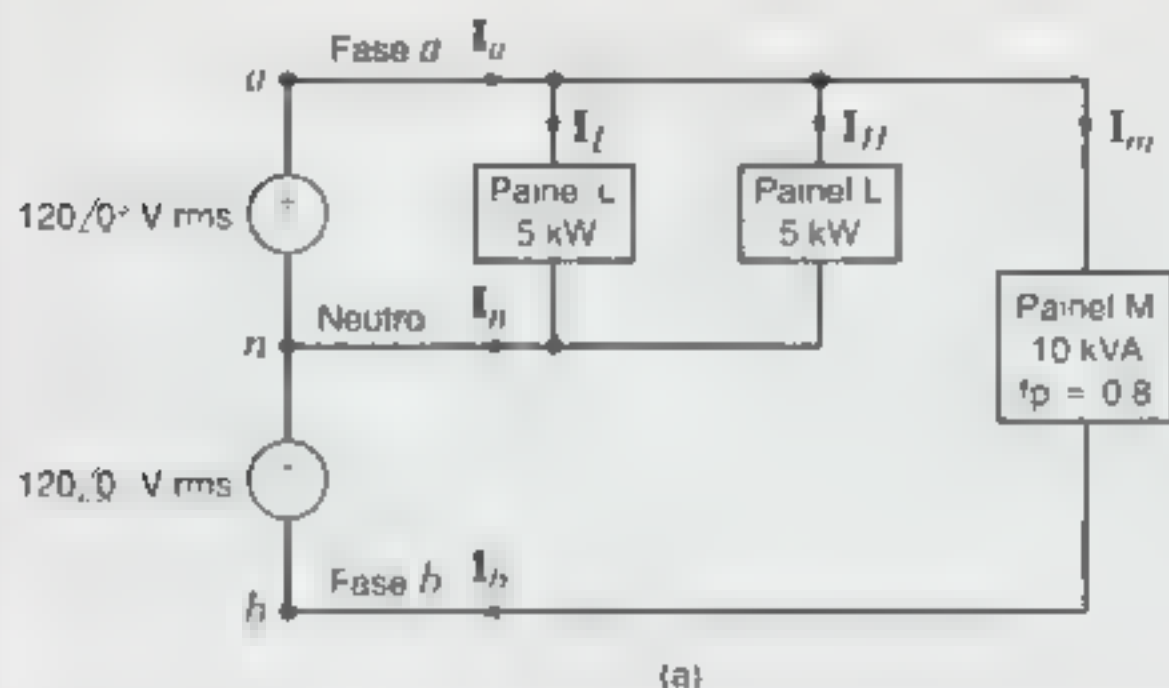


Figura 9.38 Sistema de distribuição de energia elétrica monofásico com três condutores.

A potência complexa e o fator de potência para cada fonte são

$$S_a = V_{an} I_a^* = (120 \angle 0^\circ)(119.4 \angle +12.1^\circ) = 14 + j3 \text{ kVA}$$

$$\text{fp}_a = \cos(12.1^\circ) = 0.9778 \text{ em atraso}$$

e, de modo similar,

$$S_b = V_{bn} I_b^* = 4 + j3 \text{ kVA}$$

$$\text{fp}_b = 0.8 \text{ em atraso}$$

b. Sob a condição balanceada

$$I_a = I_r + I_m = 41.67 \angle 0^\circ + 41.67 \angle -36.9^\circ \\ = 79.06 \angle -18.4^\circ \text{ A rms}$$

e

$$I_n = 79.06 \angle -18.4^\circ \text{ A rms}$$

$$I_n = 0$$

Portanto,

$$S_a = V_{an} I_a^* = 9 + j3 \text{ kVA}$$

$$\text{fp}_a = 0.9487 \text{ em atraso}$$

e

$$S_b = V_{bn} I_b^* = 9 + j3 \text{ kVA}$$

$$\text{fp}_b = 0.9487 \text{ em atraso}$$

c. A potência perdida nas linhas em kW é

$$P_{\text{perdida}} = R_a I_a^2 + R_b I_b^2 + R_n I_n^2 \\ = 0.05(I_a^2 + I_b^2 + I_n^2)/1000$$

A energia total perdida em um ano será

$$W_{\text{perdida}} = (24)(365)P_{\text{perdida}} = 8760 P_{\text{perdida}}$$

e o custo anual será

$$\text{Custo} = \text{R\$ } 0.08 W_{\text{perdida}}$$

A tabela a seguir mostra uma comparação dos casos não balanceado e balanceado.

	CASO DESBALANCEADO	CASO BALANCEADO
P_{perdida} (kW)	1.147	0.625
W_{perdida} (kW-h)	10.034	5.475
Custo (R\$)	804	438

Portanto, a economia anual obtida utilizando a configuração balanceada será

$$\text{Economia anual de energia} = 10.048 - 5.475 = 4.573 \text{ kWh}$$

$$\text{Economia anual em reais} = 804 - 438 = \text{R\$ } 366.00$$

RESUMO

- **Potência instantânea** Caso a corrente e a tensão sejam funções senoidais dependentes do tempo, a potência instantânea será igual ao valor médio independente do tempo mais um termo senoidal que possui uma frequência igual a duas vezes a frequência da tensão ou da corrente.
- **Potência média** $P = 1/2 V I \cos(\theta_v - \theta_i) = 1/2 V I \cos \theta$, em que θ é a fase da impedância.
- **Carga resistiva** $P = 1/2 I^2 R = 1/2 V I$ desde que V e I estejam em fase
- **Carga reativa** $P = 1/2 V I \cos(\pm 90^\circ) = 0$
- **Transferência máxima de potência média** Para obter a transferência máxima de potência média de uma carga, sua impedância deve ser escolhida igual ao complexo conjugado da impedância equivalente de Thévenin que representa o restante da rede.
- **Valor efetivo ou rms de uma forma de onda periódica** O valor efetivo, ou rms, de uma forma de onda periódica foi introduzido como um meio de medir-se a efetividade de uma fonte ao fornecer potência a uma carga resistiva. O valor efetivo de uma forma de onda periódica é obtido determinando-se o valor médio quadrático da forma de onda. O valor rms de uma função senoidal é igual ao valor máximo da senoide dividido por $\sqrt{2}$.

- **Fator de potência** A potência aparente é definida como o produto $V_{\text{rms}} I_{\text{rms}}$. O fator de potência é definido como a razão entre a potência média e a potência aparente, e é dito estar em avanço quando a fase da corrente está em avanço relativamente à tensão, e em atraso quando a fase da corrente está em atraso relativamente à tensão. O fator de potência de uma carga com um fator de potência em atraso pode ser corrigido colocando-se um capacitor em paralelo com a carga.
- **Potência complexa** A potência complexa, S , é definida como o produto $V_{\text{rms}} I_{\text{rms}}^*$. A potência complexa S pode ser escrita como $S = P + jQ$, em que P é a potência real ou média e Q é a potência imaginária ou quadratura.

$$S = I^2 Z = I R + j I^2 X$$

- **Circuito monofásico com três condutores** O circuito monofásico com três condutores é comumente utilizado em residências. Os equipamentos mais potentes são conectados entre as fases e os menos potentes e as lâmpadas são conectados entre uma fase e o neutro.
- **Segurança** A segurança deve ser o quesito mais importante no projeto e uso de qualquer circuito elétrico. Nos Estados Unidos, as normas estabelecidas pelo *National Electric Code* representam o guia mais importante para construção e operação de sistemas elétricos.

PROBLEMAS

- 9.1 A tensão e a corrente na entrada de uma rede são expressas por

$$v(t) = 6 \cos \omega t \text{ V}$$

$$i(t) = 4 \sin \omega t \text{ A}$$

Determine a potência média absorvida pela rede

- 9.2 A tensão e a corrente na entrada de um circuito são expressas por

$$v(t) = 170 \cos(\omega t + 30^\circ) \text{ V}$$

$$i(t) = 5 \cos(\omega t + 45^\circ) \text{ A}$$

Determine a potência média absorvida pelo circuito.

- 9.3 Determine as equações para a corrente e para a potência instantânea da rede mostrada na Fig. P9.3.

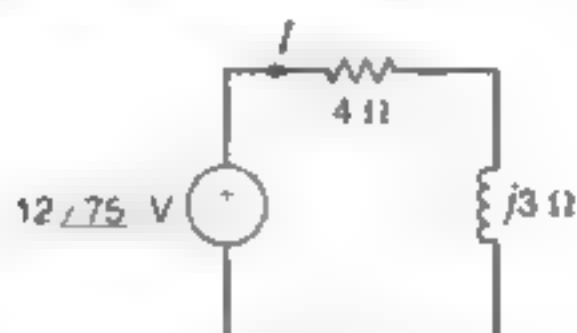


Figura P9.3

- 9.4 Dado que a tensão $v_F(t) = 100 \cos 100t$ volts, determine a potência média fornecida pela fonte e a corrente $i_2(t)$ da rede mostrada na Fig. P9.4.

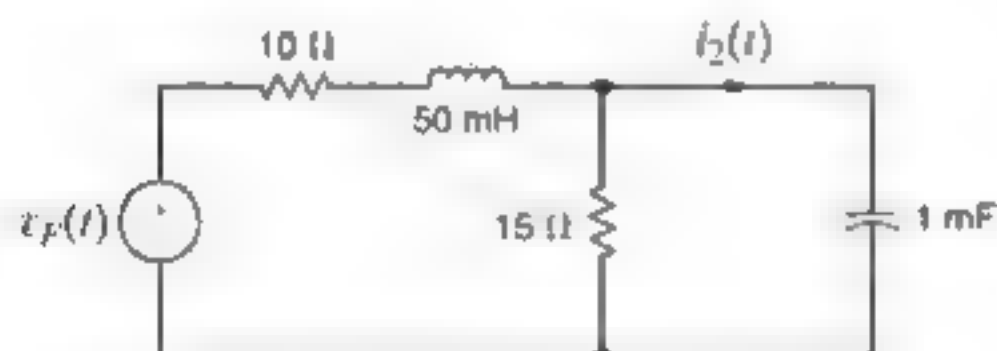


Figura P9.4

- 9.5 Determine a potência instantânea fornecida pela fonte do circuito mostrado na Fig. P9.5.

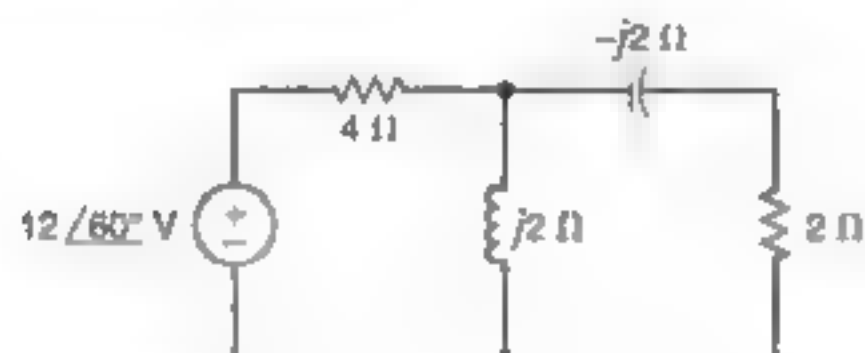


Figura P9.5

- 9.6 Determine a potência instantânea fornecida pela fonte da rede mostrada na Fig. P9.6

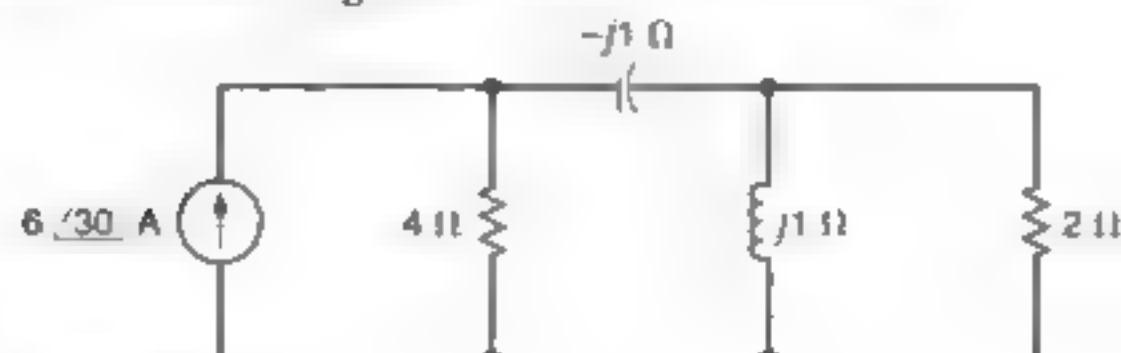


Figura P9.6

- 9.7 Determine a potência instantânea fornecida pela fonte da rede mostrada na Fig. P9.7.

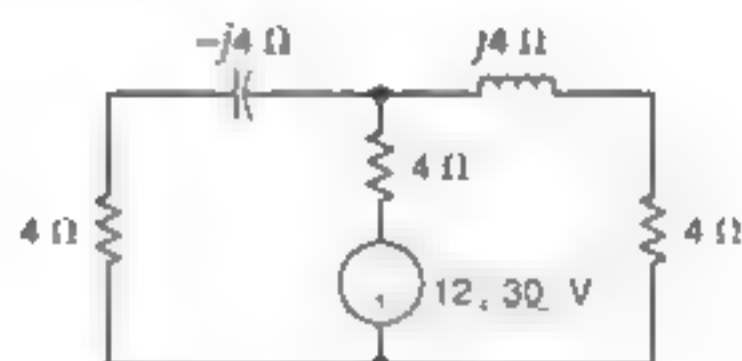


Figura P9.7

- 9.8 Determine a potência instantânea fornecida pela fonte da rede mostrada na Fig. P9.8.

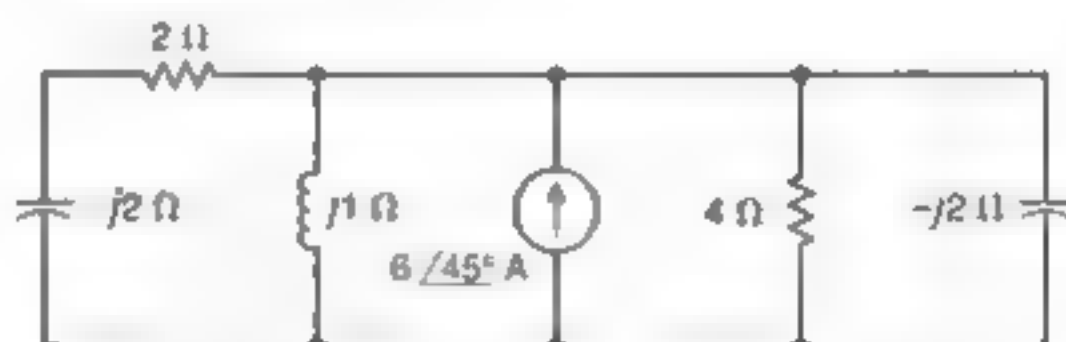


Figura P9.8

- 9.9 Determine a potência média absorvida pelo resistor do circuito mostrado na Fig. P9.9 se $v_1(t) = 10 \cos(377t + 60^\circ)$ V e $v_2(t) = 20 \cos(377t + 120^\circ)$ V.

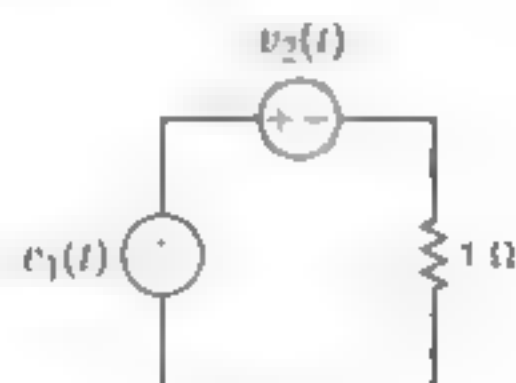


Figura P9.9

- 9.10 Considerando a corrente $i_g(t) = 0,5 \cos 2000t$ A, determine a potência média absorvida por componente do circuito mostrado na Fig. P9.10.

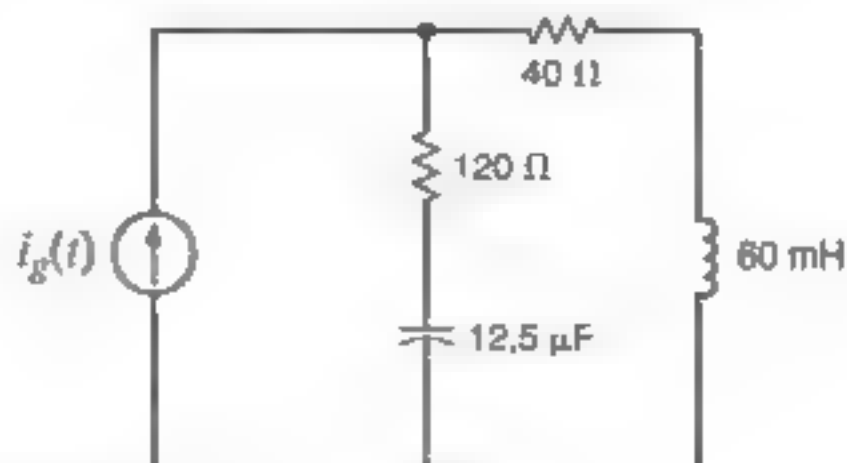


Figura P9.10

- 9.11** Determine a potência média absorvida pela rede mostrada na Fig. P9.11

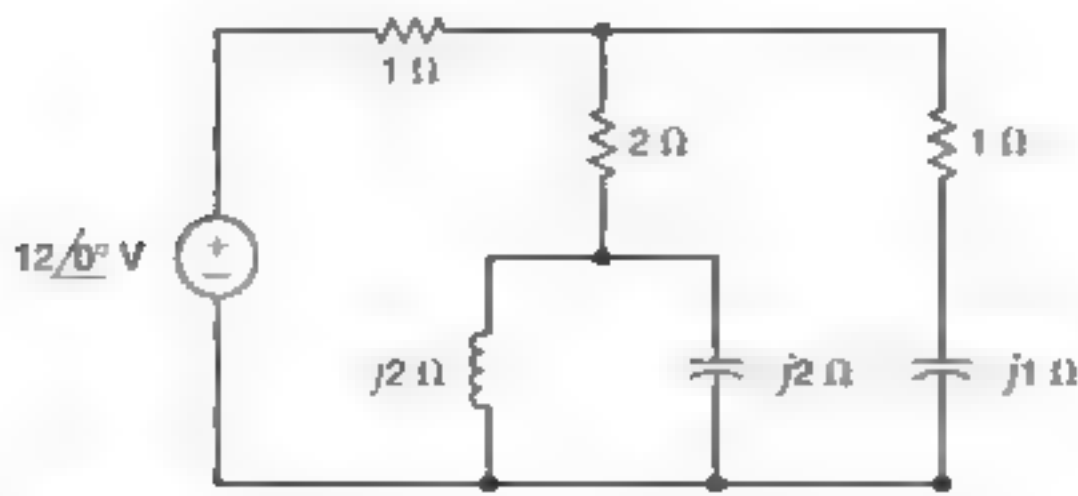


Figura P9.11

- 9.12** Obtenha a potência média absorvida pelo resistor de $2\ \Omega$ da rede mostrada na Fig. P9.12 e a potência total fornecida.

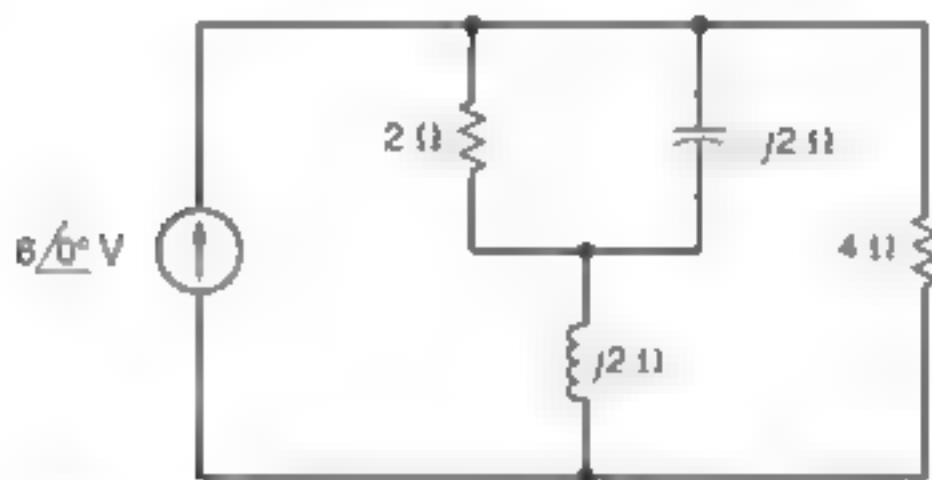


Figura P9.12

- 9.13** Obtenha a potência média absorvida pelo resistor de $2\ \Omega$ do circuito mostrado na Fig. P9.13 e a potência total fornecida.

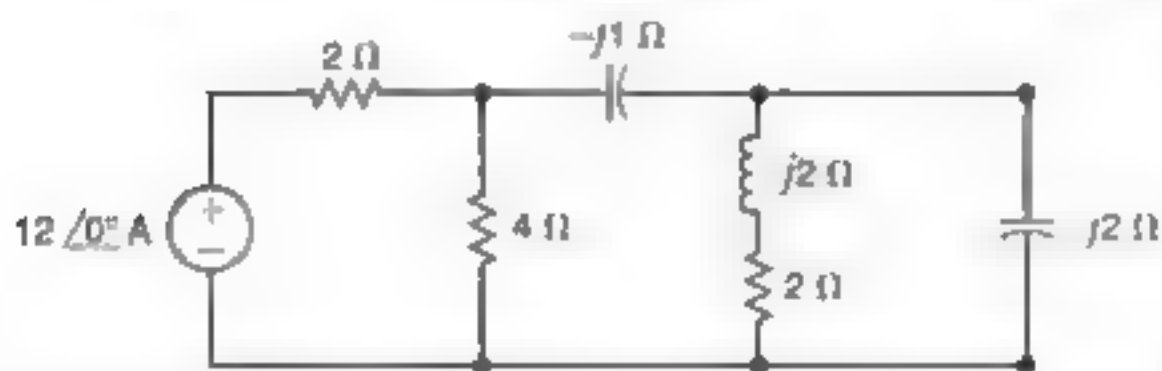


Figura P9.13

- 9.14** Determine a potência média total fornecida e a potência média absorvida por componente da rede mostrada na Fig. P9.14

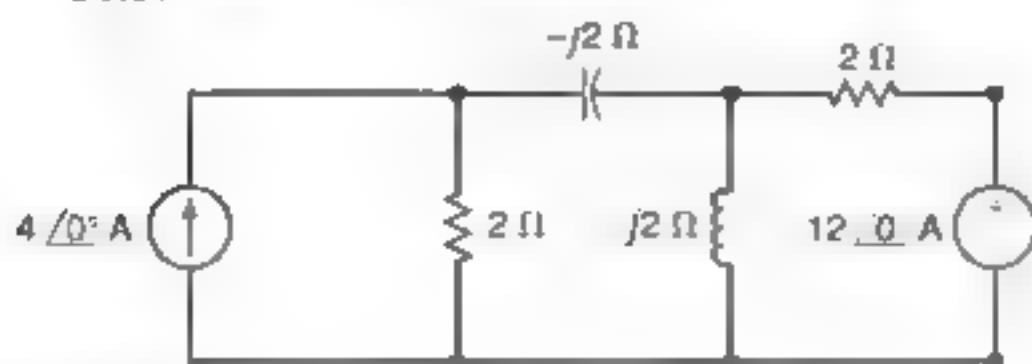


Figura P9.14

- 9.15** Calcule a potência média fornecida pela fonte do circuito mostrado na Fig. P9.15

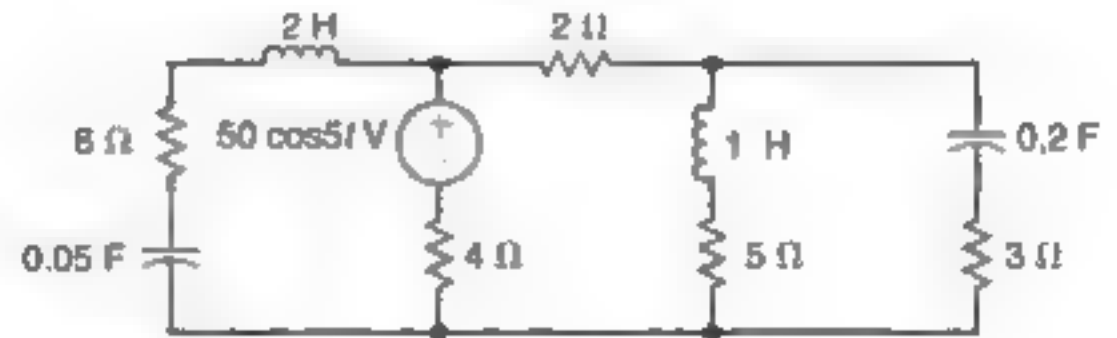


Figura P9.15

- 9.16** Calcule a potência média absorvida por componente à direita da linha tracejada no circuito mostrado na Fig. P9.16.

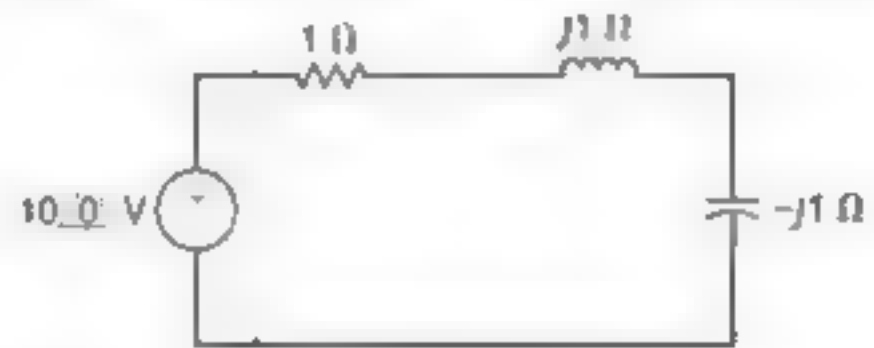


Figura P9.16

- 9.17** Determine a potência média absorvida pela rede mostrada na Fig. P9.17

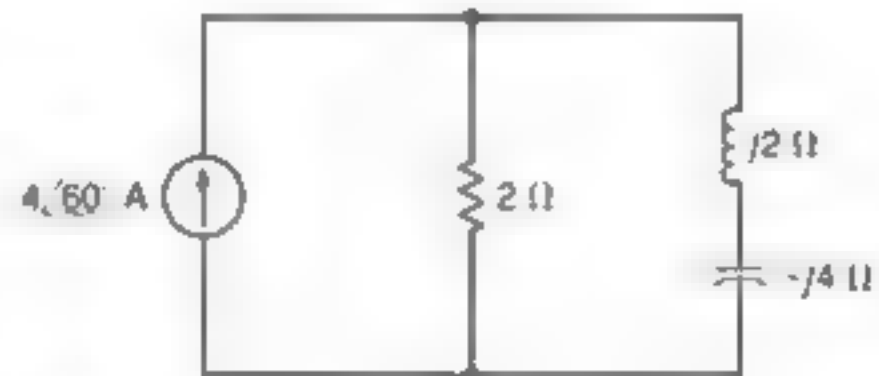


Figura P9.17

- 9.18** Determine a potência média fornecida por fonte da rede mostrada na Fig. P9.18.

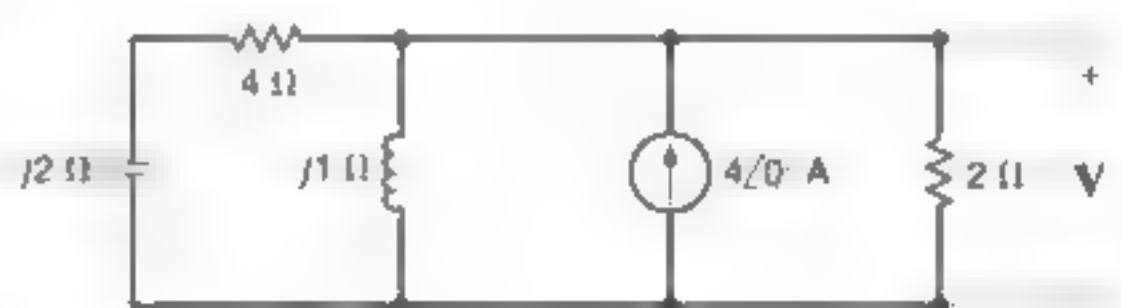


Figura P9.18

- 9.19** Dada a rede mostrada na Fig. P9.19, determine a potência fornecida e a potência média absorvida por componente

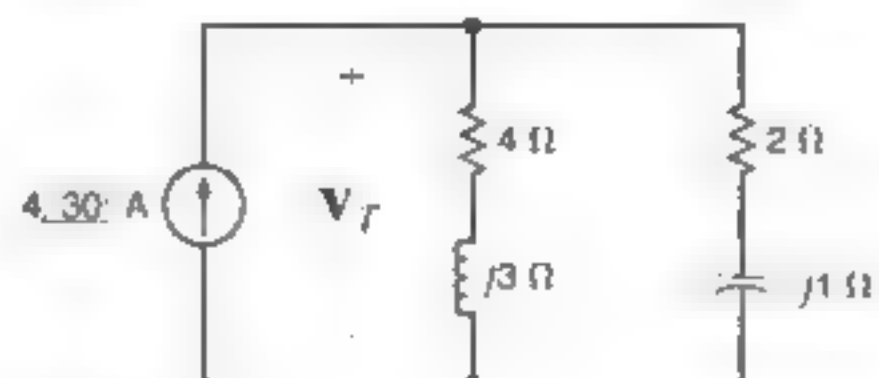


Figura P9.19

- 9.20** Dada a rede mostrada na Fig. P9.20, mostre que a potência fornecida pelas fontes é igual à potência absorvida pelos componentes passivos

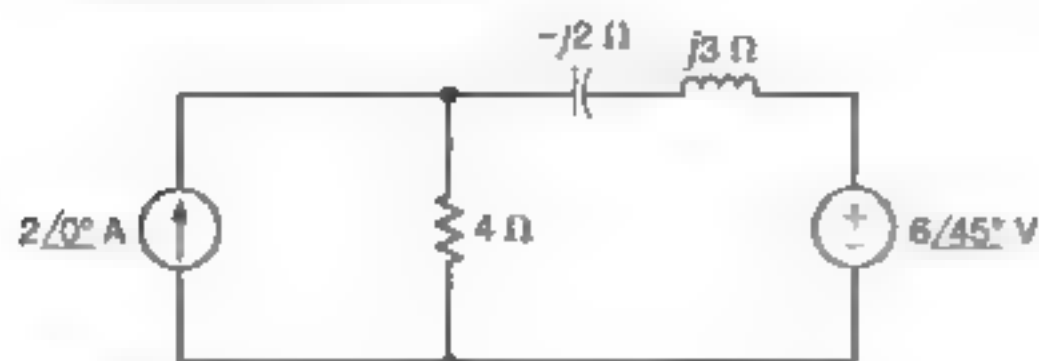


Figura P9.20

- 9.21** Dada a rede mostrada na Fig. P9.21, determine a potência média fornecida ao circuito.

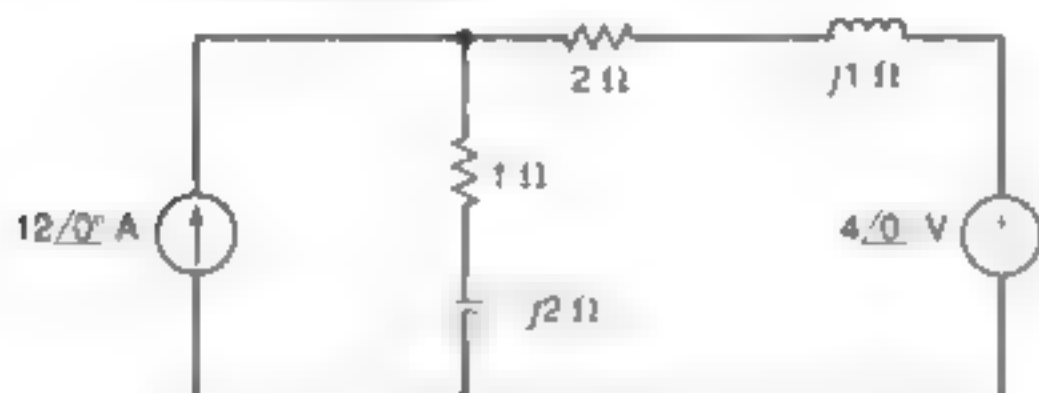


Figura P9.21

- 9.22** Calcule a potência média absorvida pelo resistor de 1 Ω da rede mostrada na Fig. P9.22.

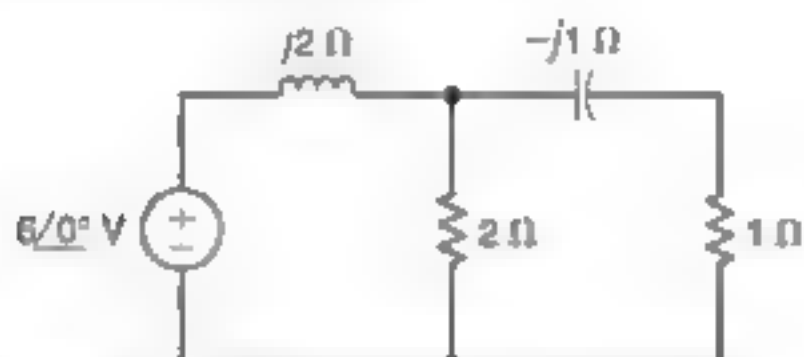


Figura P9.22

- 9.23** Determine a potência média absorvida pelo resistor de 4 Ω da rede mostrada na Fig. P9.23.

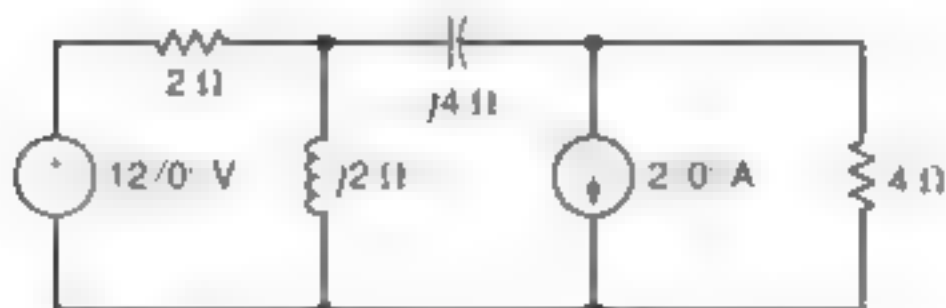


Figura P9.23

- 9.24** Determine a potência média fornecida à rede mostrada na Fig. P9.24.

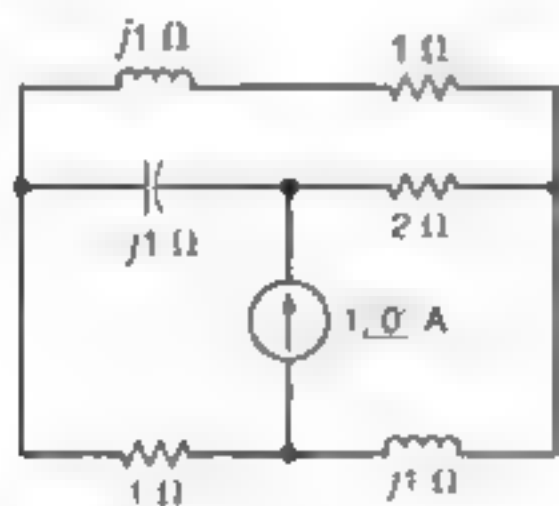


Figura P9.24

- 9.25** Determine a potência média absorvida por um resistor de 2 Ω conectado aos terminais de saída da rede mostrada na Fig. P9.25.

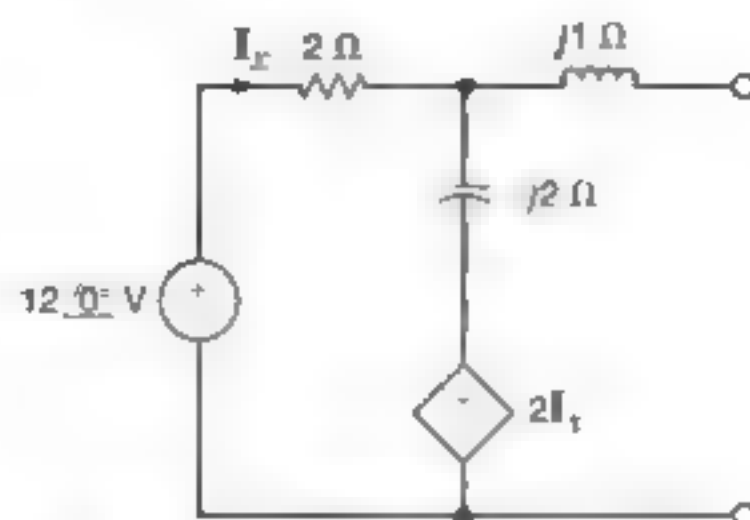


Figura P9.25

- 9.26** Obtenha a potência média absorvida pelo resistor de 2 Ω do circuito mostrado na Fig. P9.26.

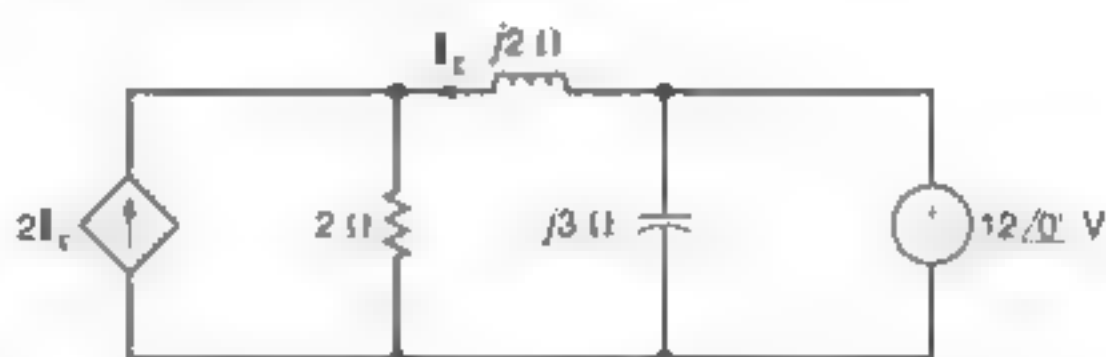


Figura P9.26

- 9.27** Determine a potência média absorvida pelo resistor de 4 kΩ do circuito mostrado na Fig. P9.27.

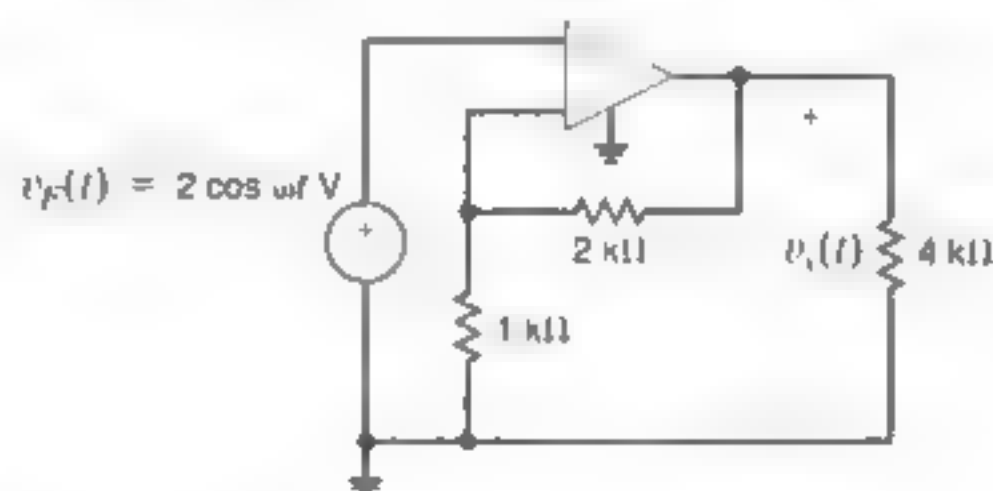


Figura P9.27

- 9.28** Determine a potência média absorvida pelo resistor de 2 kΩ na saída do circuito mostrado na Fig. P9.28

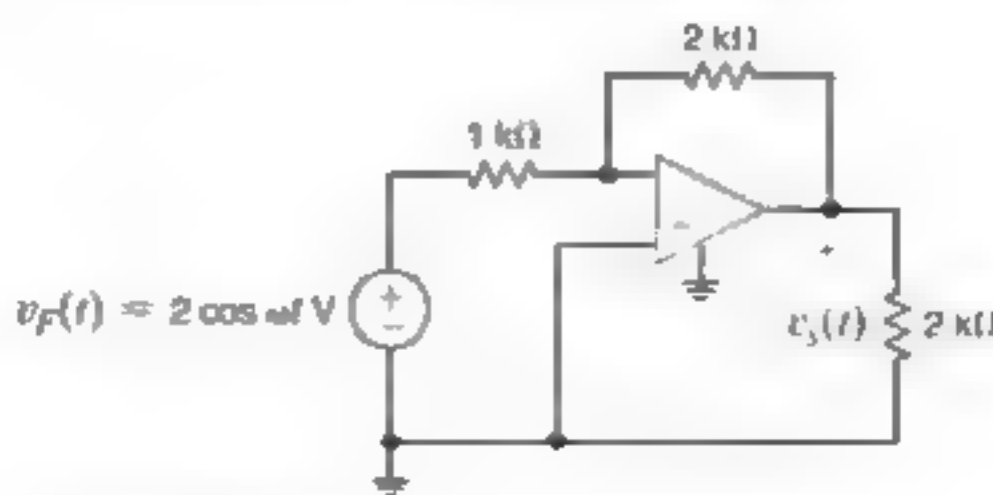


Figura P9.28

- 9.29** Determine a impedância Z_L para que ocorra a transferência máxima de potência média e o valor da potência máxima transferida à impedância Z_L do circuito mostrado na Fig. P9.29

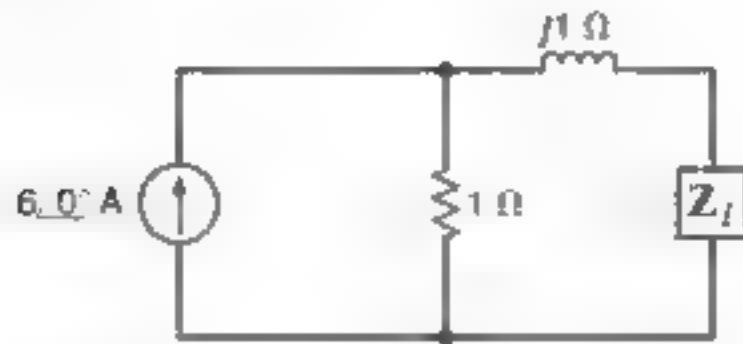


Figura P9.29

- 9.30** Determine a impedância Z_L para que ocorra a transferência máxima de potência média e o valor da potência média máxima transferida à impedância Z_L do circuito mostrado na Fig. P9.30.

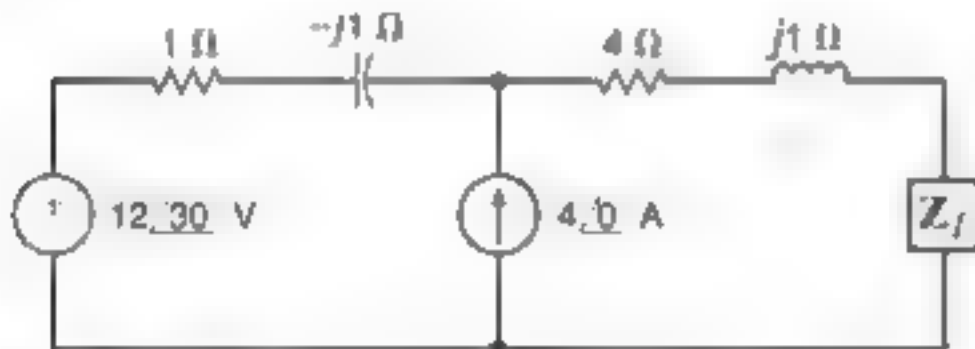


Figura P9.30

- 9.31** Determine a impedância Z_L para que ocorra a transferência máxima de potência média e o valor da potência média máxima absorvida pela carga da rede mostrada na Fig. P9.31.

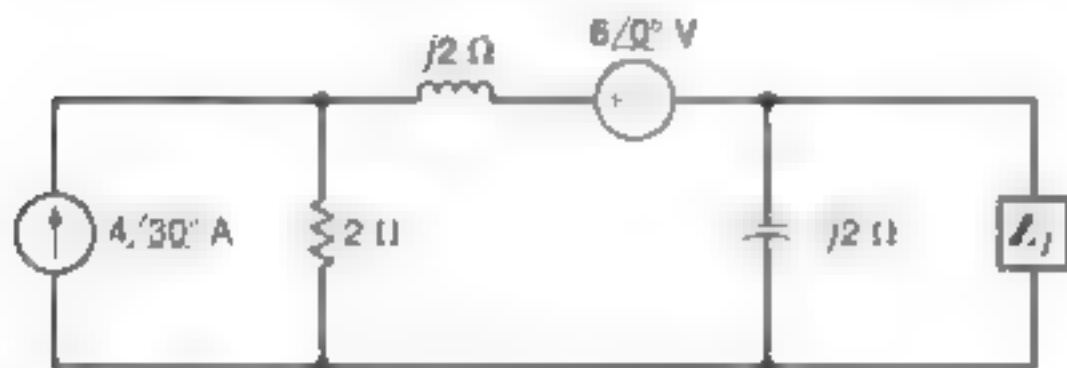


Figura P9.31

- 9.32** Determine a impedância Z_L para que ocorra a transferência máxima de potência média e o valor da potência média máxima absorvida pela carga da rede mostrada na Fig. P9.32

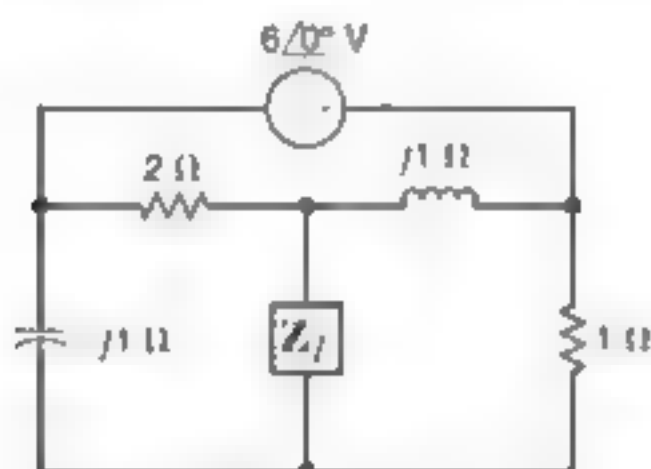


Figura P9.32

- 9.33** Determine o valor da impedância Z_L do circuito mostrado na Fig. P9.33 para que ocorra a transferência máxima de potência média à carga.

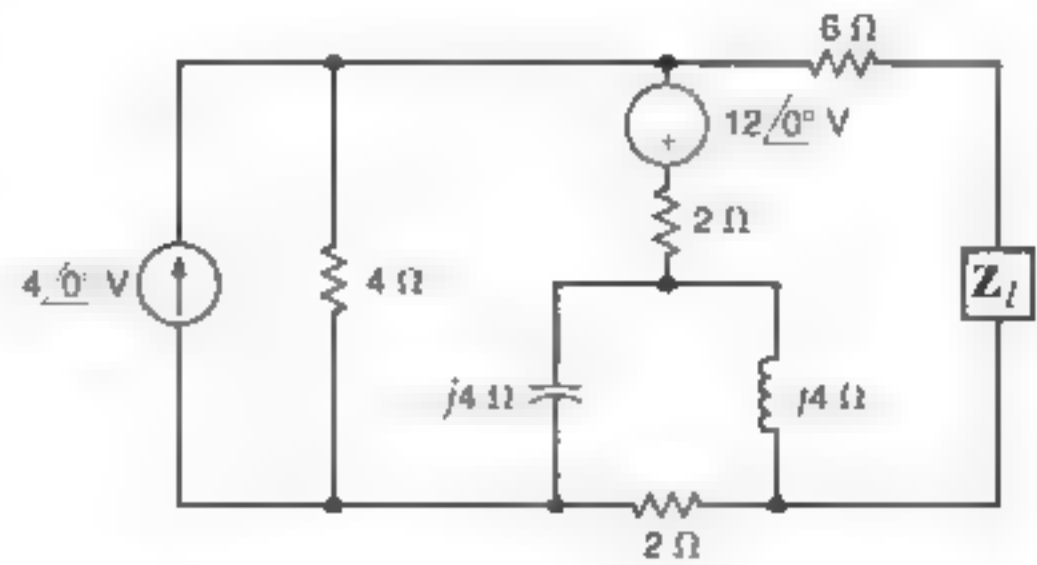


Figura P9.33

- 9.34** Determine o valor da impedância Z_L do circuito mostrado na Fig. P9.34 para que ocorra a transferência máxima de potência média à carga.

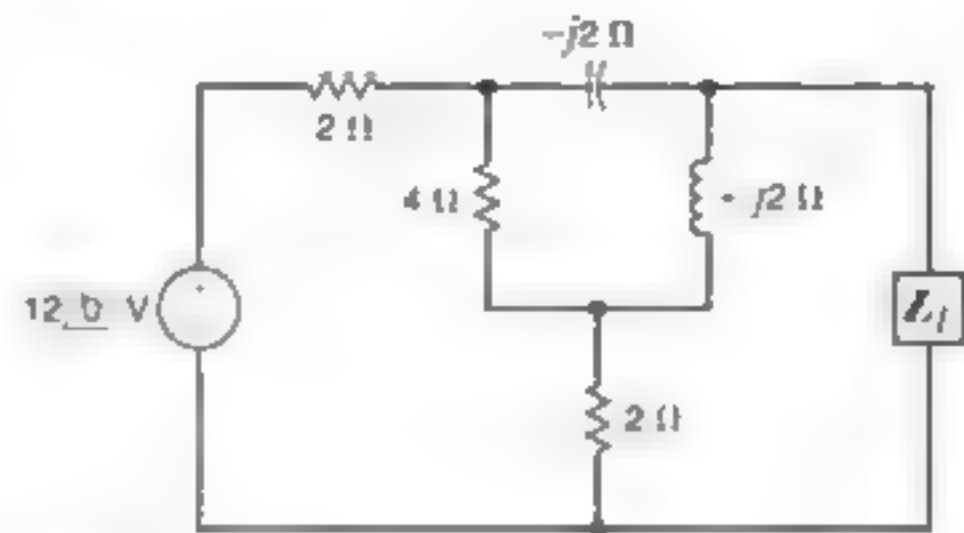


Figura P9.34

- 9.35** Determine o valor da impedância Z_L do circuito mostrado na Fig. P9.35 para que ocorra a transferência máxima de potência média à carga.

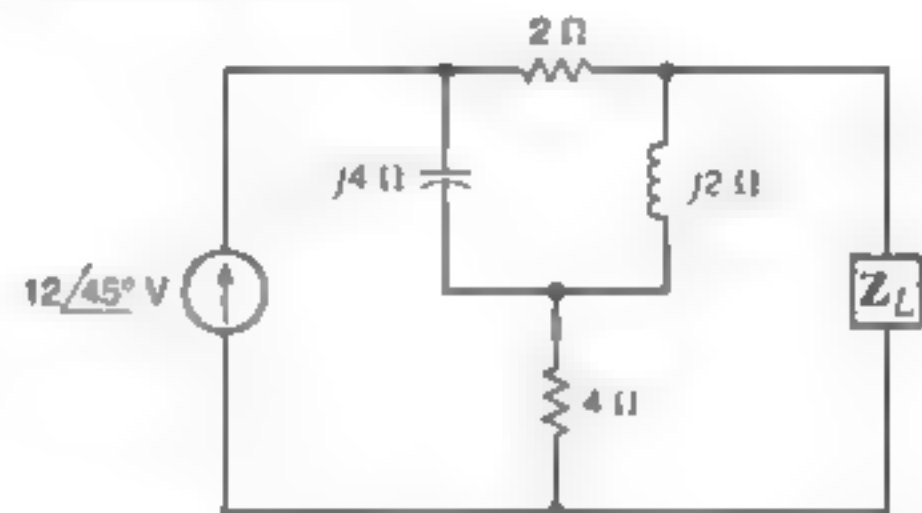


Figura P9.35

- 9.36** Determine o valor da impedância Z_L do circuito mostrado na Fig. P9.36 para que ocorra a transferência máxima de potência média à carga.

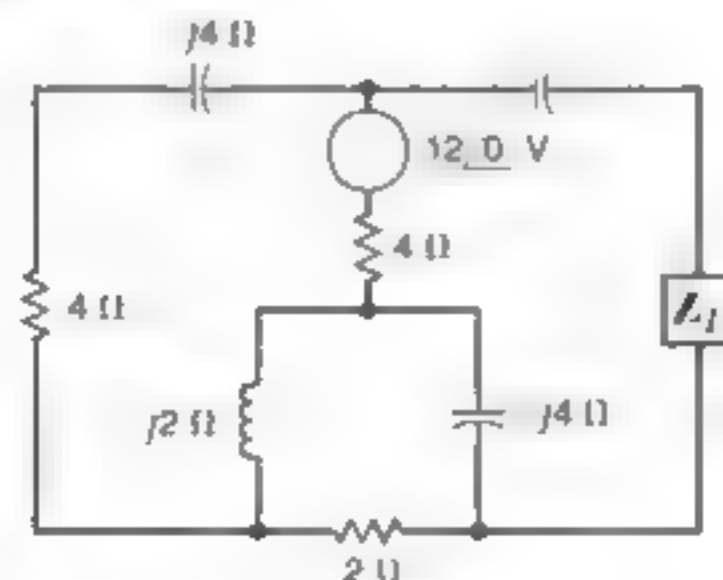


Figura P9.36

- 9.37** Determine a impedância Z_L para que ocorra a transferência máxima de potência média e o valor da potência média máxima transferida à impedância Z_L do circuito mostrado na Fig. P9.37.

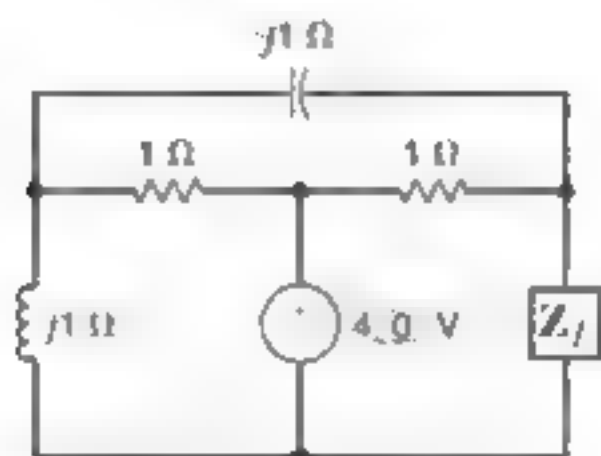


Figura P9.37

- 9.38** Na rede mostrada na Fig. P9.38, obtenha a impedância Z_L para que ocorra a transferência máxima de potência média e o valor da potência média máxima transferida.

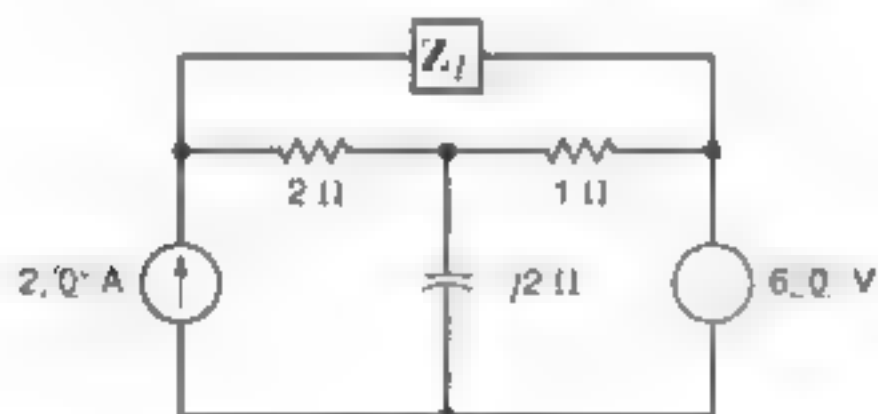


Figura P9.38

- 9.39** Na rede mostrada na Fig. P9.39, obtenha a impedância Z_L para que ocorra a transferência máxima de potência média e o valor da potência média máxima transferida.

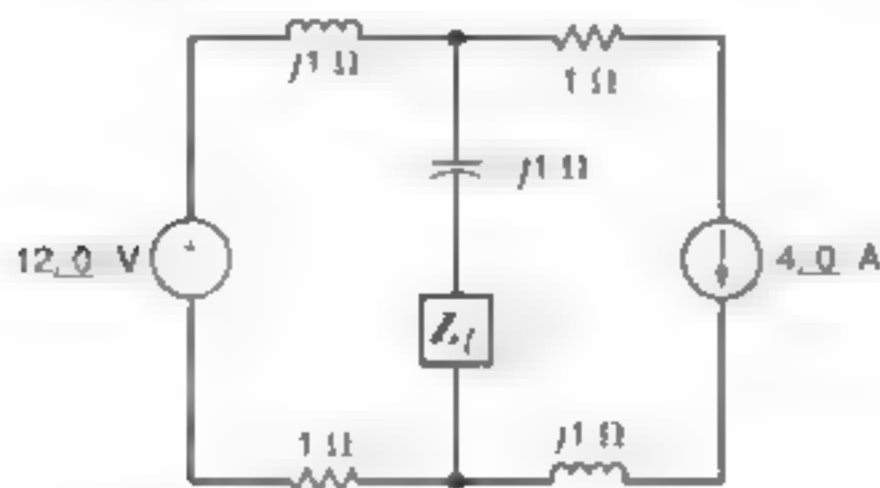


Figura P9.39

- 9.40** Determine a impedância Z_L para que ocorra a transferência máxima de potência média e o valor da potência média máxima absorvida pela carga da rede mostrada na Fig. P9.40

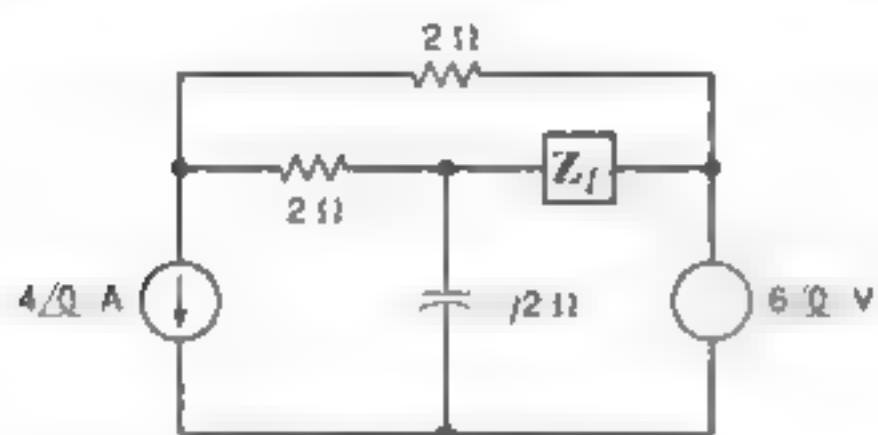


Figura P9.40

- 9.41** Determine a impedância Z_L para que ocorra a transferência máxima de potência média e o valor da potência média máxima transferida à impedância Z_L do circuito mostrado na Fig. P9.41.

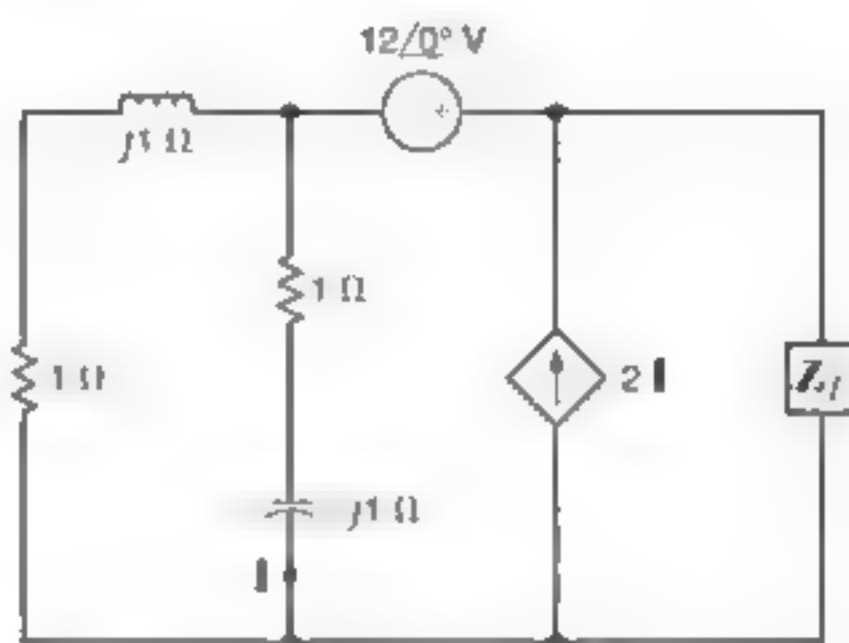


Figura P9.41

- 9.42** Repita o Problema 9.40 para a rede mostrada na Fig. P9.42.

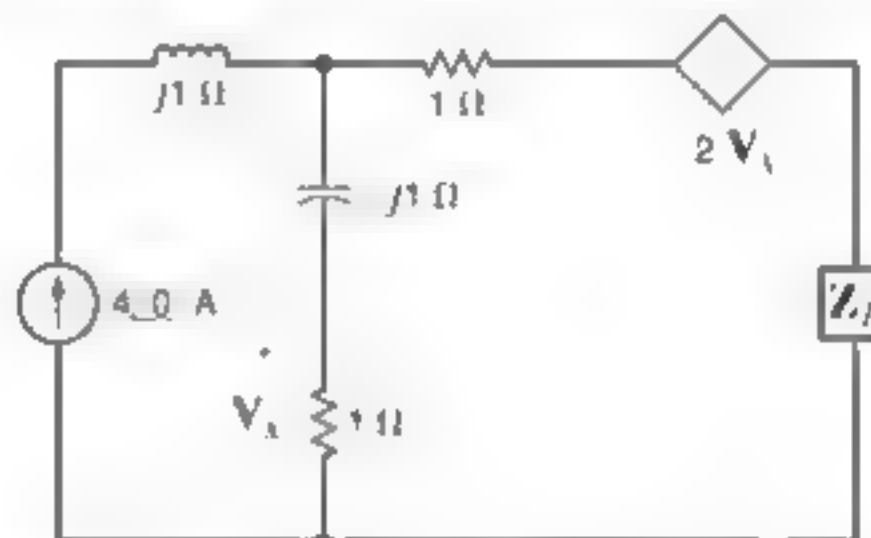


Figura P9.42

- 9.43** Calcule o valor rms da tensão expressa por $v(t) = 10 + 20 \cos(377t + 30^\circ)$ V.

- 9.44** Calcule o valor rms da tensão representada pela forma de onda mostrada na Fig. P9.44

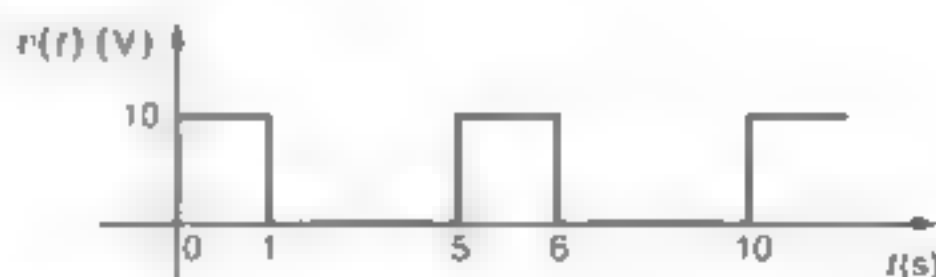


Figura P9.44

- 9.45** Obtenha o valor rms da forma de onda mostrada no gráfico da Fig. P9.45.

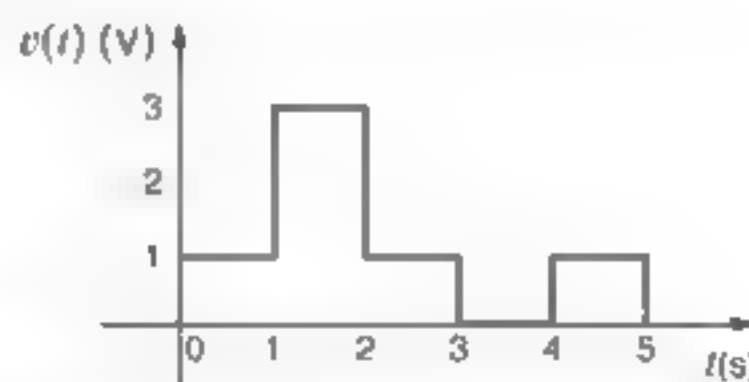


Figura P9.45

9.46 Calcule o valor rms da forma de onda mostrada no gráfico da Figura P9.46.

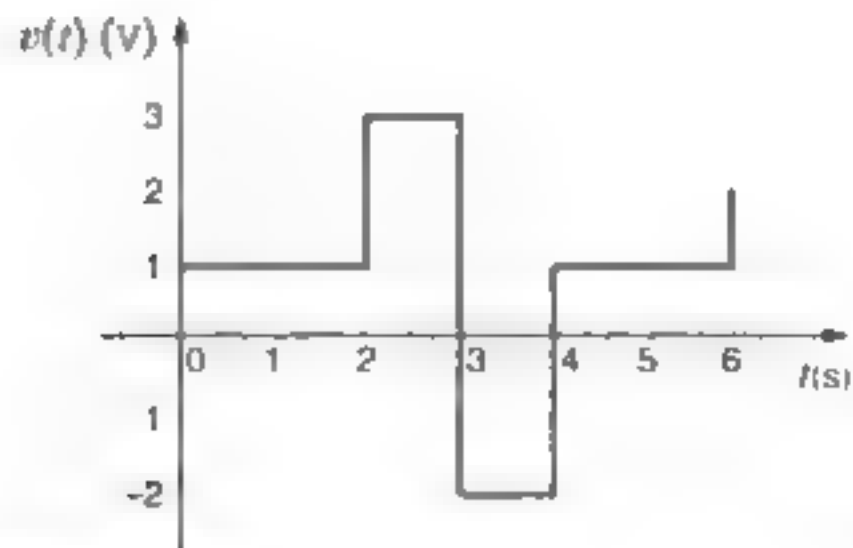


Figura P9.46

9.47 Calcule o valor rms da forma de onda mostrada no gráfico da Figura P9.47.

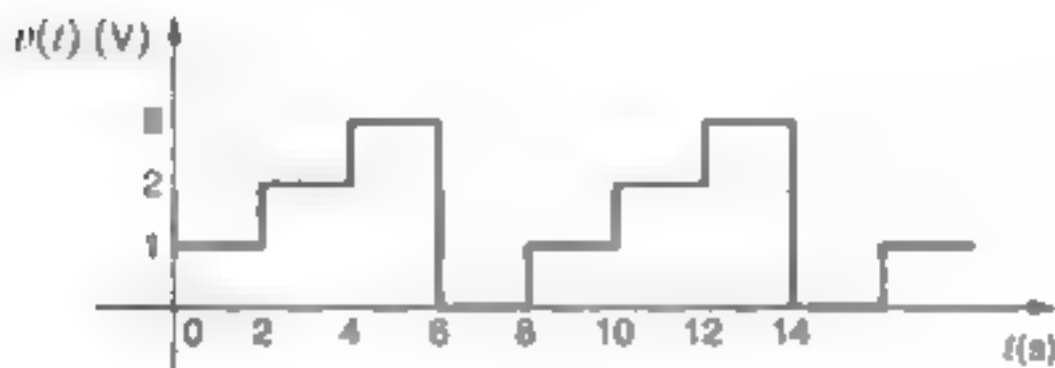


Figura P9.47

9.48 Calcule o valor rms da forma de onda mostrada no gráfico da Figura P9.48.



Figura P9.48

9.49 Calcule o valor rms da forma de onda mostrada no gráfico da Figura P9.49.

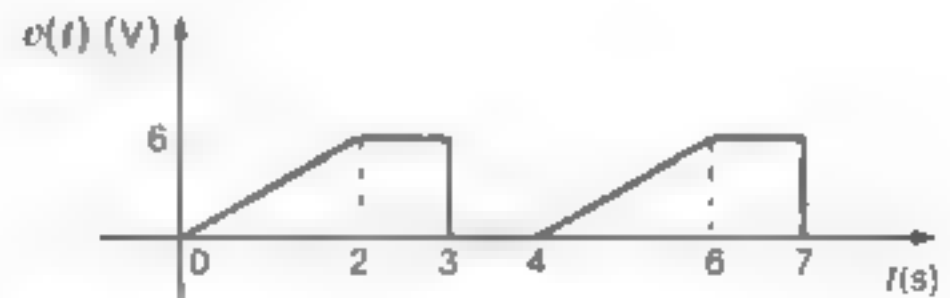


Figura P9.49

9.50 Calcule o valor rms da forma de onda mostrada no gráfico da Figura P9.50.

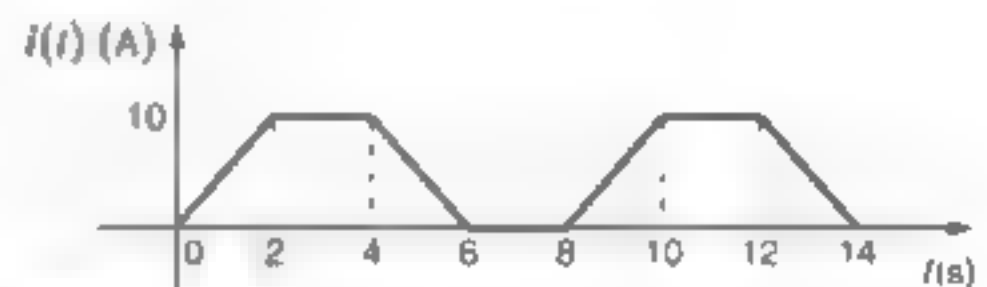


Figura P9.50

9.51 A corrente com a forma de onda mostrada na Fig. P9.51 flui através de um resistor de $4\ \Omega$. Calcule a potência média dissipada no resistor.

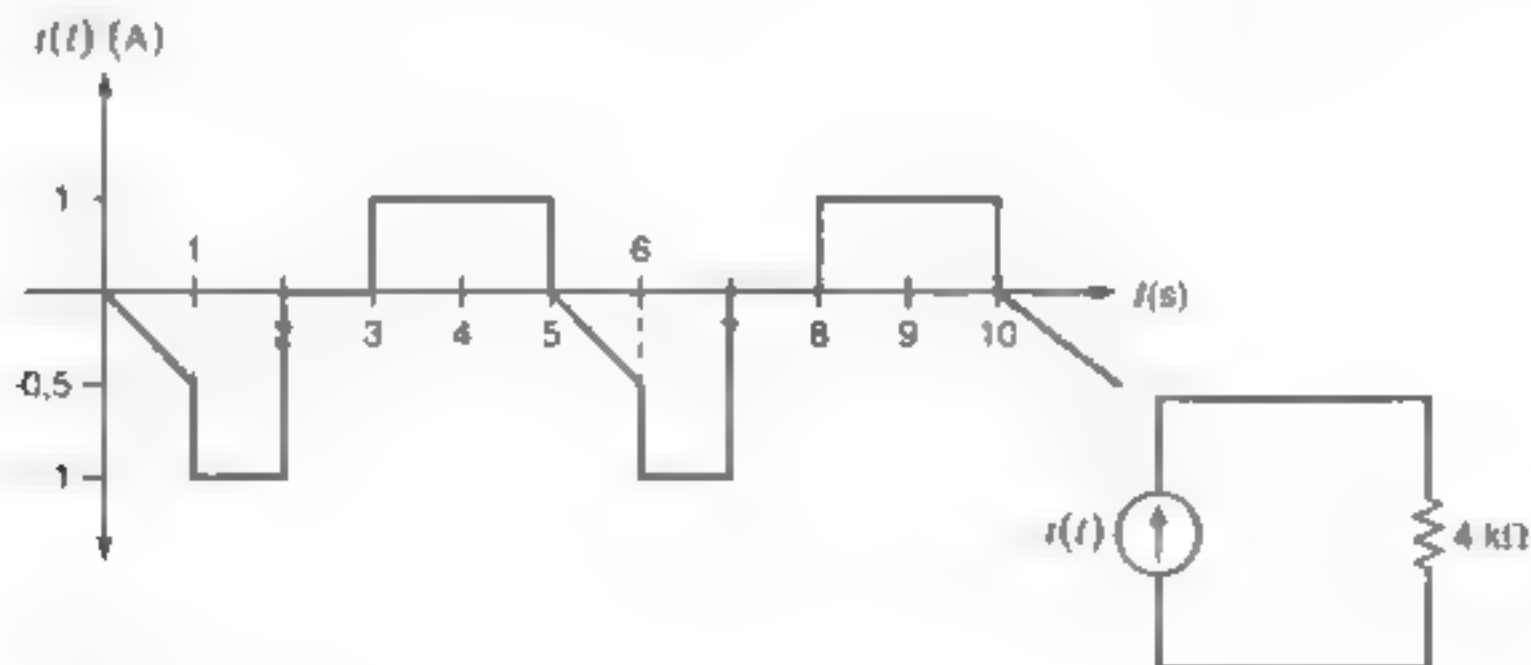


Figura P9.51

- 9.52** Obtenha o valor rms da forma de onda mostrada no gráfico da Fig. P9.52.

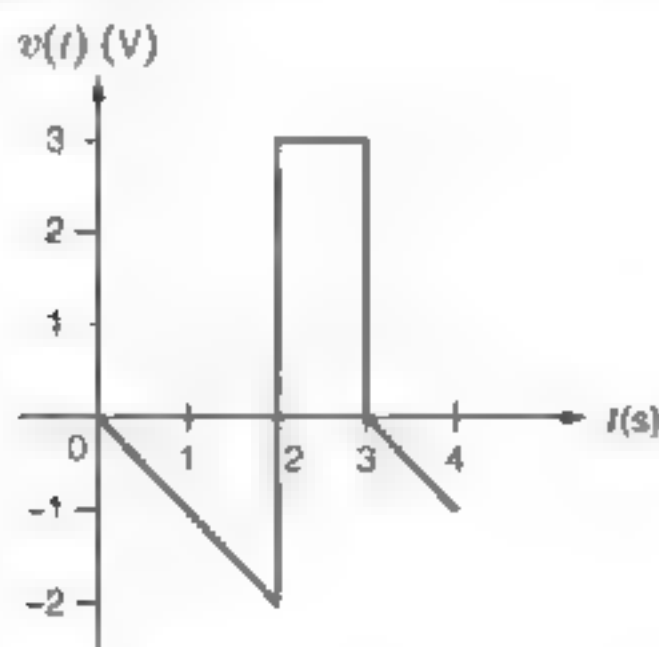


Figura P9.52

- 9.53** Calcule o valor rms da forma de onda mostrada no gráfico da Figura P9.53.

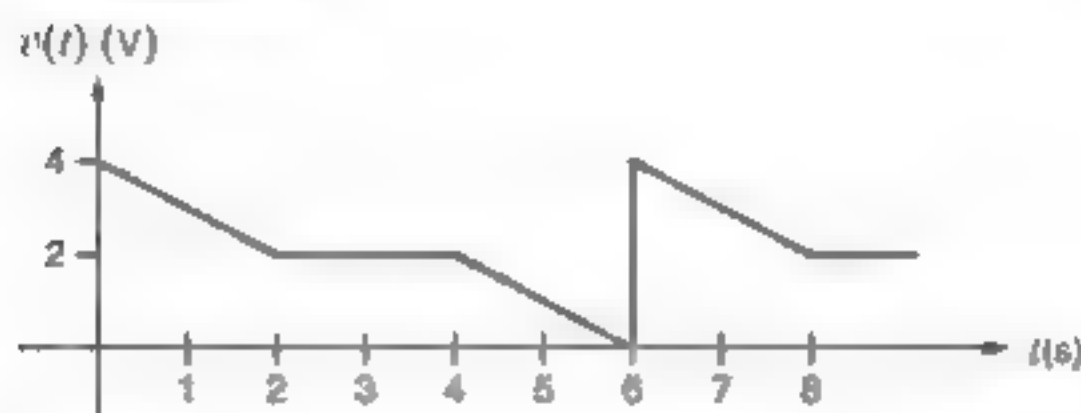


Figura P9.53

- 9.54** Obtenha o valor rms da forma de onda mostrada no gráfico da Fig. P9.54.

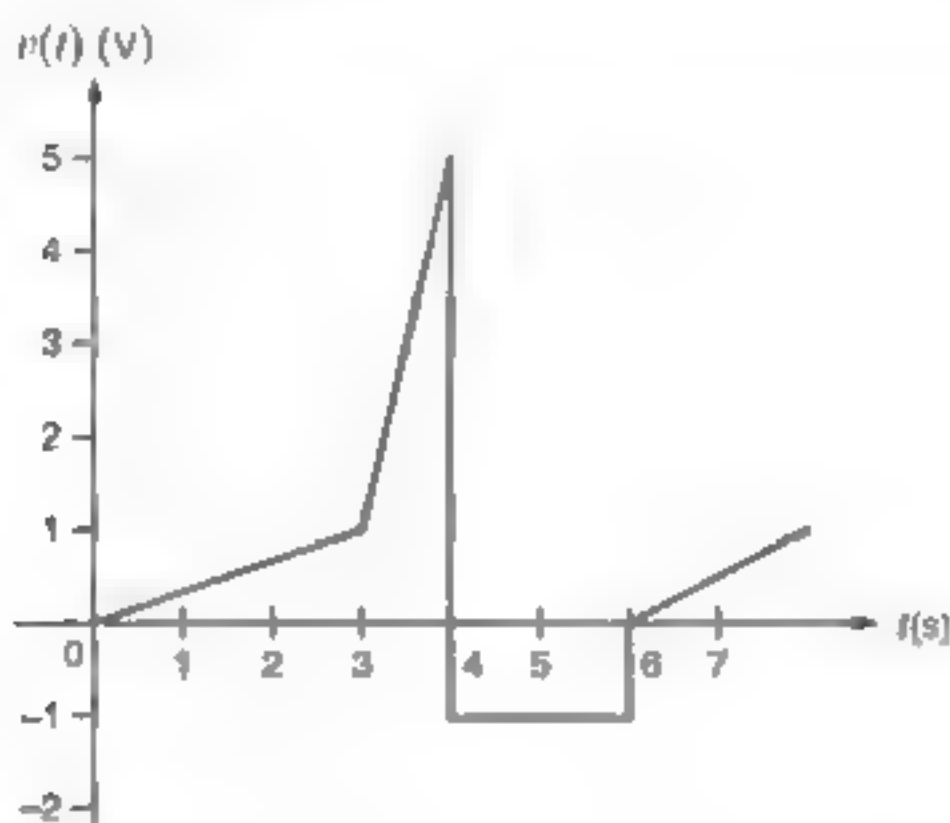


Figura P9.54

- 9.55** Calcule o valor rms da forma de onda mostrada no gráfico da Figura P9.55.

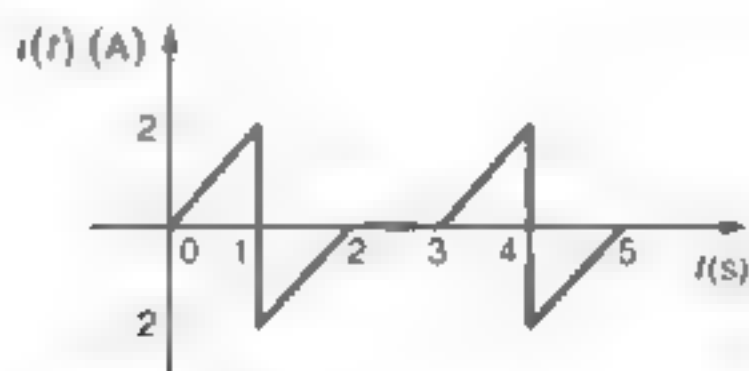


Figura P9.55

- 9.56** Calcule o valor rms da forma de onda mostrada no gráfico da Figura P9.56.

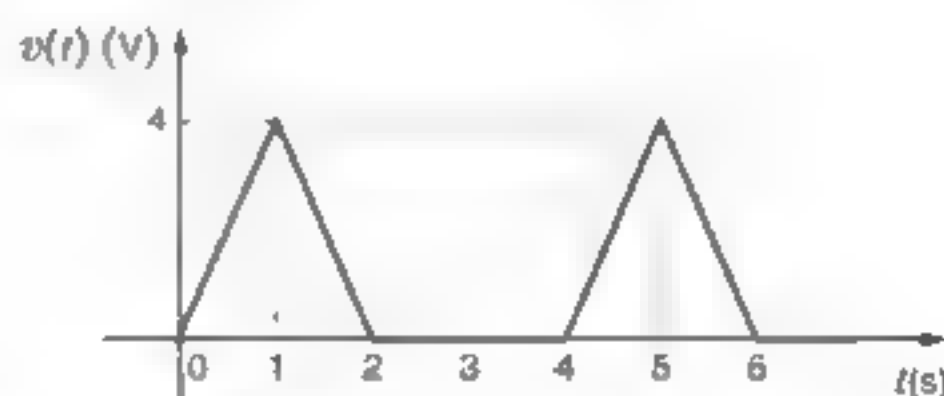


Figura P9.56

- 9.57** A corrente com a forma de onda mostrada na Fig. P9.57 flui através de um resistor de $5\ \Omega$. Obtenha a potência média absorvida pelo resistor.

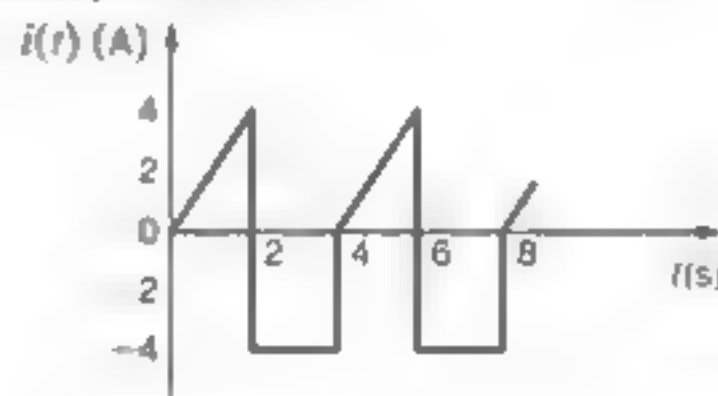


Figura P9.57

- 9.58** Calcule o valor rms da forma de onda mostrada no gráfico da Figura P9.58.

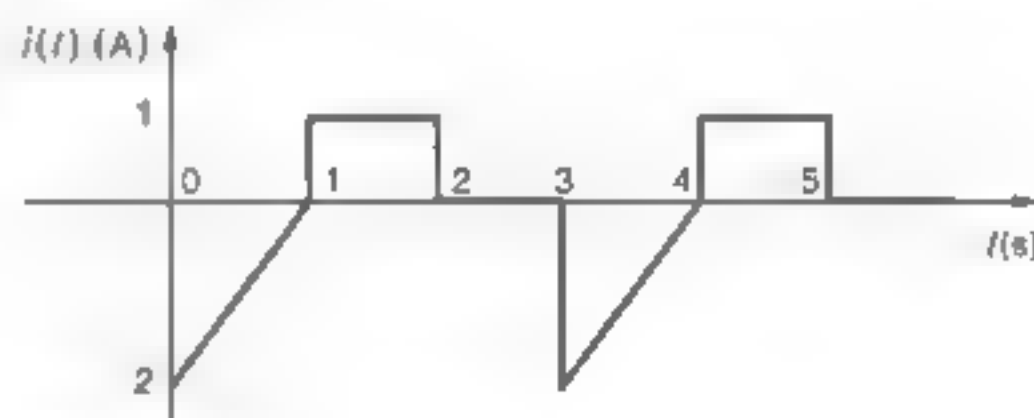


Figura P9.58

- 9.59** A carga industrial mostrada na Fig. P9.59 é conhecida como sendo indutiva e consome 90 kW. A leitura realizada no amperímetro é de 260 A rms, e a leitura no voltímetro é de 480 V rms. Determine o fator de potência do sistema.

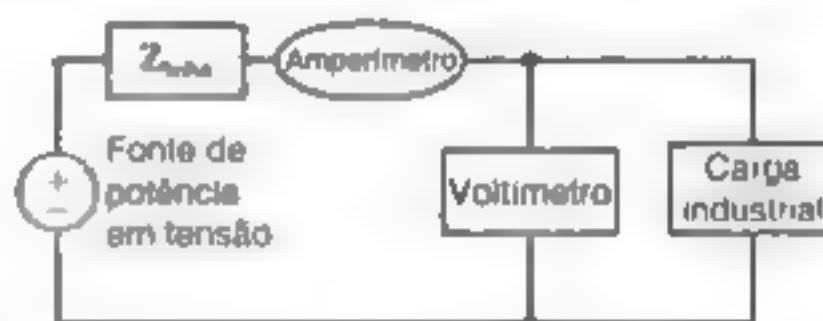


Figura P9.59

- 9.60** A carga industrial do sistema mostrado na Fig. P9.59 consome 110 kW a um fator de potência de 0,88 em atraso. A leitura do amperímetro é de 252 A rms. Determine a leitura do voltímetro.

- 9.61** A carga industrial do sistema mostrado na Fig. P9.59 consome 88 kW a um fator de potência de 0,8 em atraso. A potência fornecida é de 96 kW e a impedância da linha é de $0,1\ \Omega$. Determine as leituras no amperímetro e no voltímetro.

9.62 A fonte de potência do sistema mostrado na Fig. P9.59 gera 50 kW e a impedância da linha é de $0,095 \Omega$. Se a carga consome 43 kW e o voltímetro indica uma tensão de 220 V rms, determine a leitura do amperímetro e o fator de potência da carga indutiva.

9.63 Uma planta consome 100 kW de potência com um fator de potência de 0,9 em atraso. Se a corrente na carga é de 200 A rms, determine a tensão na carga.

9.64 A planta de um processo consome 20 kW de potência de uma linha de 240 V rms. Se o fator de potência da carga é de 0,9, qual é o ângulo para o qual a tensão na carga adianta a corrente na carga? Qual é o fasor da corrente da carga se a tensão na linha possui um fasor de $240 \angle 0^\circ$ V rms.

9.65 Uma planta utiliza 250 A rms de uma linha de 240 V rms para suprir uma carga com 50 kW. Qual é o fator de potência da carga?

9.66 Uma companhia geradora de energia deve gerar 100 kW para suprir uma carga industrial de 94 kW por uma linha de transmissão cuja resistência é de $0,09 \Omega$. Se o fator de potência da carga é de 0,83 em atraso, determine a tensão na carga.

9.67 Uma linha de transmissão com impedância de $0,08 + j0,25 \Omega$ é utilizada para fornecer potência a uma carga. A carga é indutiva e a tensão entre seus terminais é de $220 \angle 0^\circ$ V rms a 60 Hz. Se a carga necessita de 12 kW e a perda de potência real na linha é de 560 W, determine o ângulo do fator de potência da carga.

9.68 Uma companhia de energia elétrica fornece 80 kW a uma carga industrial. A carga absorve 220 A rms da linha de transmissão. Se a tensão na carga é de 440 V rms e o fator de potência da carga é de 0,8 em atraso, determine as perdas na linha de transmissão.

9.69 Uma companhia de energia elétrica fornece 40 kW a uma carga industrial. A carga absorve 200 A rms da linha de transmissão. Se a tensão na carga é de 240 V rms e o fator de potência da carga é de 0,8 em atraso, determine as perdas na linha de transmissão.

9.70 Uma carga industrial que consome 40 kW é suprida por uma companhia de energia elétrica através de uma linha de transmissão cuja resistência é de $0,1 \Omega$, com 44 kW. Se a tensão na carga é de 240 V rms, determine o fator de potência na carga.

9.71 Uma linha de transmissão com impedância de $0,1 + j0,2 \Omega$ é utilizada para fornecer potência a uma carga. A carga é capacitiva e a tensão da carga é de $240 \angle 0^\circ$ V rms a 60 Hz. Se a carga necessita de 15 kW e a perda de potência real na linha é de 660 W, determine a tensão de entrada da linha.

9.72 Uma carga industrial opera a uma potência de 30 kW com fator de potência de 0,8 em atraso. A tensão na carga é de $240 \angle 0^\circ$ V rms. As perdas de potência real e reativa no alimentador da linha de transmissão são de 1,8 kW e 2,4 kvar, respectivamente. Determine a impedância da linha de transmissão e a tensão de entrada da linha.

9.73 Determine as potências real e reativa absorvidas por componente do circuito mostrado na Fig. P9.73.

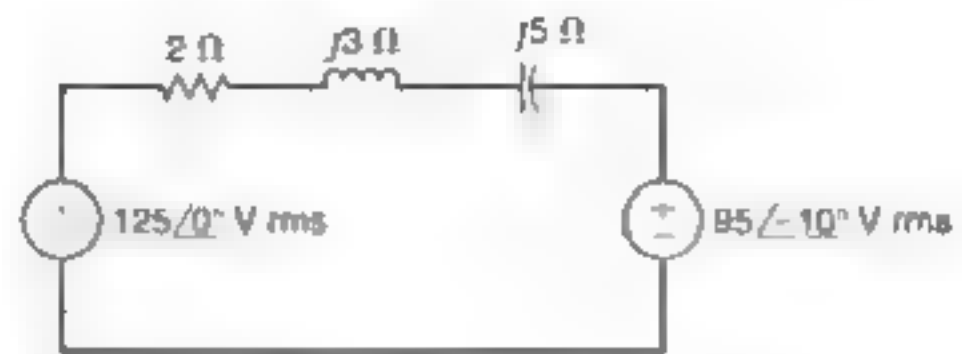


Figura P9.73

9.74 Calcule as potências real e reativa absorvidas por componente (incluindo as fontes) do circuito mostrado na Fig. P9.74.

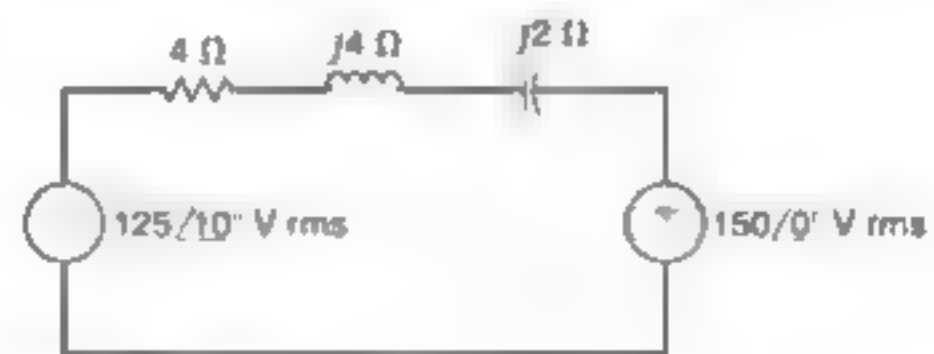


Figura P9.74

9.75 A potência complexa absorvida pela fonte da direita da rede mostrada na Fig. P9.75 vale $0 + j1582,5$ VA. Determine o valor do resistor R e o componente desconhecido e seu valor se $f = 60$ Hz. (Se o componente for um capacitor, forneça sua capacitância; se o componente for um indutor, forneça sua indutância.)

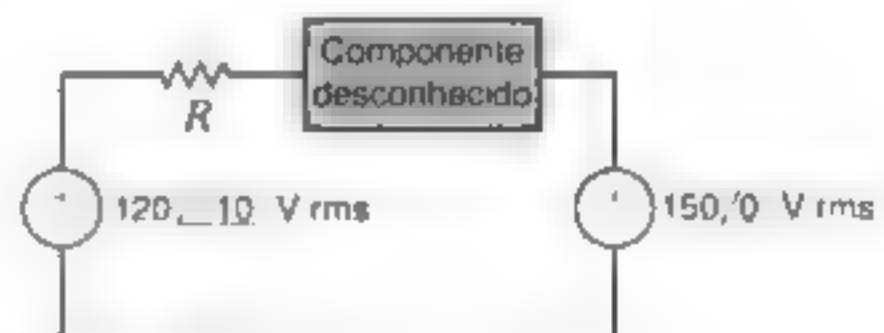


Figura P9.75

9.76 A fonte do circuito mostrado na Fig. P9.76 fornece 40 kW a um fator de potência de 0,9 em atraso. As perdas real e reativa do alimentador da linha de transmissão são de 1,6 kW e 2,1 kvar, respectivamente. Calcule os valores de R , X e da tensão na carga.

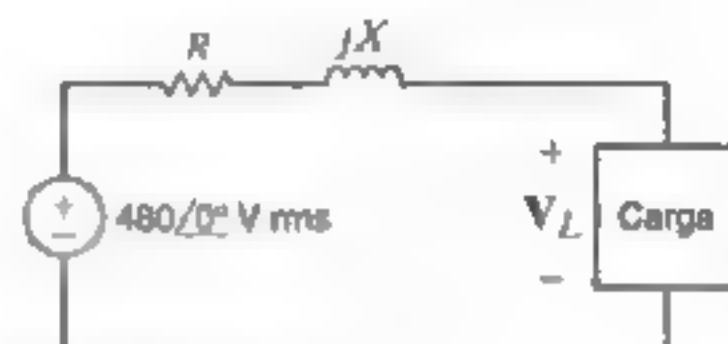


Figura P9.76

- 9.77** Para o circuito mostrado na Fig. P9.77, calcule a tensão V_F , a potência complexa fornecida pela fonte e o fator de potência da fonte.

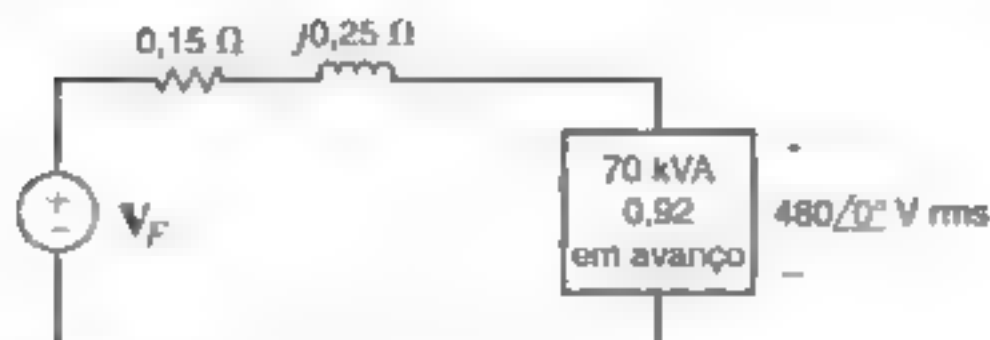


Figura P9.77

- 9.78** Para o circuito mostrado na Fig. P9.78, calcule a tensão V_F , a potência complexa fornecida pela fonte e o fator de potência da fonte.

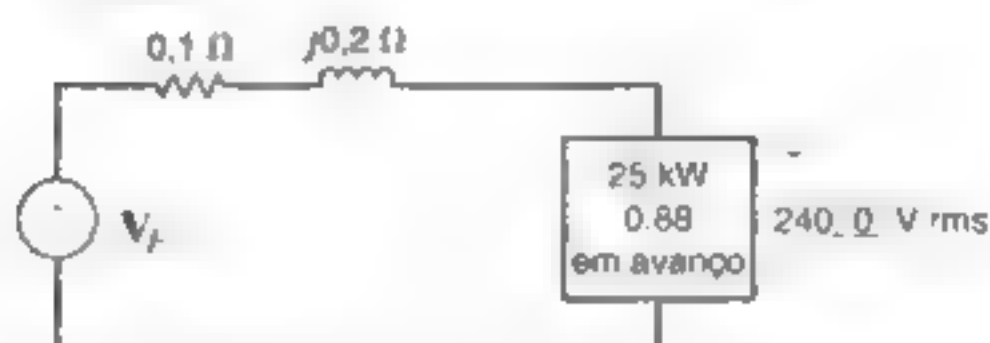


Figura P9.78

- 9.79** Dada a rede mostrada na Fig. P9.79, determine a potência complexa fornecida pela fonte, o fator de potência da fonte e a tensão $v_F(t)$. A frequência é de 60 Hz.



Figura P9.79

- 9.80** Determine a potência complexa fornecida pela fonte, o fator de potência da fonte e a tensão $V_F(t)$ considerando que frequência da rede mostrada na Fig. P9.80 é de 60 Hz.

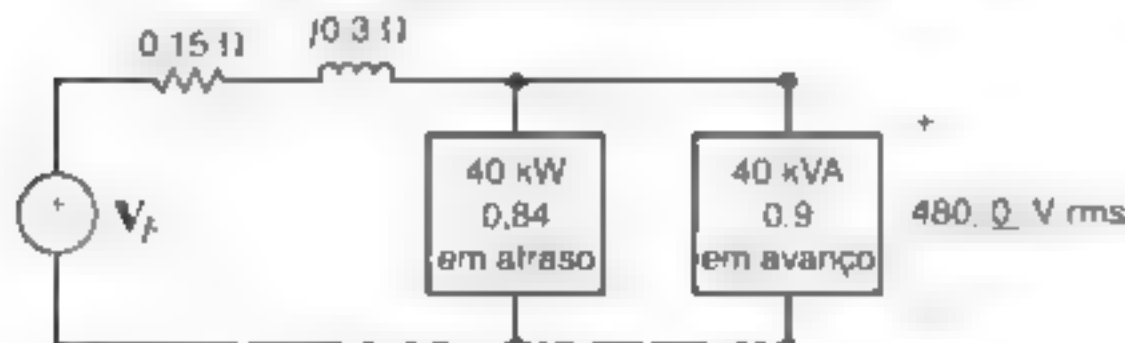


Figura P9.80

- 9.85** Dada a rede mostrada na Fig. P9.85, calcule a tensão de entrada da fonte e o fator de potência na entrada.

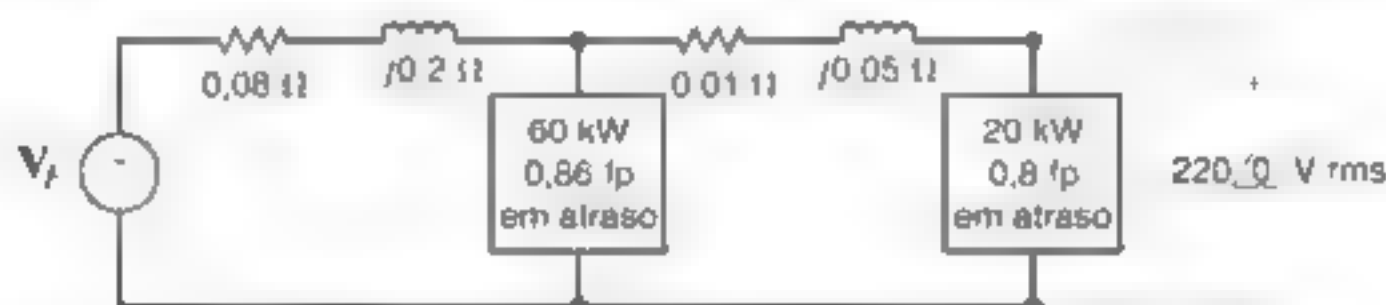


Figura P9.85

- 9.81** Utilize as leis de Kirchhoff para calcular a tensão da fonte da rede mostrada na Fig. P9.81.

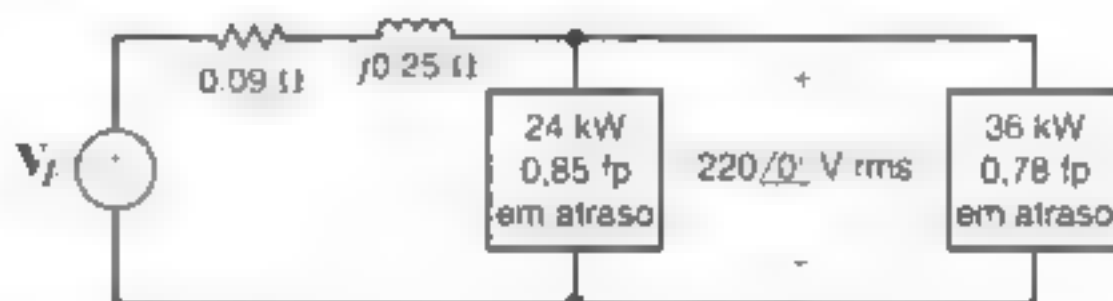


Figura P9.81

- 9.82** Dada a rede mostrada na Fig. P9.82, determine a tensão de entrada V_F .

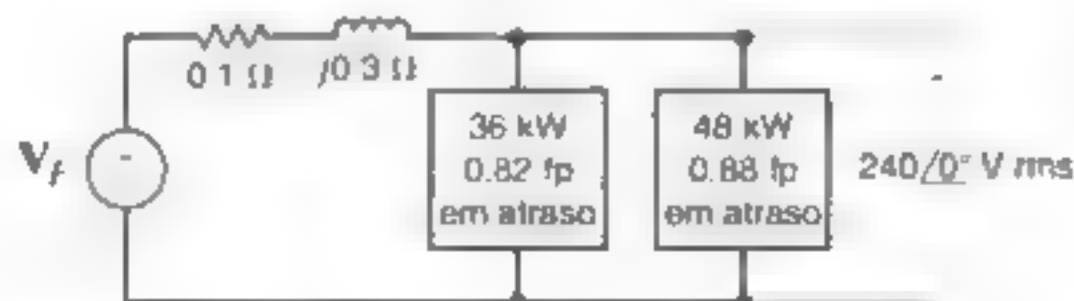


Figura P9.82

- 9.83** Dada a rede mostrada na Fig. P9.83, determine a tensão de entrada V_F .

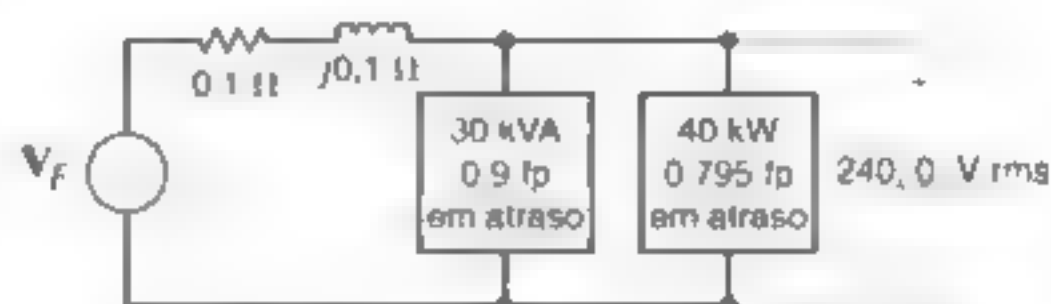


Figura P9.83

- 9.84** Dado o circuito mostrado na Fig. P9.84, obtenha a potência complexa fornecida pela fonte e o fator de potência da fonte. Considerando $f = 60$ Hz, determine também a tensão de entrada $v_F(t)$.



Figura P9.84

- 9.86** Dada a rede mostrada na Fig. P9.86, calcule a tensão de entrada da fonte e o fator de potência na entrada.

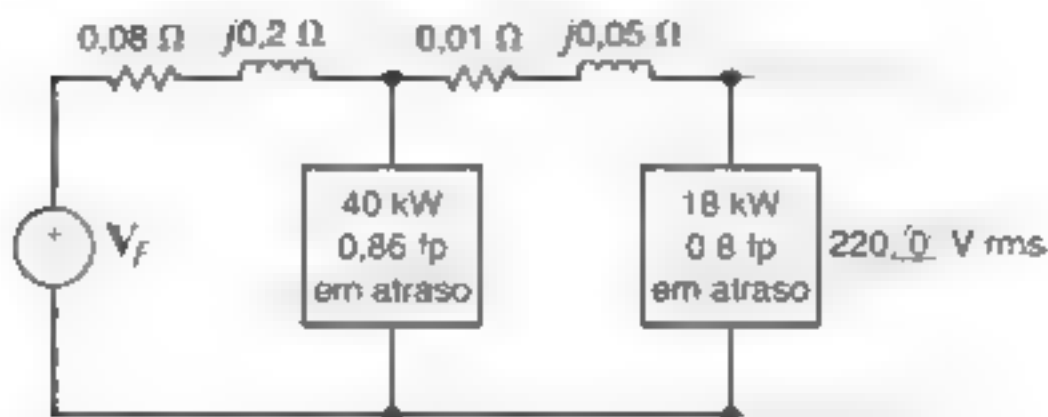


Figura P9.86

- 9.87** Qual é o valor do capacitor a ser colocado em paralelo com a carga de 18 kW do Problema P9.86 para que o fator de potência dessa carga seja aumentado para 0,9 em atraso?
- 9.88** Uma carga industrial consome 44 kW a um fator de potência de 0,82 em atraso de uma linha de $240 \angle 0^\circ$ V rms a 60 Hz. Um banco de capacitores totalizando 600 μ F está disponível. Se esses capacitores forem colocados em paralelo com a carga, qual será o novo fator de potência da carga total?
- 9.89** Uma carga particular possui um fator de potência de 0,8 em atraso. A potência fornecida à carga a partir de uma linha de 270 V rms a 60 Hz é de 40 kW. Qual é o valor da capacitância colocada em paralelo com a carga que propiciará um aumento no fator de potência para 0,9 em atraso?
- 9.90** Uma carga particular possui um fator de potência de 0,8 em atraso. A potência fornecida à carga a partir de uma linha de 220 V rms a 60 Hz é de 40 kW. Qual é o valor da capacitância colocada em paralelo com a carga que propiciará um aumento no fator de potência para 0,9 em atraso?
- 9.91** Uma carga industrial é alimentada por meio de uma linha de transmissão cuja impedância é de $0,1 + j0,2 \Omega$. A tensão da linha de 60 Hz na carga é de $480 \angle 0^\circ$ V rms. A carga consome 124 kW com um fator de potência de 0,75 em atraso. Qual é o valor da capacitância que, quando colocada em paralelo com a carga, irá alterar o fator de potência para 0,9 em atraso?
- 9.92** A tensão de uma linha de 60 Hz para uma carga industrial de 60 kW a um fator de potência de 0,76 em atraso é de $240 \angle 0^\circ$ V rms. Determine o valor da capacitância que, quando colocada em paralelo com a carga, aumenta o fator de potência para 0,9 em atraso.
- 9.93** Uma planta consome 60 kW a um fator de potência de 0,75 em atraso de uma linha de 240 V rms a 60 Hz. Determine o valor do capacitor que, quando colocado em paralelo com a carga, irá alterar o fator de potência para 0,9 em atraso.
- 9.94** Um banco de motores de indução consome de uma linha de 60 Hz com $240 \angle 0^\circ$ V rms 36 kW a um fator de potência de 0,78. Se uma capacitância de 200 μ F for colocada em paralelo com a carga, qual será o novo fator de potência da carga total?
- 9.95** Calcule o valor da capacitância a ser conectada em paralelo com a carga do circuito mostrado na Fig. P9.95 de modo a corrigir o fator de potência da fonte para 0,94 em atraso. A frequência é $f = 60$ Hz.



Figura P9.95

- 9.96** No circuito mostrado na Fig. P9.96, uma carga é modelada por uma impedância de $4 + j4 \Omega$. Determine o valor da capacitância a ser conectada em paralelo com a carga de modo a corrigir o fator de potência da carga combinada com o capacitor para 0,95 em atraso. A frequência é $f = 60$ Hz.

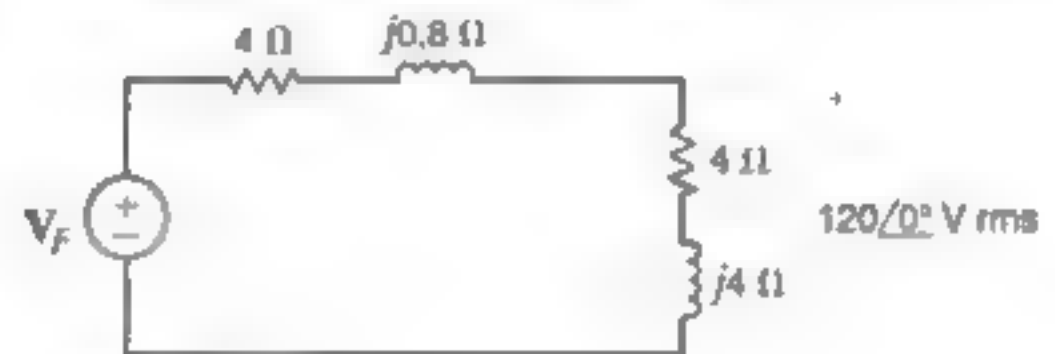


Figura P9.96

- 9.97** No circuito mostrado na Fig. P9.97, uma carga é modelada por uma impedância de $4 + j4 \Omega$. Determine o valor da capacitância a ser conectada em paralelo com a carga de modo a corrigir o fator de potência da carga combinada com o capacitor para 0,95 em atraso. A frequência é $f = 60$ Hz.

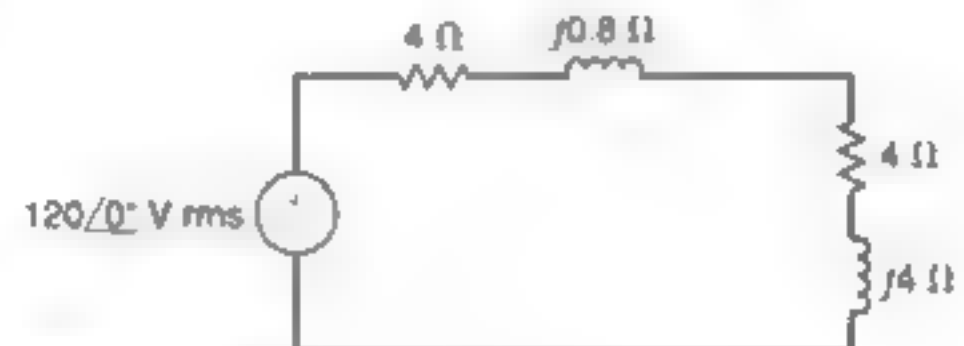


Figura P9.97

- 9.98** Determine o valor da capacitância a ser conectada em paralelo com a carga do circuito mostrado na Fig. P9.98, de modo que o fator de potência da carga combinada com o capacitor seja igual à unidade. Calcule a potência complexa fornecida pela fonte após a correção do fator de potência para a unidade. A frequência é $f = 60$ Hz.

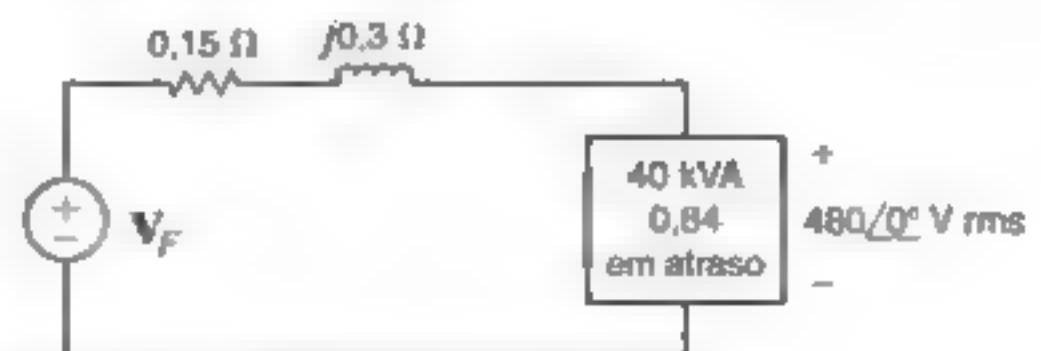


Figura P9.98

- 9.99** Uma carga de 5 kW opera a 60 Hz, 240 V rms e possui um fator de potência de 0,866 em atraso. Deseja-se modificar o fator de potência para pelo menos 0,975 em atraso utilizando um único capacitor. Esse objetivo pode ser atingido utilizando um único capacitor da Tabela 6.1?

- 9.100** Um fogão elétrico residencial de 5,1 kW é projetado para funcionar ligado a uma tomada com tensão senoidal de 240 V rms, conforme mostrado na Fig. P9.100a. Entretanto, o electricista acidentalmente ligou o fogão a uma tomada de 120 V rms, conforme mostrado na Fig. P9.100b. Qual é a consequência desse erro?

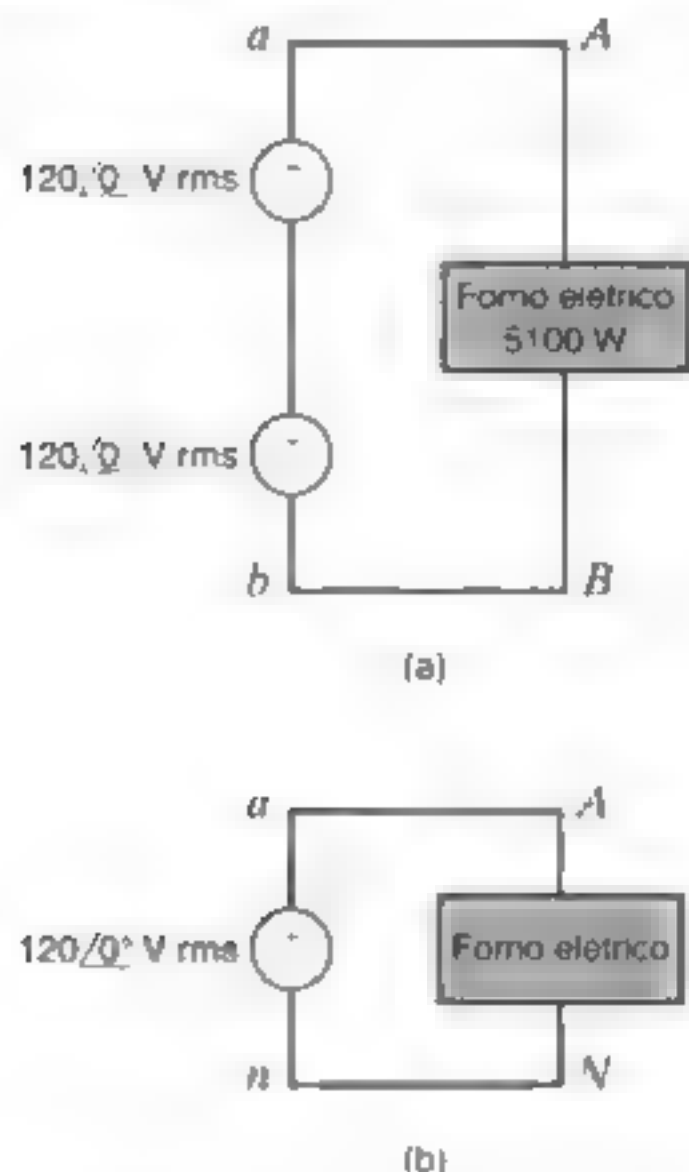


Figura P9.100

- 9.101** Para testar um bocal de lâmpada, uma mulher, de pé sobre almofadas que a isolam do chão, coloca seu dedo dentro do bocal, conforme ilustrado na Fig. P9.101. A ponta de seu dedo faz contato com um dos fios condutores e a lateral de seu dedo faz contato com o outro fio condutor. Admitindo que qualquer parte de um membro do corpo possua uma resistência de 95 Ω , existirá alguma corrente passando pelo corpo? Existirá alguma corrente nas proximidades do coração?

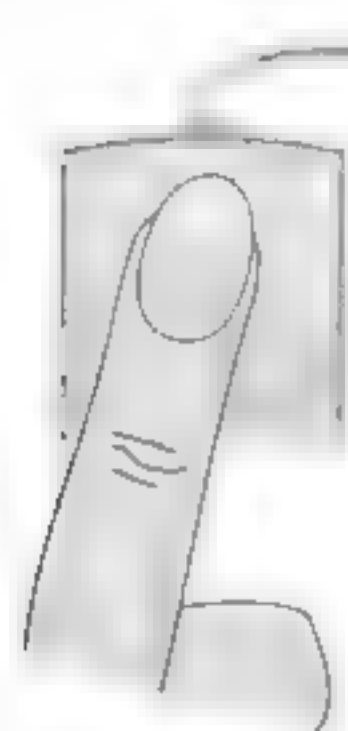


Figura P9.101

- 9.102** Um mecânico novato está instalando uma bateria de 12 V em um carro. O terminal negativo já está conectado quando ele aperta os parafusos do terminal positivo. Com o pulso firme na chave de boca, ele a gira de modo que o anel de ouro em seu dedo toca na lataria do carro. O circuito dessa situação está representado na Fig. P9.102, em que foi admitido que a resistência da chave é irrelevante e a resistência do contato pode ser representada por

$$R_1 = R_{\text{parafuso para chave}} = 0,012 \, \Omega$$

$$R_2 = R_{\text{chave para o anel}} = 0,012 \, \Omega$$

$$R_3 = R_{\text{anel}} = 0,012 \, \Omega$$

$$R_4 = R_{\text{anel para a lataria}} = 0,012 \, \Omega$$

Qual é a potência rapidamente dissipada no anel de ouro e qual é o impacto dessa dissipação de potência?

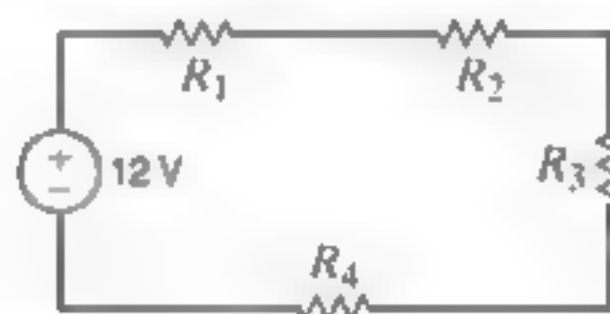


Figura P9.102

- 9.103** Um circuito monofásico de 60 Hz com três condutores alimenta três cargas, conforme mostrado na Fig. P9.103. Determine as correntes I_{aA} , I_{nN} e I_c , e a energia, em quilowatt-hora, utilizada durante um período de 24 horas.

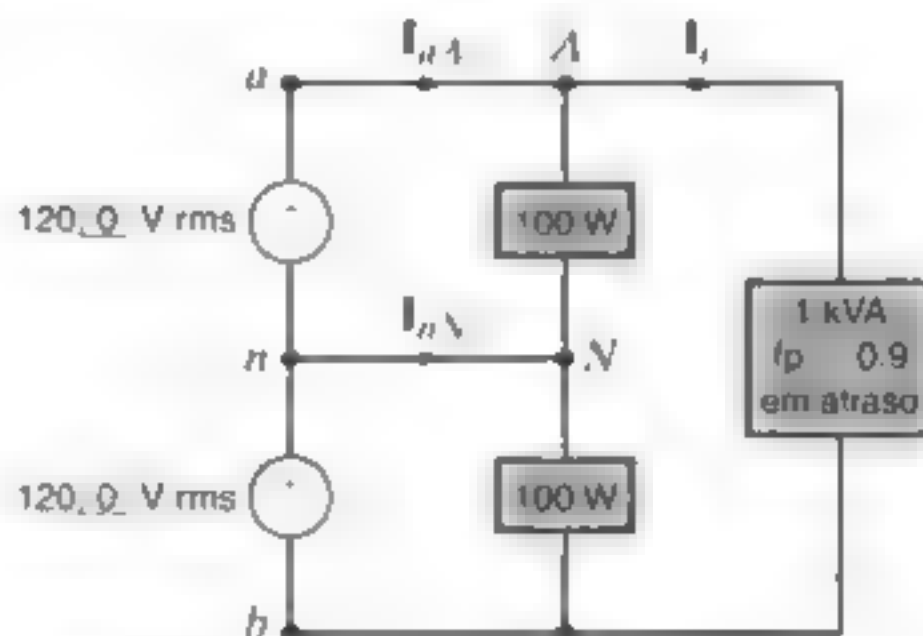


Figura P9.103

- 9.104** Diversos pontos de 120 V rms devem ser utilizados na iluminação de um grande cômodo de uma residência. O total da carga de iluminação é de 8 kW. As normas de instalações elétricas recomendam que nenhum dos disjuntores deve possuir capacidade superior a 20 A rms, para uma margem de segurança de 25%. Determine o número de ramos de circuitos idênticos necessários de forma a atender a essa recomendação.
- 9.105** Um homem e seu filho estão empinando uma pipa. A pipa fica embaraçada em uma linha de força de 7200 V rms perto de um poste de luz. Ao tentar remover a pipa, o homem sobe no poste e, acidentalmente, encosta no fio de 7200 V rms. Admitindo que o poste de luz esteja devidamente aterrado, qual é a corrente potencial que passa através do corpo do homem?

PROBLEMAS TÍPICOS DE EXAMES PROFISSIONAIS DE ENGENHARIA

9PEP-1 Uma carga industrial consome 120 kW com um fator de potência de 0,707 em atraso e está conectada a uma linha de 480 $\angle 0^\circ$ V rms a 60 Hz. Determine o valor do capacitor que, ao ser conectado em paralelo com a carga, aumenta o fator de potência para 0,95 em atraso.

- a. 642 μ F
- b. 763 μ F
- c. 928 μ F
- d. 471 μ F

9PEP-2 Determine o valor rms da forma de onda mostrada na figura.

- a. 2,33 V
- b. 1 V
- c. 3,25 V
- d. 1,22 V

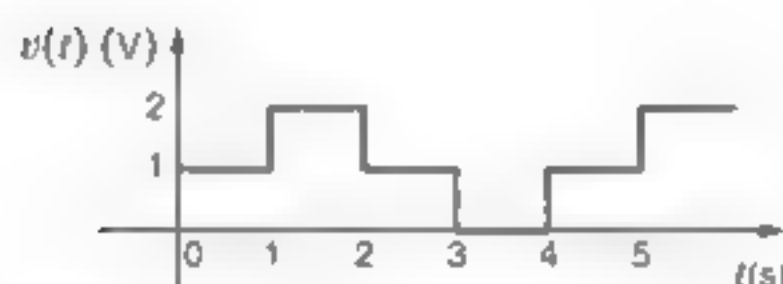


Figura 9PEP-2

9PEP-3 Determine a impedância Z_L da rede mostrada na Fig. 9PEP-3 para que ocorra a transferência máxima de potência.

- a. $0,8 + j2,4 \Omega$
- b. $0,4 - j1,2 \Omega$
- c. $0,2 + j1,4 \Omega$
- d. $0,3 - j1,6 \Omega$

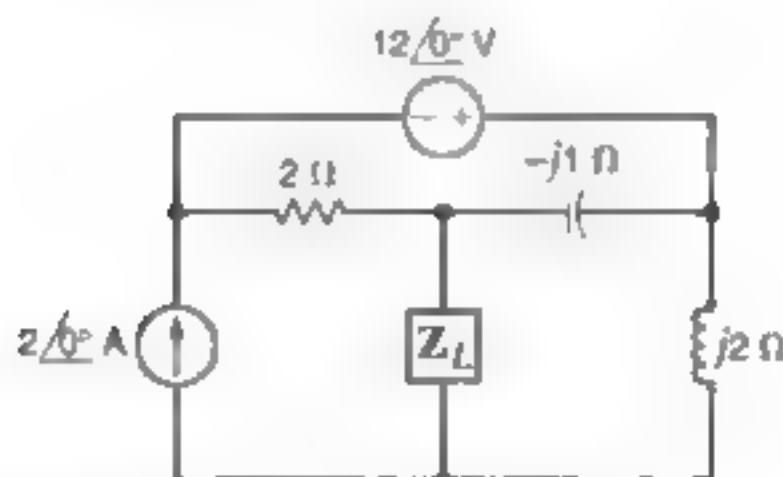


Figura 9PEP-3

9PEP-4 Um voltímetro de leitura rms é conectado à saída do amplificador operacional mostrado na Fig. 9PEP-4. Determine a leitura realizada.

- a. 3 V
- b. 5,2 V
- c. 4,24 V
- d. 2 V

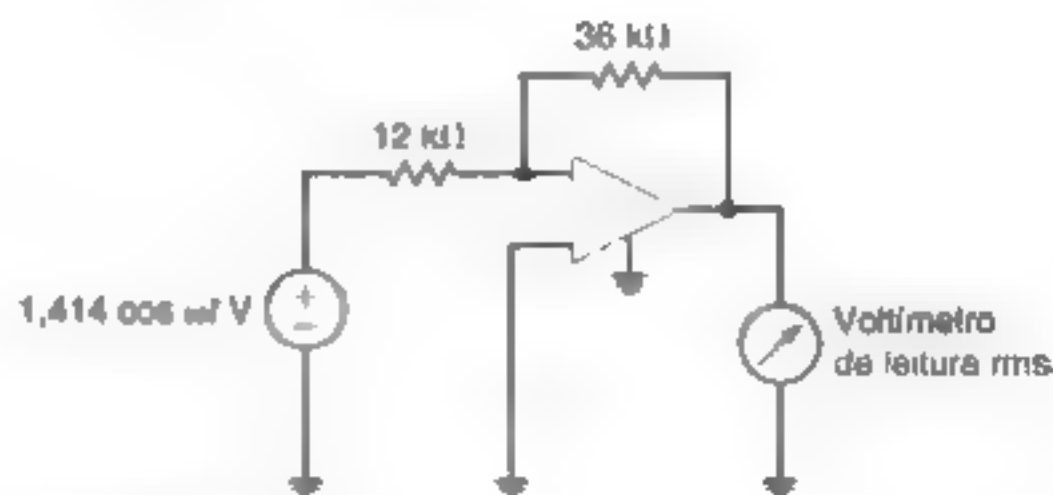


Figura 9PEP-4

9PEP-5 Determine a potência média fornecida ao resistor mostrado na Fig. 9PEP-5a se a forma de onda da corrente for a mostrada na Fig. 9PEP-5b.

- a. 18,78 W
- b. 8,64 W
- c. 2,82 W
- d. 10,91 W

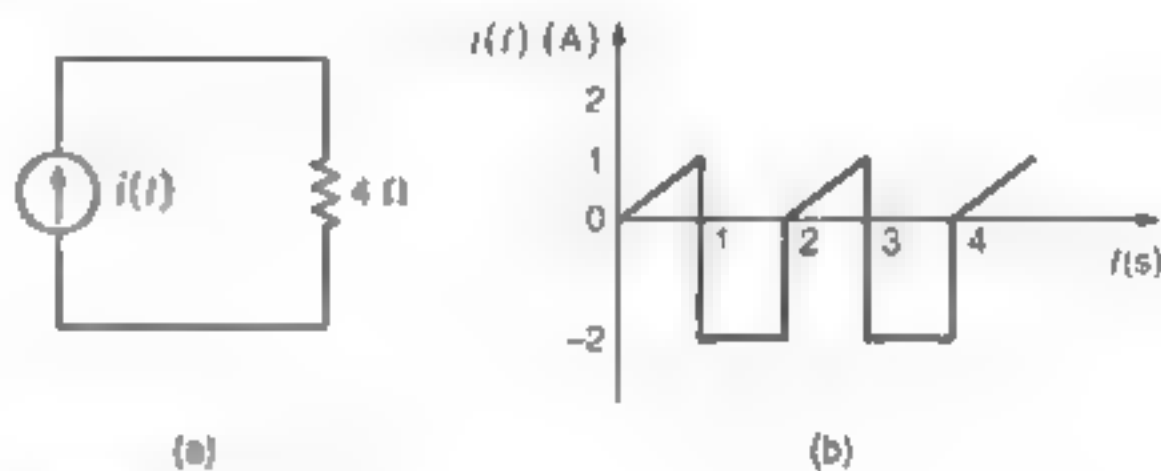
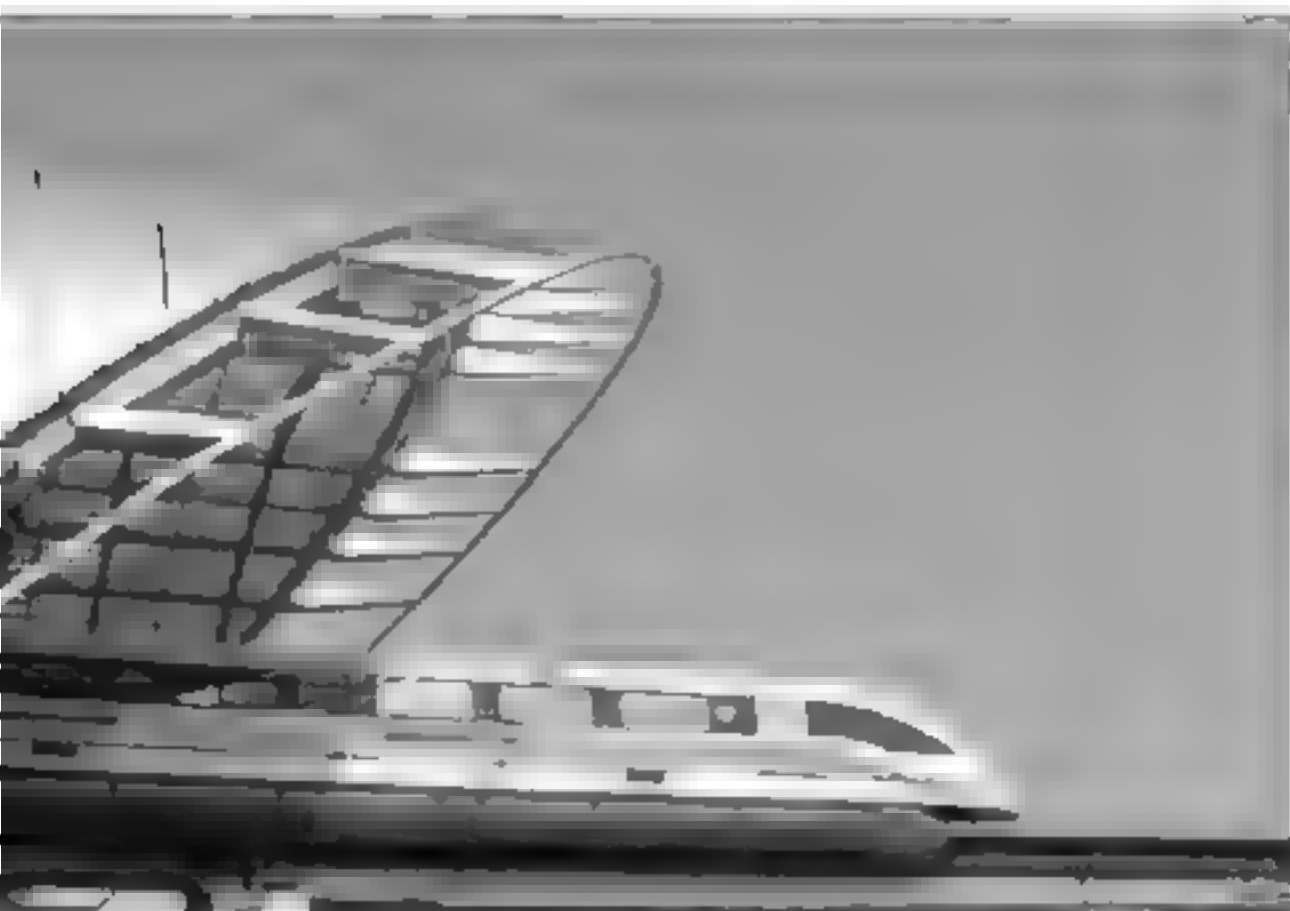


Figura 9PEP-5

REDES MAGNETICAMENTE ACOPLADAS



Fudan Li/iStockphoto

AS METAS DE APRENDIZAGEM DESTE CAPÍTULO SÃO:

- Compreender os conceitos de indutância mútua, coeficiente de acoplamento e razão de espiras
- Saber como calcular as tensões e correntes nos circuitos que contêm indutância mútua
- Saber como calcular as tensões e correntes nos circuitos que contêm transformadores ideais

Trem de Levitação Magnética Estaria o histórico correio expresso Pony Express para o correio eletrônico de hoje como a carruagem do Velho Oeste está para o moderno transporte por terra de alta tecnologia? Você imaginaria um meio de transporte tão veloz? A melhor resposta a essas perguntas é o trem de levitação magnética – na forma abreviada, MagLev. Esses trens de passageiros – os mais rápidos do mundo – flutuam sobre um campo magnético cerca de 10 mm acima dos trilhos e são impulsionados por um motor de indução linear. O Aeroporto Internacional de Shanghai Pudong possui um MagLev que atinge velocidades superiores a 480 km/s (300 mph), 60% mais rápidos do que os famosos Trens-Bala do Japão. Ele propicia uma viagem bem mais confortável e se desloca ao longo da costa acionado por energia magnética.

Os trens MagLev são utilizados principalmente quando duas grandes cidades devem ser interligadas por serviços de passageiros. Os sistemas MagLev possuem diversas vantagens: requerem menos manutenção, uma vez que não existem partes móveis;

operam sem atrito, apenas a resistência do ar; não apresentam ruído de rodas; não emitem fumaça; desenvolvem velocidades surpreendentes. As únicas desvantagens são os custos mais altos e a falta de compatibilidade com a infraestrutura existente.

Este capítulo introduz um conceito central da tecnologia do MagLev: os efeitos magnéticos do acoplamento mútuo nos circuitos resultantes das variações das correntes. As tensões induzidas nos ramos próximos são devidas a esses campos magnéticos – esse acoplamento é quantificado pelos termos de indutância mútua. Os transformadores que aumentam ou diminuem as tensões e as correntes do ramo primário para o ramo secundário são úteis de diversas formas, como a transmissão de potência por longas distâncias ou para realizar o casamento de impedância em equipamentos acústicos. Requerendo campos magnéticos extremamente altos, os trens MagLev dependem desses mesmos efeitos de acoplamento mútuo para realizar o transporte a altas velocidades. Não é mágica; é eletromagnetismo.

10.1 Indutância Mútua

Ao introduzir esse assunto, o leitor deve se lembrar de que, nas análises aqui apresentadas, admite-se que os elementos considerados sejam ideais. Por exemplo, ignora-se a resistência da bobina utilizada na fabricação de um indutor, bem como qualquer capacitância parasita que possa existir. Essa consideração é especialmente importante na discussão da indutância mútua, uma vez que uma análise exata desse tópico é bastante envolvente. Conforme de hábito, neste texto trata-se o tópico de maneira objetiva e direta, desconsiderando-se as características do sistema que estejam além do escopo deste livro, uma vez que tais detalhes apenas tornariam mais complicada a apresentação.

Para iniciar a discussão da indutância mútua, duas importantes leis serão aqui relembradas: a lei de Ampère e a lei de Faraday. A lei de Ampère estabelece que o fluxo de corrente elétrica gera um campo magnético. Se esse campo for acoplado a um circuito elétrico e variar com o tempo (enlace de fluxo), a lei de Faraday estabelece que será gerada uma tensão no circuito acoplado. Embora este fenômeno ocorra em grande parte nos circuitos, esse efeito é amplificado nas bobinas, uma vez que a geometria do circuito amplia o efeito de acoplamento. Tendo em mente essas ideias, considere a situação ideal mostrada na Fig. 10.1, na qual uma corrente i flui por uma bobina de N espiras e produz um campo magnético, representado pelo fluxo magnético ϕ . O enlace de fluxo para essa bobina será

$$\lambda = N\phi \quad 10.1$$

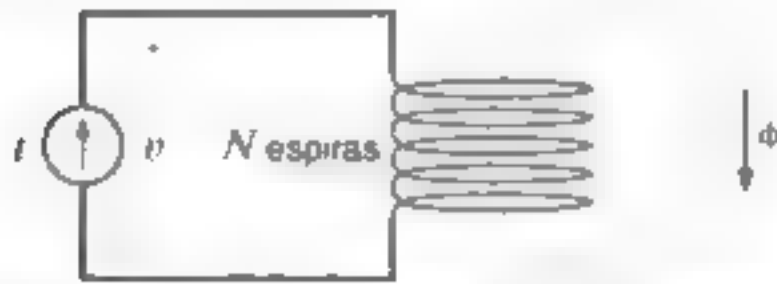


Figura 10.1 Enlace do fluxo magnético ϕ em uma bobina com N espiras.

Para os sistemas lineares estudados neste livro, o enlace de fluxo e a corrente estão relacionados por

$$\lambda = L_1 i \quad 10.2$$

A constante de proporcionalidade entre o enlace de fluxo e a corrente é a indutância, que foi discutida no Capítulo 6. As Eqs. (10.1) e (10.2) podem ser utilizadas para expressar o fluxo magnético em função da corrente.

$$\phi = \frac{L_1}{N} i \quad 10.3$$

Conforme estabelecido pela lei de Faraday, a tensão induzida na bobina está relacionada com a taxa de variação com o tempo do enlace de fluxo λ .

$$v = \frac{d\lambda}{dt} \quad 10.4$$

Substituindo a Eq. (10.2) na Eq. (10.4) e utilizando a regra da cadeia no cálculo da derivada, tem-se

$$v = \frac{d\lambda}{dt} = \frac{d}{dt}(L_1 i) = L_1 \frac{di}{dt} + i \frac{dL_1}{dt} \quad 10.5$$

As indutâncias nas análises aqui realizadas não variam com o tempo, logo a Eq. (10.5) reduz-se à definição da equação para o indutor ideal, conforme mostrado na Fig. 10.2.

$$v = L \frac{di}{dt} \quad 10.6$$

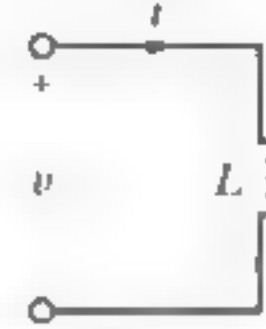


Figura 10.2 Um indutor ideal.

Note que a tensão e a corrente nessa figura satisfazem à convenção passiva de sinais. A Eq. (10.6) estabelece que uma corrente i que flui através de uma bobina produz uma tensão v entre os terminais da bobina.

Admite-se agora que uma segunda bobina com N_2 espiras seja posicionada a uma distância próxima o suficiente de uma bobina de N_1 espiras de modo que o fluxo magnético produzido pela corrente i enlace a segunda bobina. Nenhuma corrente flui na segunda bobina, conforme mostrado na Fig. 10.3. Pela lei de Faraday, uma tensão v_2 será induzida porque o fluxo magnético ϕ enlaça a segunda bobina. O enlace de fluxo da bobina 1 é

$$\lambda_1 = N_1 \phi = L_1 i_1 \quad 10.7$$

A corrente que flui na bobina 1 produz uma tensão expressa por $v_1 = \frac{d\lambda_1}{dt} = L_1 \frac{di_1}{dt}$, na qual L_1 é a indutância. Nos sistemas com múltiplas bobinas, refere-se a L_1 como a autoindutância da bobina 1. O enlace de fluxo da bobina 2 é $\lambda_2 = N_2 \phi$ e, pela lei de Faraday, a tensão v_2 é expressa por

$$\begin{aligned} v_2 &= \frac{d\lambda_2}{dt} = \frac{d}{dt}(N_2 \phi) = \frac{d}{dt} \left(N_2 \left(\frac{L_1}{N_1} i_1 \right) \right) \\ &= \frac{N_2}{N_1} L_1 \frac{di_1}{dt} = L_{21} \frac{di_1}{dt} \end{aligned} \quad 10.8$$

Observe que a tensão v_2 é diretamente proporcional à variação de i_1 com o tempo. A constante de proporcionalidade, L_{21} , é definida como indutância mútua e expressa em henrys. Diz-se assim, que as bobinas mostradas na Fig. 10.3 estão magneticamente acopladas.

Conecta-se agora uma fonte de corrente aos terminais da bobina 2, conforme mostrado na Fig. 10.4. Ambas as correntes contribuem para o fluxo magnético ϕ . Para a configuração de bobinas e orientação de correntes mostradas nessa figura, o enlace de fluxo de cada bobina será

$$\lambda_1 = L_1 i_1 + L_{12} i_2 \quad 10.9$$

$$\lambda_2 = L_{21} i_1 + L_2 i_2 \quad 10.10$$

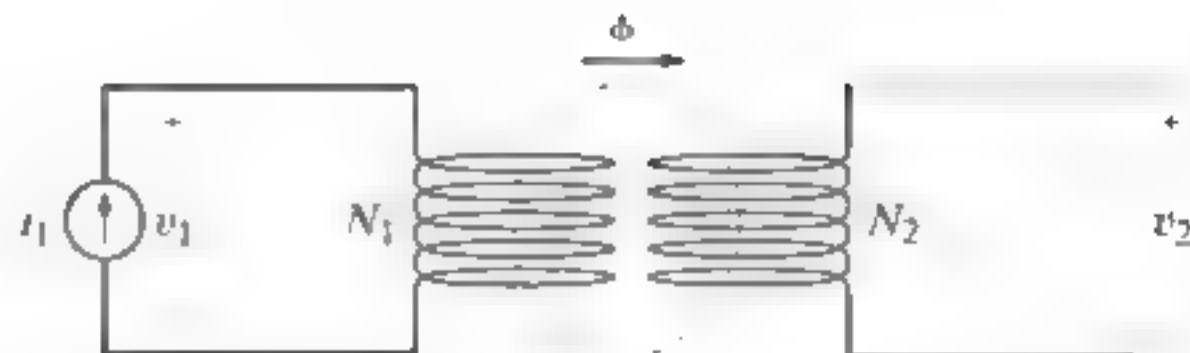


Figura 10.3 Duas bobinas magneticamente acopladas.

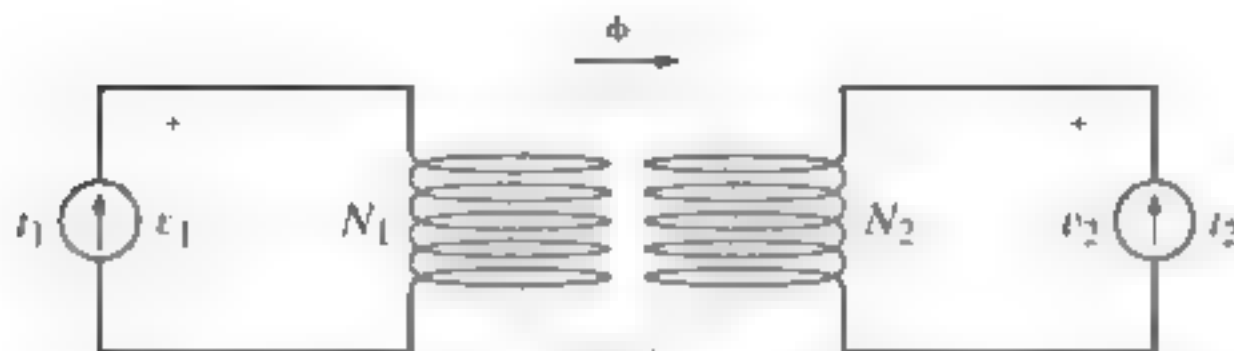


Figura 10.4 Duas bobinas magneticamente acopladas alimentadas por fontes de corrente.

Aplicando a lei de Faraday, tem-se

$$v_1 = \frac{d\lambda_1}{dt} = L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} \quad 10.11$$

$$v_2 = \frac{d\lambda_2}{dt} = L_2 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt} \quad 10.12$$

Como o estudo aqui apresentado limita-se aos sistemas lineares, $L_{12} = L_{21} = M$, em que M é o símbolo utilizado para representar uma indutância mútua. Com base nas Eqs. (10.11) e (10.12), pode-se verificar que a tensão entre os terminais de cada bobina é composta de dois termos: um termo próprio devido à corrente que flui na própria bobina e um termo mútuo devido à corrente que flui na outra bobina.

Caso o sentido da corrente i_2 no circuito da Fig. 10.4 seja invertido, as Eqs. (10.9) até (10.12) ficam

$$\lambda_1 = L_1 i_1 - M i_2 \quad 10.13$$

$$\lambda_2 = M i_1 + L_2 i_2 \quad 10.14$$

$$v_1 = \frac{d\lambda_1}{dt} = L_1 \frac{di_1}{dt} - M \frac{di_2}{dt} \quad 10.15$$

$$v_2 = \frac{d\lambda_2}{dt} = M \frac{di_1}{dt} + L_2 \frac{di_2}{dt} \quad 10.16$$

As Eqs. (10.13) até (10.16) também podem ser obtidas a partir do circuito mostrado na Fig. 10.5. Note que a bobina 2 nessa figura apresenta um arranjo de enrolamento diferente, se comparado ao da bobina 2 do circuito mostrado na Fig. 10.4.

Os diagramas de circuito se tornarão um pouco mais complexos quando os detalhes da configuração de enrolamento forem incluídos. O uso da convenção do ponto permite introduzir esses detalhes simplificando os diagramas de circuito. A Fig. 10.6a mostra o diagrama de circuito das bobinas magneticamente acopladas da Fig. 10.4. As bobinas são representadas por dois indutores acoplados com as indutâncias próprias L_1 e L_2 , e a indutância mútua M . Lembre-se de que a tensão entre os terminais de cada bobina consiste em dois termos: um termo referente à autoindutância devido à corrente que flui pela bobina, e um termo referente à indutância mútua devido à corrente que flui na outra bobina. O termo de autoindutância resulta na mesma tensão que foi discutida em um capítulo anterior. O termo de indutância mútua resulta da corrente que flui pela outra bobina acoplada.

Na Fig. 10.6a, os termos de indutância mútua são positivos quando ambas as correntes entram na extremidade definida pelos pontos. O oposto será verdadeiro quando uma corrente entra na extremidade definida por um ponto e a outra corrente sai pela extremidade definida por um ponto, conforme ilustrado na Fig. 10.6b. Essa observação pode ser utilizada no desenvolvimento de um procedimento geral para se escrever as equações de

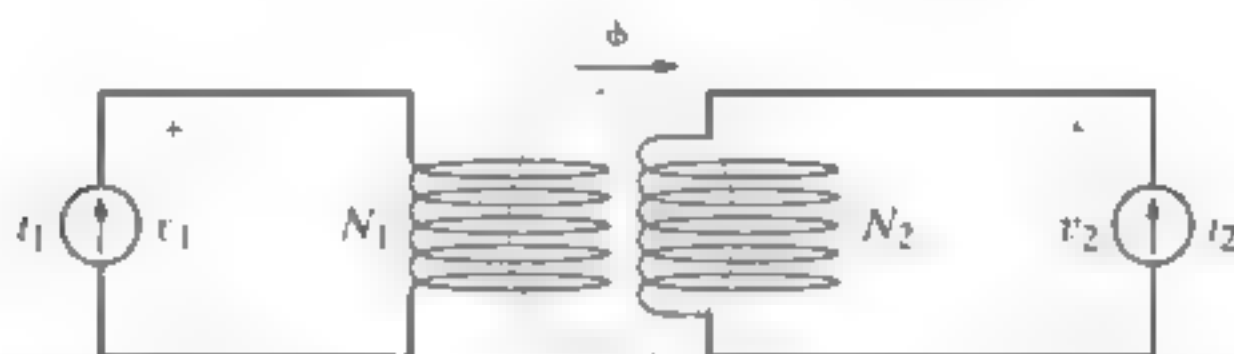


Figura 10.5 Bobinas magneticamente acopladas com configuração de enrolamento distinta.

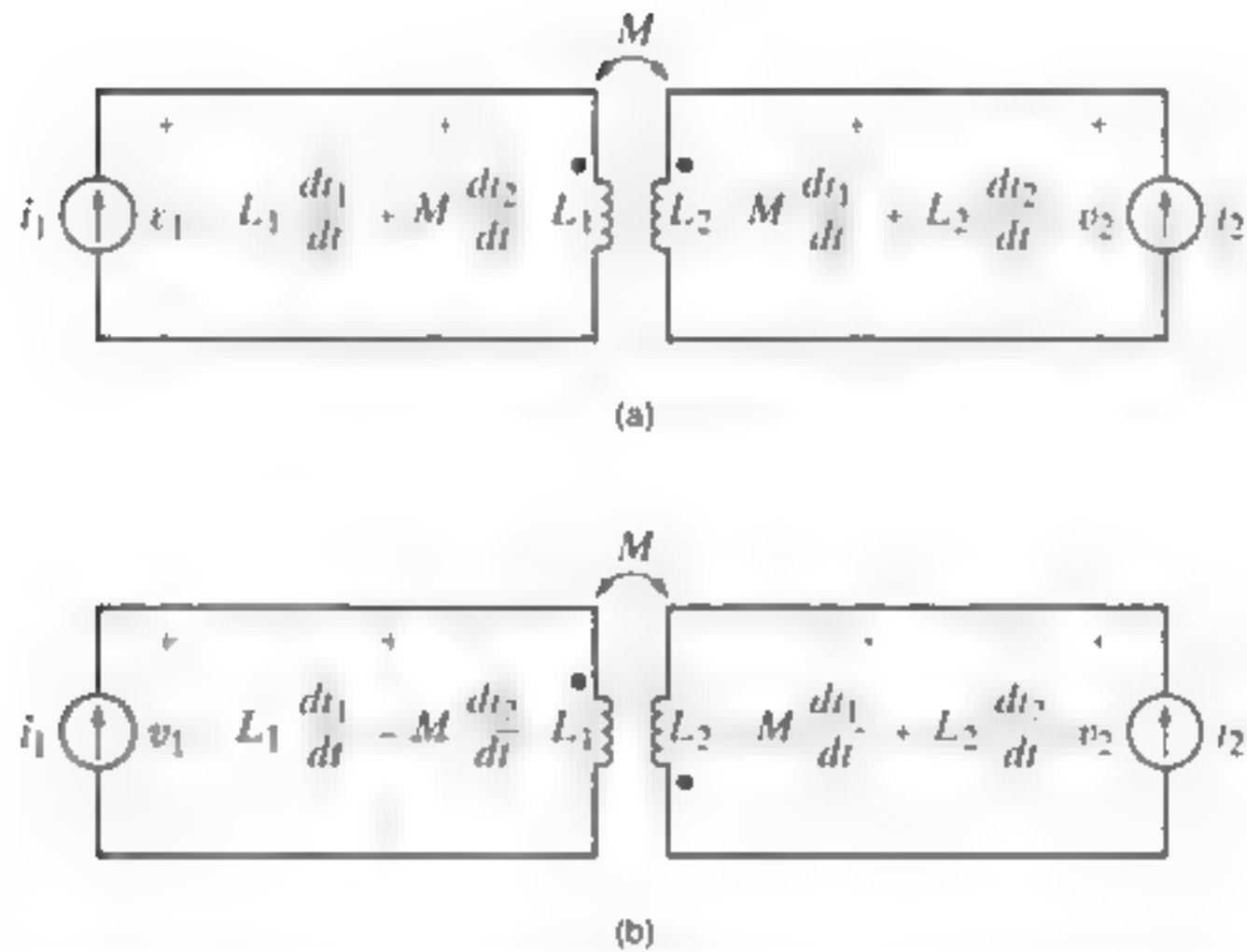


Figura 10.6 Diagramas de circuito para bobinas magneticamente acopladas.

circuito para os indutores magneticamente acoplados. A Fig. 10.7a mostra o mesmo diagrama da Fig. 10.6a, exceto pelo fato de a tensão entre os terminais dos indutores ser particionada pelos termos referentes à autoindutância e à indutância mútua. A polaridade dos termos de autoindutância — $L_1 di_1/dt$ e $L_2 di_2/dt$ — é definida pela convenção passiva de sinais utilizada extensivamente ao longo deste livro. Esses termos estarão presentes mesmo que as bobinas não sejam magneticamente acopladas. Os termos de indutância mútua na Fig. 10.7a possuem a mesma polaridade que os termos de autoindutância. Observe que ambas as correntes estão entrando nas extremidades definidas pelos pontos na Fig. 10.7a. O oposto é verdadeiro na Fig. 10.7b. Os termos de autoindutância possuem a mesma polaridade dis-

cutida anteriormente; entretanto, as polaridades dos termos de indutância mútua são diferentes daqueles mostrados na Fig. 10.7a. Pode-se, agora, estabelecer um enunciado geral:

Quando uma corrente é definida de modo a entrar no terminal com o ponto de uma bobina, ela produz uma tensão na bobina acoplada que é positiva no terminal com o ponto. Analogamente, quando uma corrente é definida de modo a entrar no terminal sem o ponto de uma bobina, ela produz uma tensão na bobina acoplada que será positiva no terminal sem o ponto.

Ilustra-se agora o uso desse enunciado por meio de alguns exemplos.

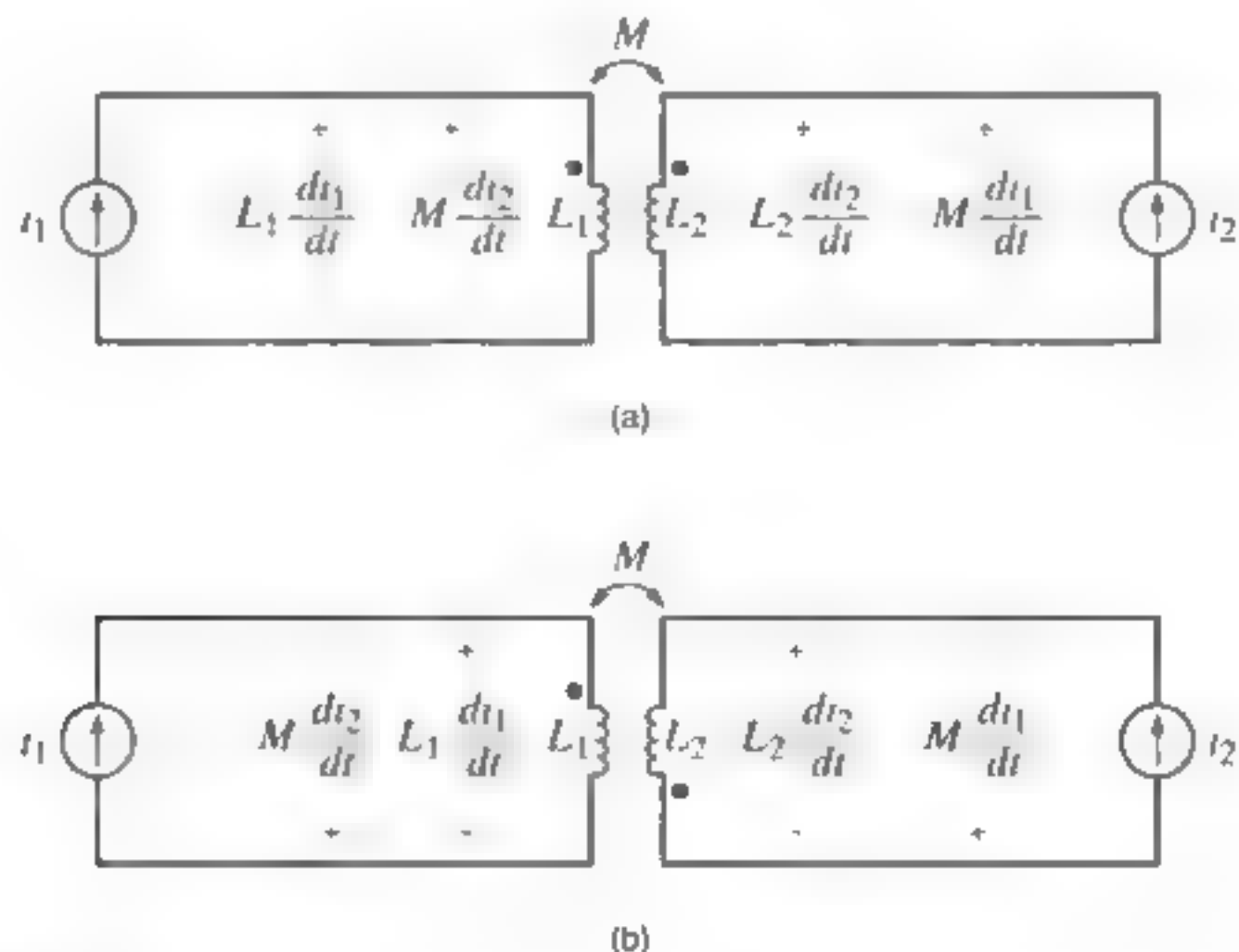


Figura 10.7 Diagramas de circuito para bobinas magneticamente acopladas mostrando os termos de tensão referentes à autoindutância e à indutância mútua.

Estratégia para Solução de Problemas

Indutores Magneticamente Acoplados

Etapa 1. Indique as correntes das malhas. Em geral é muito mais fácil escrever as equações das malhas para um circuito contendo indutores magneticamente acoplados que escrever as equações nodais.

Etapa 2. Escreva as equações das malhas aplicando a LKT. Caso uma corrente definida entre no terminal de

uma bobina com um ponto, ela produzirá uma tensão na outra bobina que será positiva no terminal com o ponto. Se uma corrente definida entra no terminal sem ponto de uma bobina, ela produzirá uma tensão na outra bobina que será positiva no terminal sem o ponto.

Etapa 3. Resolva o problema para as correntes das malhas.

EXEMPLO 10.1

Determine as equações referentes às tensões $v_1(t)$ e $v_2(t)$ do circuito mostrado na Fig. 10.8a.

SOLUÇÃO

Os termos distintos de tensão para o circuito são mostrados no diagrama de circuito da Fig. 10.8b. A polaridade dos termos de autoindução é definida pela convenção passiva de sinais.

Para ambas as bobinas, as correntes indicadas entram nos terminais sem o ponto. Como resultado, a polaridade das tensões produzidas por essas correntes é positiva no terminal sem o ponto da outra bobina. As equações para $v_1(t)$ e $v_2(t)$ são

$$v_1(t) = L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt}$$

$$v_2(t) = L_2 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt}$$

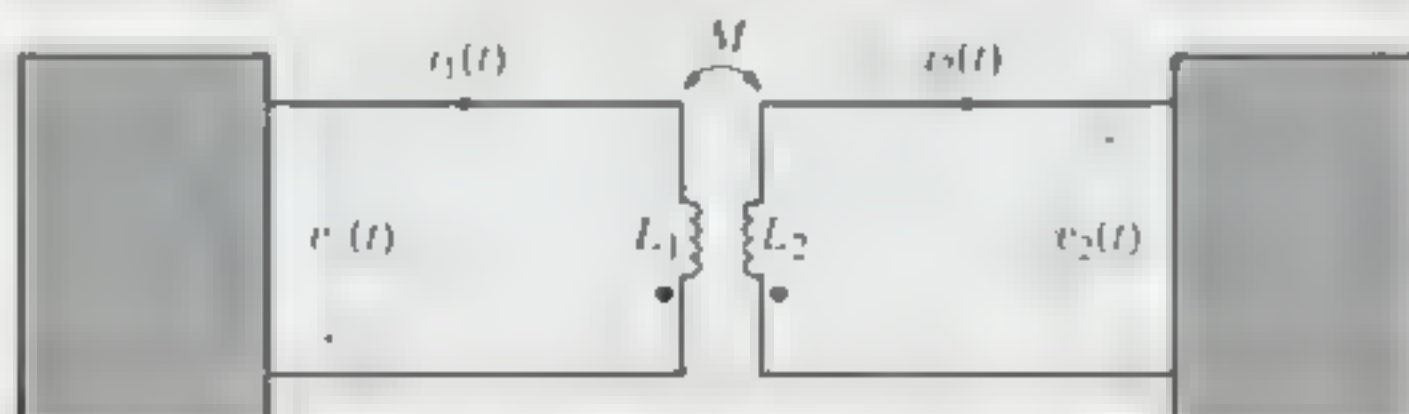


Figura 10.8a Circuito utilizado no Exemplo 10.1.

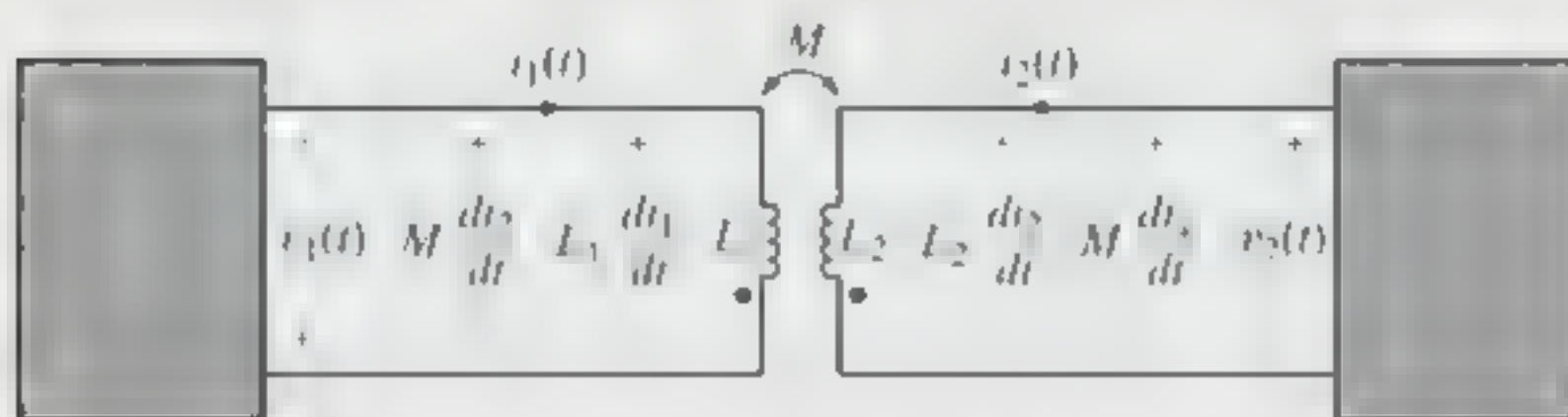


Figura 10.8b Circuito mostrando os termos de tensão referentes à autoindutância e à indutância mútua.

EXEMPLO 10.2

Escreva as equações das malhas do circuito mostrado na Fig. 10.9a utilizando as correntes de malha indicadas.

SOLUÇÃO

O circuito mostrado na Fig. 10.9b mostra os termos de tensão da malha 1. A polaridade dos termos de autoindutância para L_1 e L_2 é determinada pela convenção passiva de sinais. A

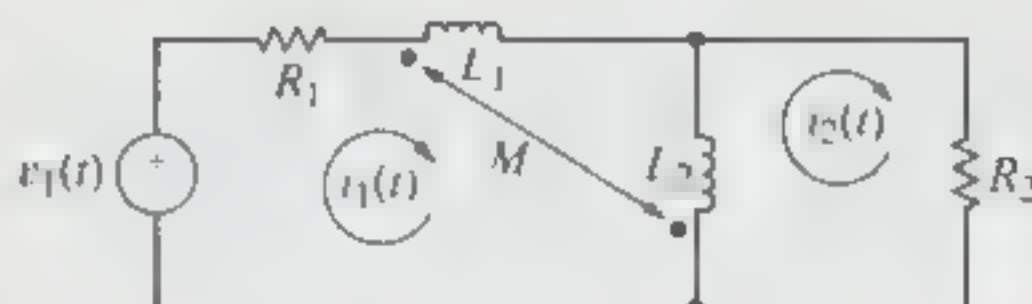


Figura 10.9a Circuito utilizado no Exemplo 10.2.

corrente $(i_2 - i_1)$ entra no terminal com o ponto do indutor L_2 . Essa corrente produz o termo de indução mútua mostrado entre os terminais do indutor L_1 . A corrente i_1 entra no terminal com o ponto de L_1 e produz a tensão entre os terminais de L_2 , a qual é positiva no terminal com o ponto. A equação dessa malha fica

$$v_1(t) = R_1 i_1(t) + L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{d}{dt} (i_2 - i_1) \\ + L_2 \frac{d}{dt} (i_1 - i_2) - M \frac{di_1}{dt}$$

Os termos de tensão para a segunda malha são mostrados na Fig. 10.9c. A equação da malha 2 é

$$R_2 i_2(t) + L_2 \frac{d}{dt} (i_2 - i_1) + M \frac{di_1}{dt} = 0 \\ + M \frac{d}{dt} (i_2 - i_1) - \\ + L_1 \frac{di_1}{dt} -$$



Figura 10.9b Circuito mostrando os termos de tensão da malha 1.

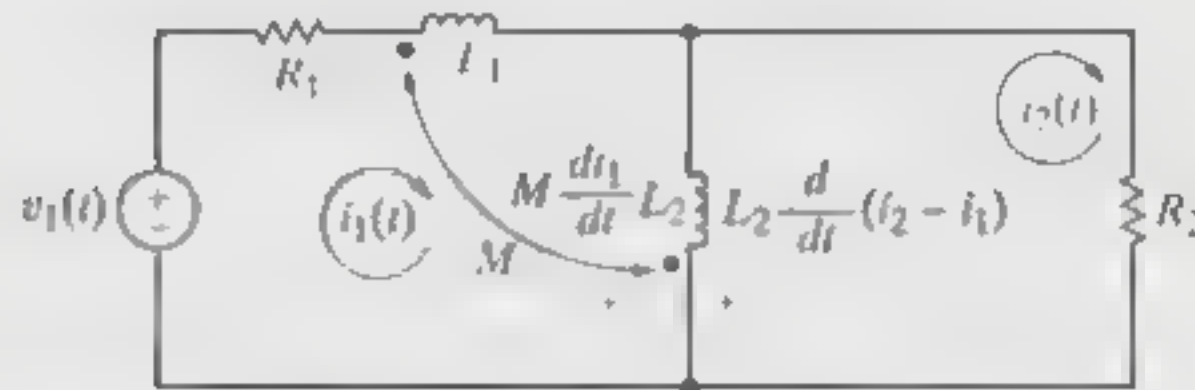


Figura 10.9c Circuito mostrando os termos de tensão da malha 2.

Avaliação do Aprendizado

E10.1 Escreva as equações para as tensões $v_1(t)$ e $v_2(t)$ do circuito mostrado na Fig. E10.1

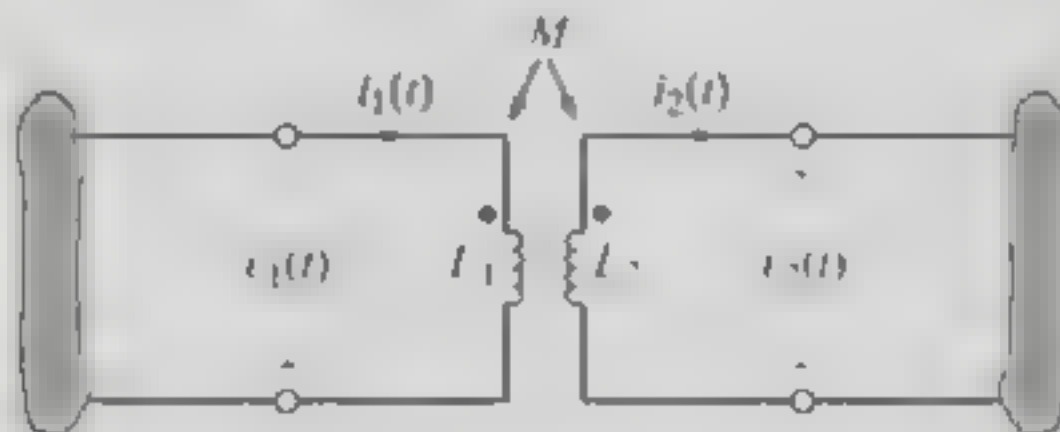


Figura E10.1

RESPOSTAS

$$v_1(t) = L_1 \frac{di_1(t)}{dt} + M \frac{di_2(t)}{dt} +$$

$$v_2(t) = L_2 \frac{di_2(t)}{dt} + M \frac{di_1(t)}{dt}$$

Admita que o circuito acoplado mostrado na Fig. 10.10 seja excitado por uma fonte harmônica. As tensões serão da forma $V_1 e^{j\omega t}$ e $V_2 e^{j\omega t}$, e as correntes serão da forma $I_1 e^{j\omega t}$ e $I_2 e^{j\omega t}$, em que V_1 , V_2 , I_1 e I_2 são fasores. Substituindo essas tensões e

correntes nas Eqs. (10.11) e (10.12), e utilizando o fato de que $L_{12} = L_{21} = M$, obtém-se

$$V_1 = j\omega L_1 I_1 + j\omega M I_2$$

$$V_2 = j\omega L_2 I_2 + j\omega M I_1$$

10.17

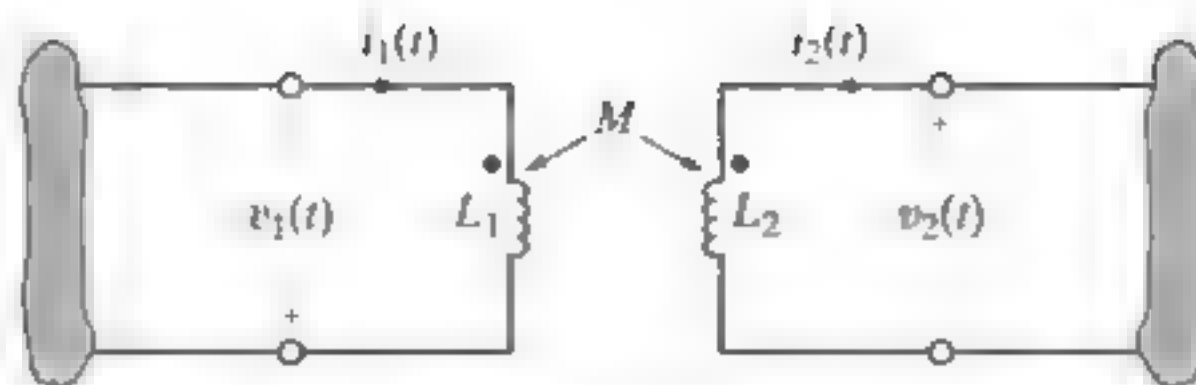


Figura 10.10 Bobinas mutuamente acopladas.

O modelo do circuito acoplado no domínio da frequência é idêntico àquele no domínio do tempo, exceto pela forma com que os componentes e as variáveis são designados. Os sinais

dos termos mútuos são manipulados da mesma maneira que foi feito no domínio do tempo.

EXEMPLO 10.3

As duas bobinas mutuamente acopladas mostradas na Fig. 10.11a podem ser interconectadas de quatro formas possíveis. Deseja-se determinar a indutância equivalente de cada uma das quatro possíveis interconexões.

SOLUÇÃO

A primeira configuração é mostrada na Fig. 10.11b. Nessa situação

$$\begin{aligned} V &= j\omega L_1 I + j\omega M I + j\omega L_2 I + j\omega M I \\ &= j\omega L_{eq} I \end{aligned}$$

na qual $L_{eq} = L_1 + L_2 + 2M$.

A segunda configuração é mostrada na Fig. 10.11c. Utilizando a LKT, obtém-se

$$\begin{aligned} V &= j\omega L_1 I - j\omega M I + j\omega L_2 I - j\omega M I \\ &= j\omega L_{eq} I \end{aligned}$$

em que $L_{eq} = L_1 + L_2 - 2M$.

A terceira configuração é mostrada na Fig. 10.11d e redesenhada na Fig. 10.11e. As duas equações provenientes da aplicação da LKT são

$$V = j\omega L_1 I_1 + j\omega M I_2$$

$$V = j\omega M I_1 + j\omega L_2 I_2$$

A solução dessas equações para I_1 e I_2 fornece

$$I_1 = \frac{V(L_2 - M)}{j\omega(L_1 L_2 - M^2)}$$

$$I_2 = \frac{V(L_1 - M)}{j\omega(L_1 L_2 - M^2)}$$

Utilizando a LKC tem-se

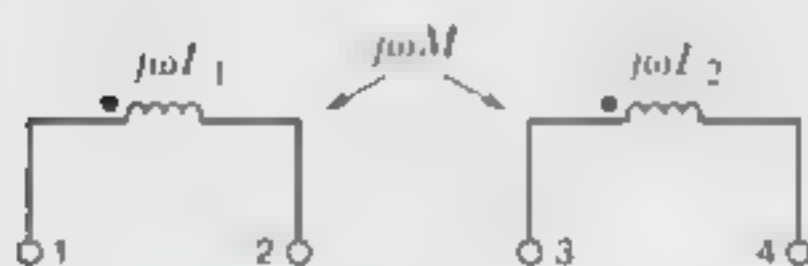
$$I = I_1 + I_2 = \frac{V(L_1 + L_2 - 2M)}{j\omega(L_1 L_2 - M^2)} = \frac{V}{j\omega L_{eq}}$$

onde

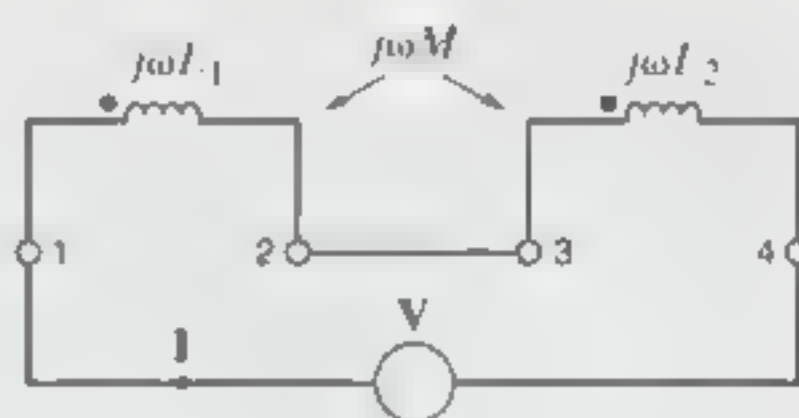
$$L_{eq} = \frac{L_1 L_2 - M^2}{L_1 + L_2 - 2M}$$

Finalmente, a quarta configuração é mostrada na Fig. 10.11f. As equações das tensões nesse caso serão as mesmas utilizadas no terceiro caso, exceto pelo fato de os sinais dos termos mútuos serem negativos. Assim,

$$L_{eq} = \frac{L_1 L_2 - M^2}{L_1 + L_2 + 2M}$$

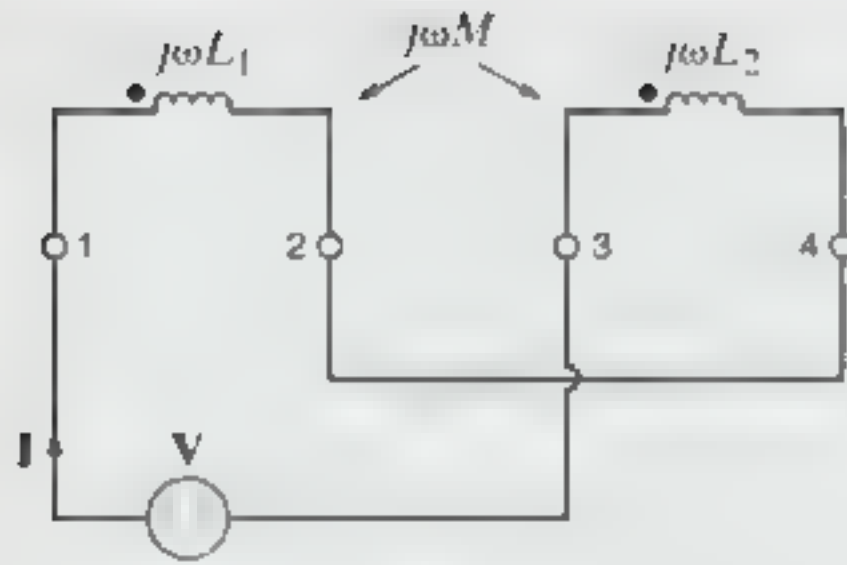


(a)

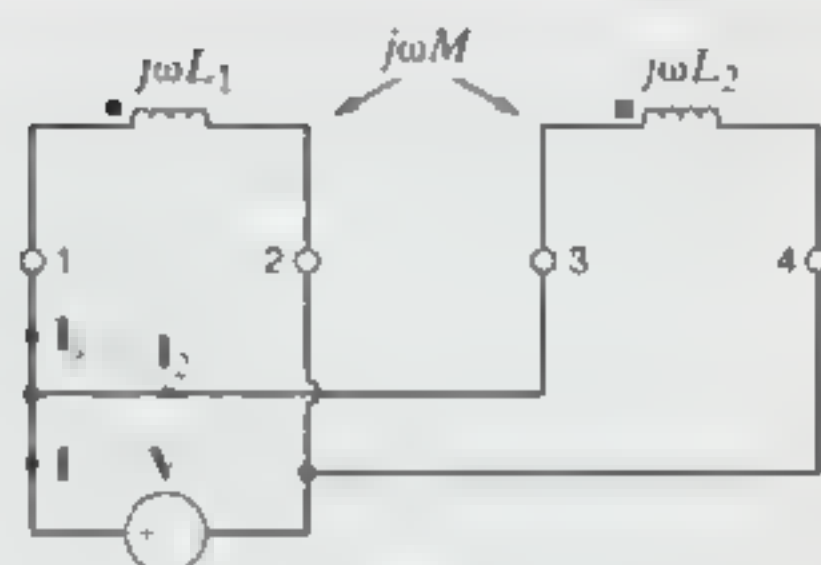


(b)

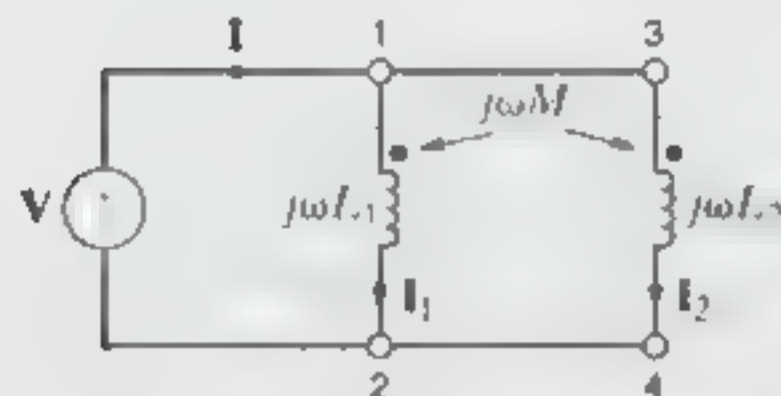
Figura 10.11 Circuitos utilizados no Exemplo 10.3.



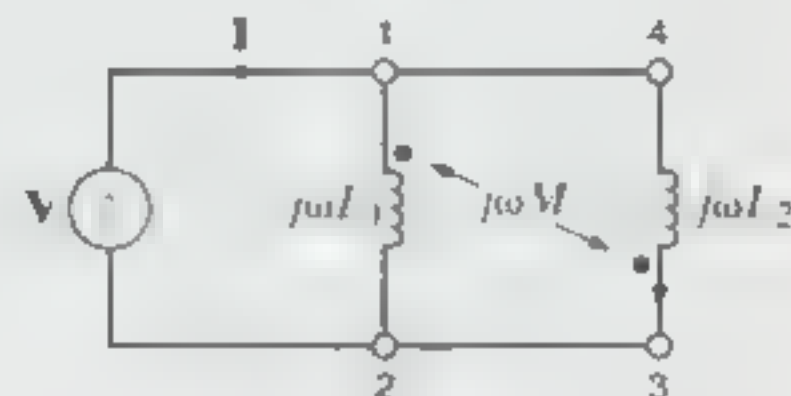
(c)



(d)



(e)



(f)

Figura 10.11 Circuitos utilizados no Exemplo 10.3 (continuação).

EXEMPLO 10.4

Deseja-se determinar a tensão de saída V_s do circuito mostrado na Fig. 10.12.

SOLUÇÃO

As duas equações da LKT para a rede são

$$\begin{aligned} (2 + j4)I_1 - j2I_2 &= 24 \angle 30^\circ \\ -j2I_1 + (2 + j6)I_2 &= 0 \end{aligned}$$

A solução dessas equações fornece

$$I_2 = 2,68 \angle 3,43^\circ \text{ A}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} V_s &= 2I_2 \\ &= 5,36 \angle 3,43^\circ \text{ V} \end{aligned}$$



Figura 10.12 Exemplo de um circuito magneticamente acoplado.

Considera-se, agora, um exemplo mais complexo envolvendo indutância mútua.

EXEMPLO 10.5

Considere o circuito mostrado na Fig. 10.13. Deseja-se escrever as equações das malhas para essa rede.

SOLUÇÃO

Devido às múltiplas correntes presentes nos indutores que se acoplam, deve-se ter muita atenção ao escrever as equações do circuito.

As equações das malhas da rede na forma fasorial são

$$\begin{aligned} R_1(I_1 - I_2) + j\omega L_1(I_1 - I_2) + j\omega M(I_1 - I_2) + \frac{1}{j\omega C_1}(I_1 - I_2) &= V \\ \frac{1}{j\omega C_1}(I_2 - I_1) + j\omega L_1(I_2 - I_1) + j\omega M(I_2 - I_1) + R_2I_2 \\ + j\omega L_2(I_2 - I_1) + j\omega M(I_2 - I_1) + R_3(I_2 - I_1) &= 0 \\ R_3(I_3 - I_1) + j\omega L_3(I_3 - I_1) + j\omega M(I_3 - I_1) \\ + \frac{1}{j\omega C_2}I_3 + R_4I_3 &= 0 \end{aligned}$$

as quais podem ser reescritas na forma

$$\begin{aligned} \left(R_1 + j\omega L_1 + \frac{1}{j\omega C_1} \right) \mathbf{I}_1 & - \left(j\omega L_1 + \frac{1}{j\omega C_1} - j\omega M \right) \mathbf{I}_2 \\ & - j\omega M \mathbf{I}_3 = \mathbf{V} \\ \left(j\omega L_1 + \frac{1}{j\omega C_1} - j\omega M \right) \mathbf{I}_1 & + \left(\frac{1}{j\omega C_1} + j\omega L_1 + R_2 + j\omega L_2 + R_3 - j2\omega M \right) \mathbf{I}_2 \\ & + (j\omega L_2 + R_3 - j\omega M) \mathbf{I}_3 = 0 \\ -j\omega M \mathbf{I}_1 + (R_3 + j\omega L_2 - j\omega M) \mathbf{I}_2 & + \left(R_3 + j\omega L_2 + \frac{1}{j\omega C_2} + R_4 \right) \mathbf{I}_3 = 0 \end{aligned}$$

Observe a forma simétrica dessas equações.

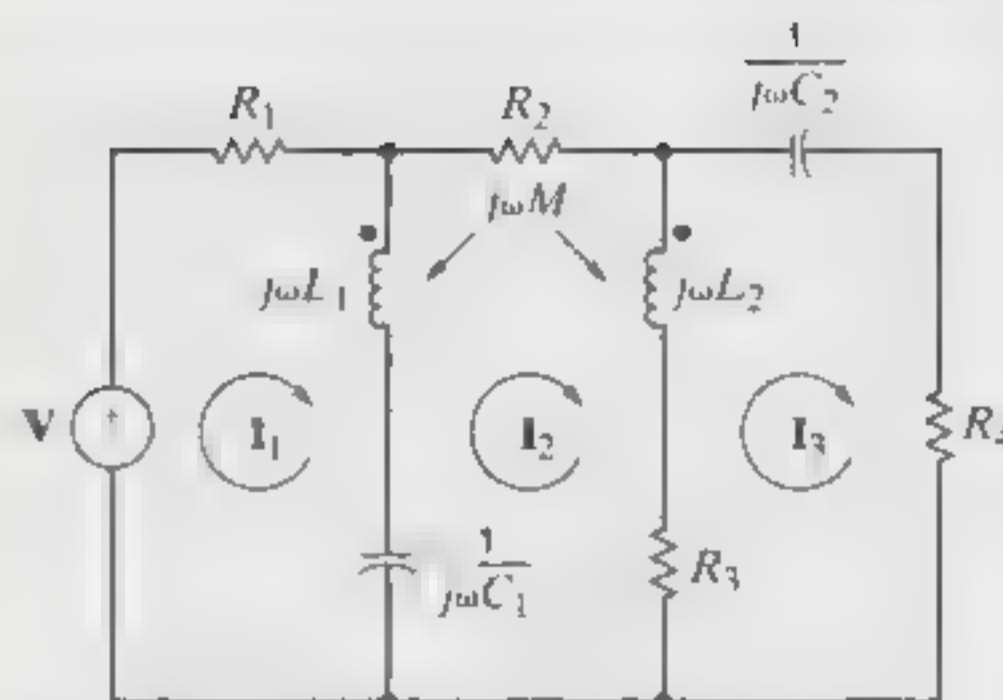


Figura 10.13 Exemplo de um circuito magneticamente acoplado.

Avaliação do Aprendizado

E10.2 Determine as correntes \mathbf{I}_1 e \mathbf{I}_2 , e a tensão de saída \mathbf{V} , da rede mostrada na Fig. E10.2.

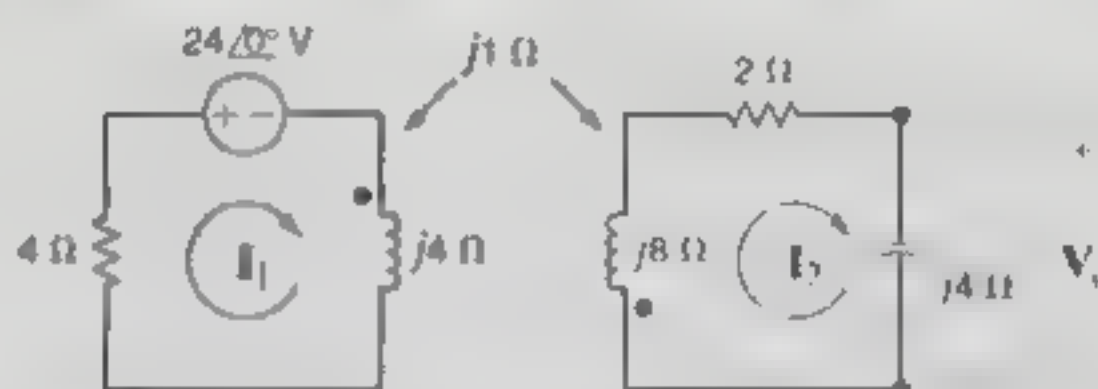


Figura E10.2

RESPOSTAS:

$$\mathbf{I}_1 = +4,29 \angle 137,2^\circ \text{ A};$$

$$\mathbf{I}_2 = 0,96 \angle -16,26^\circ \text{ A e}$$

$$\mathbf{V}_1 = 3,84 \angle -106,26^\circ \text{ V}$$

E10.3 Escreva as equações, na forma padrão, provenientes da aplicação da LKT à rede mostrada na Fig. E10.3.

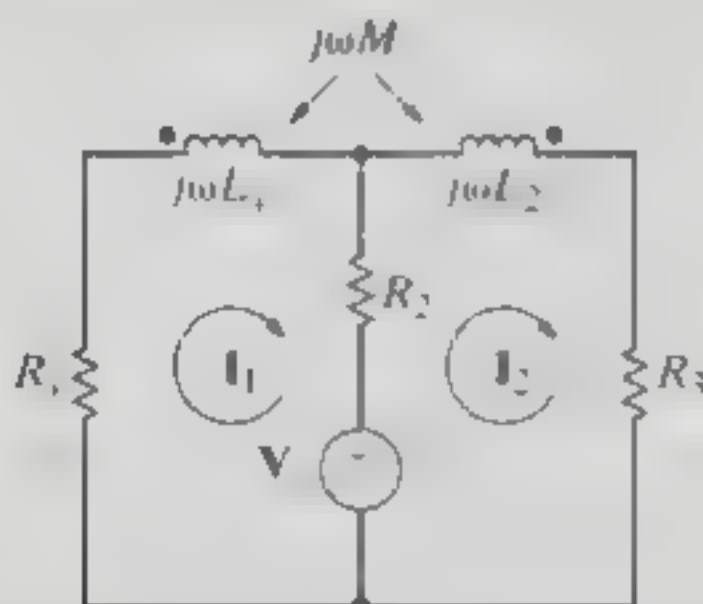


Figura E10.3

RESPOSTAS:

$$(R_1 + j\omega L_1 + R_2) \mathbf{I}_1$$

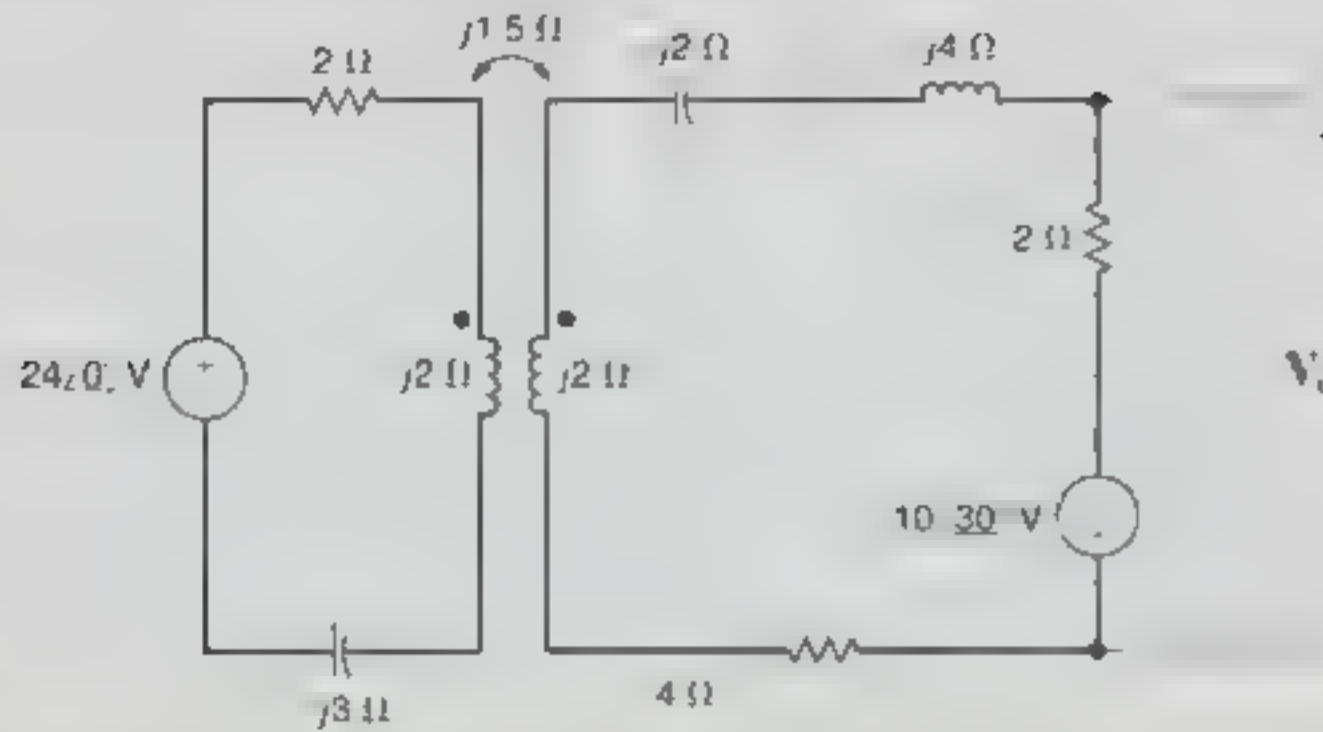
$$- (R_2 + j\omega M) \mathbf{I}_2 = -\mathbf{V}_1 \text{ e}$$

$$(R_2 + j\omega M) \mathbf{I}_1$$

$$+ (R_1 + j\omega L_2 + R_3) \mathbf{I}_2$$

$$= \mathbf{V}_1.$$

E10.4 Determine a tensão V_x do circuito mostrado na Fig. E10.4

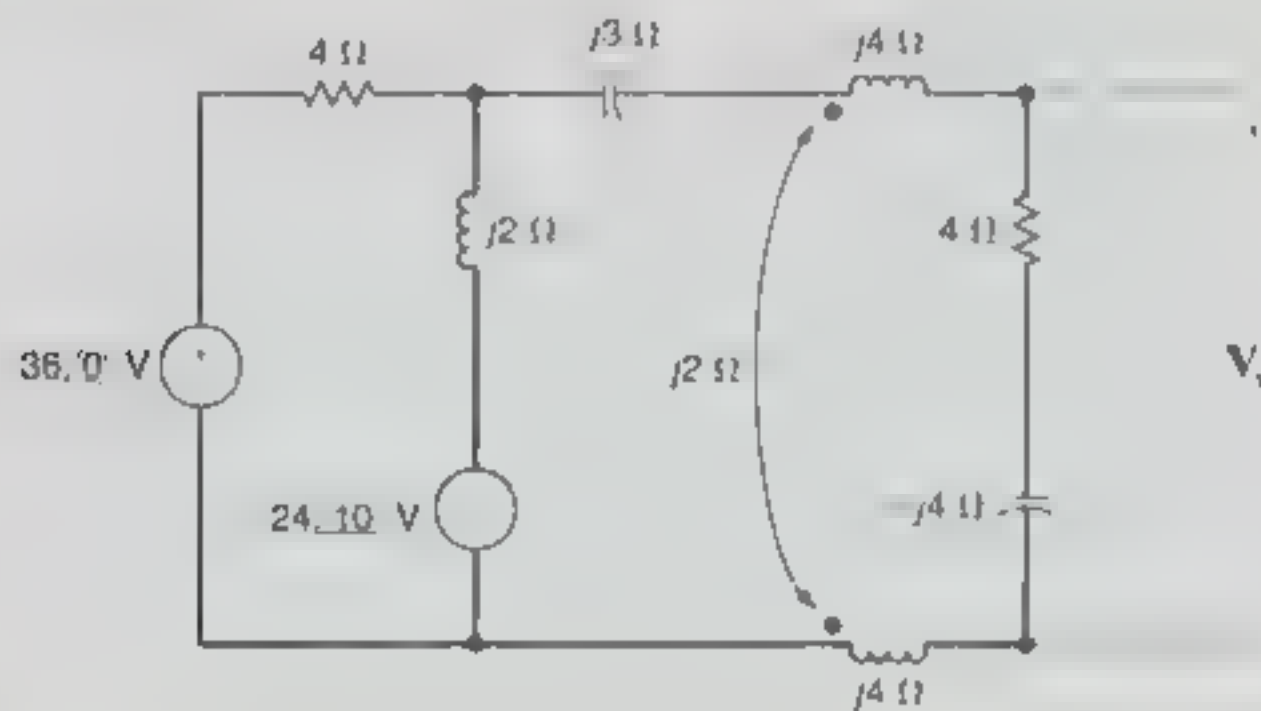


RESPOSTA:

$$V_x = 11,2 \angle 53,5^\circ \text{ V}$$

Figura E10.4

E10.5 Determine a tensão V_x do circuito mostrado na Fig. E10.5

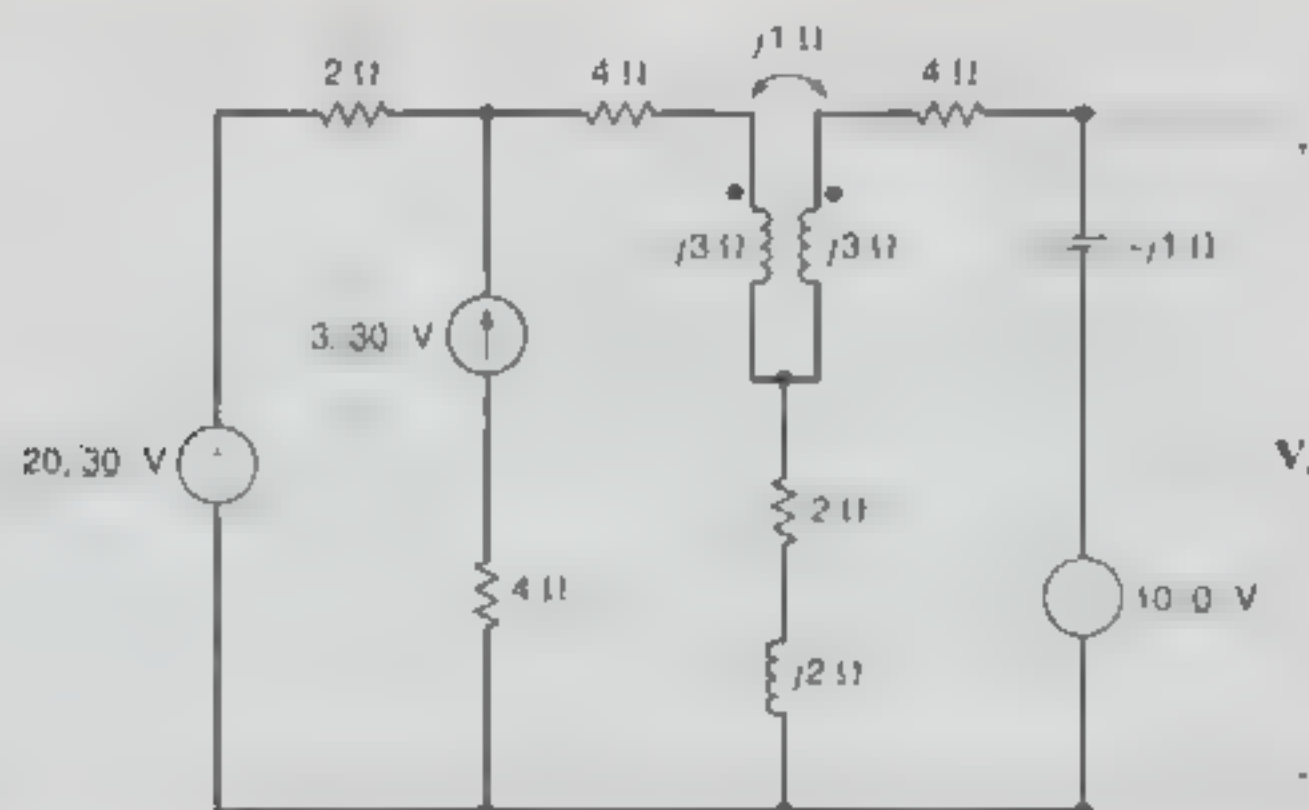


RESPOSTA:

$$V_x = 32,8 \angle 12,14^\circ \text{ V}$$

Figura E10.5

E10.6 Determine a tensão V_x do circuito mostrado na Fig. E10.6.



RESPOSTA:

$$V_x = 11,4 \angle 33,4^\circ \text{ V}$$

Figura E10.6

EXEMPLO 10.6

Dada a rede mostrada na Fig. 10.14 com os parâmetros $Z_F = 3 + j1 \, \Omega$, $j\omega L_1 = j2 \, \Omega$, $j\omega L_2 = j2 \, \Omega$, $j\omega M = j1 \, \Omega$, e $Z_L = 1 - j1 \, \Omega$, determine a impedância percebida pela fonte de tensão V_F .

SOLUÇÃO

As equações das malhas da rede são

$$\begin{aligned} V_F &= (Z_F + j\omega L_1)I_1 - j\omega M I_2 \\ 0 &= -j\omega M I_1 + (j\omega L_2 + Z_L)I_2 \end{aligned}$$

Definindo-se, agora, $Z_{11} = Z_F + j\omega L_1$ e $Z_{22} = j\omega L_2 + Z_L$, a segunda equação fornece

$$I_2 = \frac{j\omega M}{Z_{22}} I_1$$

Sendo essa equação da malha secundária substituída na equação da malha primária, obtém-se

$$V_F = Z_{11} I_1 + \frac{\omega^2 M^2}{Z_{22}} I_1$$

e, portanto,

$$\frac{V_F}{I_1} = Z_{11} + \frac{\omega^2 M^2}{Z_{22}}$$

que é a impedância vista pela fonte V_F . Note que o termo mútuo está elevado ao quadrado e, portanto, a impedância é independente da localização dos pontos.

Utilizando os valores dos parâmetros do circuito, obtém-se

$$\begin{aligned} \frac{V_F}{I_1} &= (3 + j1 + j2) + \frac{1}{j2 + 1 - j1} \\ &= 3 + j3 + 0,5 - j0,5 \\ &= 3,5 + j2,5 \, \Omega \end{aligned}$$

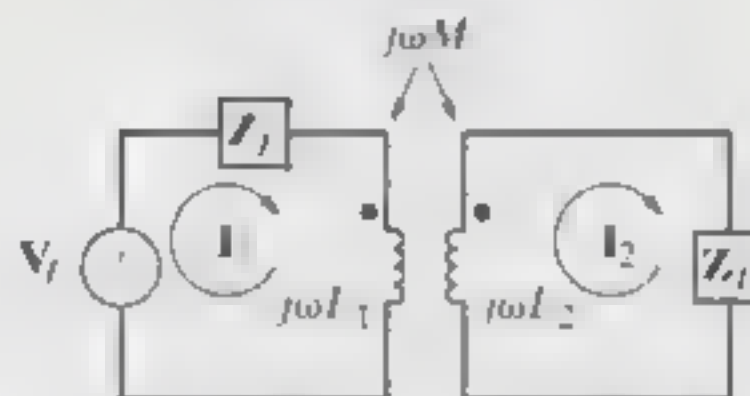


Figura 10.14 Circuito empregado no Exemplo 10.6.

Avaliação do Aprendizado

E10.7 Obtenha a impedância vista pela fonte do circuito mostrado na Fig. E10.7



Figura E10.7

RESPOSTA:
 $Z_F = 2,25 / 20,9^\circ \, \Omega$.

10.2 Análise através da Energia

Desenvolve-se, agora, uma análise utilizando a energia associada aos indutores mutuamente acoplados. Essa análise fornecerá algumas relações interessantes para os componentes do circuito. A análise envolverá a realização de um experimento com a rede mostrada na Fig. 10.15. Antes de iniciar o experimento, atribui-se a todas as tensões e correntes do circuito o valor zero. Quando o circuito atinge sua condição de repouso, inicia-se o experimento aumentando a corrente $i_1(t)$ de zero até um valor I_1 com os terminais do lado direito mantidos abertos. Com esses terminais abertos, $i_2(t) = 0$ e, portanto, a potência que entra por esses terminais será nula. A potência instantânea que entra pelos terminais do lado esquerdo vale

$$p(t) = v_1(t)i_1(t) = \left[L_1 \frac{di_1(t)}{dt} \right] i_1(t)$$

A energia armazenada no circuito acoplado no instante t_1 quando $i_1(t) = I_1$ será,

$$\int_0^{t_1} v_1(t)i_1(t) dt = \int_0^{t_1} L_1 i_1(t) \frac{di_1(t)}{dt} dt = \frac{1}{2} L_1 I_1^2$$

Dando continuidade ao experimento, a partir do tempo t_1 , aumenta-se a corrente $i_2(t)$ de zero até um valor I_2 em um tempo t_2 , mantendo-se $i_1(t)$ com o valor constante de I_1 . A energia fornecida por meio dos terminais do lado direito vale

$$\int_{t_1}^{t_2} v_2(t)i_2(t) dt = \int_0^{I_2} L_2 i_2(t) di_2(t) = \frac{1}{2} L_2 I_2^2$$

Todavia, durante o intervalo de tempo entre t_1 e t_2 , a tensão $v_1(t)$ será

$$v_1(t) = L_1 \frac{di_1(t)}{dt} + M \frac{di_2(t)}{dt}$$

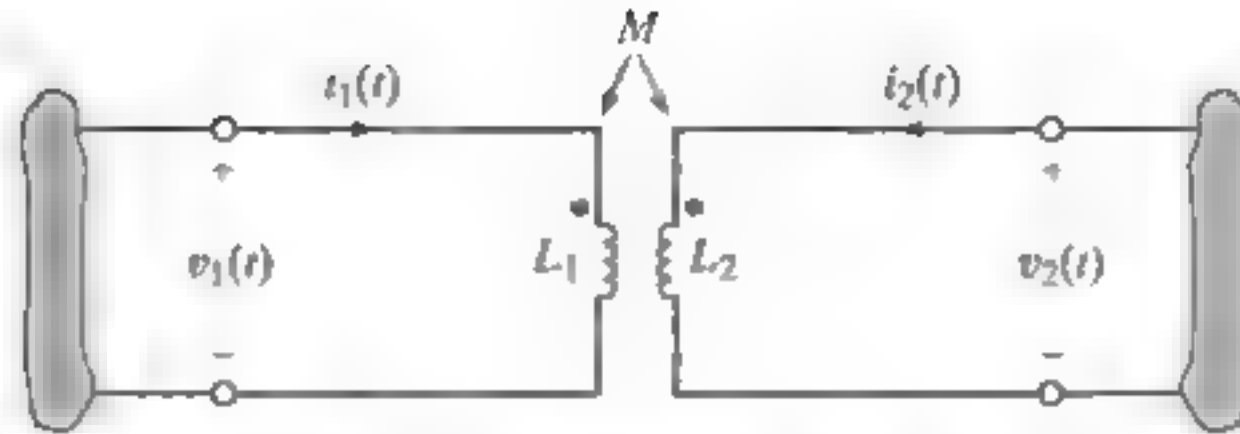


Figura 10.15 Circuito magneticamente acoplado.

Uma vez que $i_1(t)$ é constante de valor I_1 , a energia fornecida por meio dos terminais do lado esquerdo valerá

$$\int_0^{t_2} v_1(t) i_1(t) dt = \int_0^{t_2} M \frac{di_2(t)}{dt} I_1 dt = M I_1 \int_0^{t_2} di_2(t) = M I_1 I_2$$

Portanto, a energia total armazenada na rede para $t > t_2$ é

$$w = \frac{1}{2} L_1 I_1^2 + \frac{1}{2} L_2 I_2^2 + M I_1 I_2 \quad 10.18$$

Certamente, poder-se-ia repetir todo o experimento com o ponto em L_1 ou L_2 invertido, porém não simultaneamente e, nesse caso, o sinal do termo da indutância mútua seria negativo, resultando em

$$w = \frac{1}{2} L_1 I_1^2 + \frac{1}{2} L_2 I_2^2 - M I_1 I_2$$

É muito importante que o leitor perceba que, ao se derivar a equação precedente utilizando uma experimentação, os valores de I_1 e I_2 poderiam ser quaisquer a *qualquer tempo*; portanto, a energia armazenada nos indutores magneticamente acoplados em qualquer instante de tempo é expressa por

$$w(t) = \frac{1}{2} L_1 [i_1(t)]^2 + \frac{1}{2} L_2 [i_2(t)]^2 \pm M i_1(t) i_2(t) \quad 10.19$$

Os dois indutores acoplados representam uma rede passiva e, portanto, a energia armazenada nessa rede deve ser não negativa para quaisquer valores das indutâncias e das correntes.

A equação da energia instantânea armazenada no circuito magnético pode ser escrita como

$$w(t) = \frac{1}{2} L_1 i_1^2 + \frac{1}{2} L_2 i_2^2 \pm M i_1 i_2$$

Somando e subtraindo o termo $1/2(M^2/L_2)i_1^2$, e arrumando a equação tem-se

$$w(t) = \frac{1}{2} \left(L_1 - \frac{M^2}{L_2} \right) i_1^2 + \frac{1}{2} L_2 \left(i_2 + \frac{M}{L_2} i_1 \right)^2$$

Com base nessa expressão pode-se verificar que a energia instantânea armazenada será não negativa se

$$M \leq \sqrt{L_1 L_2} \quad 10.20$$

Note que essa equação estabelece um limite superior para o valor da indutância mútua.

Define-se o coeficiente de acoplamento entre os dois indutores, L_1 e L_2 , como

$$k = \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}} \quad 10.21$$

e nota-se pela Eq. (10.20) que sua faixa de valores é

$$0 \leq k \leq 1 \quad 10.22$$

Esse coeficiente indica a quantidade do fluxo em uma bobina que está sendo enlaçado pela outra bobina; isto é, se todo fluxo em uma bobina atingir a outra bobina, então têm-se 100% de acoplamento e $k = 1$. Para valores altos de k (por exemplo, $k > 0,5$), os indutores estarão fortemente acoplados, e para pequenos valores de k (por exemplo, $k \leq 0,5$), as bobinas são consideradas fracamente acopladas. Caso não haja acoplamento, $k = 0$. As equações anteriores indicam que o valor para a indutância mútua está confinado à faixa

$$0 \leq M \leq \sqrt{L_1 L_2} \quad 10.23$$

e que o limite superior é a média geométrica das indutâncias L_1 e L_2 .

EXEMPLO 10.7

O circuito acoplado mostrado na Fig. 10.16a possui um coeficiente de acoplamento de 1 (isto é, $k = 1$). Deseja-se determinar a energia armazenada nos indutores mutuamente acoplados no tempo $t = 5$ ms. Considere $L_1 = 2,653$ mH e $L_2 = 10,61$ mH.

SOLUÇÃO

Utilizando os dados fornecidos para as indutâncias mútuas, tem-se

$$M = \sqrt{L_1 L_2} = 5,31 \text{ mH}$$

O circuito equivalente no domínio da frequência é mostrado na Fig. 10.16b, em que os valores das impedâncias para X_{L_1} , X_{L_2} e X_M são 1, 4 e 2, respectivamente. As equações das malhas da rede são, portanto,

$$(2 + j1)I_1 - j2I_2 = 24 \angle 0^\circ$$

$$-j2I_1 + (4 + j4)I_2 = 0$$

A solução dessas equações para as duas correntes das malhas fornece

$$I_1 = 9,41 \angle -11,31^\circ \text{ A} \quad \text{e} \quad I_2 = 3,33 \angle -33,69^\circ \text{ A}$$

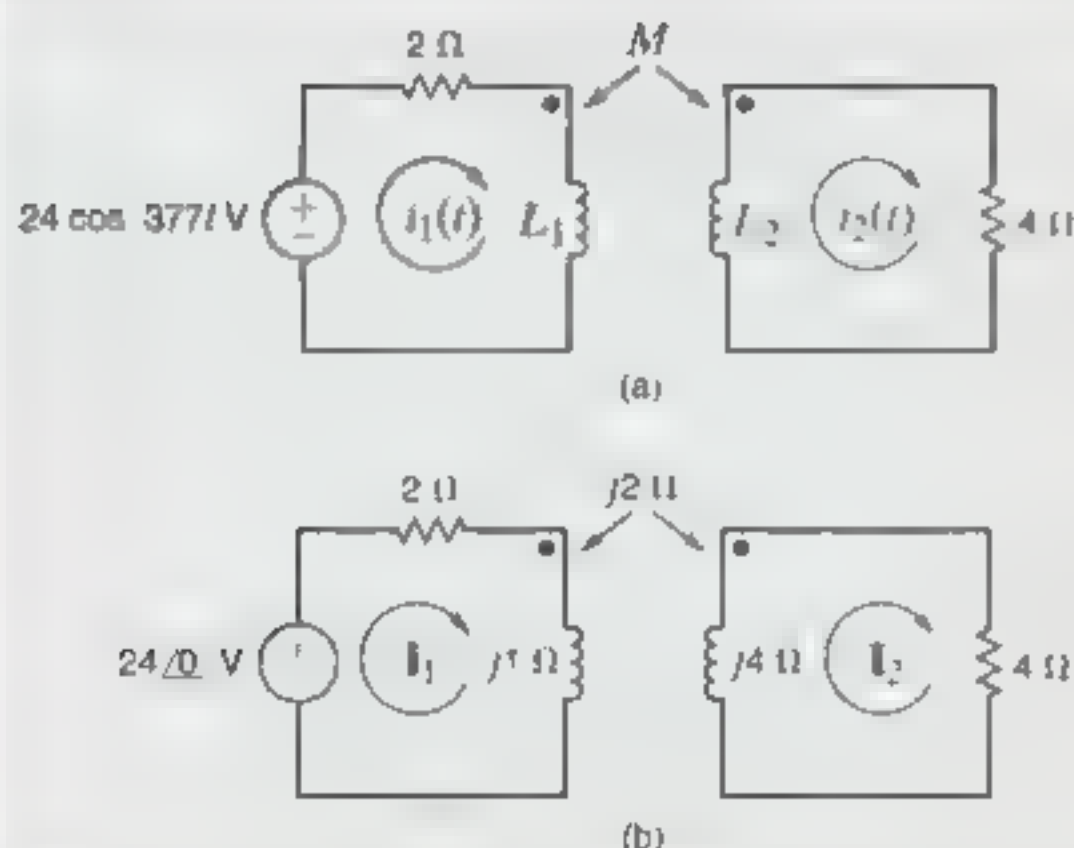


Figura 10.16 Exemplo de um circuito magneticamente acoplado representado nos domínios do tempo e na frequência.

e, portanto,

$$i_1(t) = 9.41 \cos(377t - 11.31^\circ) \text{ A}$$

$$i_2(t) = 3.33 \cos(377t + 33.69^\circ) \text{ A}$$

No tempo $t = 5 \text{ ms}$, $377t = 1.885 \text{ rad}$ ou 108° e, portanto,

$$i_1(t = 5 \text{ ms}) = 9.41 \cos(108^\circ - 11.31^\circ) = -1.10 \text{ A}$$

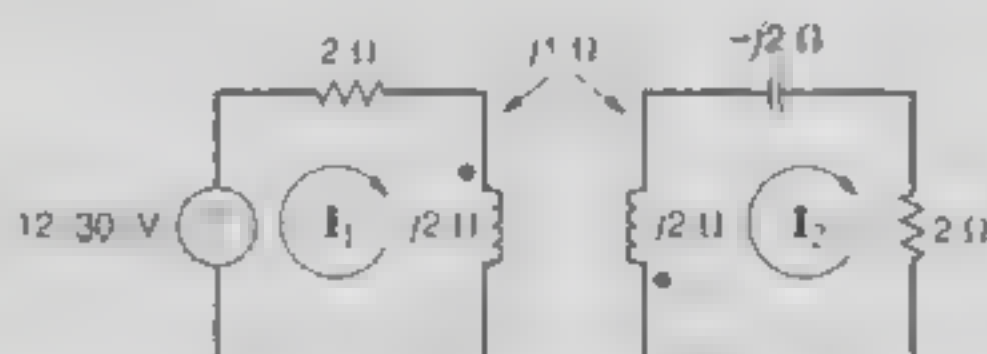
$$i_2(t = 5 \text{ ms}) = 3.33 \cos(108^\circ + 33.69^\circ) = -2.61 \text{ A}$$

Logo, a energia armazenada nos indutores acoplados em $t = 5 \text{ ms}$ será

$$\begin{aligned} w(t)|_{t=0.005 \text{ s}} &= \frac{1}{2}(2.653)(10^{-3})(-1.10)^2 + \frac{1}{2}(10.61)(10^{-3})(-2.61)^2 \\ &\quad - (5.31)(10^{-3})(-1.10)(-2.61) \\ &= (1.61)(10^{-3}) + (16.14)(10^{-3}) - (15.25)(10^{-3}) \\ &= 22.5 \text{ mJ} \end{aligned}$$

Avaliação do Aprendizado

E10.8 A rede mostrada na Fig. E10.8 opera a 60 Hz. Calcule a energia armazenada nos indutores mutuamente acoplados no tempo $t = 10 \text{ ms}$.



RESPOSTA: $w(10 \text{ ms}) = 39 \text{ mJ}$.

Figura E10.8

10.3 o Transformador Ideal

Considere a situação ilustrada na Fig. 10.17 que mostra duas bobinas cujos filamentos são enrolados no entorno de um único núcleo magnético fechado. Admita que o fluxo no núcleo, Φ , enlace todas as espiras de ambas as bobinas. No caso ideal, a resistência dos filamentos é desprezada. Examinando, agora, as equações acopladas sob a condição de que o mesmo fluxo passa através de cada enrolamento, tem-se

$$v_1(t) = N_1 \frac{d\Phi}{dt}$$

e,

$$v_2(t) = N_2 \frac{d\Phi}{dt}$$

e, portanto,

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{N_1 \frac{d\Phi}{dt}}{N_2 \frac{d\Phi}{dt}} = \frac{N_1}{N_2} \quad 10.24$$

A lei de Ampère requer que

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = i_{\text{fechado}} = N_1 i_1 + N_2 i_2 \quad 10.25$$

em que H é a intensidade do campo magnético e a integral é avaliada ao longo da trajetória fechada percorrida pelo fluxo ao longo do núcleo transformador. Se $H = 0$, que é o caso de um núcleo magnético ideal com permeabilidade infinita, tem-se que

$$N_1 i_1 + N_2 i_2 = 0 \quad 10.26$$

ou

$$\frac{i_1}{i_2} = -\frac{N_2}{N_1} \quad 10.27$$

Note que, se a Eq. (10.26) for dividida por N_1 e multiplicada por v_1 , o resultado será

$$v_1 i_1 + \frac{N_2}{N_1} v_1 i_2 = 0$$

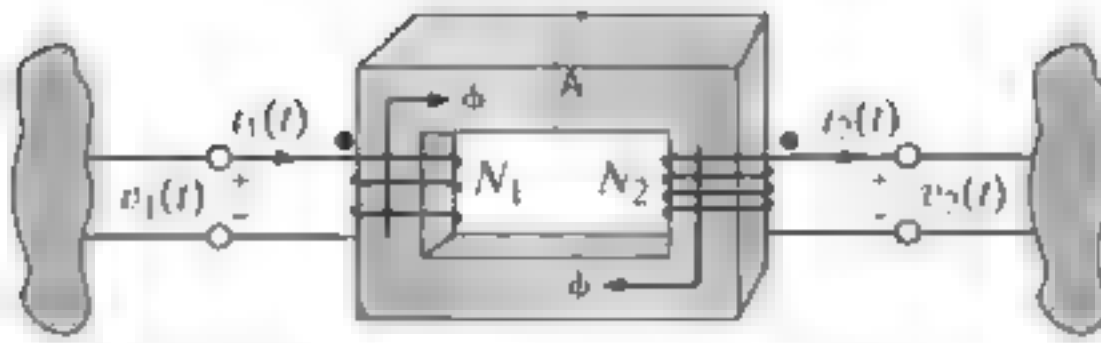


Figura 10.17 Transformador empregando um núcleo magnético.

Entretanto, sendo $v_1 = (N_1/N_2)v_2$,

$$v_1 i_1 + v_2 i_2 = 0$$

e, assim, a potência total no componente é nula, o que significa que não ocorrem perdas em um transformador ideal.

O símbolo a ser empregado para o transformador ideal é mostrado na Fig. 10.18a e as equações correspondentes são

$$\begin{aligned} \frac{v_1}{v_2} &= \frac{N_1}{N_2} \\ N_1 i_1 + N_2 i_2 &= 0 \end{aligned} \quad 10.28$$

O fluxo de potência normal através de um transformador ocorre a partir de uma corrente de entrada (i_1) no circuito primário para uma corrente de saída (i_2) no circuito secundário. Essa situação é mostrada na Fig. 10.18b e as equações correspondentes são

$$\begin{aligned} \frac{v_1}{v_2} &= \frac{N_1}{N_2} \\ N_1 i_1 &= N_2 i_2 \end{aligned} \quad 10.29$$

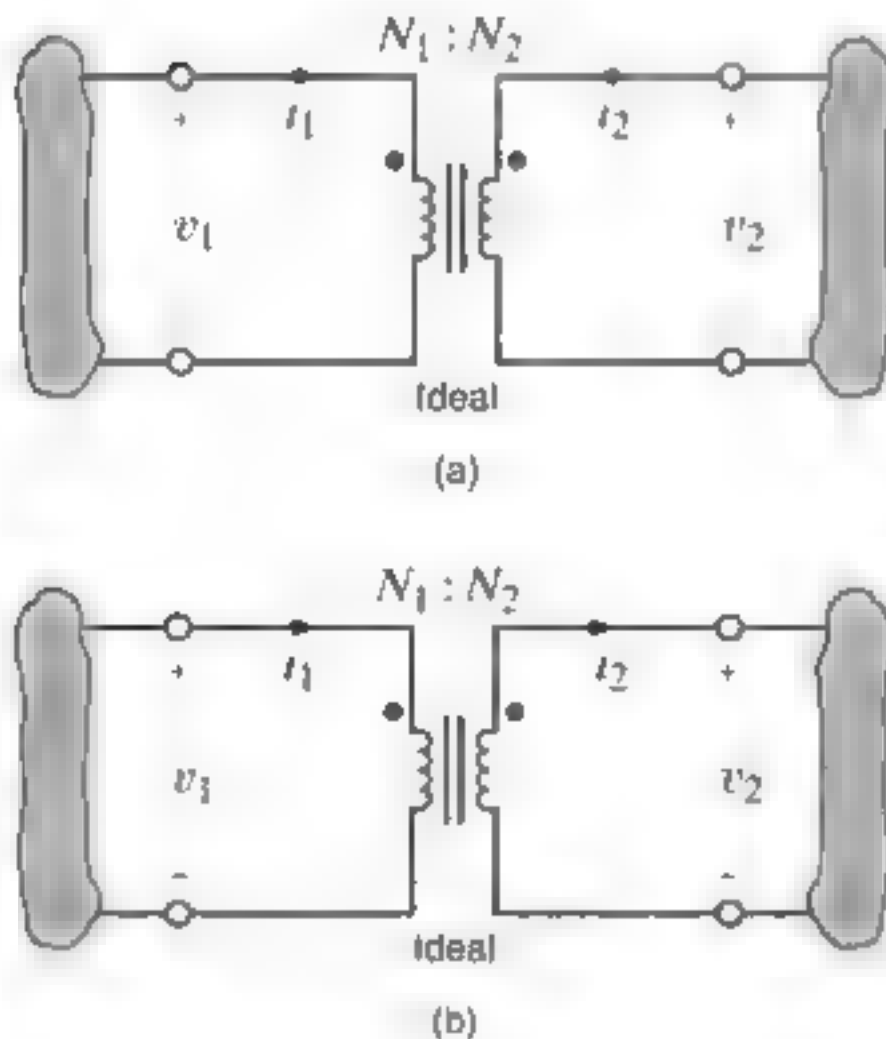


Figura 10.18 Símbolo de um transformador ideal: (a) correntes primária e secundária entrando nos condutores assinalados por pontos; (b) corrente primária entrando no condutor assinalado por ponto e corrente secundária saindo do condutor assinalado por ponto.

Note que, embora os níveis de tensão, de corrente e de impedância possam variar através de um transformador, o nível de potência permanece constante. As linhas verticais entre as bobinas, mostradas nas figuras, representam o núcleo magnético. Embora, na prática, os transformadores não possuam a indicação dos pontos, eles possuem marcas específicas que são conceitualmente equivalentes aos pontos.

Assim, o modelo para o transformador ideal é especificado pelo circuito mostrado na Fig. 10.18a e pelas correspondentes Eqs. (10.28), ou, de forma alternativa, pelo circuito mostrado na Fig. 10.18b, juntamente com as Eqs. (10.29). Portanto, é importante perceber que o modelo define as equações, bem como a relação entre as tensões, as correntes e a posição dos pontos. Em outras palavras, as equações são válidas apenas para o correspondente diagrama do circuito. Assim, fazendo-se uma analogia direta com a discussão das equações da indutância mútua e seus circuitos correspondentes, ao se alterar o sentido da corrente ou da tensão ou a posição dos pontos, deve-se realizar as modificações correspondentes nas equações. O texto a seguir esclarecerá essa importante questão.

Considere, agora, o circuito mostrado na Fig. 10.19. Comparando-se esse circuito com o mostrado na Fig. 10.18b verifica-se que os sentidos das correntes e das tensões são os mesmos. Logo, as equações para essa rede são

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{N_1}{N_2}$$

e

$$\frac{i_1}{i_2} = \frac{N_2}{N_1}$$

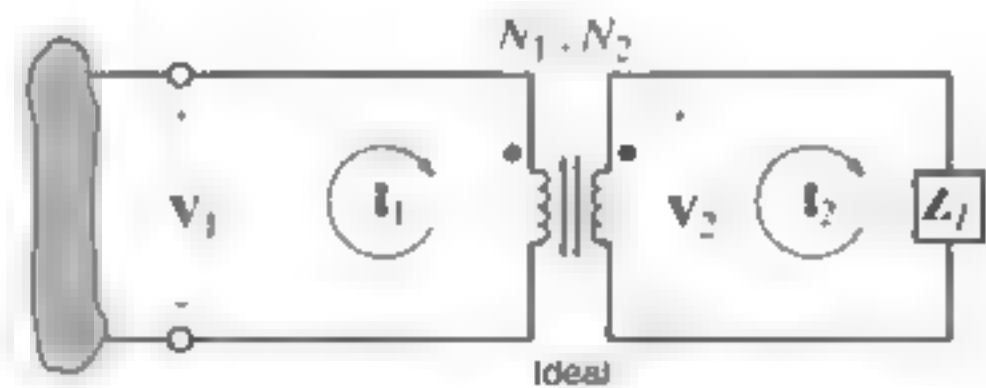


Figura 10.19 Circuito do transformador ideal utilizado para ilustrar a impedância de entrada.

Essas equações podem ser escritas como

$$\begin{aligned} v_1 &= \frac{N_1}{N_2} v_2 \\ i_1 &= \frac{N_2}{N_1} i_2 \end{aligned} \quad 10.30$$

Note também que

$$Z_i = \frac{v_1}{i_1}$$

e, portanto, a impedância de entrada será

$$Z_1 = \frac{V_1}{I_1} = \left(\frac{N_1}{N_2} \right)^2 Z_L \quad 10.31$$

em que Z_L é refletida no circuito primário pela razão de espiras.

Definindo-se a razão de espiras como

$$n = \frac{N_2}{N_1} \quad 10.32$$

então, as equações de definição do *transformador ideal* para essa configuração são

$$\begin{aligned} V_1 &= \frac{V_2}{n} \\ I_1 &= nI_2 \\ Z_1 &= \frac{Z_L}{n^2} \end{aligned} \quad 10.33$$

Essas equações devem ser utilizadas com muita cautela, uma vez que os sinais das tensões e das correntes são dependentes das referências indicadas no circuito e suas relações com os pontos.

EXEMPLO 10.8

Deseja-se determinar todas as tensões e correntes indicadas no circuito mostrado na Fig. 10.20.

SOLUÇÃO

Tendo em vista as relações entre os pontos e as correntes e tensões, as equações do transformador ficam

$$V_1 = -\frac{V_2}{n} \quad \text{e} \quad I_1 = -nI_2$$

em que $n = 1/4$. A impedância refletida na entrada do transformador é

$$Z_1 = 4^2 Z_L = 16(2 + j1) = 32 + j16 \, \Omega$$

Portanto, a corrente na fonte é

$$I_1 = \frac{120 \angle 0^\circ}{18 - j4 + 32 + j16} = 2.33 \angle -13.5^\circ \text{ A}$$

A tensão entre os terminais de entrada do transformador será, portanto,

$$\begin{aligned} V_1 &= I_1 Z_1 \\ &= (2.33 \angle -13.5^\circ)(32 + j16) \\ &= 83.49 \angle 13.07^\circ \text{ V} \end{aligned}$$

Logo, V_2 vale

$$\begin{aligned} V_2 &= -nV_1 \\ &= -\frac{1}{4}(83.49 \angle 13.07^\circ) \\ &= 20.87 \angle 193.07^\circ \text{ V} \end{aligned}$$

A corrente I_2 será

$$\begin{aligned} I_2 &= -\frac{I_1}{n} \\ &= -4(2.33 \angle -13.5^\circ) \\ &= 9.33 \angle 166.50^\circ \text{ A} \end{aligned}$$

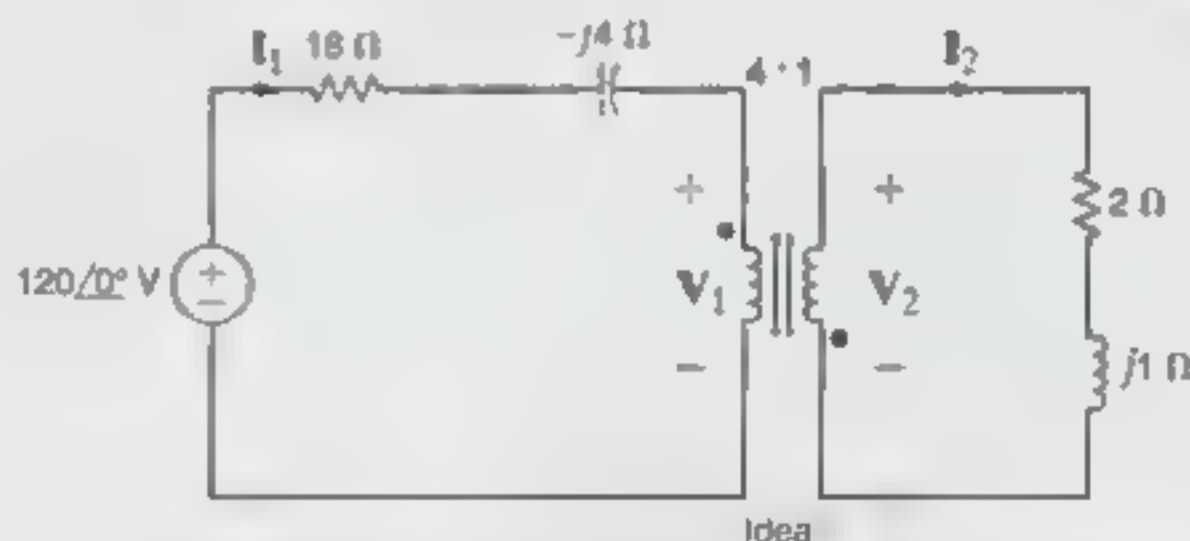


Figura 10.20 Circuito do transformador ideal.

Avaliação do Aprendizado

E10.9 Calcule a corrente I_1 da rede mostrada na Fig. E10.9.

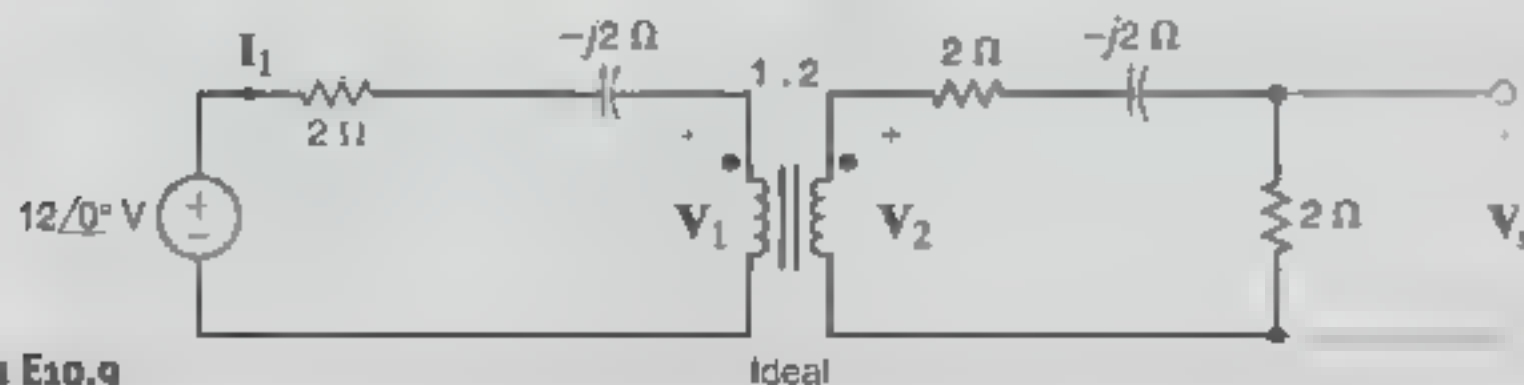


Figura E10.9

RESPOSTA:
 $I_1 = 3.07 \angle 39.81^\circ \text{ A}$.

E10.10 Determine a tensão V_x da rede mostrada na Fig. E10.9.

RESPOSTA:

$$V_x = 3,07 / 39,81^\circ \text{ V.}$$

E10.11 Determine as correntes I_1 e I_2 e as tensões V_1 e V_2 da rede mostrada na Fig. E10.11.

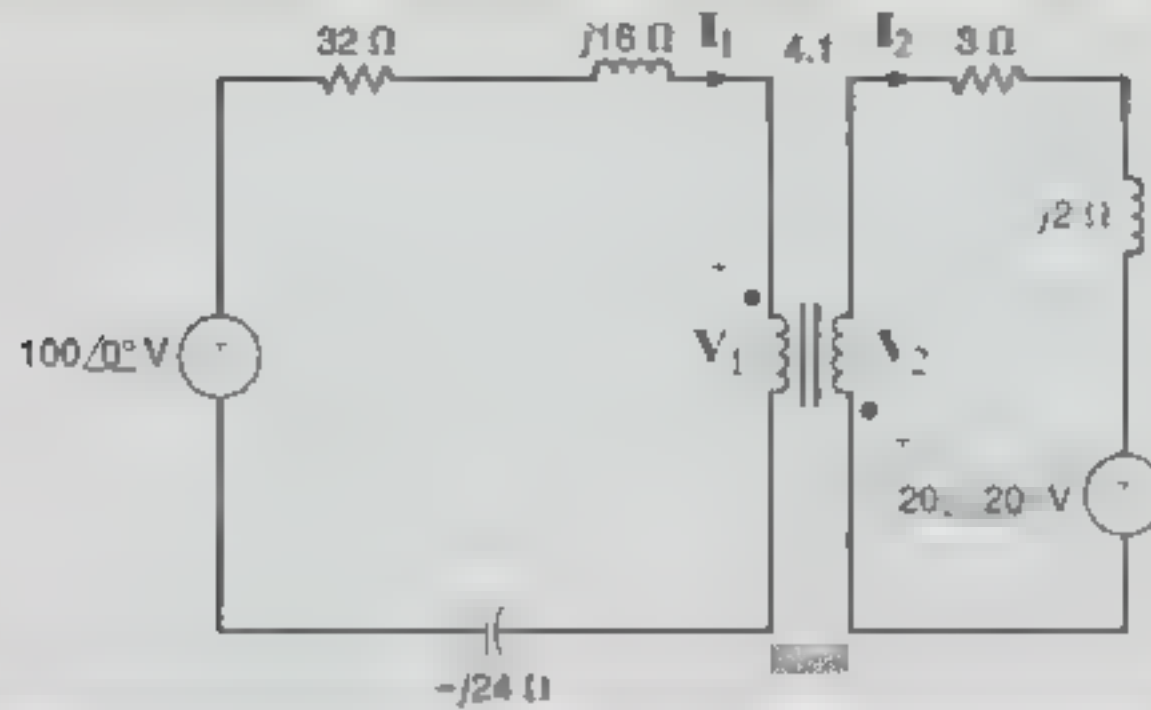


Figura E10.11

RESPOSTA:

$$I_1 = 2,12 / -25,6^\circ \text{ A,}$$

$$I_2 = 8,49 / 154,42^\circ \text{ A;}$$

$$V_1 = 64,16 / 44,1^\circ \text{ V;}$$

$$V_2 = 16,04 / -135,9^\circ \text{ V.}$$

E10.12 Determine a tensão V_x da rede mostrada na Fig. E10.12.

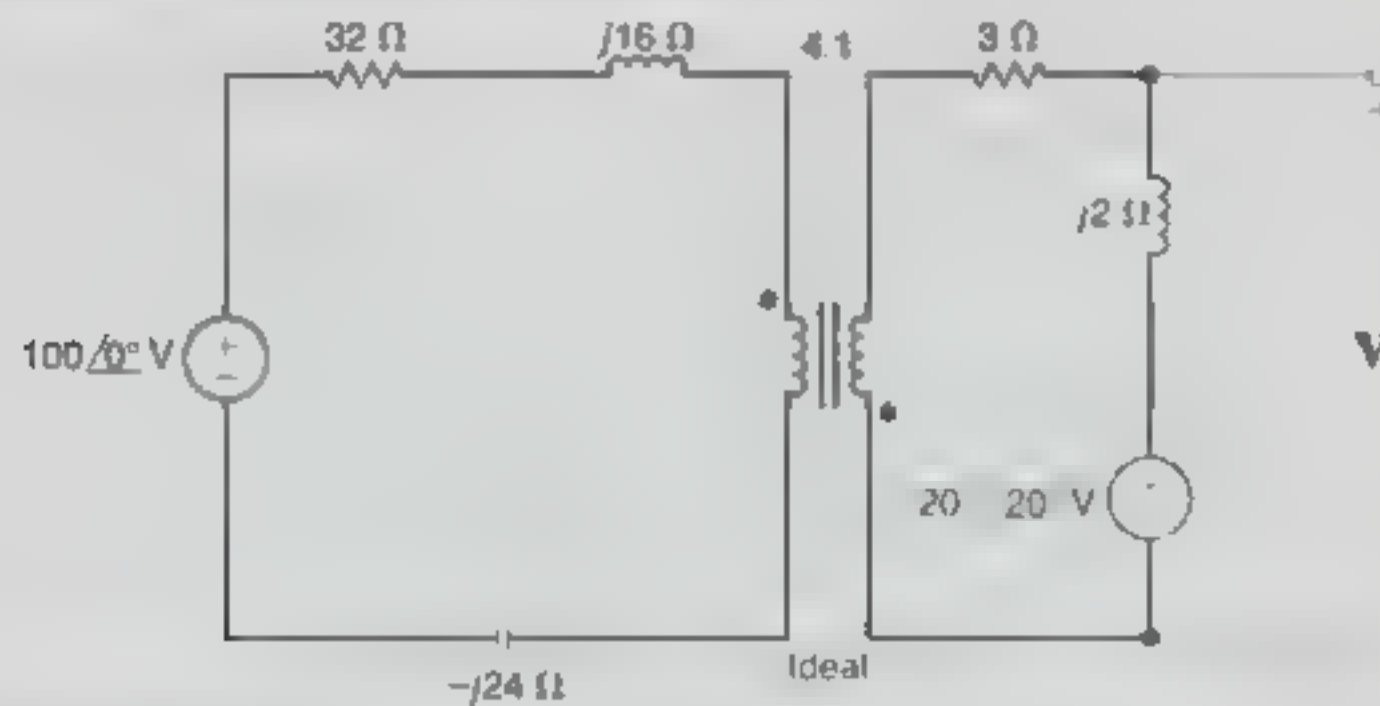


Figura E10.12

RESPOSTA:

$$V_x = 24,95 / -62,65^\circ \text{ V}$$

E10.13 Determine a tensão V_x do circuito mostrado na Fig. E10.13

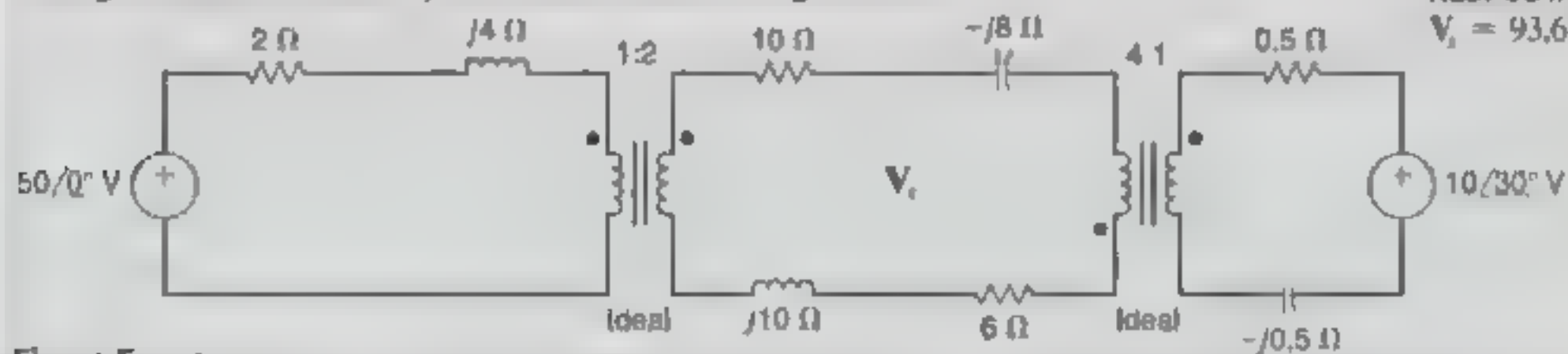


Figura E10.13

RESPOSTA:

$$V_x = 93,68 / 83^\circ \text{ V.}$$

E10.14 Considerando $V_F = 10 \angle 30^\circ \text{ V}$ no circuito mostrado na Fig. E10.14, determine a tensão V_F .

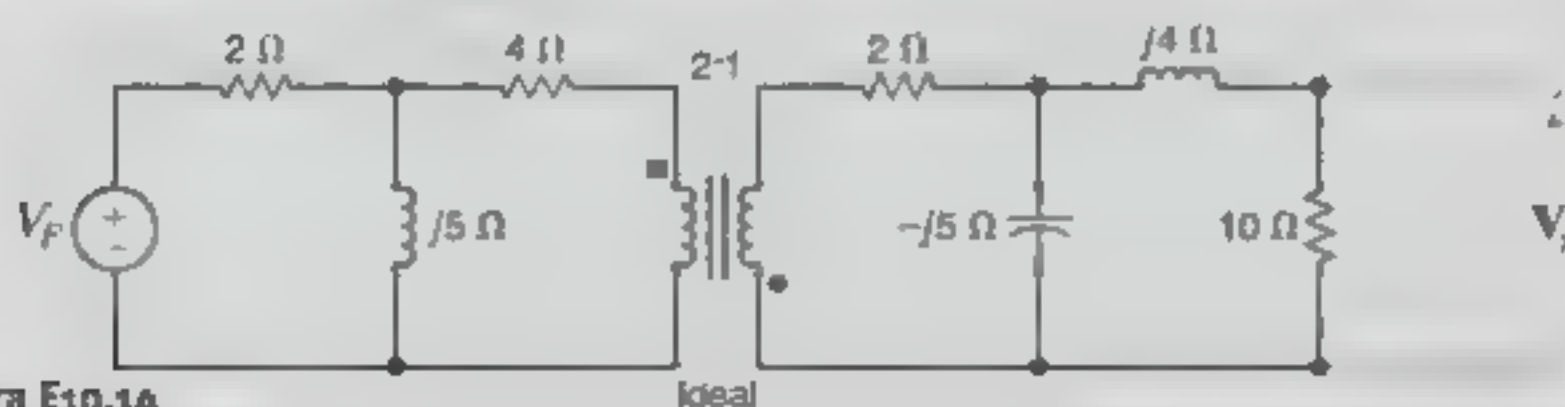


Figura E10.14

RESPOSTA:

$$V_F = 32,34 / -125,3^\circ \text{ V.}$$

Outra técnica que simplifica a análise de circuitos que contêm um transformador ideal envolve o emprego do teorema de Thévenin ou do teorema de Norton na obtenção de um circuito equivalente que substitui o transformador e um dos circuitos, o primário ou o secundário. Entretanto, essa técnica geralmente requer um esforço maior do que o procedimento apresentado anteriormente. A utilização dessa técnica é mostrada empregando-se o teorema de Thévenin na obtenção de um circuito equivalente para o transformador e o circuito primário da rede mostrada na Fig. 10.21a. As equações do transformador, considerando os sentidos das correntes e das tensões, bem como a posição dos pontos são

$$I_1 = nI_2$$

$$\frac{V_1}{V_2} = n$$

Formando-se um equivalente de Thévenin nos terminais secundários $2 = 2'$, conforme mostrado na Fig. 10.21b, nota-se que $I_2 = 0$ e, portanto, $I_1 = 0$. Logo,

$$V_{oc} = V_2 = nV_1 = nV_s$$

A impedância equivalente de Thévenin obtida pela observação dos terminais em circuito aberto com a tensão V_{F1} substituída por um curto-circuito é Z_1 , a qual, quando refletida no circuito secundário pela razão de espiras, será

$$Z_{Th} = n^2 Z_1$$

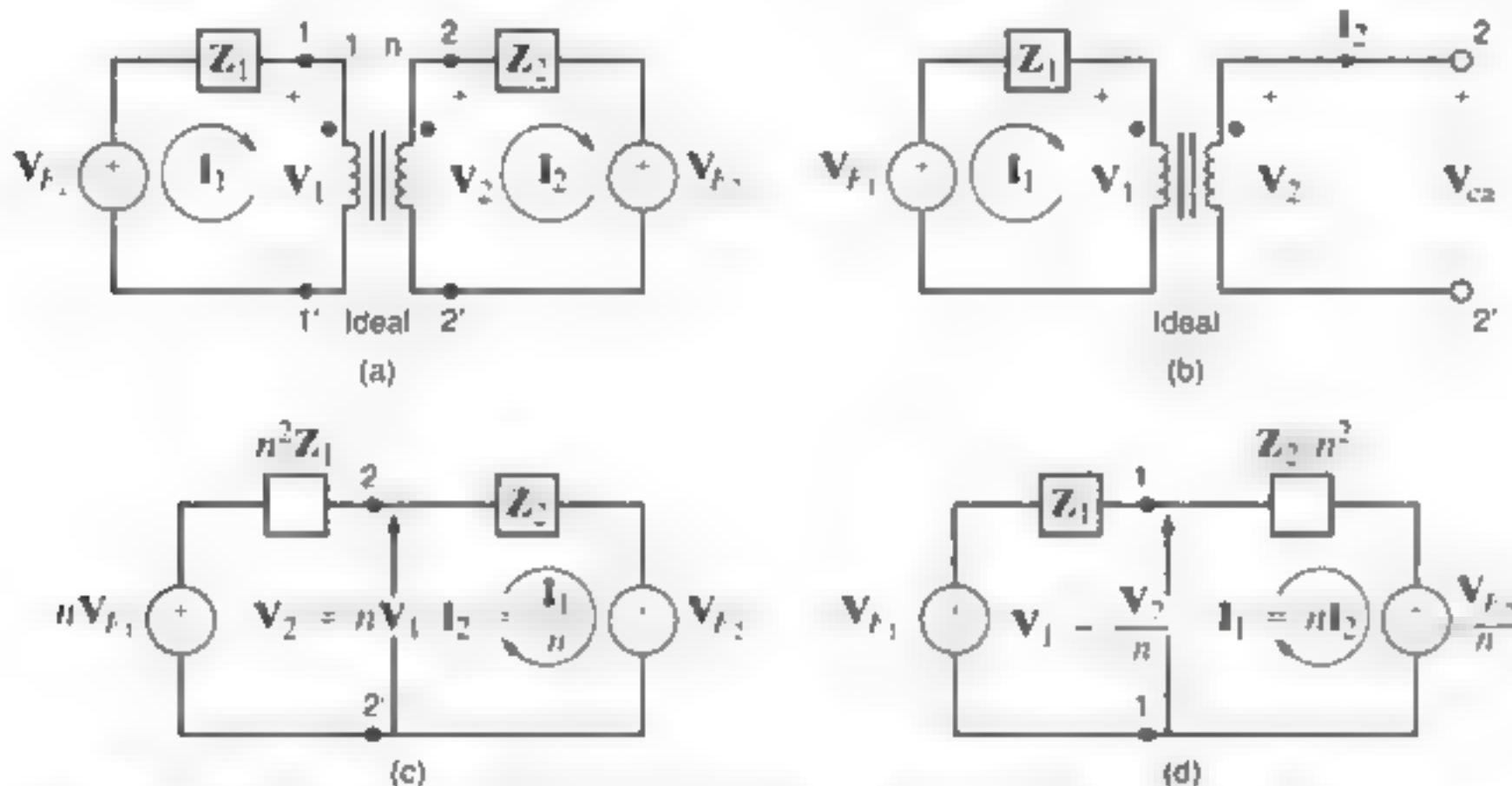


Figura 10.21 Circuito contendo um transformador ideal e algumas de suas redes equivalentes.

Portanto, um dos circuitos equivalentes resultantes para a rede mostrada na Fig. 10.21a é o mostrado na Fig. 10.21c. Analogamente, pode-se mostrar que a substituição do transformador e seu circuito secundário por um circuito equivalente resulta na rede mostrada na Fig. 10.21d.

Em geral, pode-se mostrar que, ao desenvolver um circuito equivalente para o transformador e seu circuito primário, cada tensão primária é multiplicada por n , cada corrente primária é dividida por n e cada impedância primária é multiplicada por n^2 . Analogamente, ao se desenvolver um circuito equivalente para o transformador e seu circuito secundário, cada tensão secundária é dividida por n , cada corrente secundária é multiplicada por n e cada impedância secundária é dividida por n^2 . As potências são as mesmas, podendo ser calculadas no circuito primário ou no secundário.

Lembre-se, da análise anterior, de que se os pontos no transformador forem invertidos, então n deve ser substituído por $-n$ nos circuitos equivalentes. Além disso, note que no desenvolvimento desses circuitos equivalentes é admitido que a remoção do transformador dividirá a rede em duas partes; isto é, não existem outras conexões entre o circuito primário e o secundário a não ser através do transformador. Caso exista qualquer conexão externa, a técnica do circuito equivalente, em geral, não poderá ser utilizada. Finalmente, destaca-se que se os circuitos primário ou secundário forem mais complexos do que aqueles mostrados na Fig. 10.21a, o teorema de Thévenin poderá ser aplicado para reduzir a rede àquela mostrada na Fig. 10.21a. Pode-se, também, simplesmente refletir o circuito complexo, componente por componente de um lado do transformador para o outro.

EXEMPLO 10.9

Deseja-se esquematizar os dois circuitos equivalentes ao circuito mostrado na Fig. 10.22a, considerando que suas redes sejam obtidas pela substituição do transformador e do circuito primário, e pela substituição do transformador e do circuito secundário.

SOLUÇÃO

Devido à relação entre as correntes e as tensões indicadas, e à localização dos pontos, a rede contendo um circuito equivalente ao circuito primário e a rede contendo um circuito equivalente ao circuito secundário são as mostradas nas Figs. 10.22b e c, respectivamente. O leitor deve estar atento à polaridade das fontes de tensão nas redes equivalentes.

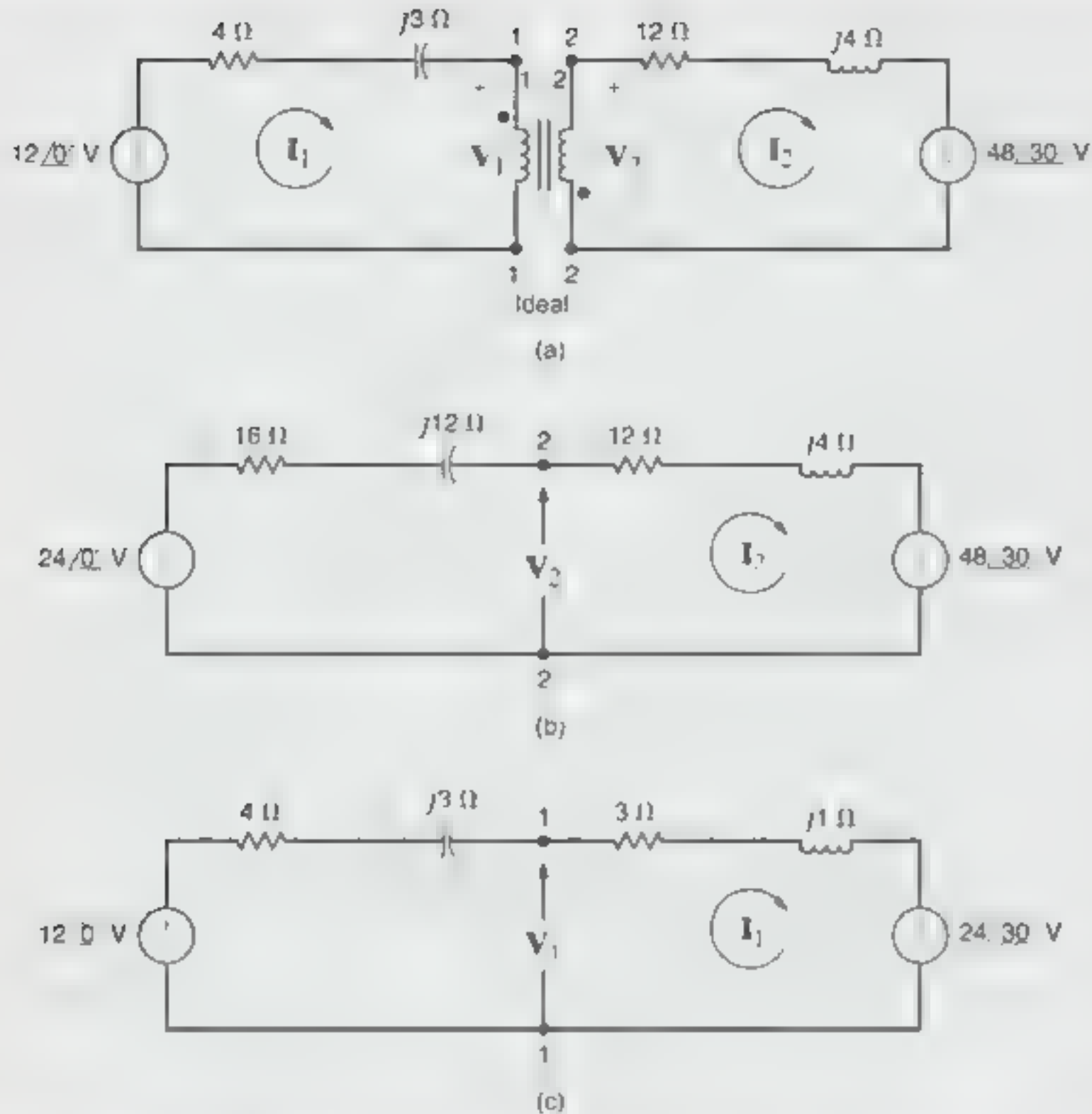


Figura 10.22 Circuito do Exemplo 10.9 e dois de seus circuitos equivalentes.

Estratégia para Solução de Problemas

Circuitos Contendo Transformadores Ideais

Etapa 1. Examine cuidadosamente o diagrama do circuito para determinar as polaridades das tensões indicadas e o sentido das correntes em relação aos pontos atribuídos aos condutores do transformador.

- Se ambas as tensões forem referenciadas como positivas nos terminais com pontos ou nos terminais sem pontos, então $v_1/v_2 = N_1/N_2$. Caso contrário, $v_1/v_2 = -N_1/N_2$.
- Se uma corrente for definida de modo a entrar em um terminal com ponto e a outra corrente for definida de modo a sair de um terminal com ponto, então, $N_1 i_1 = N_2 i_2$. Caso essa condição não seja atendida, então $N_1 i_1 = -N_2 i_2$.

Etapa 2. Caso não exista nenhuma conexão elétrica entre os dois enrolamentos do transformador, reflita todos os componentes do circuito de um dos lados do transformador para o outro lado, eliminando, assim, o transformador ideal. Ao aplicar esse enunciado tenha cuidado com a reflexão dos

componentes através do transformador. Lembre-se de que as impedâncias estão em escala apenas de magnitude. Aplique as técnicas de análise ao circuito resultante da eliminação de todos os transformadores ideais. Após esse circuito resultante ser analisado, reflita as tensões e correntes de volta para os transformadores ideais apropriados de modo a obter a resposta.

Etapa 3. Como procedimento alternativo, utilize o teorema de Thévenin ou Norton para simplificar o circuito. Tipicamente, o cálculo do circuito equivalente elimina o transformador ideal. Resolva o circuito simplificado.

Etapa 4. Caso existam conexões elétricas entre os dois enrolamentos do transformador, utilize a análise nodal ou a análise das malhas para escrever as equações dos circuitos. Resolva as equações utilizando as relações apropriadas entre as tensões e correntes do transformador ideal.

EXEMPLO 10.10

Determinar a tensão V_x do circuito mostrado na Fig. 10.23a.

SOLUÇÃO

A solução é iniciada pela determinação do equivalente de Thévenin para o circuito primário. Pela Fig. 10.23b pode-se mostrar que a tensão no circuito aberto vale

$$\begin{aligned} V_{ca} &= \frac{24 \angle 0^\circ}{4 - j4} (-j4) - 4 \angle -90^\circ \\ &= 12 - j8 = 14,42 \angle -33,69^\circ \text{ V} \end{aligned}$$

A impedância equivalente de Thévenin vista pelos terminais do circuito aberto com as fontes de tensão substituídas por

curtos-circuitos é

$$\begin{aligned} Z_{Th} &= \frac{(4)(-j4)}{4 - j4} + 2 \\ &= 4 - j2 \, \Omega \end{aligned}$$

O circuito mostrado na Fig. 10.23a, portanto, reduz-se àquele mostrado na Fig. 10.23c. Formando-se um circuito equivalente para o transformador e o circuito primário, tem-se como resultado a rede mostrada na Fig. 10.23d. Portanto, a tensão V_x vale

$$\begin{aligned} V_x &= \frac{28,84 \angle -33,69^\circ}{20 \angle -15^\circ} (2) \\ &= 2,80 \angle -160,35^\circ \text{ V} \end{aligned}$$

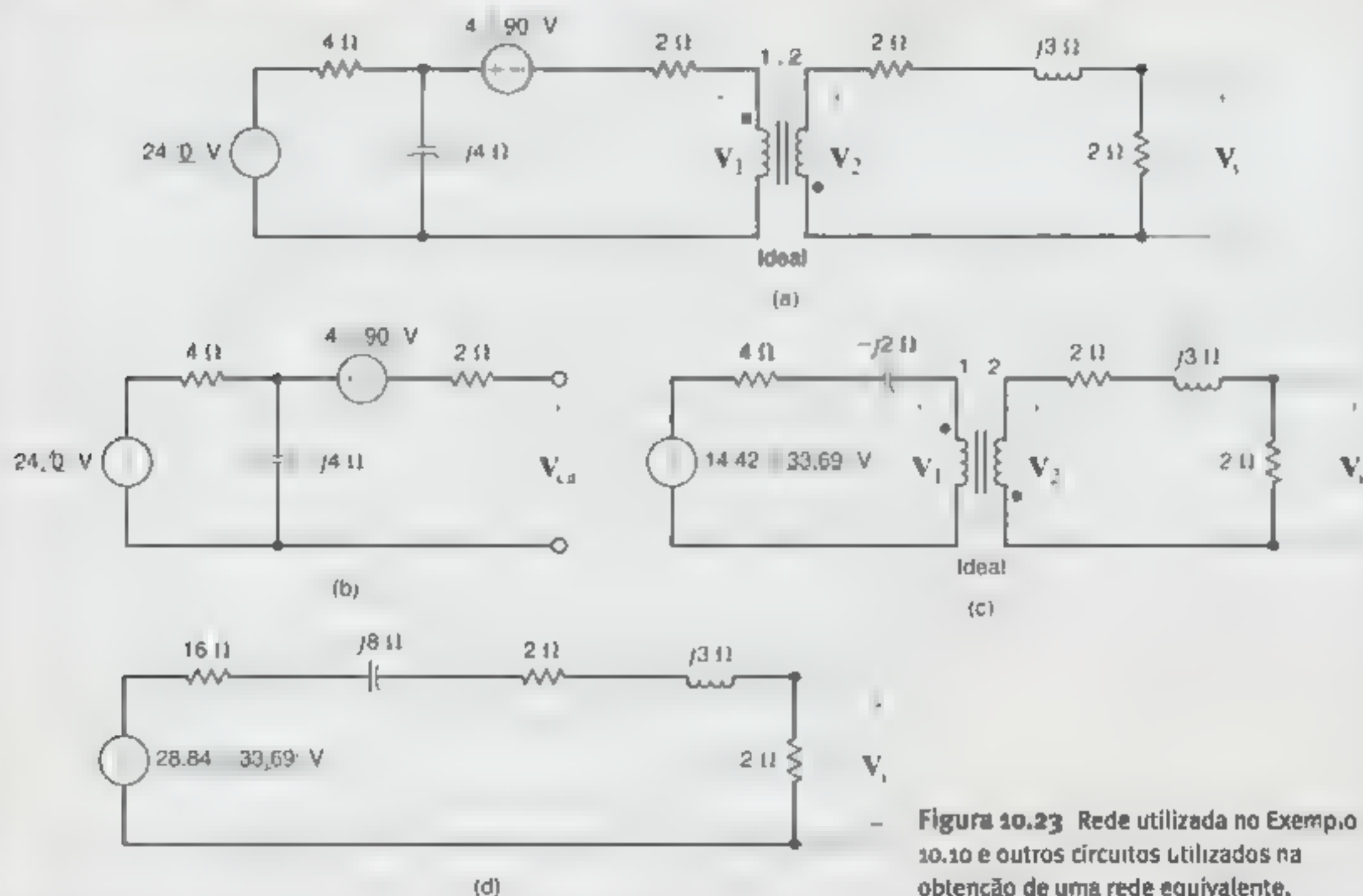


Figura 10.23 Rede utilizada no Exemplo 10.10 e outros circuitos utilizados na obtenção de uma rede equivalente.

Avaliação do Aprendizado

E10.15 Dada a rede mostrada na Fig. E10.15, forme um circuito equivalente para o transformador e o circuito secundário, e utilize a rede resultante para calcular a corrente I_1 .

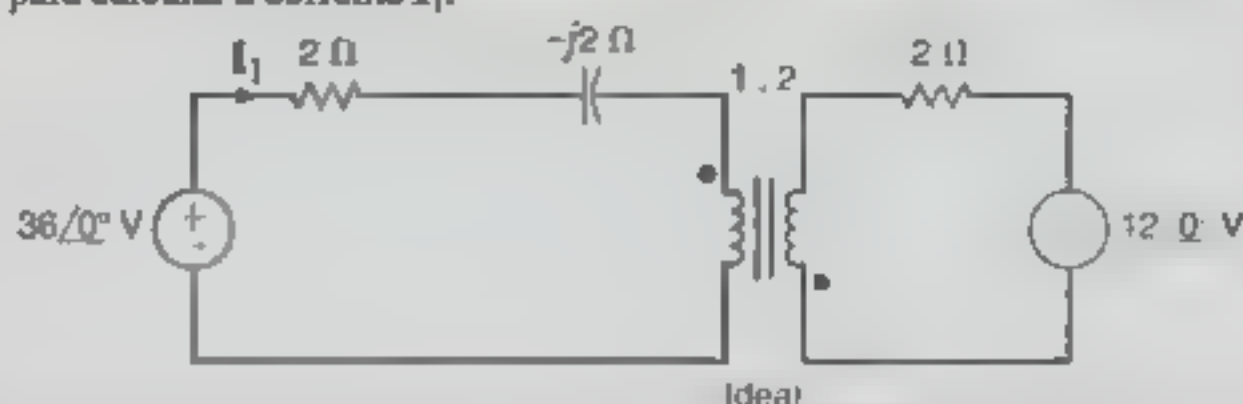
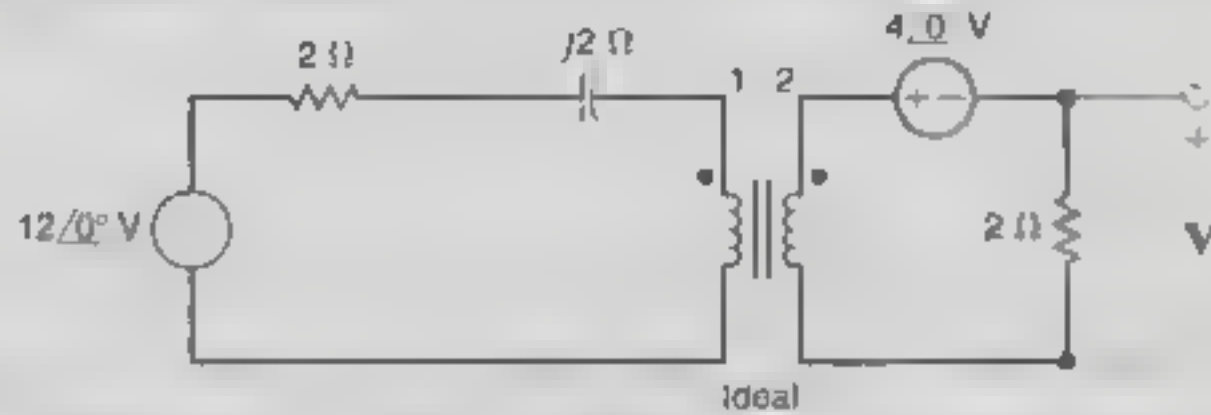


Figura E10.15

RESPOSTA

$$I_1 = 13,12 \angle 38,66^\circ \text{ A.}$$

E10.16 Dada a rede mostrada na Fig. E10.16, forme um circuito equivalente para o transformador e o circuito primário, e utilize a rede resultante para determinar a tensão V_x .



RESPOSTA:

$$V_x = 3,12 / 38,66^\circ \text{ V.}$$

Figura E10.16

EXEMPLO 10.11

Determine as correntes I_1 e I_2 , e as tensões V_1 e V_2 da rede mostrada na Fig. 10.24.

SOLUÇÃO

As equações nodais dos nós 1 e 2 são

$$\frac{10}{2} - \frac{V_1}{2} - \frac{V_2}{2} + I_1 = 0$$

$$I_1 = \frac{V_1 - V_2}{2}$$

As relações do transformador são $V_2 = 2V_1$ e $I_1 = 2I_2$. A primeira equação nodal fornece $I_1 = 5 \text{ A}$ e, portanto, $I_2 = 2,5 \text{ A}$. A

segunda equação nodal, juntamente com as equações de restrição impostas pelo transformador, fornece $V_1 = \sqrt{5} \angle 63^\circ \text{ V}$ e $V_2 = 2\sqrt{5} \angle 63^\circ \text{ V}$.

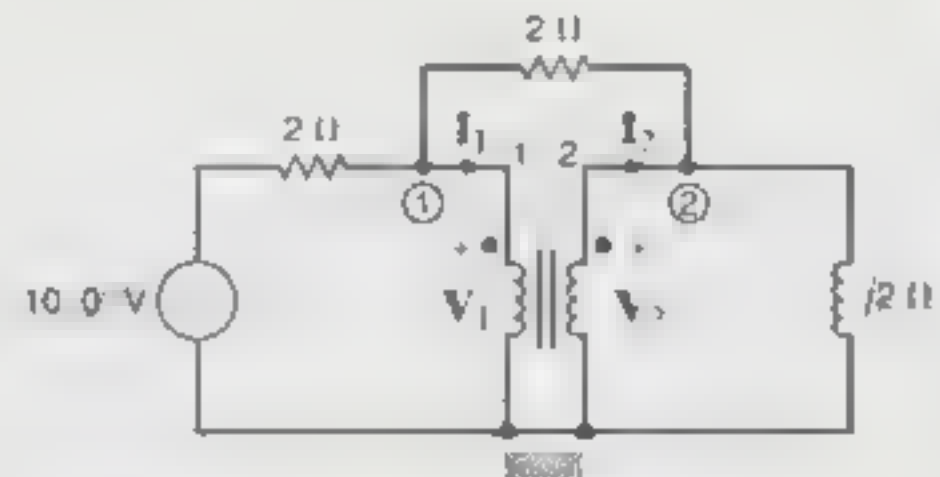
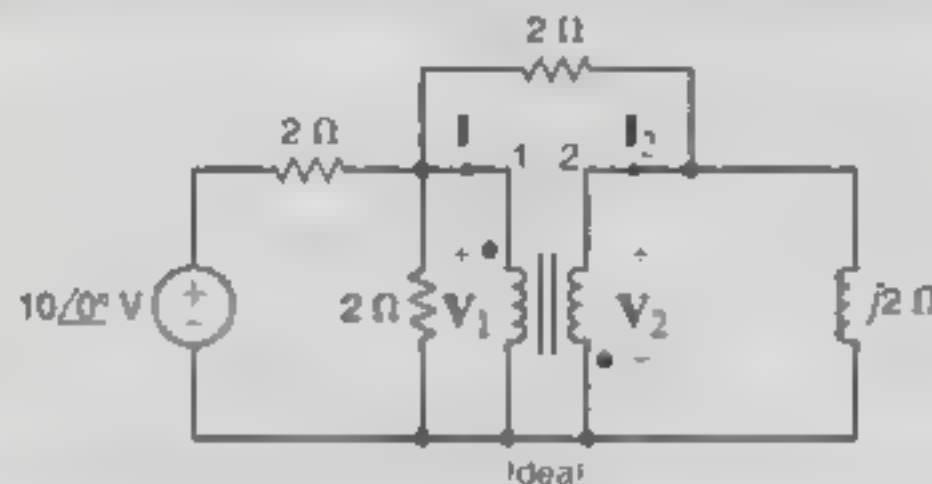


Figura 10.24 Circuito utilizado no Exemplo 10.11.

Avaliação do Aprendizado

E10.17 Determine as correntes I_1 e I_2 , e as tensões V_1 e V_2 da rede mostrada na Fig. E10.17.



RESPOSTAS:

$$I_1 = 3,08 \angle -13,7^\circ \text{ A,}$$

$$I_2 = 1,54 \angle 166,3^\circ \text{ A;}$$

$$V_1 = 0,85 \angle 20^\circ \text{ V;}$$

$$V_2 = 1,71 \angle -160^\circ \text{ V.}$$

Figura E10.17

Antes do início do próximo tópico, são realizadas algumas discussões sobre a lei de Faraday. Para o transformador ideal, a lei de Faraday estabelece que $v_1(t) = N_1 \frac{d\phi}{dt}$ e $v_2(t) = N_2 \frac{d\phi}{dt}$. O que ocorreria se uma tensão CC fosse aplicada ao transformador? Neste caso, o fluxo magnético ϕ é constante, $v_1 = v_2 = 0$ e o transformador não se torna muito útil. O que ocorre se uma tensão CA for aplicada ao transformador? O fluxo magnético

será harmônico e variará com o tempo. Os transformadores permitem que um valor CA de tensão seja facilmente aumentado ou diminuído de modo eficiente; é muito mais difícil aumentar ou diminuir um valor de tensão CC. A facilidade com que os transformadores permitem a variação do nível de tensão representa uma das principais razões pelas quais as tensões e as correntes CA são utilizadas para transmitir a maior parte da energia elétrica do mundo.

10.4 Considerações sobre Segurança

Os transistores são utilizados extensivamente nos modernos equipamentos eletrônicos de forma a prover uma fonte de potência de baixa tensão. Como exemplos, o nível de tensão comumente utilizado nos sistemas de computadores é de 5 V CC, os rádios portáteis utilizam 9 V CC e os equipamentos militares e os utilizados na aviação operam a 28 V CC. Quando os transformadores são utilizados para conectar esses circuitos transistorizados de baixa tensão à linha de potência disponível, ocorre geralmente menos perigo de choques com o sistema tendo em vista que o transformador proporciona um isolamento elétrico

da linha de tensão. Entretanto, do ponto de vista da segurança, um transformador, embora ajude em muitas situações, não representa uma solução absoluta. Deve-se manter uma vigilância permanente ao se trabalhar com qualquer equipamento elétrico, no sentido de se minimizar os riscos de choques elétricos.

Nos equipamentos eletrônicos de potência ou sistemas de potência, os riscos são muito altos. O problema nesses casos é devido à alta tensão da fonte de baixa impedância e, portanto, deve-se lembrar constantemente de que a linha de tensão que chega às residências pode ser fatal.

Considere agora o seguinte exemplo, que ilustra um perigo sutil que poderia surpreender até mesmo um profissional com experiência, e que produz consequências desastrosas.

EXEMPLO 10.12

Duas casas adjacentes, *A* e *B*, são alimentadas a partir de transformadores distintos, conforme mostrado na Fig. 10.25a. Uma oscilação da corrente na linha de alimentação da casa *B* leva o disjuntor *X-Y* a atuar, abrindo o circuito. A casa *B* está agora sem energia elétrica. Em uma tentativa de ajudar seu vizinho, o morador da casa *A* se oferece para conectar uma extensão entre uma tomada na parede da casa *A* e outra tomada na parede da casa *B*, conforme mostrado na Fig. 10.25b. Mais tarde, o técnico de manutenção da companhia de energia vem

armar o disjuntor. Estaria o técnico correndo algum perigo nessa situação?

SOLUÇÃO

Sem saber da existência da extensão irregular, o técnico acredita que não existe tensão entre os pontos *X* e *Z*. Entretanto, por causa da conexão entre as duas casas, existem 7200 V rms entre os dois pontos e o técnico poderia ser seriamente ferido, ou até mesmo morrer, se entrasse em contato com essa alta tensão.

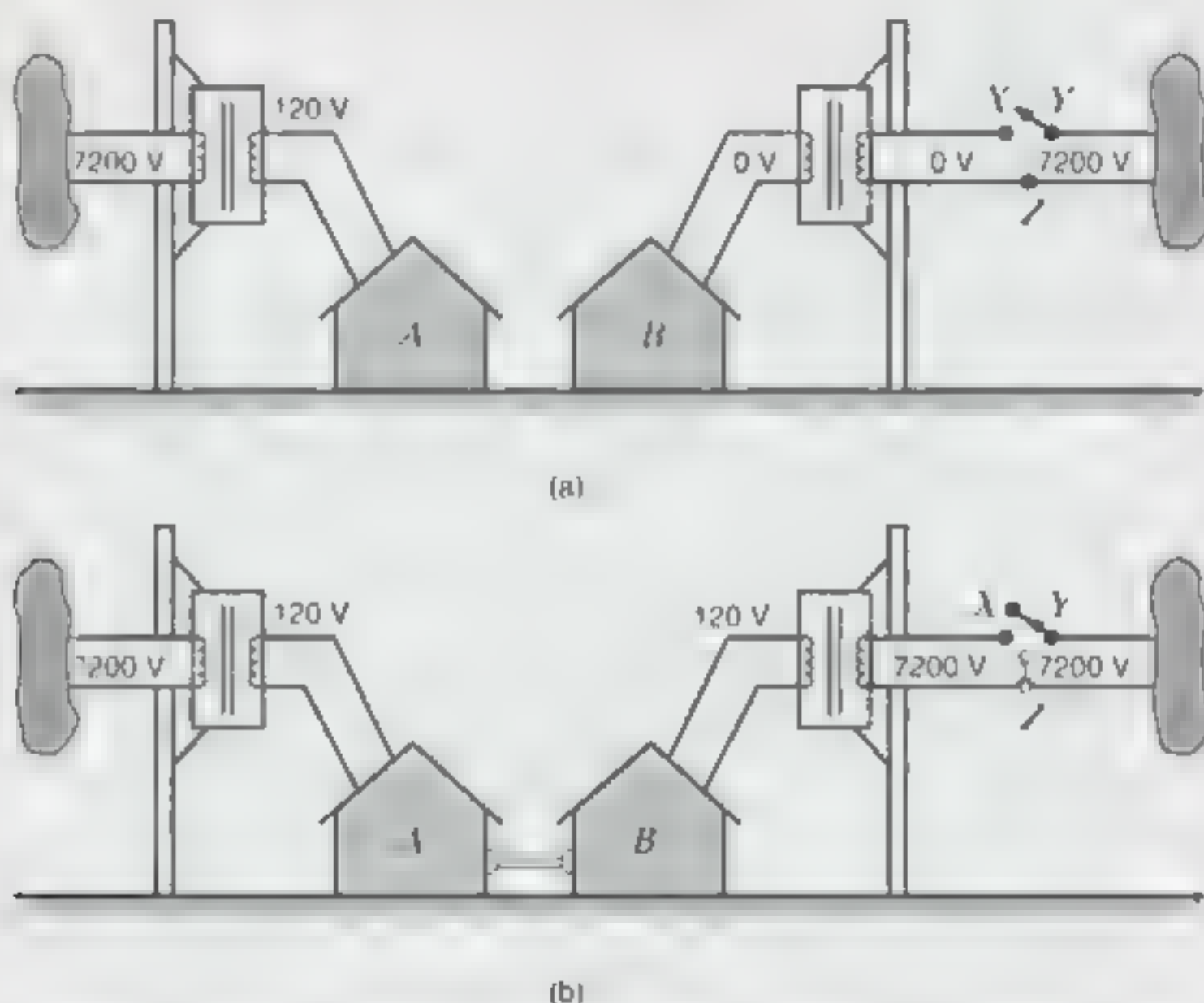


Figura 10.25 Diagramas utilizados no Exemplo 10.12 (valores das tensões em rms).

10.5 Exemplos de Aplicação

Os exemplos a seguir ilustram diversas aplicações com transformadores.

EXEMPLO DE APLICAÇÃO 10.13

Considere o problema de transportar 24 MW a uma distância de 100 milhas (160,9 km) utilizando uma linha de dois condutores. Determine o raio necessário ao condutor para que a transmissão ocorra com uma eficiência de 95%, considerando apenas a resistência da linha, se ela opera a (a) 240 V rms ou (b) 240 kV rms. Admita que a resistividade do condutor seja $\rho = 8 \times 10^{-8} \Omega\text{m}$.

SOLUÇÃO

a. A 240 V:

$$I = \frac{P}{V} = \frac{24 \text{ M}}{240} = 100 \text{ kA rms}$$

Se

$$\eta = 95\%,$$

$$P_{\text{perda}} = 0,05(24 \text{ M}) = 1,2 \text{ MW} = I^2 R$$

Portanto,

$$R = \frac{P_{\text{perda}}}{I^2} = \frac{1,2 \text{ M}}{(100 \text{ k})^2} = 1,2 \times 10^{-4} \Omega$$

Uma vez que

$$R = \frac{\rho l}{A} = \frac{(8 \times 10^{-8})(2 \times 160,9 \times 10^3)}{A}$$

$$A = \frac{0,25744}{1,2 \times 10^{-4}} = 214,5 \text{ m}^2 = \pi r^2$$

Portanto,

$$r = 8,624 \text{ m}$$

(uma dimensão absurda para o raio de um condutor, portanto, totalmente inviável!)

b. A 240 kV rms

$$I = 100 \text{ A rms}$$

c

$$R = \frac{1,2 \times 10^6}{(100)^2} = 120 \Omega$$

$$A = \frac{0,25744}{120} = 2,145 \times 10^{-4} \text{ m}^2$$

e

$$r = 0,8264 \text{ cm}$$

(um valor bem razoável e próximo da realidade!)

O ponto mais importante desse exemplo é que, na prática, a transmissão de energia elétrica em massa (grande quantidade) requer uma operação à alta tensão. O que torna necessário um dispositivo econômico que possa converter com eficiência um nível de tensão em outro. Esse dispositivo é, conforme foi mostrado, o transformador.

EXEMPLO DE APLICAÇÃO 10.14

O transformador local mostrado na Fig. 10.26 fornece uma tensão de saída a um sistema de distribuição de energia. Uma situação comum nos postes de áreas residenciais, o aparelho é um transformador de uma única fase que, tipicamente, possui uma linha de 13,8 kV rms em relação à linha neutra em sua bobina primária e uma derivação central na bobina secundária que fornece tanto 120 V rms quanto 240 V rms para as residências. Um exemplo típico desse transformador, geralmente referenciado como um "poste transformador" é mostrado na Fig. 10.27.

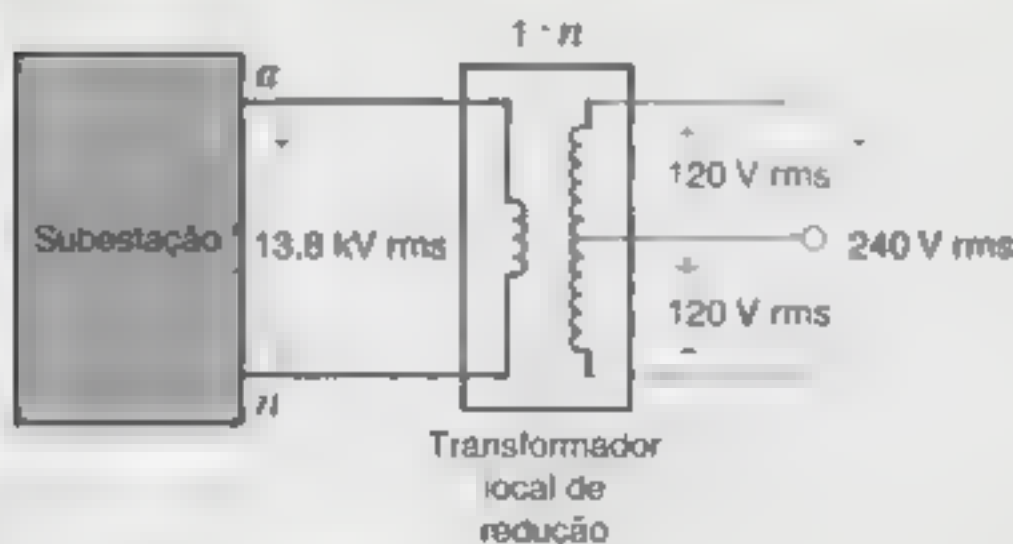


Figura 10.26 Subcircuito de um transformador local com derivação central.



Figura 10.27 Transformador de uma concessionária de energia elétrica residencial. (iStockphoto)

Seja a determinação da razão de espiras necessária para gerar a tensão secundária de 240 V rms. Admitindo que o transformador forneça uma corrente de serviço de 200 A a cada conjunto de 10 residências, determine a menor potência nominal do transformador e a corrente máxima no circuito primário.

SOLUÇÃO

A razão de espiras é dada por

$$n = \frac{V_2}{V_1} = \frac{240}{13.800} = 0,0174$$

Se I_H é a corrente máxima por conjunto de residências, então a corrente primária máxima será

$$I_1 = nI_2 = n(10I_H) = 34,78 \text{ A rms}$$

Portanto, a potência máxima fornecida para o circuito primário será

$$S_1 = V_1 I_1 = (13.800)(34,78) = 480 \text{ kVA.}$$

Logo, o transformador deve possuir uma potência nominal de pelo menos 480 kVA.

EXEMPLO DE APLICAÇÃO 10.15

Sua escova de dentes elétrica fica inoperante em sua base durante a noite. Mesmo sabendo que não existe nenhuma conexão elétrica direta entre a base e a escova, as baterias internas estão sendo recarregadas. Como isto pode ocorrer?

SOLUÇÃO

A resposta é: a utilização de indutores mutuamente acoplados! Uma bobina é posicionada na base e energizada por uma fonte CA. A segunda bobina é instalada na parte inferior da escova. Quando a escova é colocada na base, as duas bobinas estarão próximas fisicamente e, assim, acopladas mutuamente, conforme mostrado na Fig. 10.28.

Seja a investigação de um projeto viável para essas bobinas. Inicialmente, admite-se que as bobinas sejam fracamente acopladas com um coeficiente $k = 0,25$. Em seguida, a bobina posicionada na base é acionada a $120 \angle 0^\circ \text{ V rms}$. A bobina da escova deve então gerar uma tensão de $6 \angle 0^\circ \text{ V}$ a uma corrente

de 100 mA rms de modo a carregar a bateria. Para manter a potência “relativamente” baixa, a corrente primária será limitada a apenas 0,5 A rms. Finalmente, para simplificar a análise, será admitido que as correntes I_1 e I_2 estejam em fase.

Para começar, são desenvolvidas as equações dos laços para o circuito, as quais podem ser expressas como

$$\begin{aligned} V_1 &= j\omega L_1 I_1 + j\omega M I_2 \\ V_2 &= j\omega M I_1 - j\omega L_2 I_2 \end{aligned} \quad 10.34$$

em que $V_1 = 120 \angle 0^\circ \text{ V rms}$ e $V_2 = 6 \angle 0^\circ \text{ V rms}$. Definindo-se uma nova variável α , de modo que

$$L_2 = \alpha^2 L_1$$

a indutância L_2 pode ser eliminada nas Eqs. (10.34). Assim,

$$\begin{aligned} V_1 &= j\omega L_1 I_1 + j\omega k \alpha L_1 I_2 \\ V_2 &= j\omega k \alpha L_1 I_1 - j\omega \alpha^2 L_1 I_2 \end{aligned} \quad 10.35$$

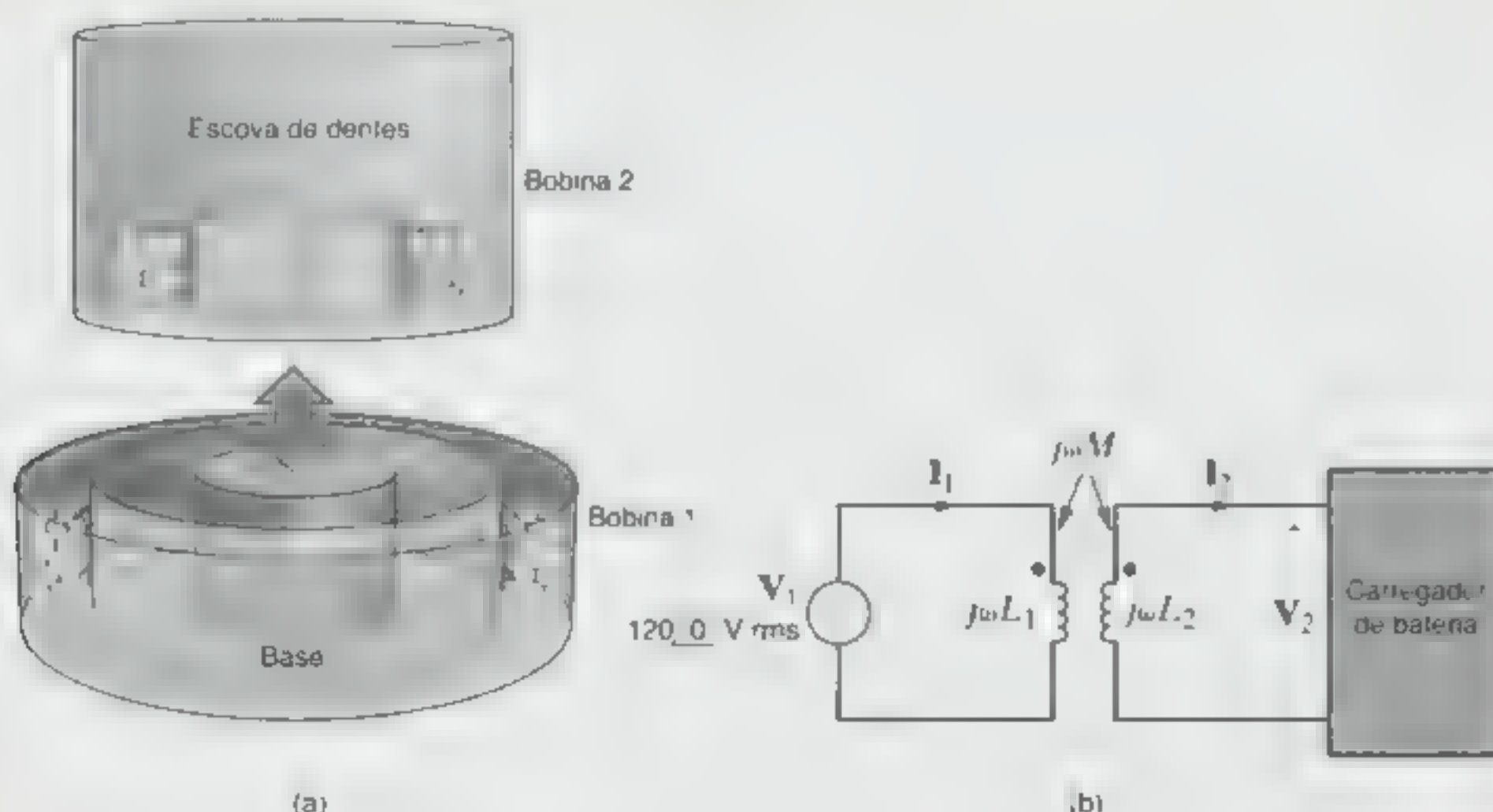


Figura 10.28 Representação da escova de dentes elétrica: (a) desenho conceitual não artístico e (b) circuito esquemático.

Definindo-se a razão entre cada um dos lados das Eqs. (10.35), pode-se eliminar ω e L_1 .

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{120}{6} = 20 = \frac{I_1}{k\alpha I_2} = \frac{\alpha I_1}{k\alpha^2 I_2}$$

Substituindo agora os valores dos parâmetros de projeto listados anteriormente para I_1 , I_2 e k , e resolvendo para α , obtém-se

$$20I_2\alpha^2 - (20kI_1 + kI_2)\alpha + I_1 = 0$$

o que fornece

$$\alpha = \begin{cases} 0,246 \\ 1,02 \end{cases}$$

(Para a conversão dos fasores de corrente em magnitudes foi utilizada a condição de I_1 e I_2 estarem em fase.) A escolha do menor valor para α corresponde à escolha do menor valor de L_2 . Assim, este é o resultado a ser selecionado, uma vez que a bobina resultante requer, preferencialmente, poucas espiras e redução de custo, peso e dimensões. Em seguida, utilizando a Eq. (10.35), pode-se determinar o produto ωL_1 .

$$V_1 = \omega L_1(0,5) = \omega(0,25)(0,246)L_1(0,1) = 0,494\omega L_1$$

Para investigar o efeito de α em L_1 , utiliza-se o valor de V_1 e a relação entre os dois indutores, para o valor de α considerado. Na Tabela 10.1, L_1 e L_2 foram calculados para um grupo de valores de ω . Observe que uma excitação de 60 Hz requer valores extremamente altos para as indutâncias, o que torna a solução do problema completamente inviável. Portanto, a tabela passa por toda a faixa audível (não há razão para ter que ouvir a recarga da escova de dente) até 20 kHz. Para essa frequência, os valores de indutância são muito mais razoáveis, porém, ainda consideráveis. Entretanto, para uma frequência de 100 kHz, a indutância total é de umas poucas centenas de microhenrys. Esses são valores mais razoáveis, os quais serão aqui utilizados.

TABELA 10.1 Lista de seleção da frequência e das indutâncias resultantes.

FREQUÊNCIA (Hz)	FREQUÊNCIA (rad/s)	L_1	L_2
60	377	693 mH	39,0 mH
20k	126k	2,01 mH	117 μ H
100k	628k	416 mH	23,4 μ H

A questão final é: considerando que a frequência do sinal de alimentação disponível na tomada é de 60 Hz, como obter os 100 kHz? Instala-se no circuito uma chave controlada por tensão, conforme mostrado na Fig. 10.29. Essa chave é ligada e desligada a uma taxa de 100 kHz. O resultado é uma tensão pulsante aplicada ao indutor a 100 kHz. Embora o resultado não seja exatamente uma função senoidal a 100 kHz, ele é efetivo.

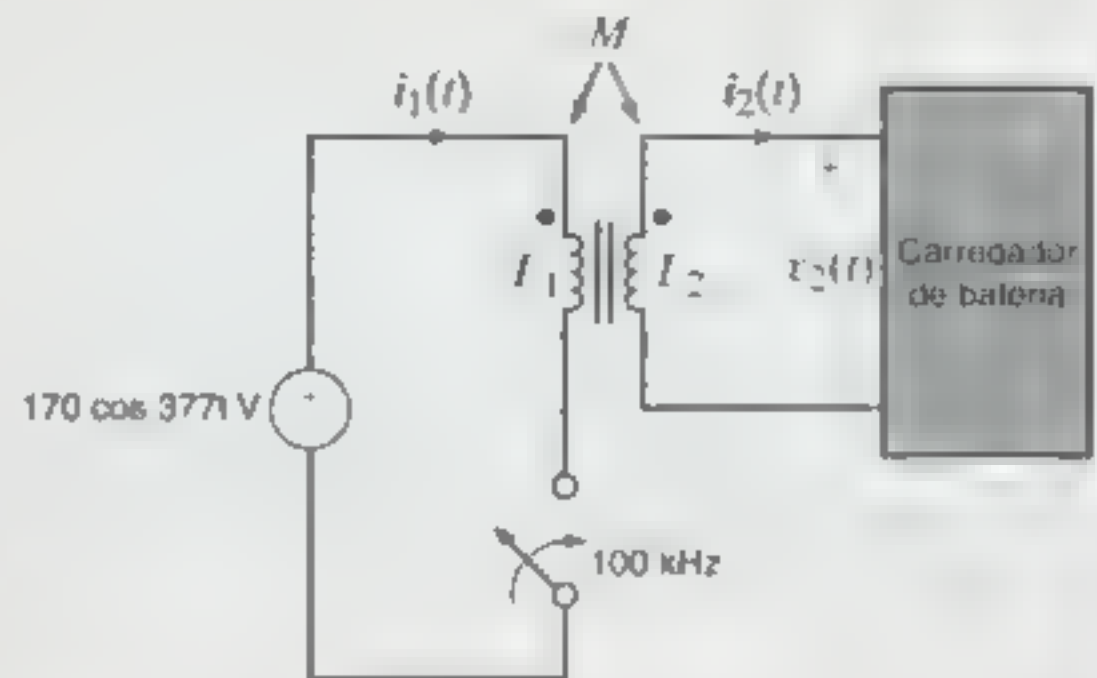


Figura 10.29 Uma chave liga-desliga a uma taxa 100 kHz pode emular uma entrada CA de alta frequência para aplicação na escova de dentes.

EXEMPLO DE APLICAÇÃO 10.16

Conforme mostrado na Fig. 10.30, dois circuitos são posicionados bem próximos um do outro: um circuito CA de alta corrente e um circuito CC de baixa corrente. Como cada circuito constitui um laço, seria esperada uma pequena indutância em cada circuito. Devido à sua proximidade, poderia também ser previsto algum acoplamento. Nesta situação particular, a indutância em cada laço é de 10 nH, e o coeficiente de acoplamento é $k = 0,1$. São agora considerados dois cenários. No primeiro, o circuito CA contém um motor CA operando a 60 Hz. No segundo, o circuito CA modela um transmissor de rádio FM operando a 100 MHz. Deseja-se determinar o ruído induzido no circuito CC para ambos os casos. Qual dos cenários produz o pior ruído por meio do acoplamento indutivo? Por quê?

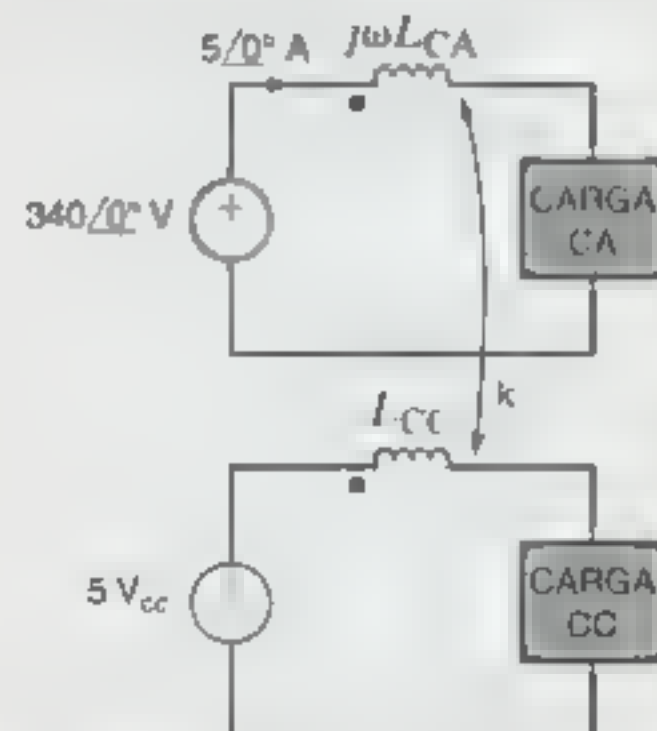


Figura 10.30 Modelos de circuitos CA e CC fisicamente próximos o suficiente para apresentar um acoplamento mútuo.

SOLUÇÃO

A tensão induzida no circuito CC é um ruído e é conhecida como

$$V_{\text{ruído}} = j\omega M I_{CA} = j\omega k \sqrt{L_{CA} L_{CC}} I_{CA}$$

Nesse caso, preocupa-se apenas com a magnitude do ruído. Dados os parâmetros do modelo, listados anteriormente, a magnitude da tensão do ruído vale

$$V_{\text{ruído}} = 2\pi f (0,1)(10^{-8})(5) = 3,14 \times 10^{-8} f \text{ V}$$

Para o cenário do motor CA, $f = 60 \text{ Hz}$ e a tensão do ruído é de $1,88 \mu\text{V}$ – praticamente zero quando comparada à entrada de 5 V . Entretanto, para o modelo do transmissor de rádio FM operando a 100 MHz , a tensão do ruído é de $3,14 \text{ V}$. Esse valor corresponde a mais de 60% do nível de 5 V !

Assim, conclui-se que o ruído magneticamente induzido é mais danoso para situações de alta frequência. Portanto, não se deve surpreender com o cuidado a ser tomado no sentido de se “blindar” magneticamente os circuitos envolvidos com corrente de alta frequência.

10.6 Exemplos de Projeto

EXEMPLO DE PROJETO 10.17

Um transformador diferencial linear variável (LVDT — *linear variable differential transformer*) é comumente utilizado para medir movimentos lineares. Os LVDTs são úteis em uma ampla faixa de aplicações, por exemplo, a medição da espessura de uma chapa fina de um determinado material e a medição da deformação física de corpos sujeitos a cargas mecânicas. (Uma pesquisa na Internet sobre LVDT fornecerá uma grande variedade de outros exemplos de aplicações com as correspondentes explicações e fotografias ilustrativas.) Conforme mostrado nas Figs. 10.31a e b, o LVDT é exatamente um dispositivo de indutâncias acopladas, com um enrolamento primário e dois secundários que são enrolados e conectados de forma que suas tensões induzidas são subtraídas.

Todos os três enrolamentos são condicionados em um cilindro oco que recebe uma barra circular, geralmente fabricada de aço ou ferro, a qual é fisicamente fixada de modo que possa se mover em uma direção. A presença da barra aumenta significativamente o coeficiente de acoplamento entre os enrolamentos. Investiga-se agora como a tensão de saída do LVDT está relacionada ao deslocamento e como o LVDT é acionado. Em seguida projeta-se um LVDT, acionado a 10 V rms , 2 kHz , de modo que ao longo de 100% de seu curso a

magnitude da tensão de saída seja igual à magnitude da tensão de entrada.

SOLUÇÃO

Tipicamente, o enrolamento primário do LVDT é excitado por um sinal senoidal CA na faixa de 3 a 30 V rms a frequências entre 400 e 5000 Hz . Uma vez que a tensão de saída será medida diretamente por meio de um voltímetro, não há necessidade de uma carga externa.

A posição nula (referência) da barra é o ponto morto entre os enrolamentos secundários. Nessa posição os acoplamentos entre o primário e cada um dos secundários são idênticos, e a tensão de saída é nula. Quando a barra se move em qualquer dos sentidos, o acoplamento sofrerá uma variação linear, conforme a variação da magnitude da tensão de saída. O sentido do movimento é indicado pela fase relativa da saída.

O projeto do LVDT começa com o circuito mostrado na Fig. 10.31b, no qual o coeficiente de acoplamento mútuo para cada enrolamento secundário varia conforme mostrado na Fig. 10.32. Para se gerar uma relação linear entre o deslocamento e a tensão de saída, restringe-se o curso nominal à região da Fig. 10.32, em que o coeficiente de acoplamento seja linear com o deslocamento. Portanto, nesse projeto, 100% do curso corresponde a um coeficiente de acoplamento de $0,8$.

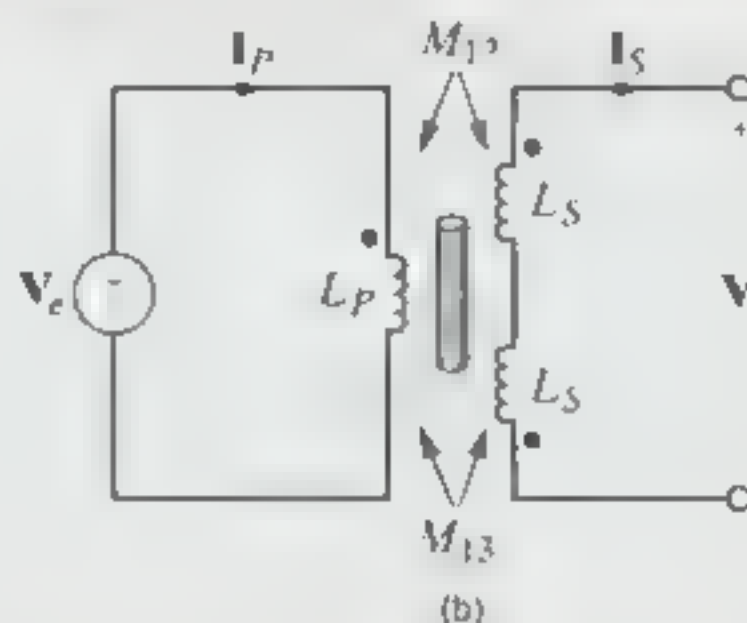
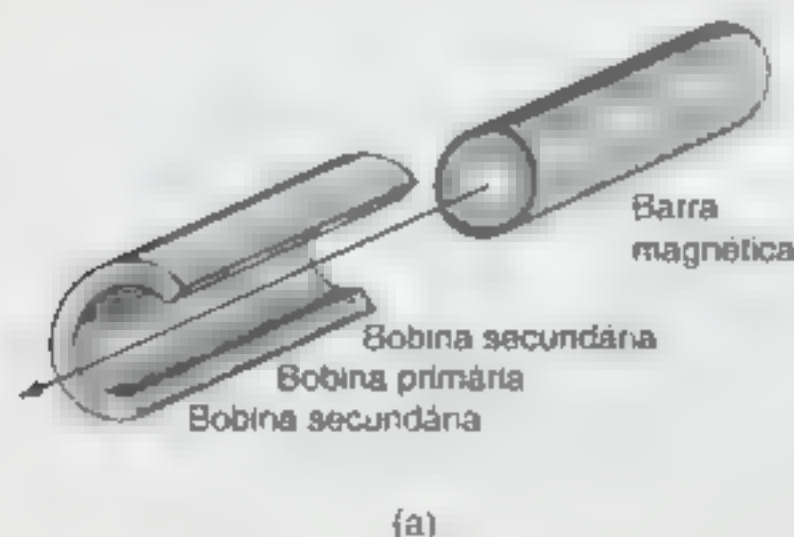


Figura 10.31 Duas representações de LVDT padronizado: (a) vista em corte e (b) diagrama de circuito.

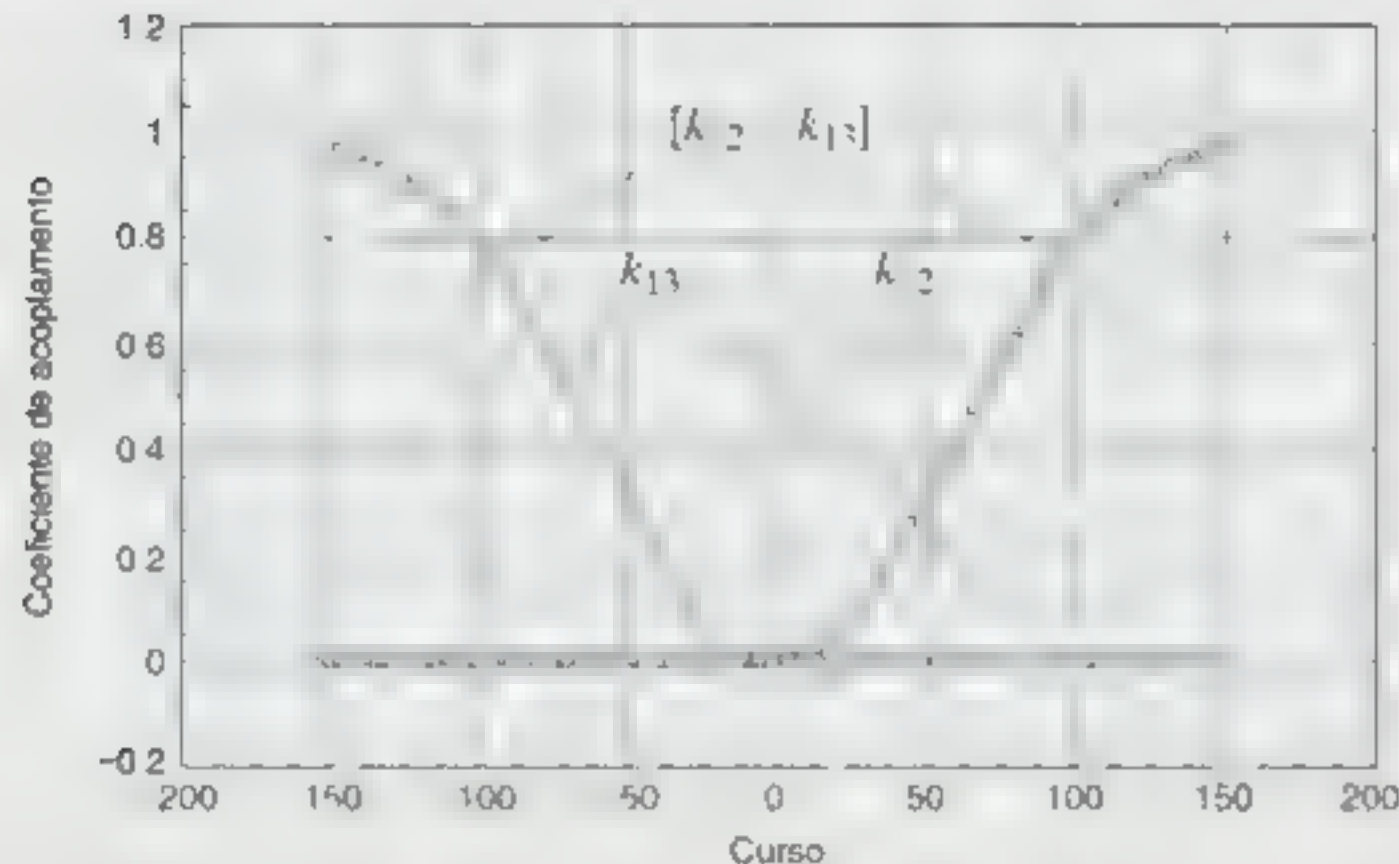


Figura 10.32 Coeficientes de acoplamento para cada enrolamento secundário e diferença de acoplamento. É a diferença que determinará a magnitude da tensão de saída.

A aplicação da LKT ao laço primário fornece

$$V_o = j\omega L_p I_p + j\omega M_{12} I_s - j\omega M_{13} I_s \quad 10.36$$

No laço secundário, a equação da LKT fica

$$2(j\omega L_s) I_s + j\omega M_{12} I_p - j\omega M_{13} I_p + V_i = 0 \quad 10.37$$

Sem carga na saída, $I_s = 0$ e as Eqs. (10.36) e (10.37) são reduzidas a

$$V_o = j\omega L_p I_p \quad \text{e} \quad V_i = I_p j\omega [M_{12} - M_{13}] \quad 10.38$$

Resolvendo para as tensões de saída e reconhecendo que $M_{12} = k_{12}[L_p L_s]^{0.5}$, obtém-se

$$V_i = V_o \sqrt{\frac{L_s}{L_p}} [k_{12} - k_{13}] \quad 10.39$$

Os coeficientes de acoplamento de cada enrolamento secundário podem agora ser expressos em função do percentual do curso, isto é,

$$k_{12} = \begin{cases} 0,008x & \text{para } 0 < x < 100 \\ 0 & \text{para } x < 0 \end{cases}$$

$$k_{13} = \begin{cases} 0,008x & \text{para } 100 < x < 0 \\ 0 & \text{para } x > 0 \end{cases}$$

E, finalmente, admitindo que a tensão de entrada apresente um ângulo de fase nulo, a tensão de saída pode ser expressa como

$$V = V_o \sqrt{\frac{L_s}{L_p}} [0,008x] = V_o \sqrt{\frac{L_s}{L_p}} [0,008x] \angle 0^\circ \quad 10.40$$

$$0 < x < 100$$

$$V = V_o \sqrt{\frac{L_s}{L_p}} [-0,008x] = V_o \sqrt{\frac{L_s}{L_p}} [+0,008x] \angle 180^\circ$$

$$100 < x < 0$$

Observe a relação entre os ângulos de fase dos percursos positivo e negativo.

Para completar a análise, deve-se determinar o valor da razão de indutâncias dos enrolamentos primário e secundário. A 100% do curso, as magnitudes das tensões de entrada e de saída são iguais e $k = 0,8$. Utilizando essa informação na Eq. (10.40), obtém-se que a razão de indutâncias deve ser $L_s/L_p = 1,25^2 = 1,5625$.

Para se determinar os valores reais das indutâncias, deve-se considerar a corrente de entrada a ser tolerada no primário. Seria aconselhável uma corrente relativamente pequena, uma vez que uma alta corrente iria requerer um condutor de alto diâmetro no enrolamento primário. Escolhe-se, assim, uma corrente de 25 mA rms no primário com uma excitação de 10 V rms a 2000 Hz. Com base na Eq. (10.38), a indutância no primário será

$$L_p = \frac{V_o}{\omega I_p} = \frac{10}{2\pi(2000)(0,025)} = 31,8 \text{ mH}$$

valor este que resulta na indutância secundária

$$L_s = 1,5625 L_p = 49,7 \text{ mH}$$

A seleção das duas indutâncias completa esse projeto.

O exemplo a seguir ilustra uma técnica de emprego de um transformador em uma configuração que aumentará a vida de um conjunto de lâmpadas usadas em árvores de Natal.

EXEMPLO DE PROJETO 10.18

As lâmpadas de um jogo de luzes utilizado em árvores de Natal normalmente operam a 120 V rms. Entretanto, elas irão durar muito mais se forem conectadas a uma fonte de 108 V rms. Utilizando um transformador de 120 V – 12 V, projeta-se um autotransformador que fornecerá 108 V rms às lâmpadas.

SOLUÇÃO

Os transformadores com dois enrolamentos anteriormente apresentados mostram um isolamento elétrico entre os enrolamentos primário e secundário, conforme mostrado na Fig. 10.33a. Entretanto, é possível conectar os enrolamentos primário e secundário em série criando um dispositivo com três terminais, conhecido como autotransformador, como mostra-

do na Fig. 10.33b e representado na Fig. 10.33c. Como se pode ver, esse arranjo oferece certas vantagens práticas sobre o caso isolado. Note que o arranjo com três terminais é, essencialmente, um enrolamento contínuo com uma derivação interna.

Para reduzir a tensão de 120 V rms para 108 V rms, as duas bobinas devem ser conectadas de modo que suas tensões estejam em oposição uma em relação à outra, correspondendo a uma conexão subtrativa (Fig. 10.33b), conforme mostrado na Fig. 10.34. Nesse arranjo, a tensão entre os terminais de ambas as bobinas será

$$V = V_1 - V_2 = 120 - 12 = 108 \text{ V rms}$$

e as lâmpadas estarão simplesmente conectadas entre esses terminais.

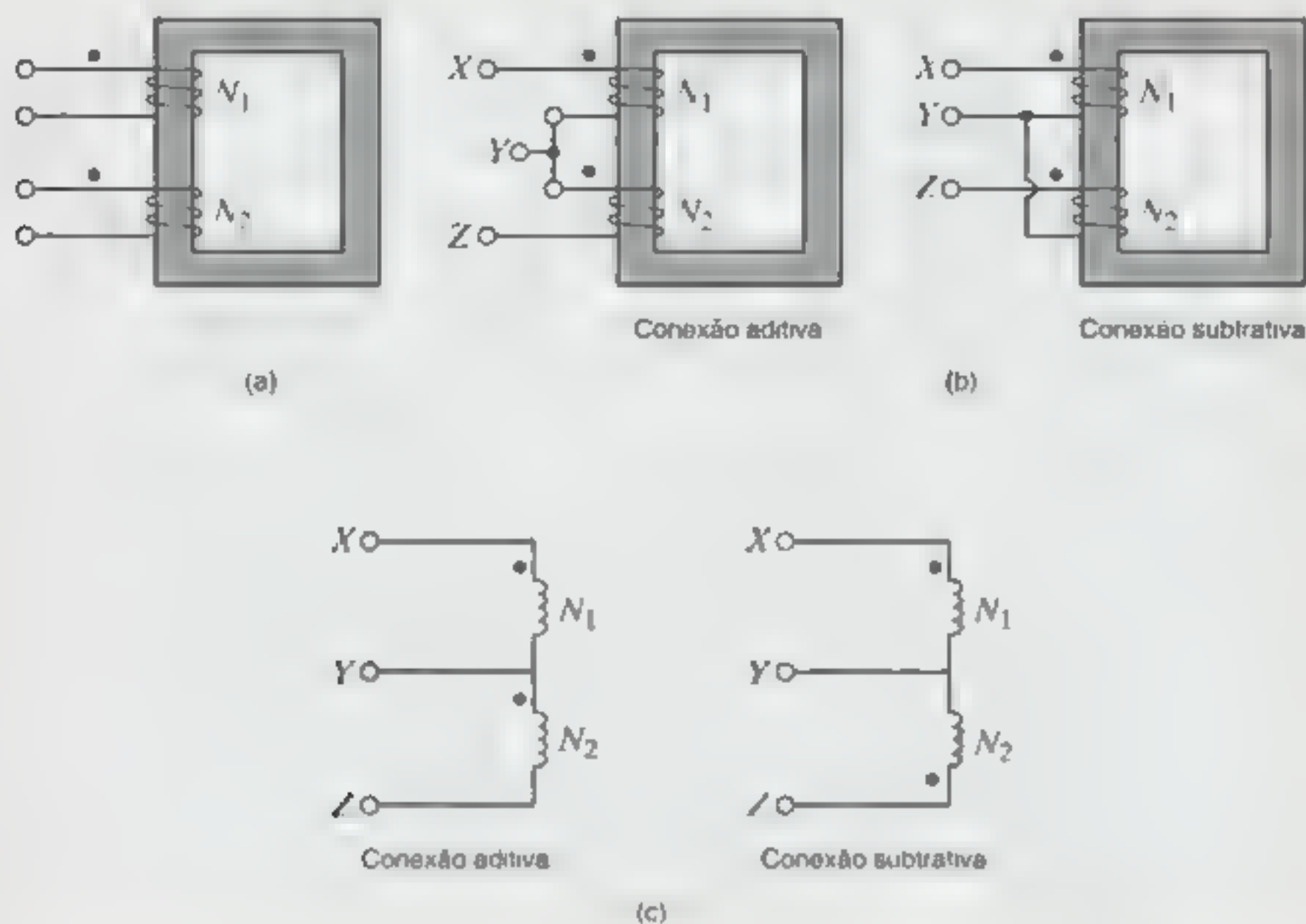


Figura 10.33 Autotransformador: (a) transformador normal com dois enrolamentos adjacentes, (b) transformador com dois enrolamentos interconectados para gerar um único enrolamento, autotransformador com três terminais, (c) representação simbólica do transformador em (b).

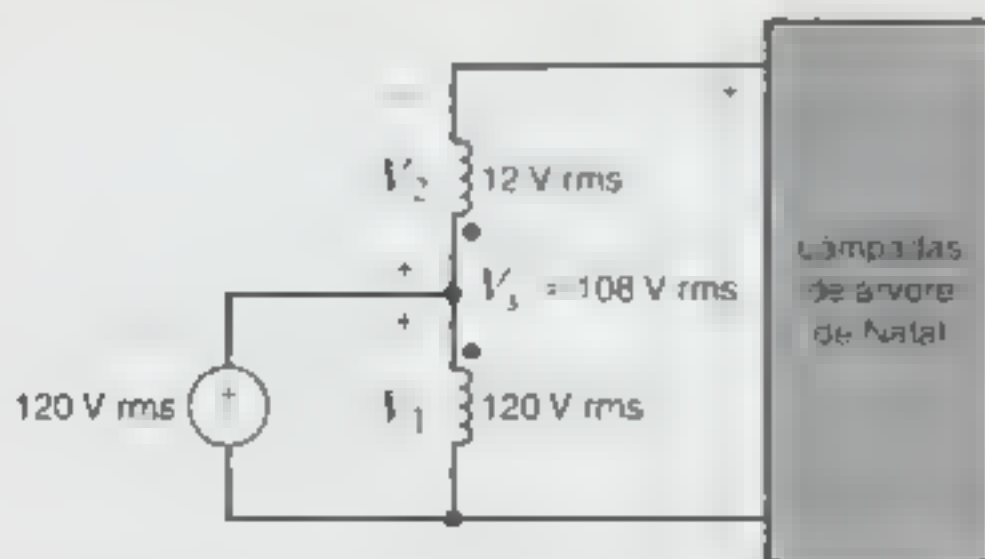


Figura 10.34 Autotransformador utilizado para diminuição da tensão de alimentação das lâmpadas de uma árvore de Natal.

EXEMPLO DE PROJETO 10.19

Atualmente, muitos produtos eletrônicos são alimentados por conversores de alta potência AC para CC. (Esses dispositivos simplesmente convertem um sinal CA na entrada em um sinal CC constante na saída.) Eles normalmente são chamados de transformadores de parede e são ligados diretamente em uma tomada convencional de 120 V rms. Tipicamente, esses transformadores apresentam uma tensão CC de saída na faixa de 5 a 18 V. Conforme mostrado na Fig. 10.35, existem três componentes básicos em um transformador de parede: um transformador simples, um conversor de CA para CC e um controlador. Um transformador de parede particular requer uma tensão CC de saída de 9 V e uma potência máxima de saída de 2 W com uma eficiência de apenas 60%. Além disso, para uma operação adequada, o conversor CA-CC requer um pico de 12 V para a tensão CA na entrada. Deseja-se projetar o transformador selecionando sua razão de espiras e sua corrente nominal.

SOLUÇÃO

Considere, inicialmente, a razão de espiras necessária para o transformador. Deve-se determinar a razão de tensões V_2/V_1 .

Com base nas especificações, V_2 deve apresentar um valor de pico de pelo menos 12 V. Será considerada uma margem de segurança e, assim, será utilizado o valor de 13,5 V para a tensão V_2 . Como V_1 vale 120 V rms, seu valor de pico será 169,7 V. Portanto,

$$n = \frac{V_2}{V_1} = \frac{169,7}{13,5} = 12,6$$

Assim, a razão V_2/V_1 será de 12,6. Será utilizada uma razão de espiras de 12,5:1, ou 25:2. Considera-se, em seguida, o requisito da potência. A carga máxima é de 2 W. Para uma eficiência de 60%, a potência máxima de entrada na unidade será

$$P_e = \frac{P_s}{\eta} = \frac{2}{0,6} = 3,33 \text{ W}$$

A 120 V rms, a corrente de entrada será de apenas

$$I_e = \frac{P_e}{V_e} = \frac{3,33}{120} = 27,8 \text{ mA rms}$$

Portanto, a especificação de um transformador com uma razão de espiras de 25:2 e uma corrente nominal de 100 mA rms propiciará uma excelente margem de segurança.

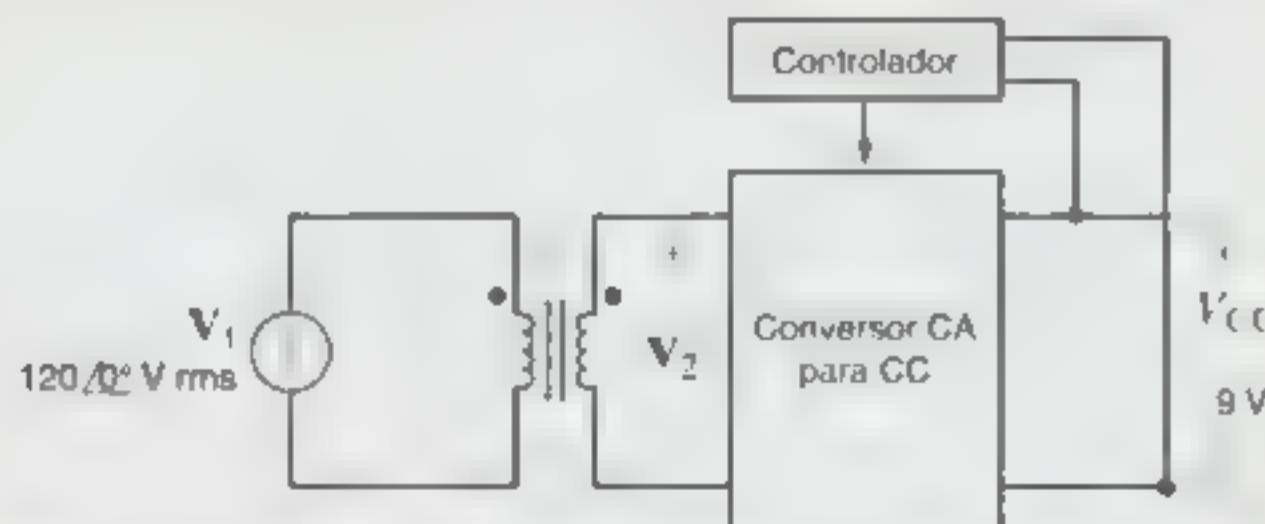


Figura 10.35 Diagrama de blocos de um transformador de parede simples. Esses dispositivos convertem as tensões CA (tipicamente 120 V rms) em tensões CC a um nível bem baixo de potência.

RESUMO

- **Indutância mútua** A indutância mútua ocorre quando os indutores são colocados muito próximos um do outro e compartilham um fluxo magnético comum.
- **A convenção do ponto para a indutância mútua** A convenção do ponto governa o sinal da tensão induzida em uma bobina e baseia-se no sentido da corrente na outra bobina.
- **A relação entre a indutância mútua e a autoindutância de duas bobinas** Uma análise da energia indica que $M = k\sqrt{L_1 L_2}$, em que k , o coeficiente de acoplamento, possui um valor entre 0 e 1.
- **O transformador ideal** Um transformador ideal possui permeabilidade do núcleo e condutância de enrolamento infinitas. A tensão e a corrente podem ser transformadas entre os terminais dos circuitos primário e secundário com base na razão de espiras entre os circuitos primário e secundário do transformador.
- **A convenção do ponto para um transformador ideal** A convenção do ponto para um transformador ideal, assim como para a indutância mútua, especifica de que maneira uma corrente em um enrolamento induz uma tensão em outro enrolamento.
- **Circuitos equivalentes envolvendo transformadores ideais** Com base na localização das incógnitas dos circuitos, tanto o primário quanto o secundário podem ser refletidos para o outro lado do transformador formando um único circuito contendo a incógnita desejada. As tensões, as correntes e as impedâncias refletidas são dependentes da convenção do ponto e da razão de espiras.

PROBLEMAS

10.1 Dada a rede mostrada na Fig. P10.1,

- (a) escreva as equações para $v_a(t)$ e $v_b(t)$.
 (b) escreva as equações para $v_c(t)$ e $v_d(t)$.

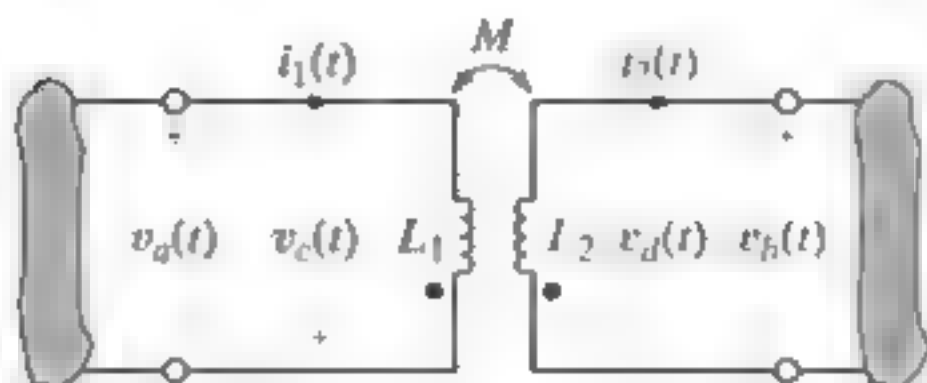


Figura P10.1

10.2 Dada a rede mostrada na Fig. P10.2,

- (a) obtenha as equações para $v_a(t)$ e $v_b(t)$.
 (b) obtenha as equações para $v_c(t)$ e $v_d(t)$.

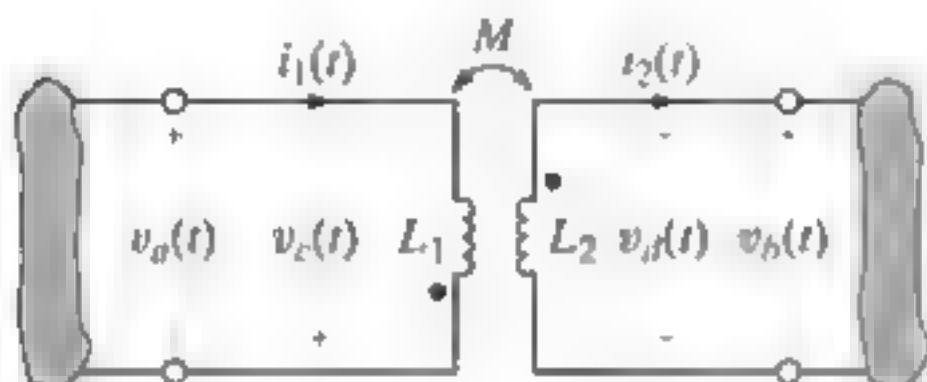


Figura P10.2

10.3 Dada a rede mostrada na Fig. P10.3,

- (a) escreva as equações para $v_a(t)$ e $v_b(t)$.
 (b) escreva as equações para $v_c(t)$ e $v_d(t)$.

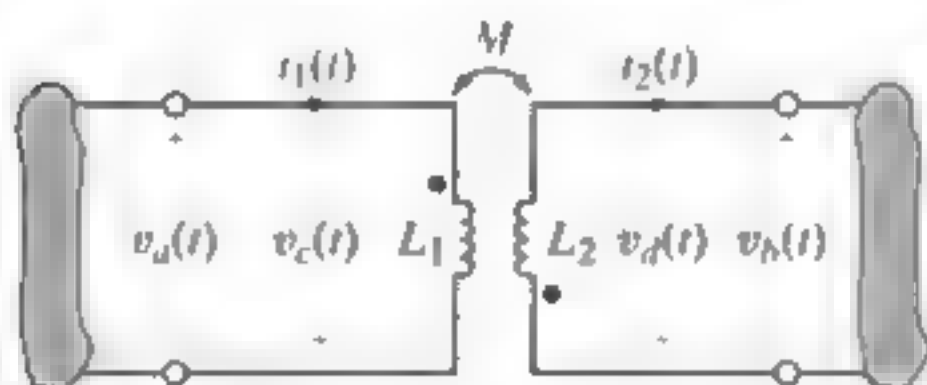


Figura P10.3

10.8 Determine a tensão V_x da rede mostrada na Fig. P10.8.

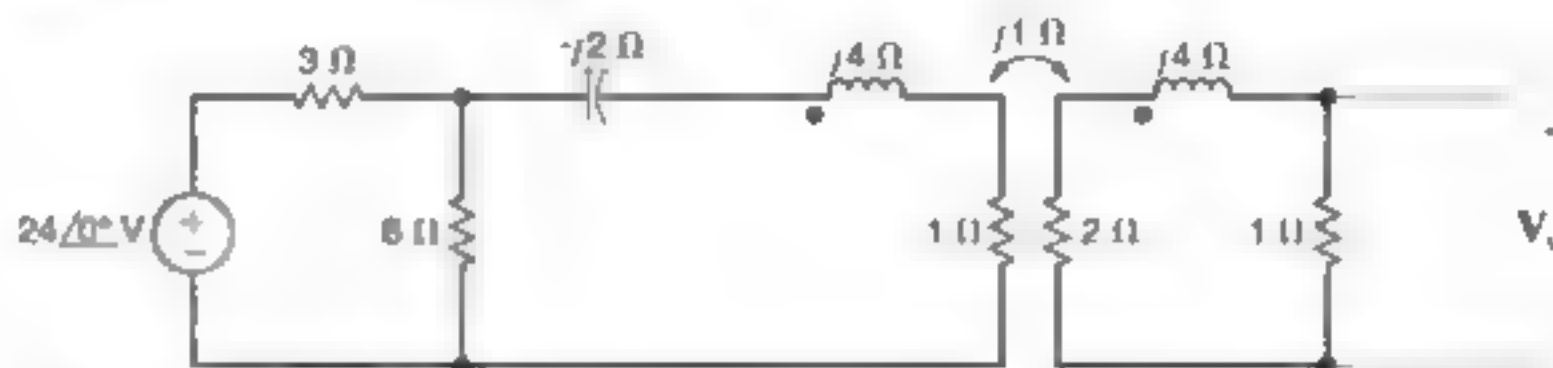


Figura P10.8

10.4 Dada a rede mostrada na Fig. P10.4,

- (a) obtenha as equações para $v_a(t)$ e $v_b(t)$.
 (b) obtenha as equações para $v_c(t)$ e $v_d(t)$.

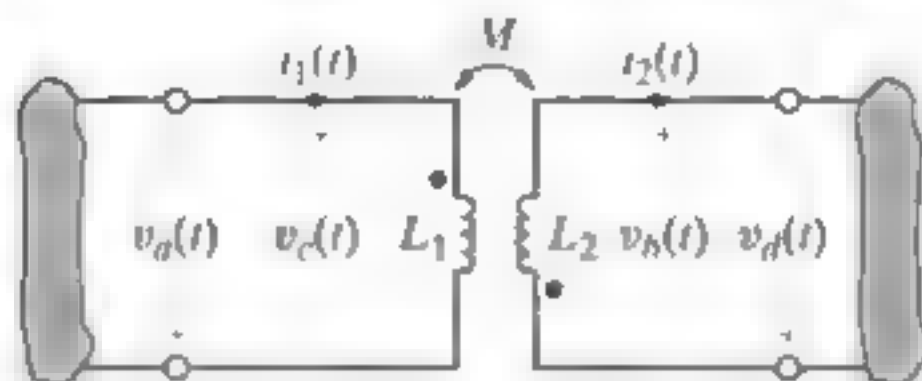


Figura P10.4

10.5 Determine a tensão V_x da rede mostrada na Fig. P10.5.

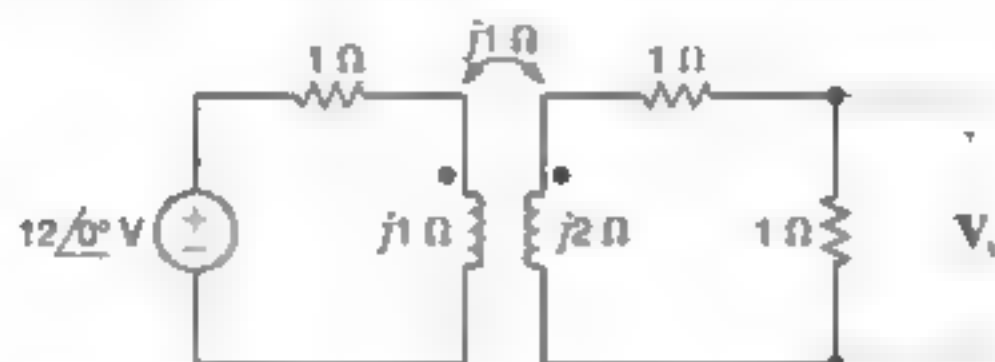


Figura P10.5

10.6 Determine a tensão V_x da rede mostrada na Fig. P10.6.

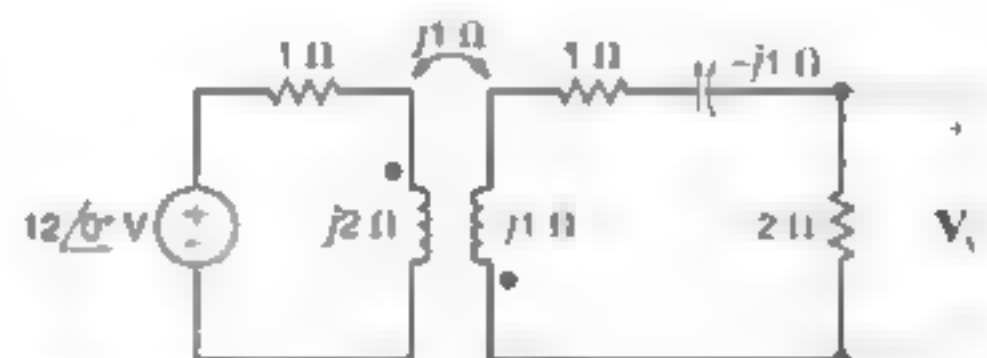


Figura P10.6

10.7 Determine a tensão V_x do circuito mostrado na Fig. P10.7.

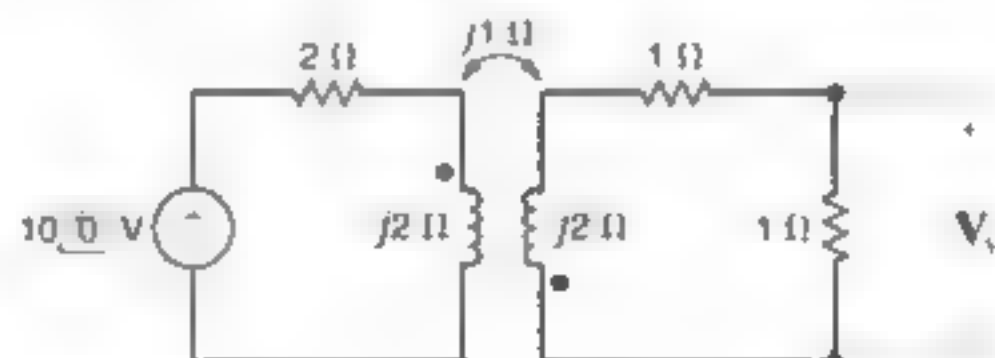


Figura P10.7

10.9 Determine a tensão V_x do circuito mostrado na Fig. P10.9.

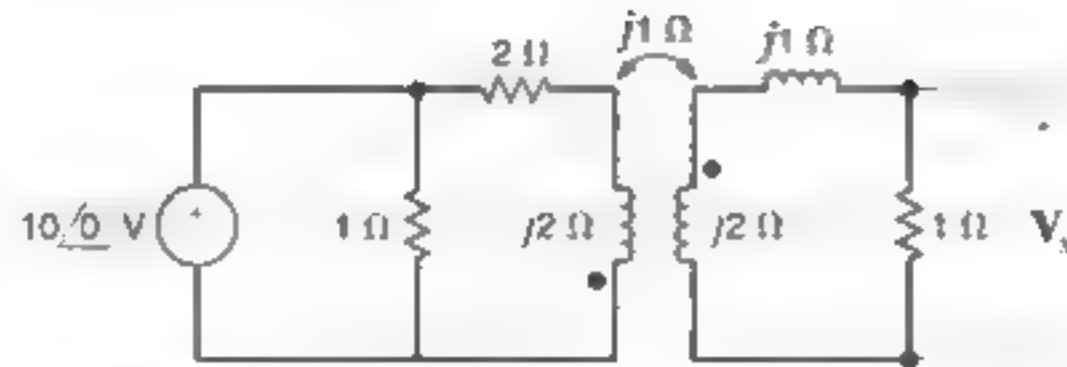


Figura P10.9

10.10 Determine a tensão V_x da rede mostrada na Fig. P10.10.

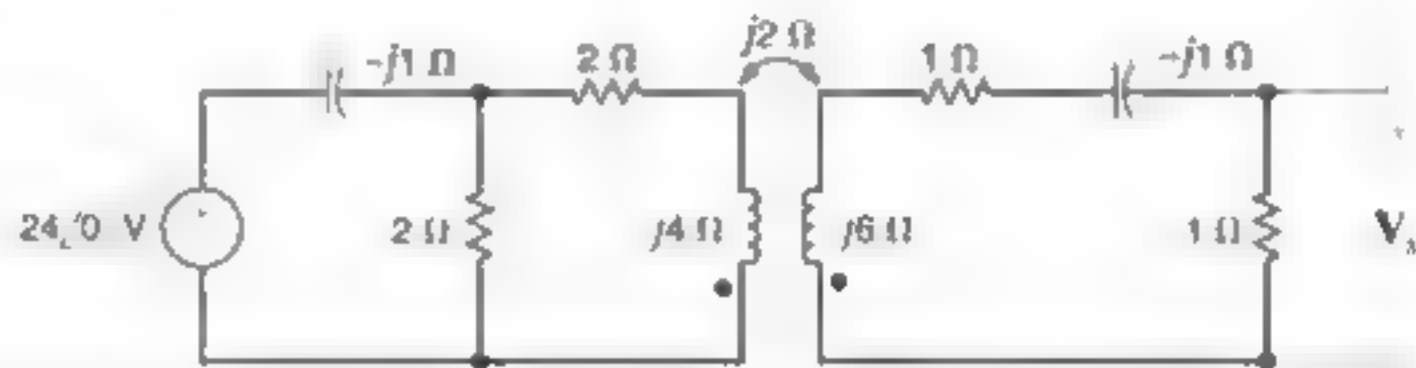


Figura P10.10

10.11 Determine a tensão V_x do circuito mostrado na Fig. P10.11.

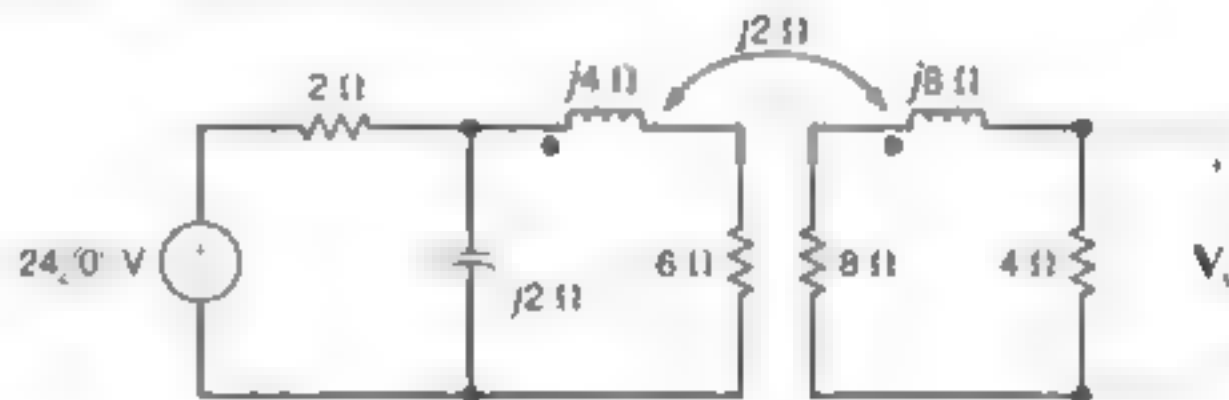


Figura P10.11

10.12 Determine a corrente I_x do circuito mostrado na Fig. P10.12.

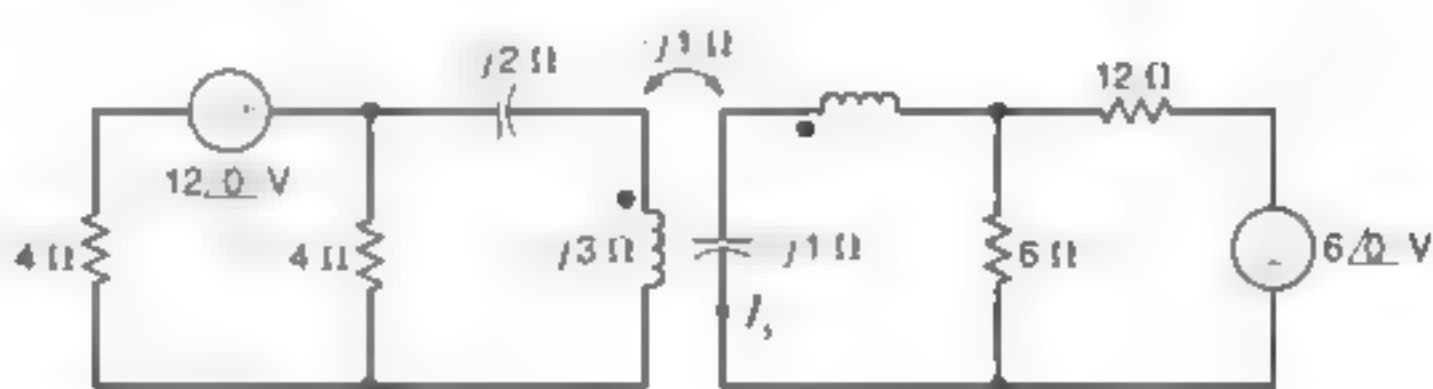


Figura P10.12

10.13 Determine a tensão V_x da rede mostrada na Fig. P10.13.

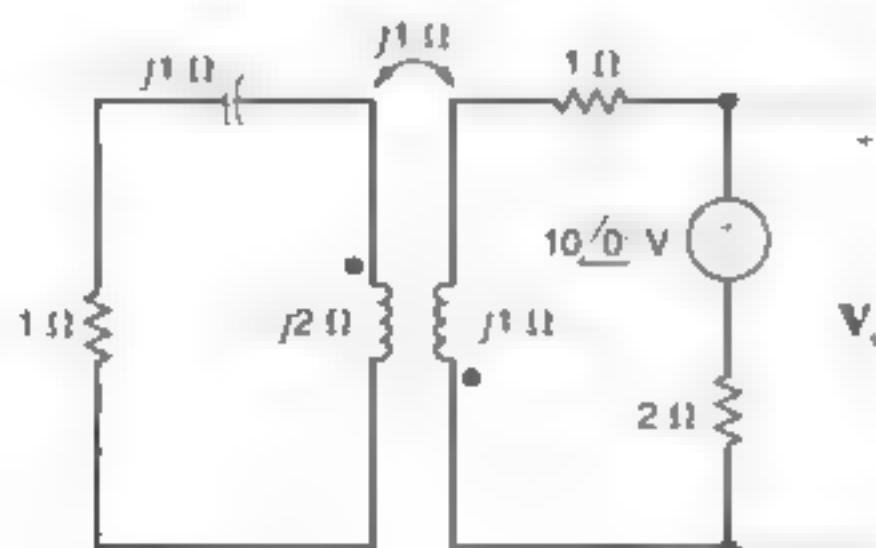


Figura P10.13

- 10.14** Determine a tensão V_x do circuito mostrado na Fig. P10.14.

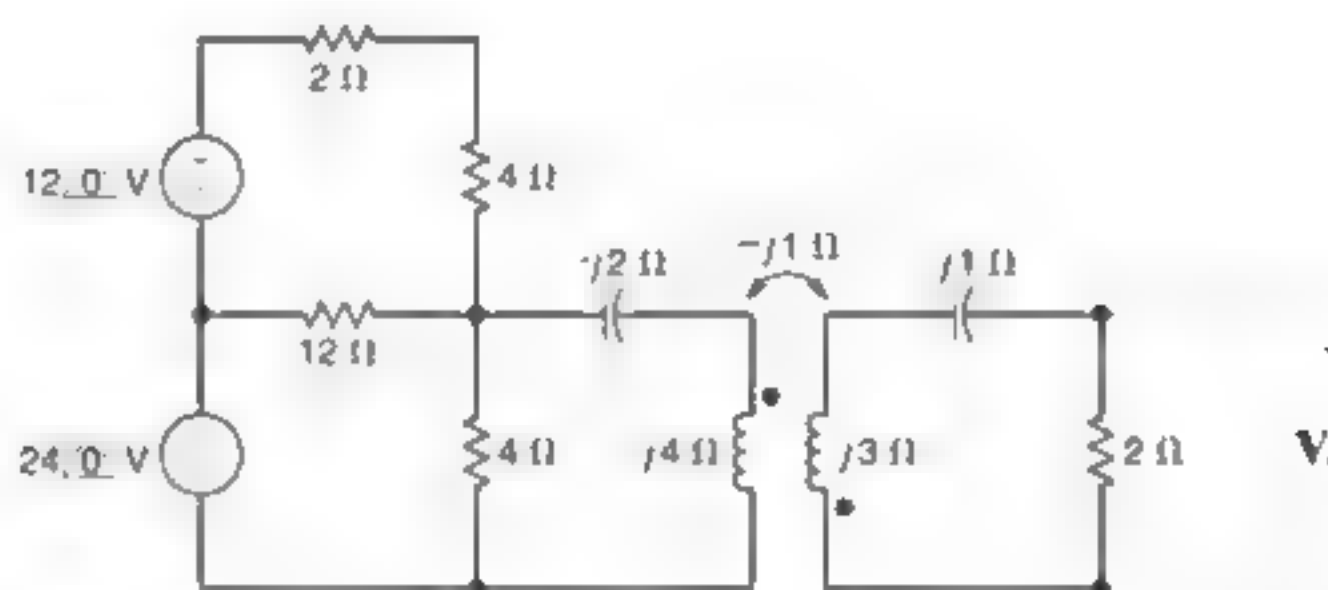


Figura P10.14

- 10.15** Determine a tensão V_x da rede mostrada na Fig. P10.15.

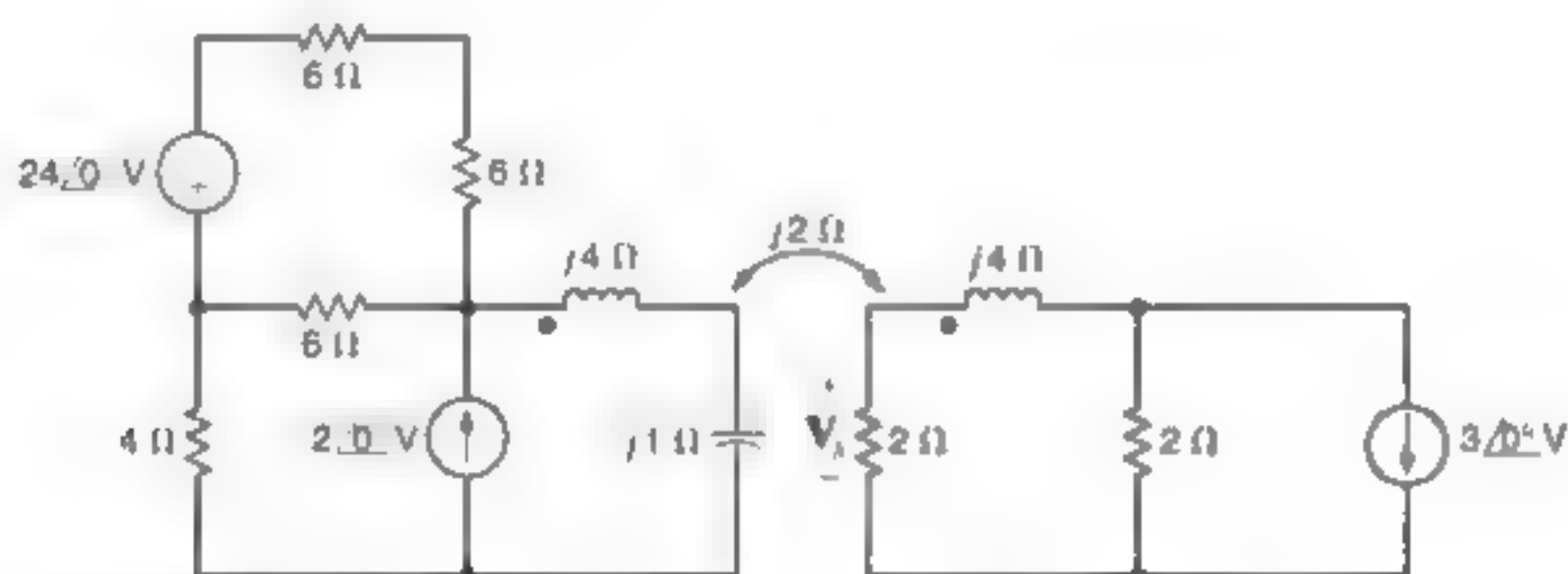


Figura P10.15

- 10.16** Determine a tensão V_x da rede mostrada na Fig. P10.16.

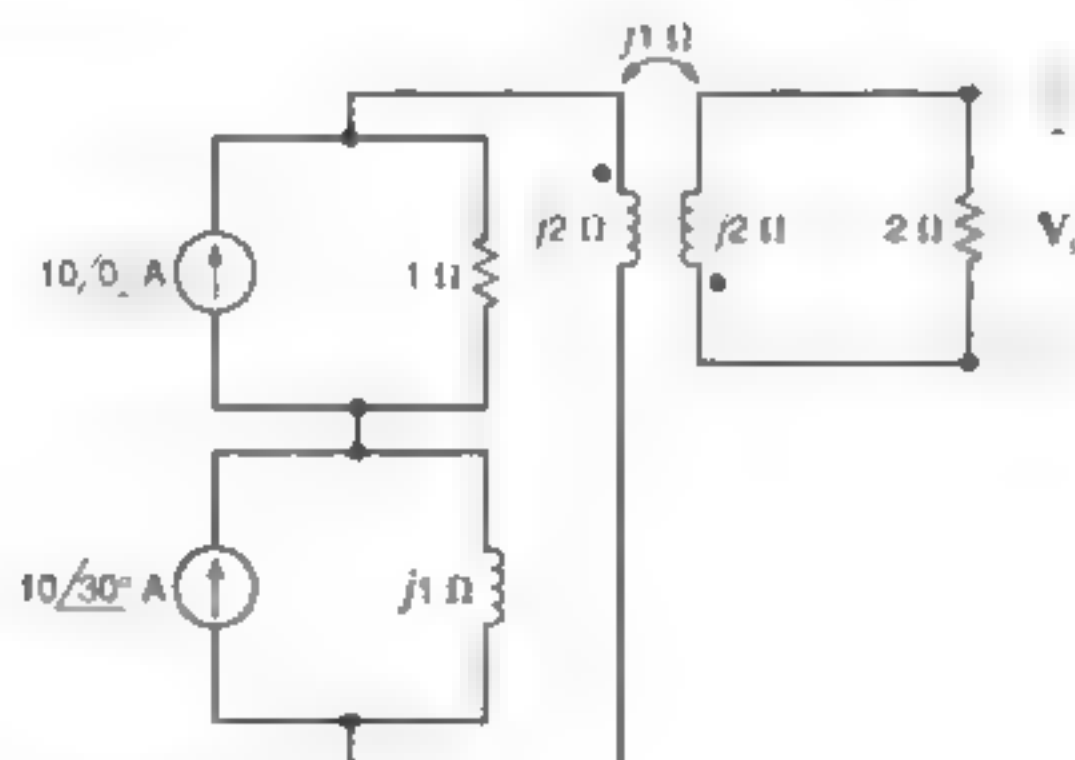


Figura P10.16

10.17 Determine a tensão V_x da rede mostrada na Fig. P10.17.

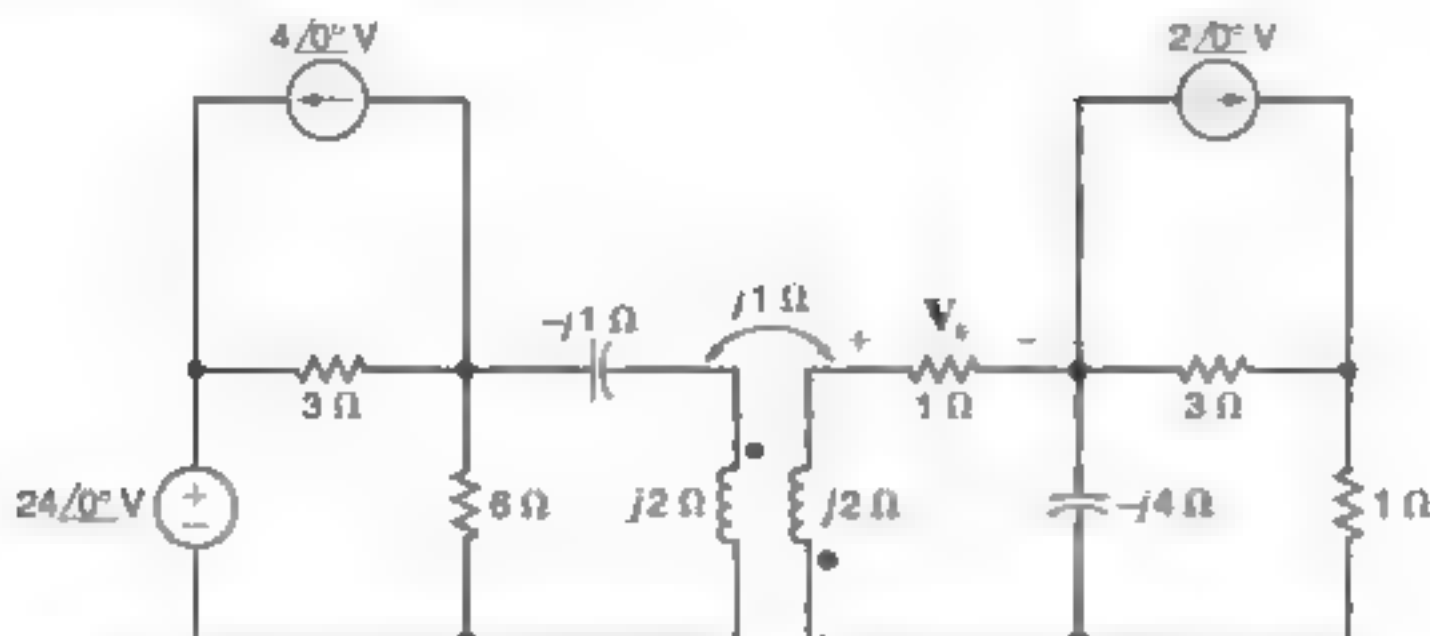


Figura P10.17

10.18 Determine a tensão V_x da rede mostrada na Fig. P10.18.

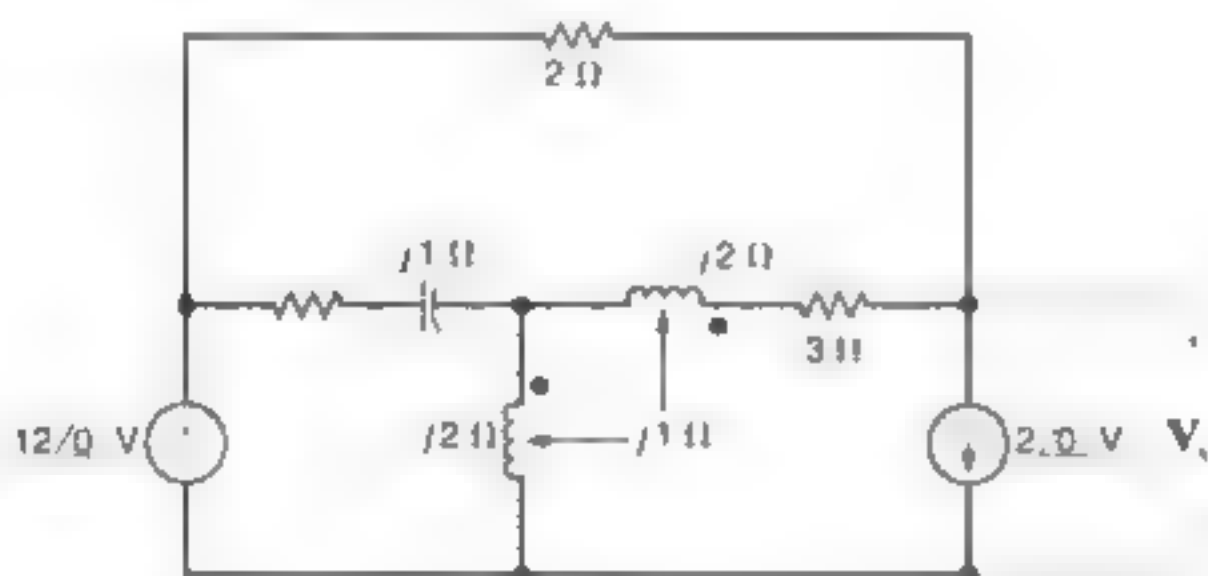


Figura P10.18

10.19 Determine a corrente I_x do circuito mostrado na Fig. P10.19.

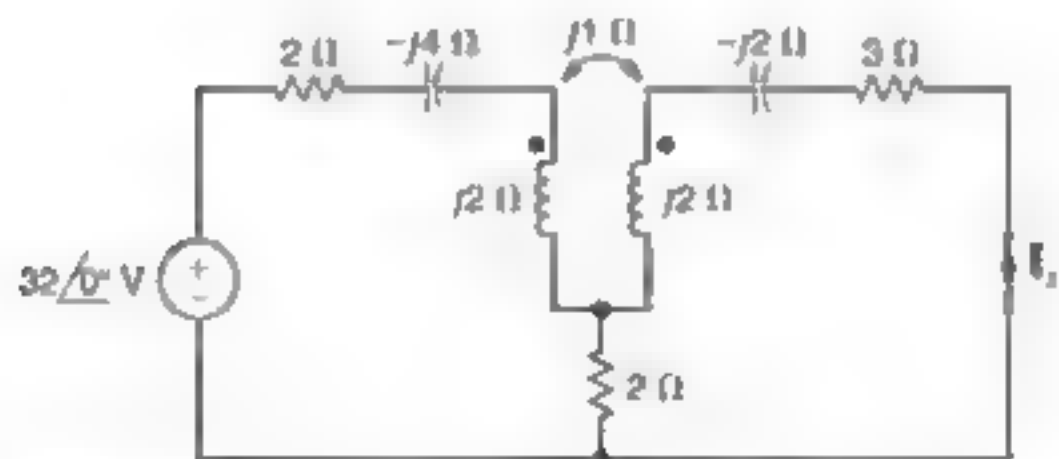


Figura P10.19

10.20 Determine a tensão V_x da rede mostrada na Fig. P10.20.

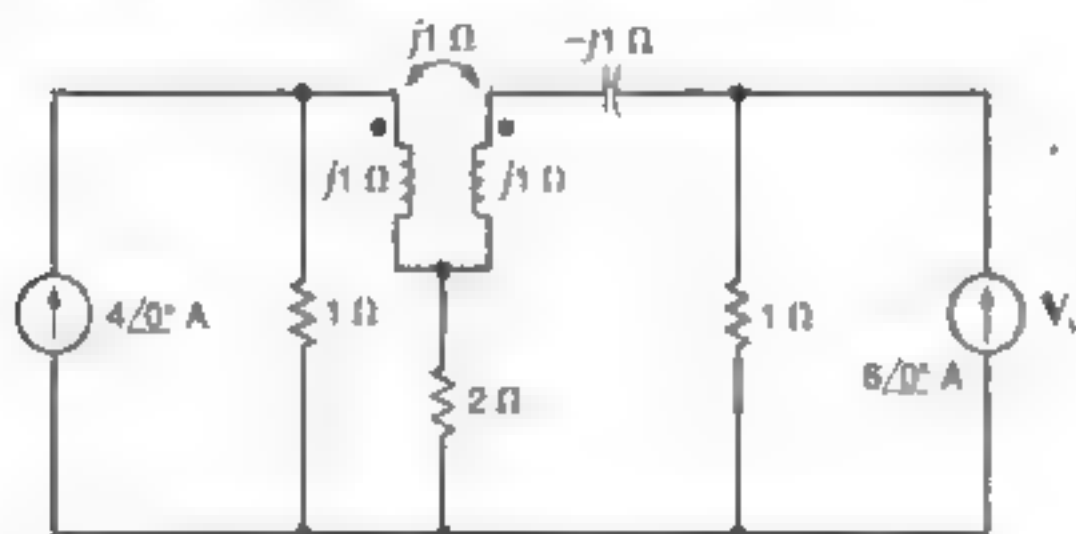


Figura P10.20

10.21 Determine a corrente I_x do circuito mostrado na Fig. P10.21.

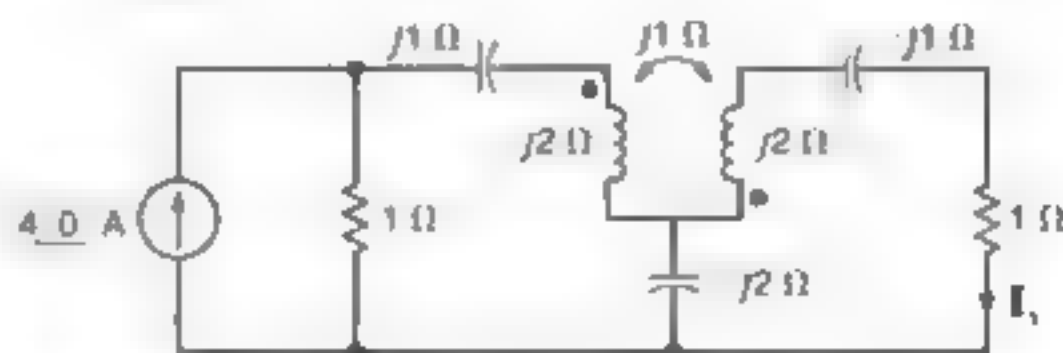


Figura P10.21

10.22 Determine a tensão V_x do circuito mostrado na Fig. P10.22.

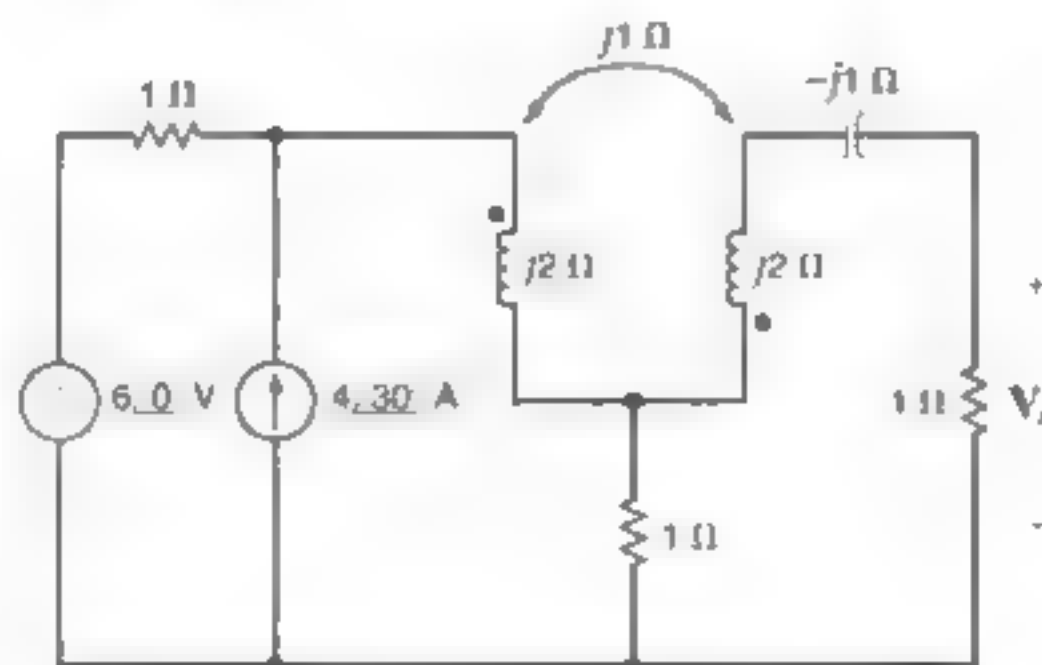


Figura P10.22

10.23 Determine a tensão V_x da rede mostrada na Fig. P10.23

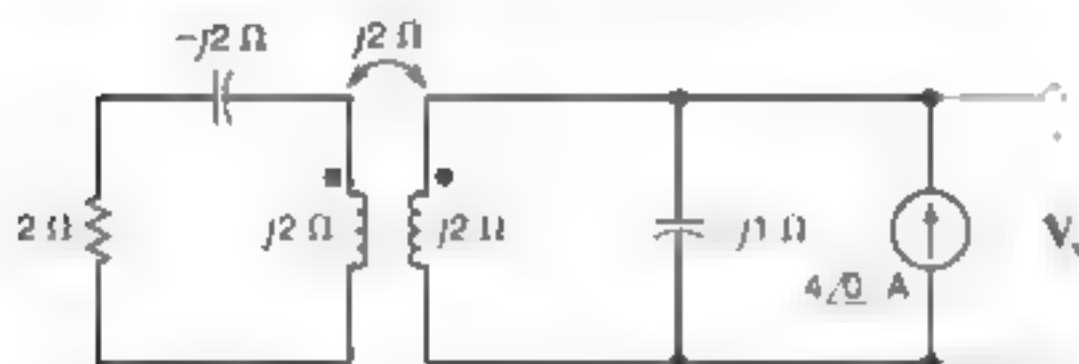


Figura P10.23

10.24 Determine a tensão V_x da rede mostrada na Fig. P10.24.

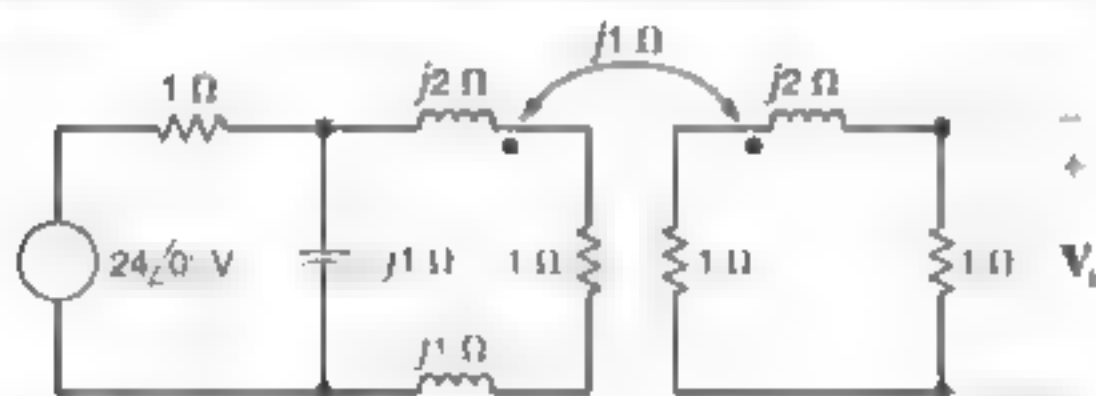


Figura P10.24

10.25 Determine a tensão V_x da rede mostrada na Fig. P10.25.

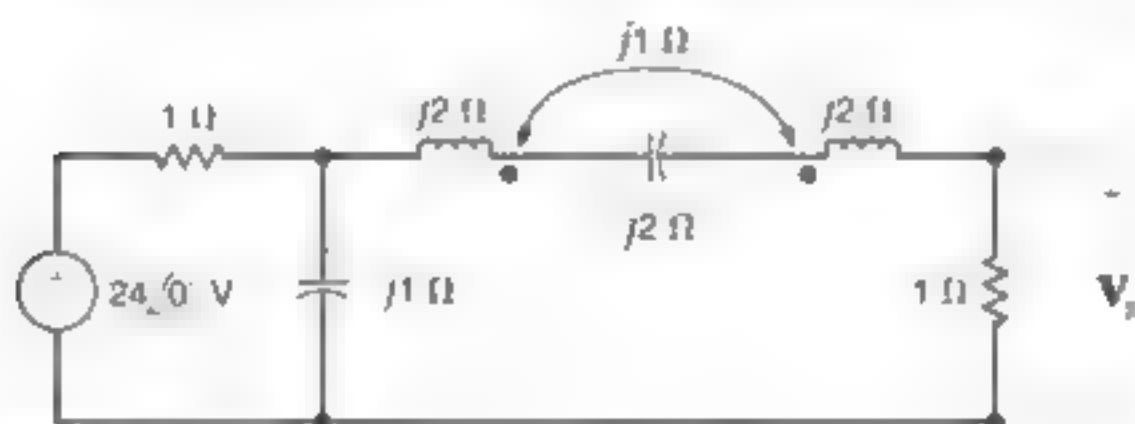


Figura P10.25

10.26 Determine a tensão V_x da rede mostrada na Fig. P10.26.

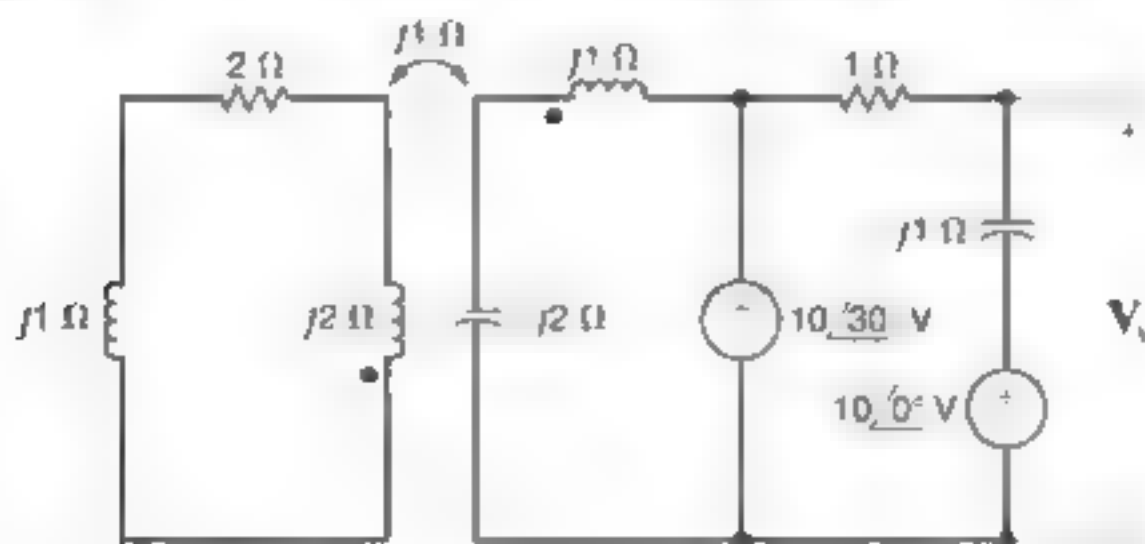


Figura P10.26

10.27 Determine a tensão V_x da rede mostrada na Fig. P10.27

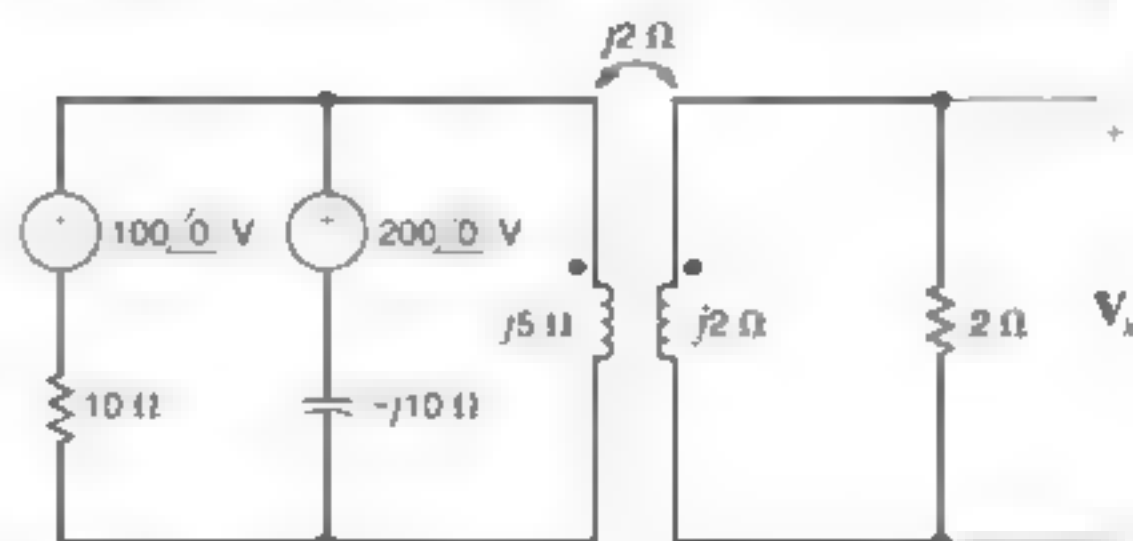


Figura P10.27

10.28 Determine a impedância vista pela fonte da rede mostrada na Fig. P10.28.

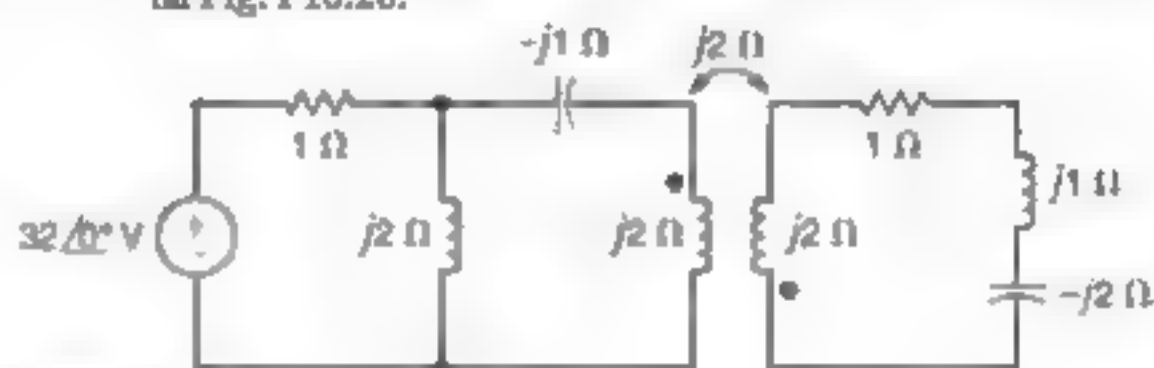


Figura P10.28

10.29 Determine a impedância vista pela fonte da rede mostrada na Fig. P10.29.

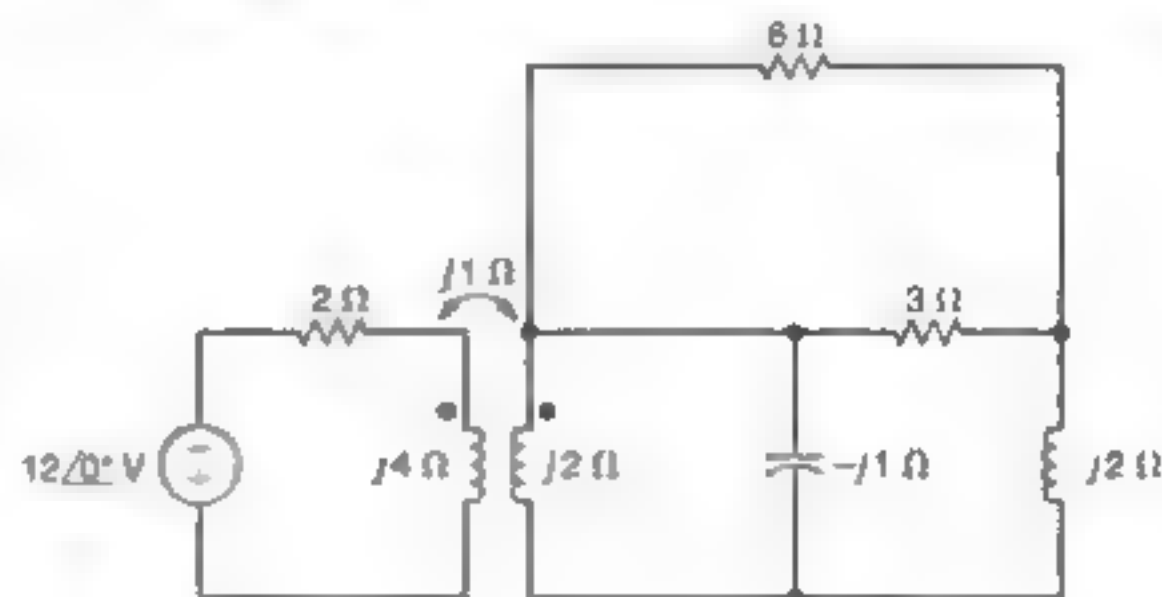


Figura P10.29

10.30 Determine a impedância de entrada da rede mostrada na Fig. P10.30.

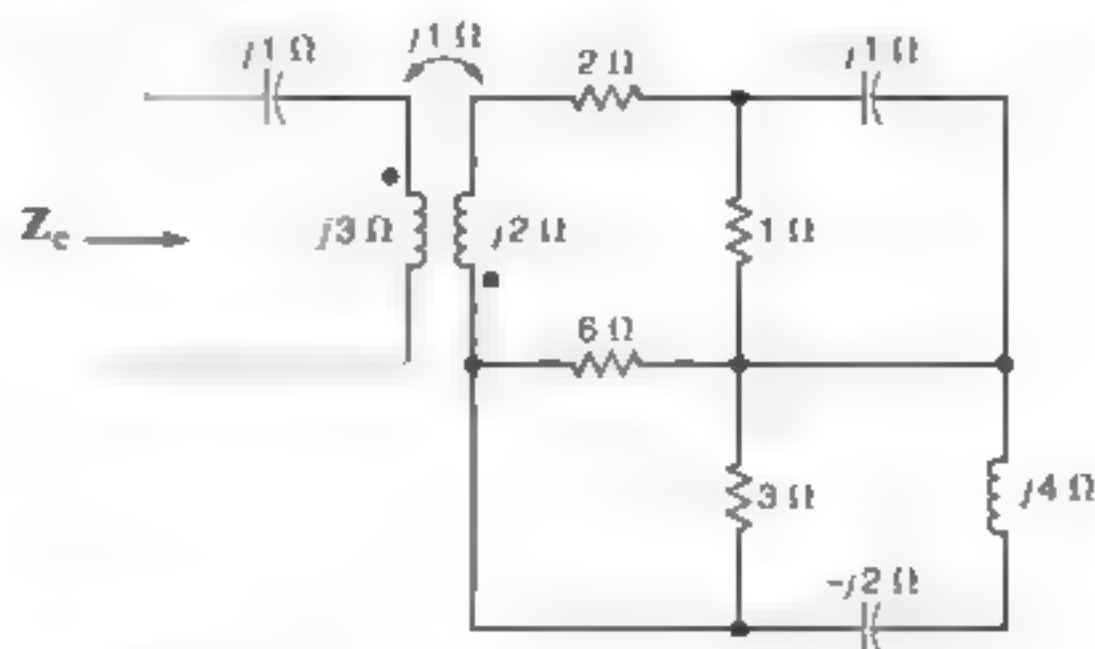


Figura P10.30

- 10.31** Determine a impedância de entrada vista pela fonte do circuito mostrado na Fig. P10.31.

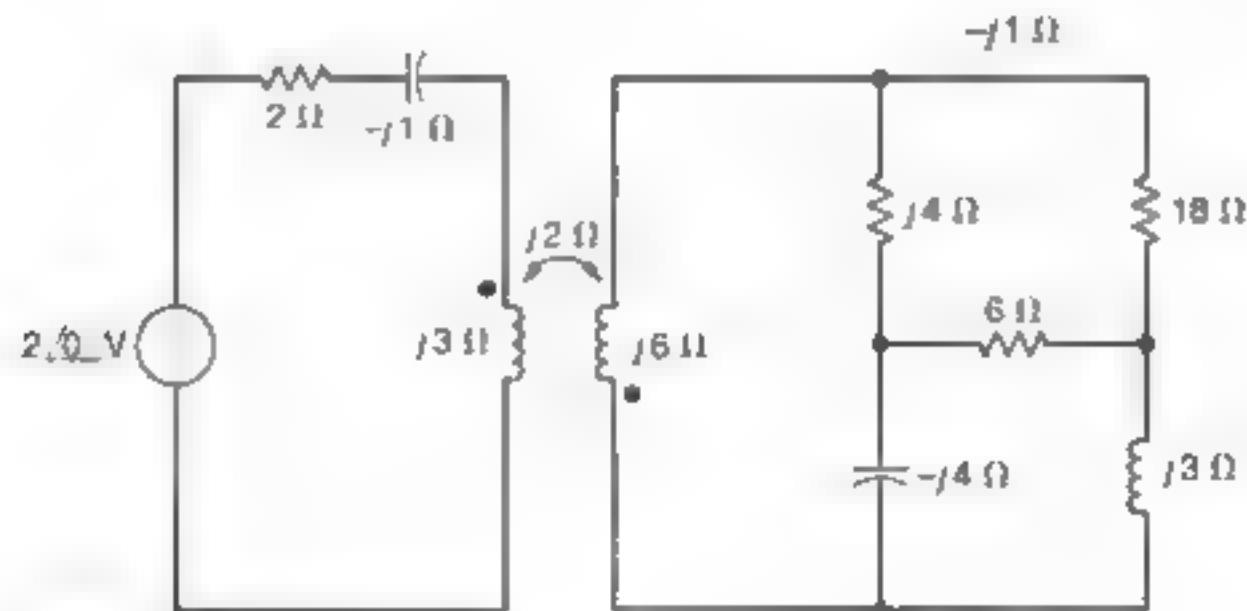


Figura P10.31

- 10.32** Determine a impedância de entrada Z_c do circuito mostrado na Fig. P10.32.

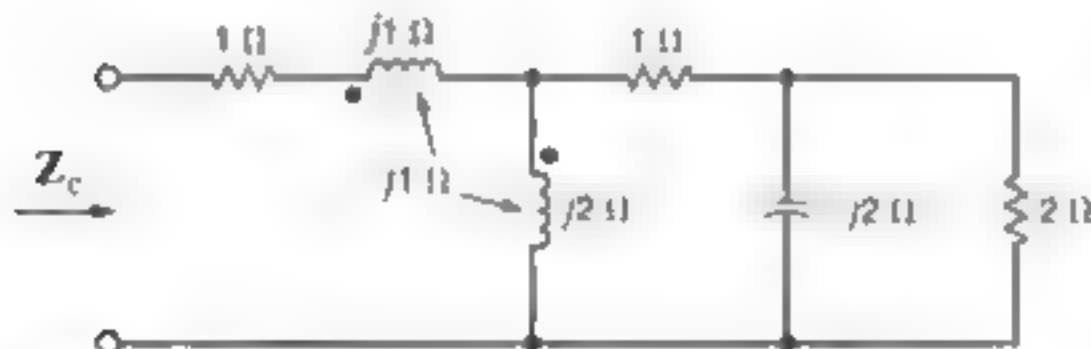


Figura P10.32

- 10.33** Determine a impedância de entrada Z_c da rede mostrada na Fig. P10.33.

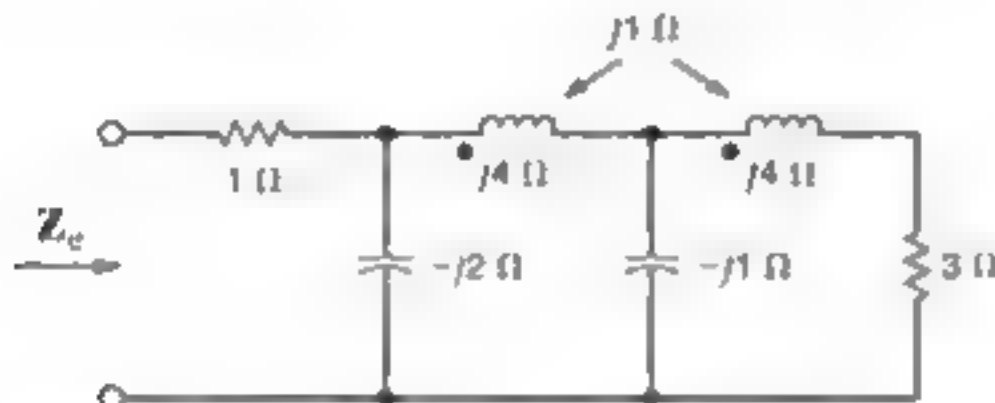


Figura P10.33

- 10.34** Analise a rede mostrada na Fig. P10.34 e verifique se pode ser obtido um valor de X_c tal que a tensão de saída seja igual a duas vezes a tensão de entrada.

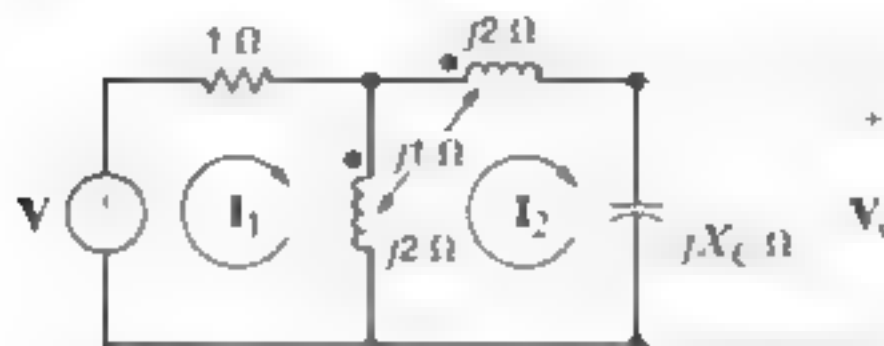


Figura P10.34

- 10.35** Dada a rede mostrada na Fig. P10.35, determine o valor do capacitor C que torna puramente resistiva a impedância vista pela fonte de tensão de $24 \angle 0^\circ$ V. Considere a frequência $f = 60$ Hz.

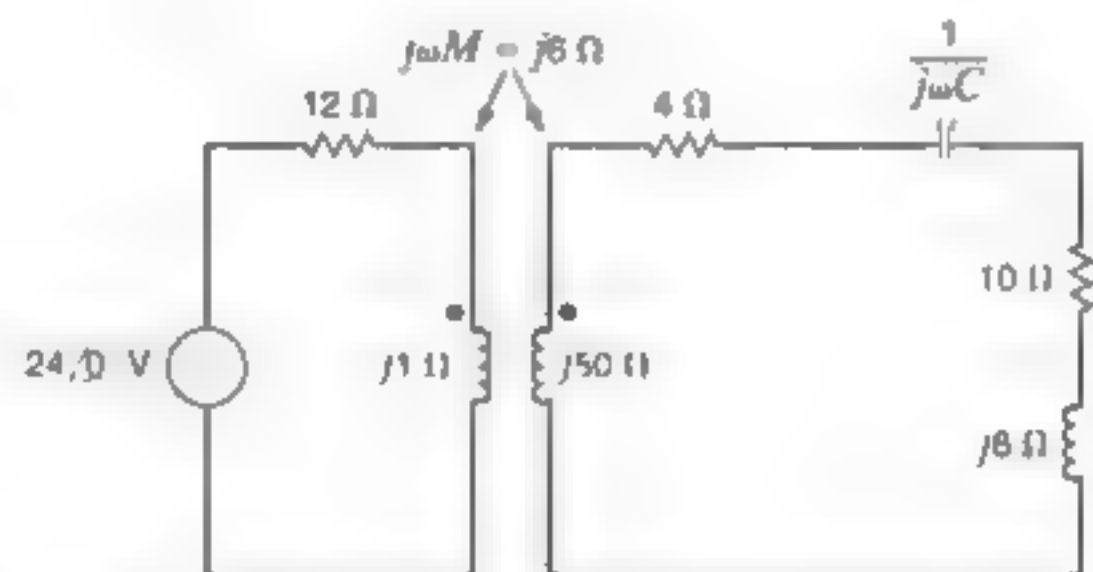


Figura P10.35

- 10.36** Duas bobinas são posicionadas em uma rede de modo que ocorra um acoplamento de 100% entre elas. Se a indutância de uma das bobinas é de 10 mH e a indutância mútua é de 6 mH, calcule a indutância da outra bobina.
- 10.37** As correntes nos indutores magneticamente acoplados mostrados na Fig. P10.37 são conhecidas e valem $i_1(t) = 8 \cos(377t - 20^\circ)$ mA e $i_2(t) = 4 \cos(377t - 50^\circ)$ mA. Os valores das indutâncias são $L_1 = 2$ H e $L_2 = 1$ H, e $k = 0,6$. Determine as tensões $v_1(t)$ e $v_2(t)$.

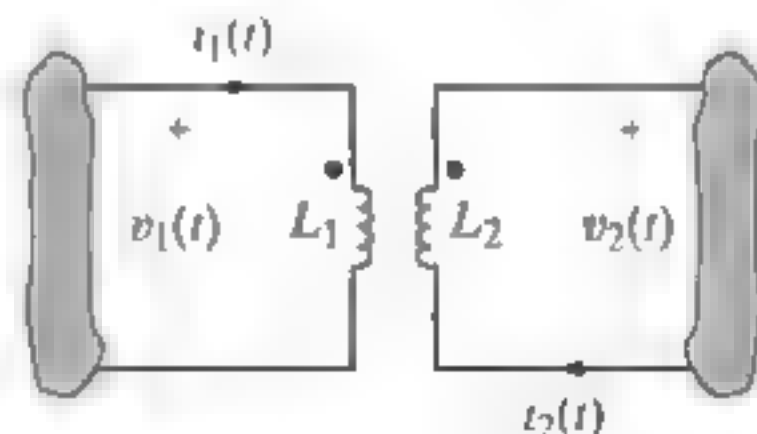


Figura P10.37

- 10.38** Determine a energia armazenada nos indutores acoplados do circuito do Problema 10.37 no tempo $t = 1$ ms.

- 10.39** As correntes da rede mostrada na Fig. P10.39 são conhecidas e valem $i_1(t) = 10 \cos(377t - 30^\circ)$ mA e $i_2(t) = 20 \cos(377t - 45^\circ)$ mA. Os valores das indutâncias são $L_1 = 2$ H e $L_2 = 2$ H, e $k = 0,8$. Determine as tensões $v_1(t)$ e $v_2(t)$.

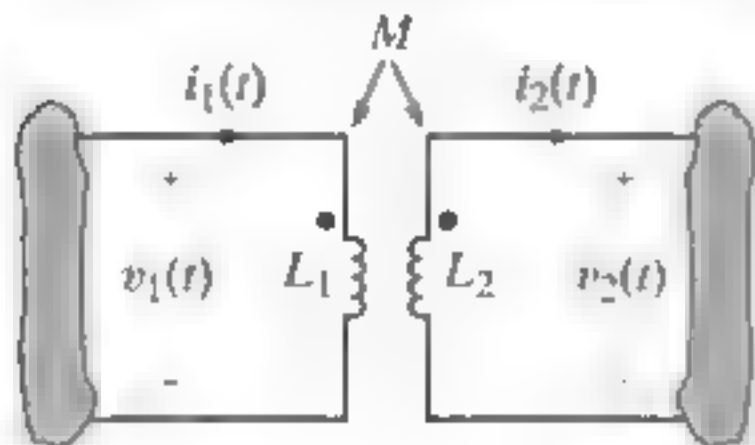


Figura P10.39

- 10.40** Determine a energia armazenada nos indutores acoplados do circuito do Problema 10.39 no tempo $t = 1$ ms.
- 10.41** Determine a tensão V_s do circuito mostrado na Fig. P10.41.

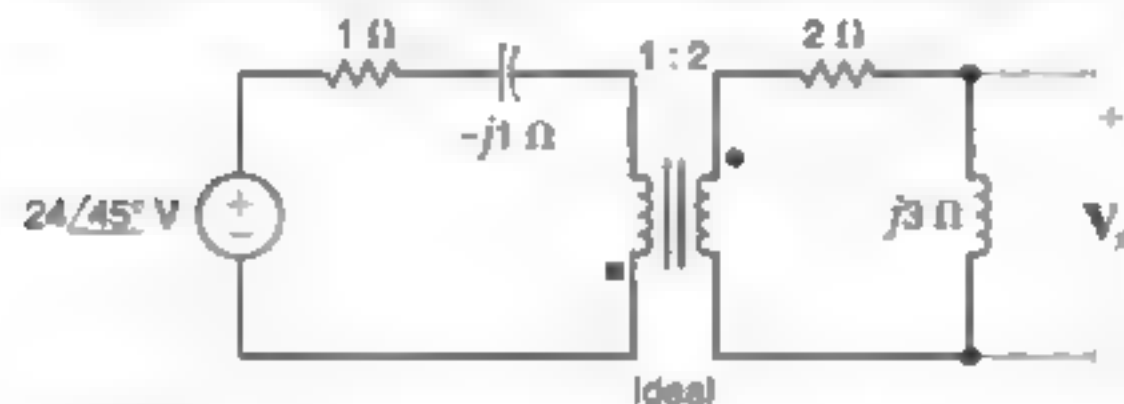


Figura P10.41

- 10.42** Determine todas as correntes e tensões da rede mostrada na Fig. P10.42.

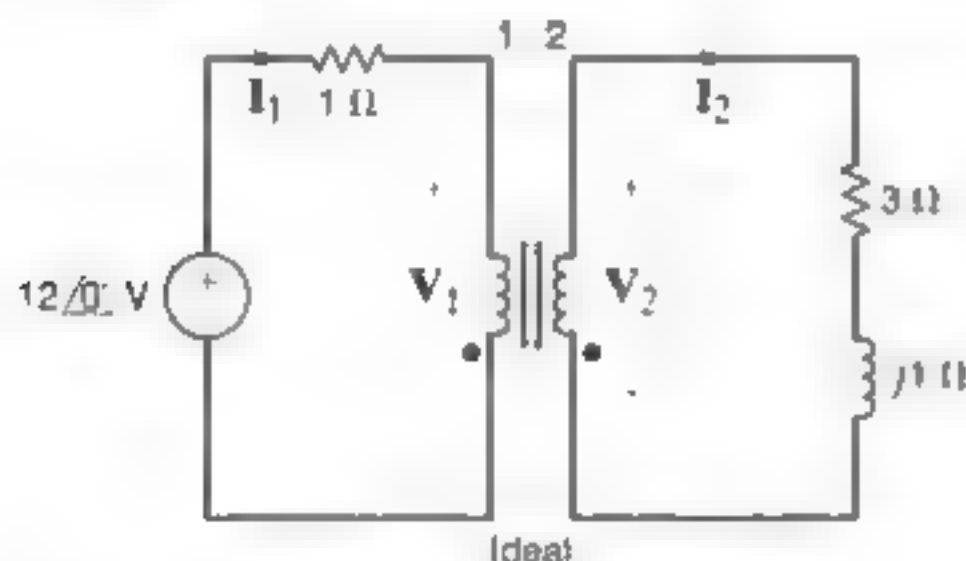


Figura P10.42

- 10.46** Determine a tensão V_s do circuito mostrado na Fig. P10.46.

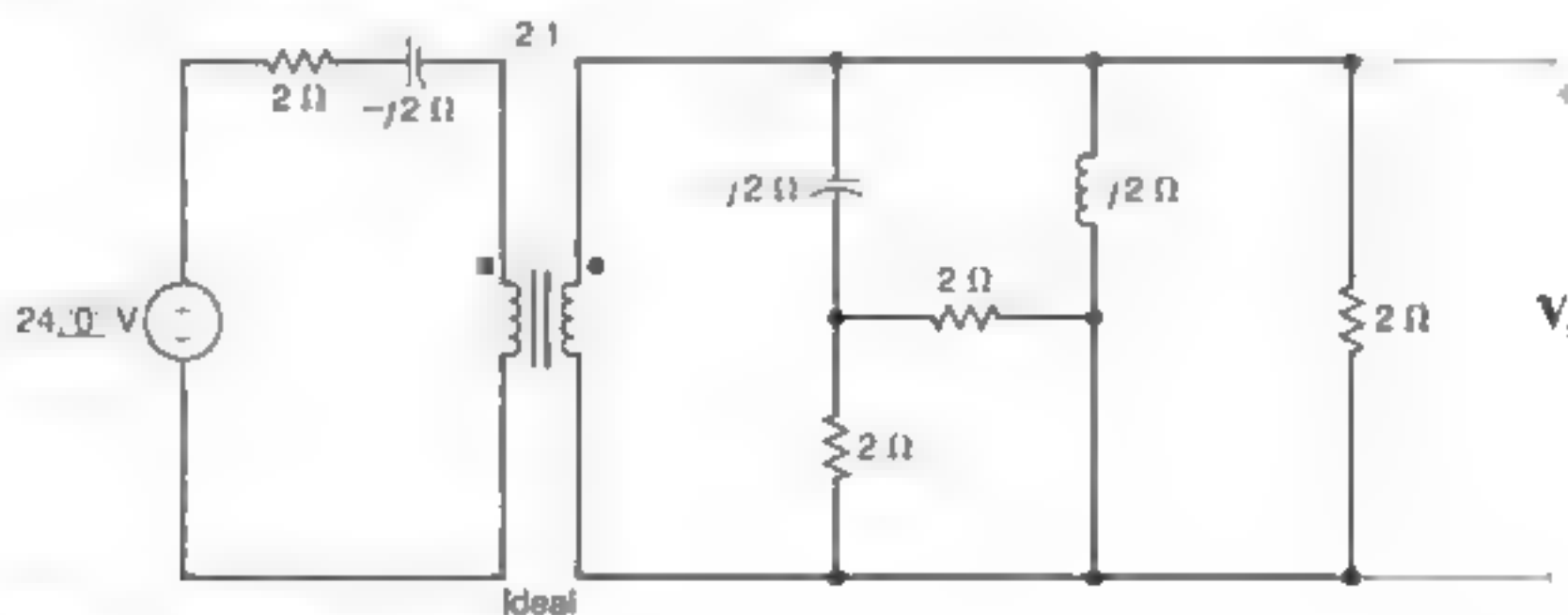


Figura P10.46

- 10.43** Determine a tensão V_s do circuito mostrado na Fig. P10.43.

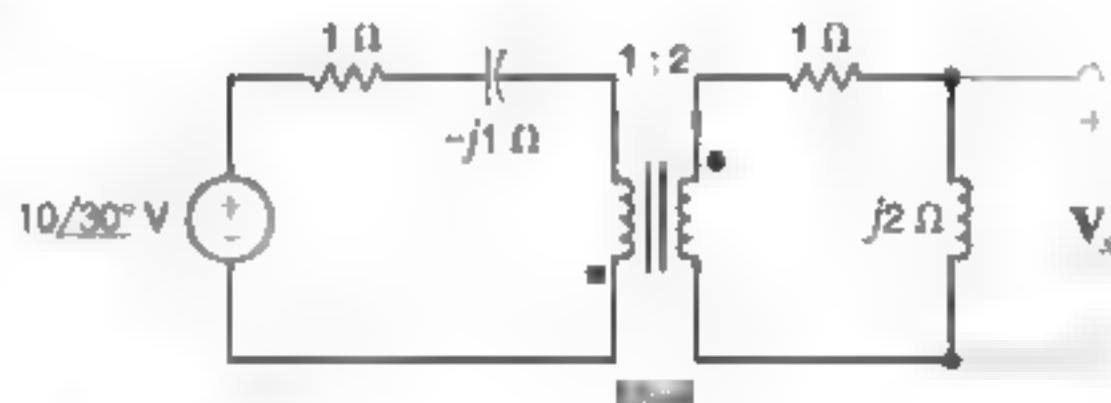


Figura P10.43

- 10.44** Determine as correntes I_1 e I_2 , e as tensões V_1 e V_2 da rede mostrada na Fig. P10.44.

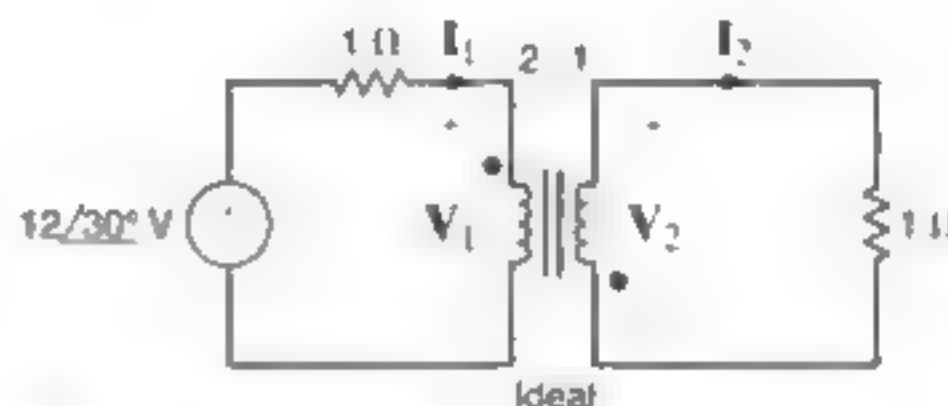


Figura P10.44

- 10.45** Determine as correntes I_1 e I_2 , e as tensões V_1 e V_2 da rede mostrada na Fig. P10.45.

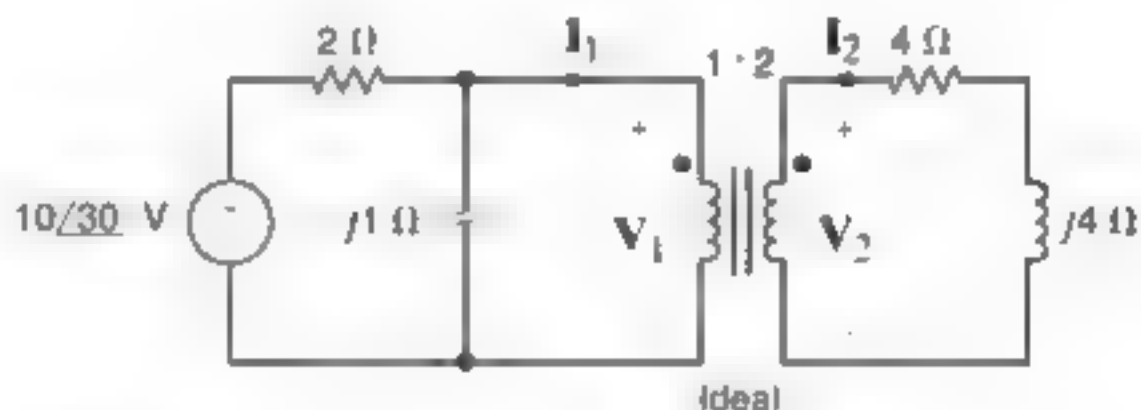


Figura P10.45

10.47 Determine a corrente I_x da rede mostrada na Fig. P10.47.

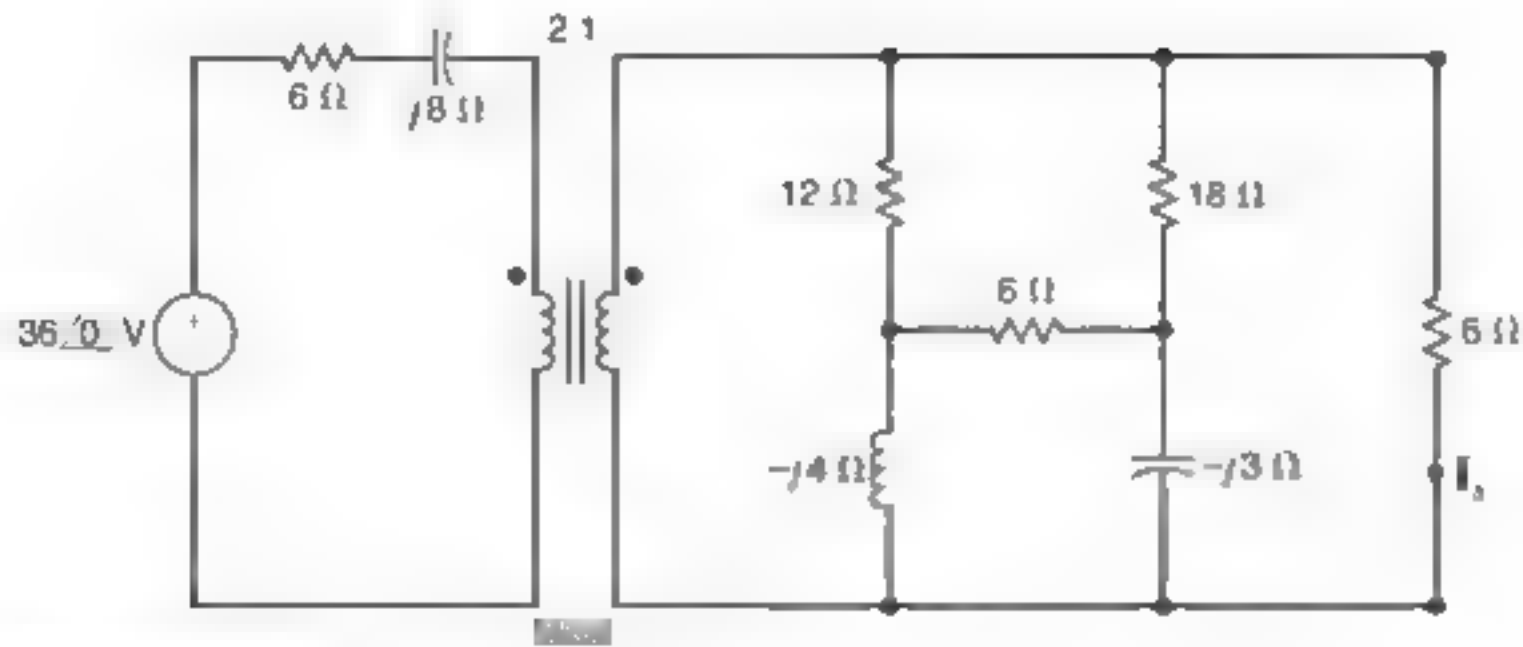


Figura P10.47

10.48 Determine a tensão V_x da rede mostrada na Fig. P10.48.

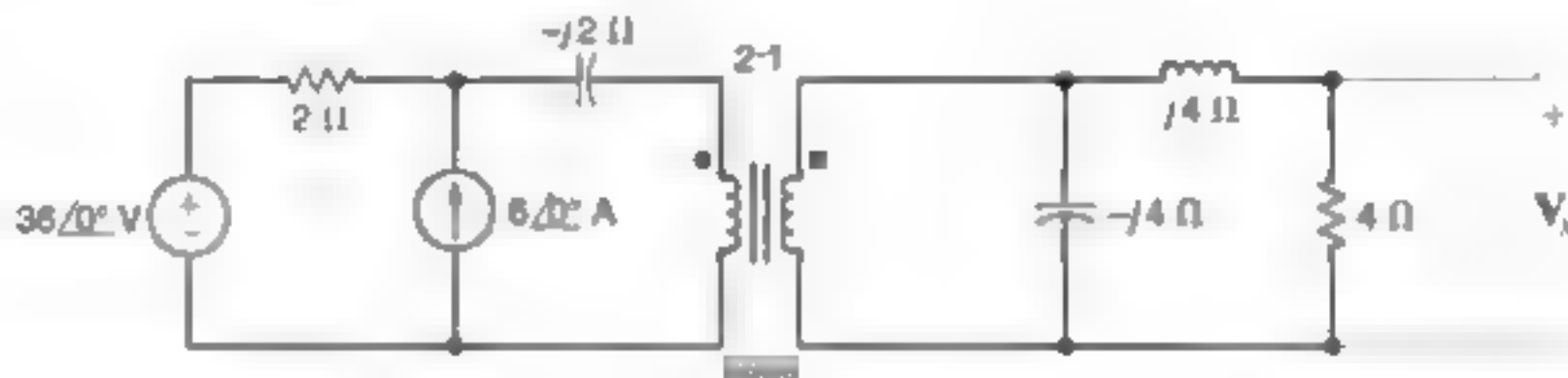


Figura P10.48

10.49 Determine a corrente I_x do circuito mostrado na Fig. P10.49.

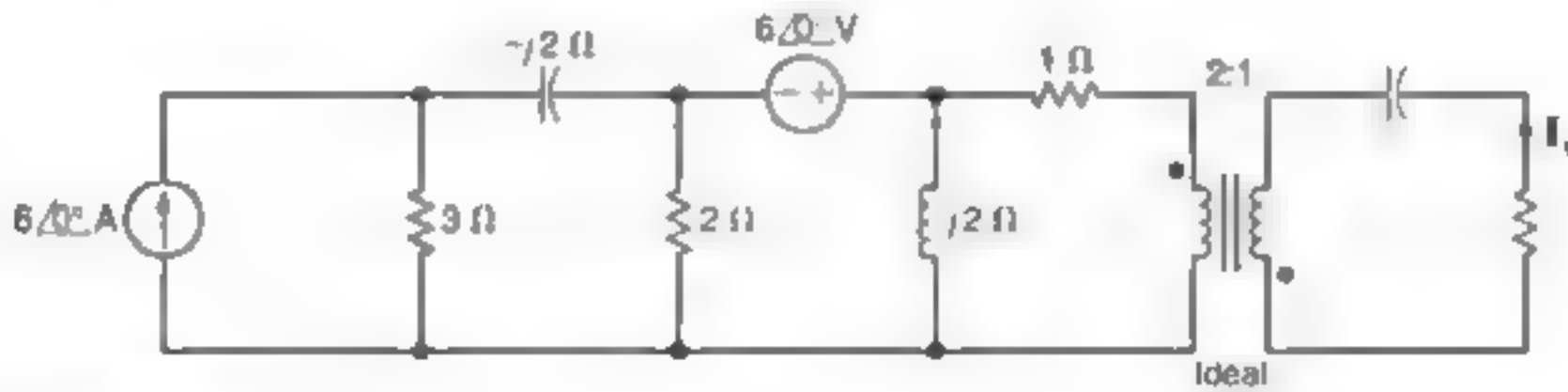


Figura P10.49

10.50 Determine as correntes I_1 e I_2 , e as tensões V_1 e V_2 da rede mostrada na Fig. P10.50.

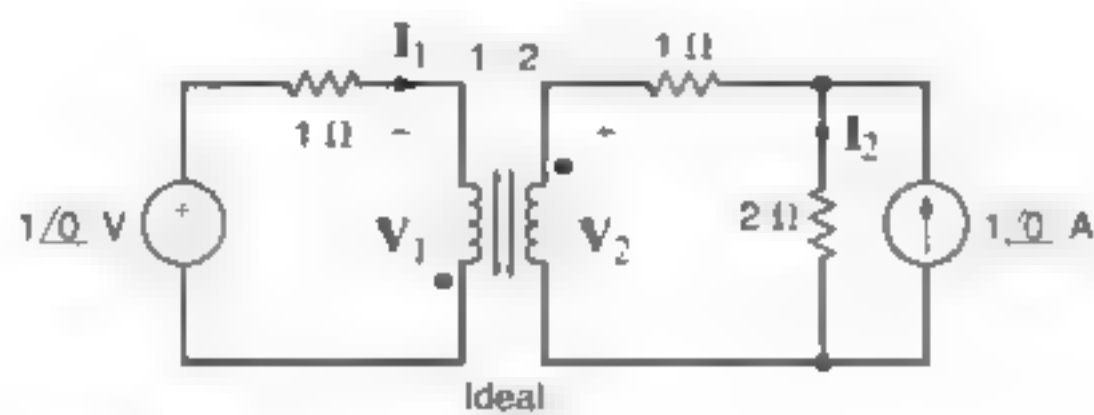


Figura P10.50

10.51 Determine a corrente I_1 do circuito mostrado na Fig. P10.51.

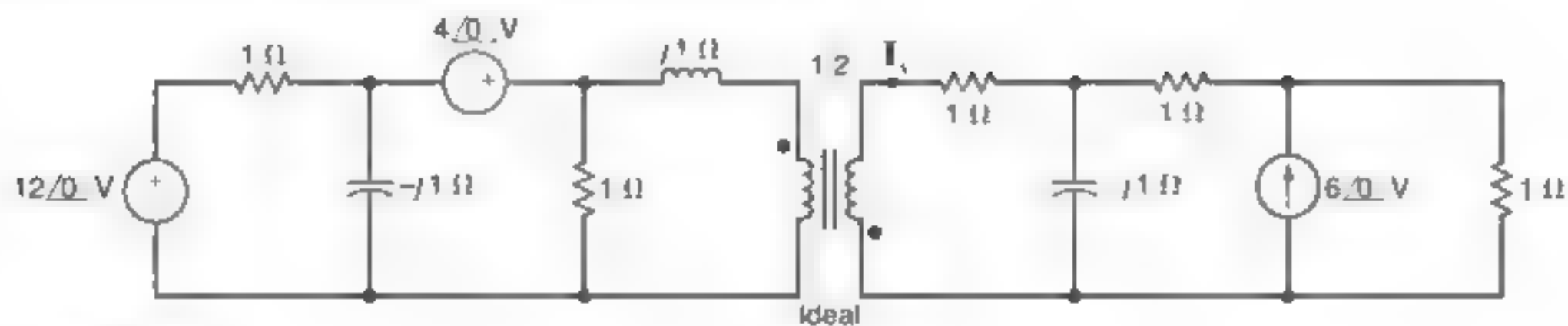


Figura P10.51

10.52 Determine as correntes I_1 e I_2 , e as tensões V_1 e V_2 da rede mostrada na Fig. P10.52.

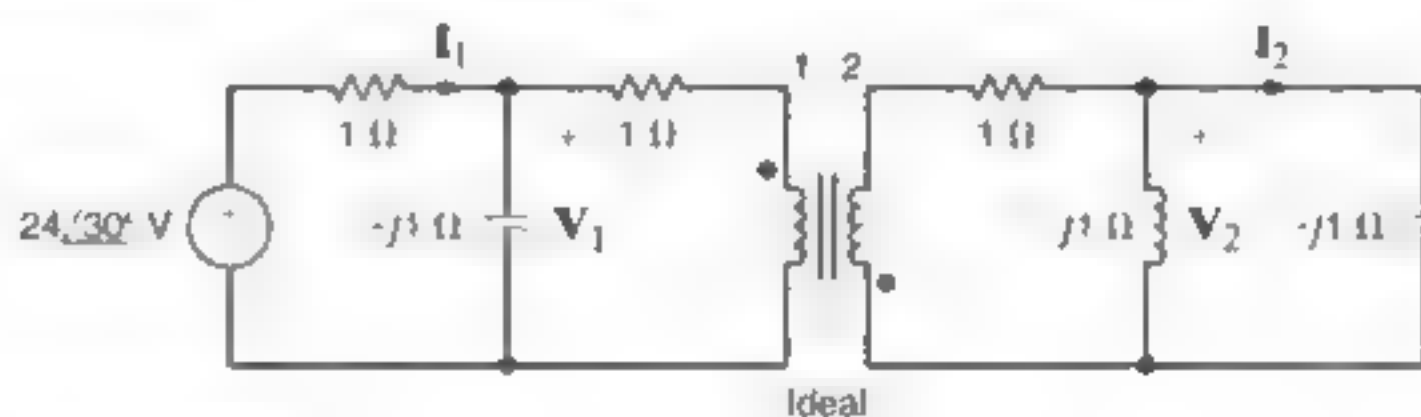


Figura P10.52

10.53 Determine a tensão V_1 da rede mostrada na Fig. P10.53.

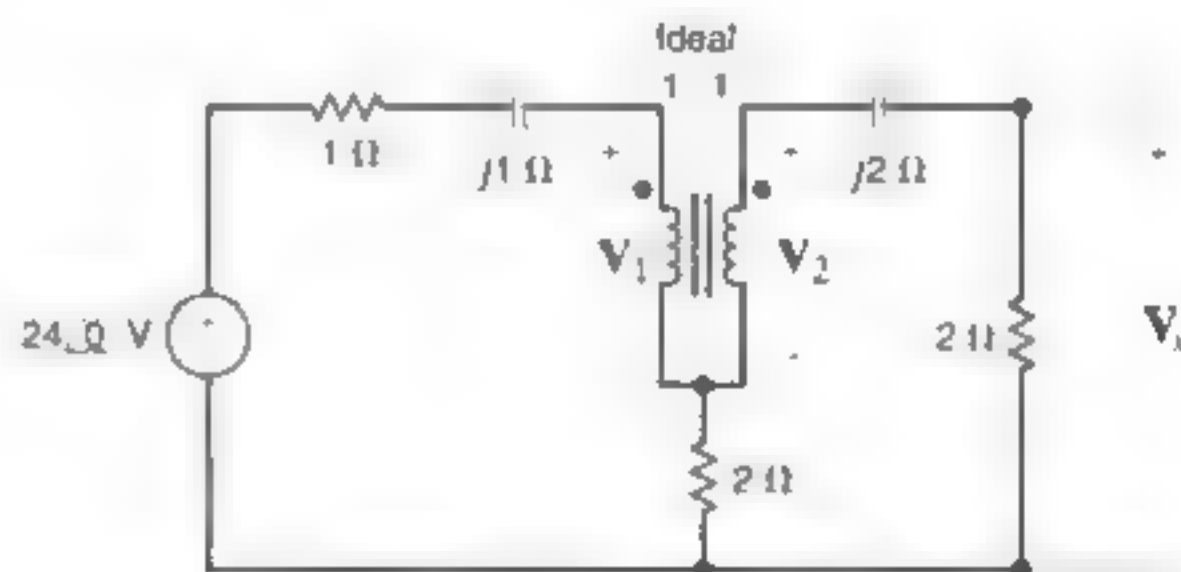


Figura P10.53

10.54 Determine as correntes I_1 e I_2 , e as tensões V_1 e V_2 da rede mostrada na Fig. P10.54.

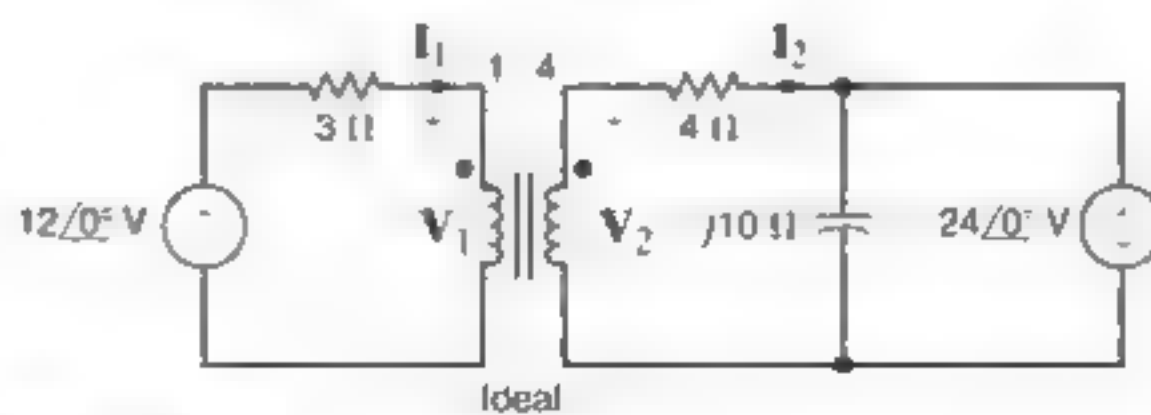


Figura P10.54

- 10.55 Determine a corrente I da rede mostrada na Fig. P10.55.

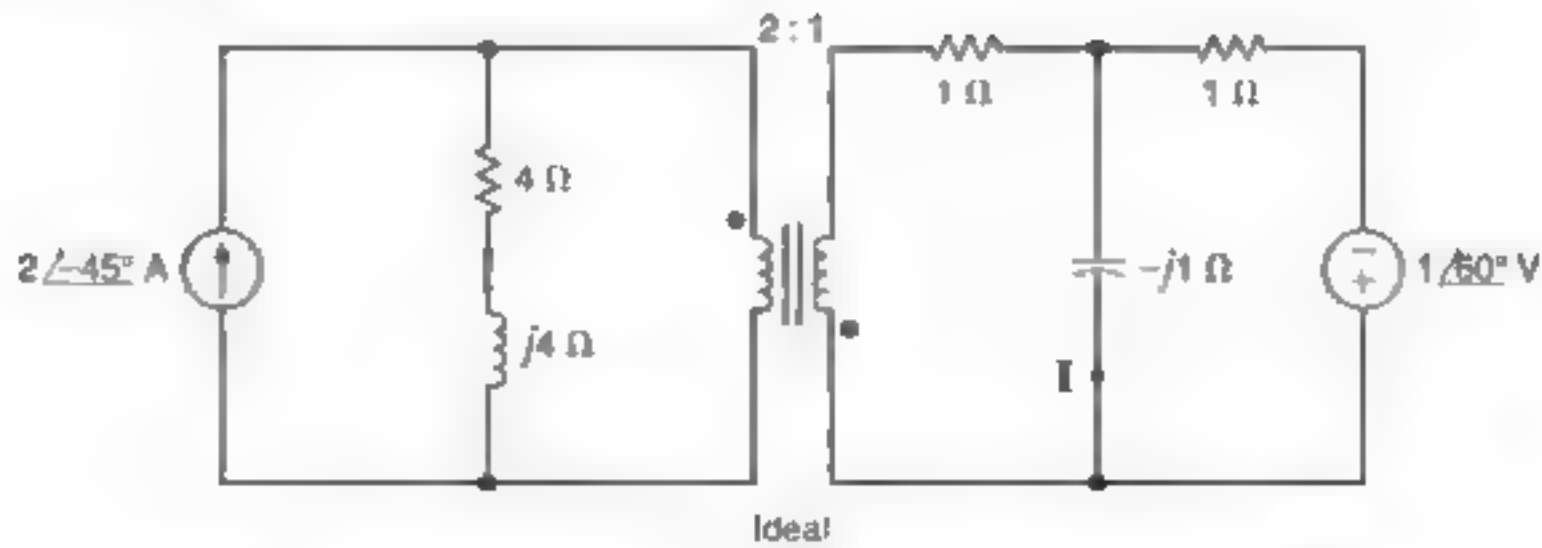


Figura P10.55

- 10.56 Determine a corrente I da rede mostrada na Fig. P10.56.

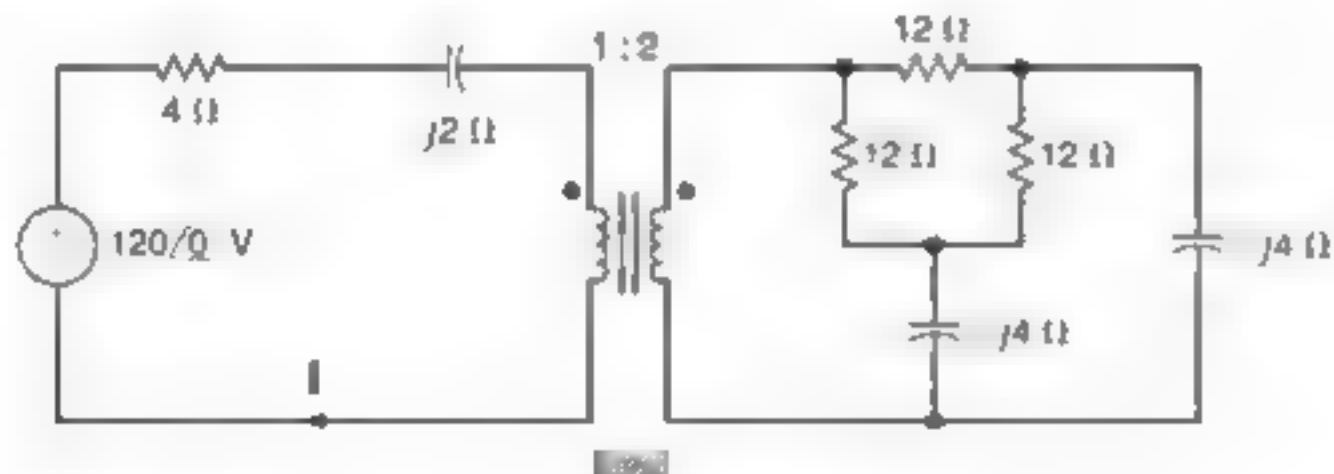


Figura P10.56

- 10.57 Determine a tensão V_x da rede mostrada na Fig. P10.57.

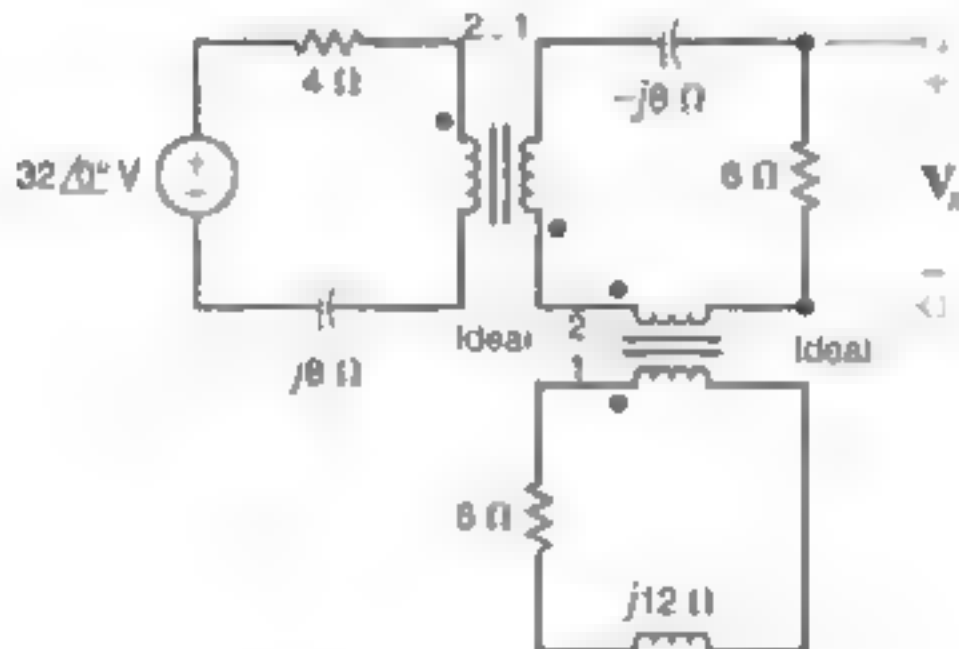


Figura P10.57

- 10.58 Determine a tensão V_x do circuito mostrado na Fig. P10.58.

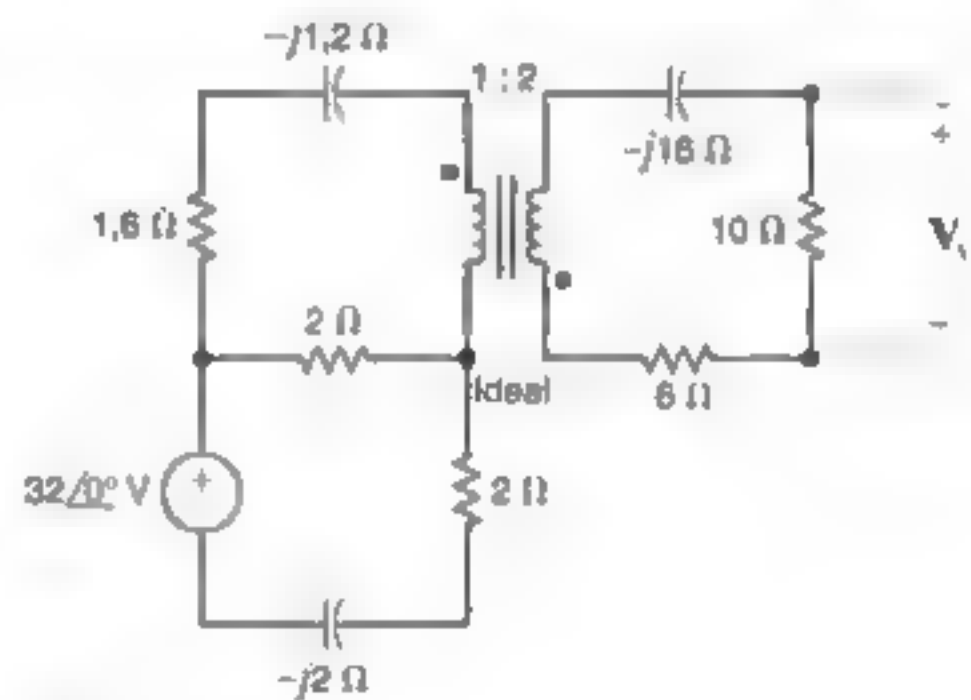


Figura P10.58

- 10.59 Determine a tensão V_x do circuito mostrado na Fig. P10.59.

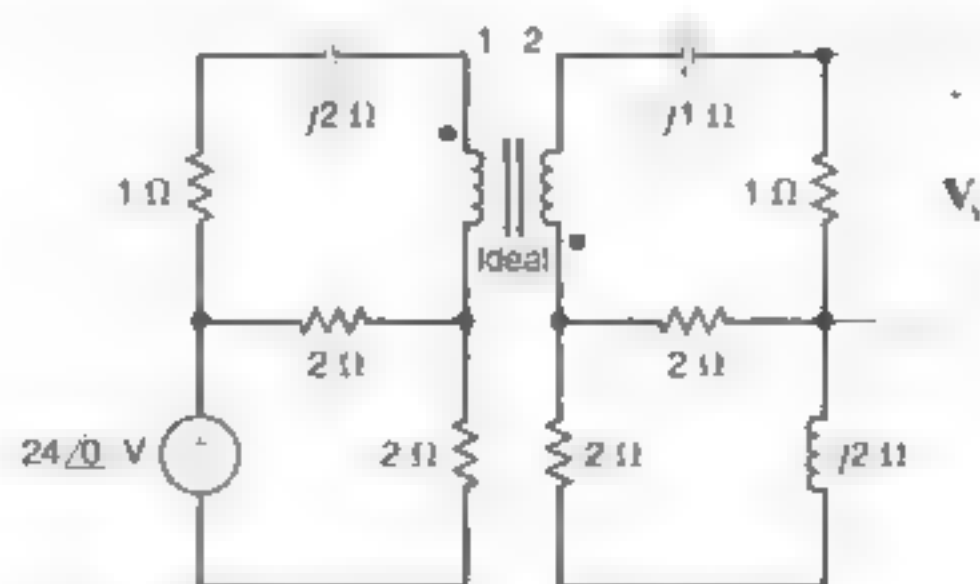


Figura P10.59

10.60 Determine a tensão V_x da rede mostrada na Fig. P10.60.

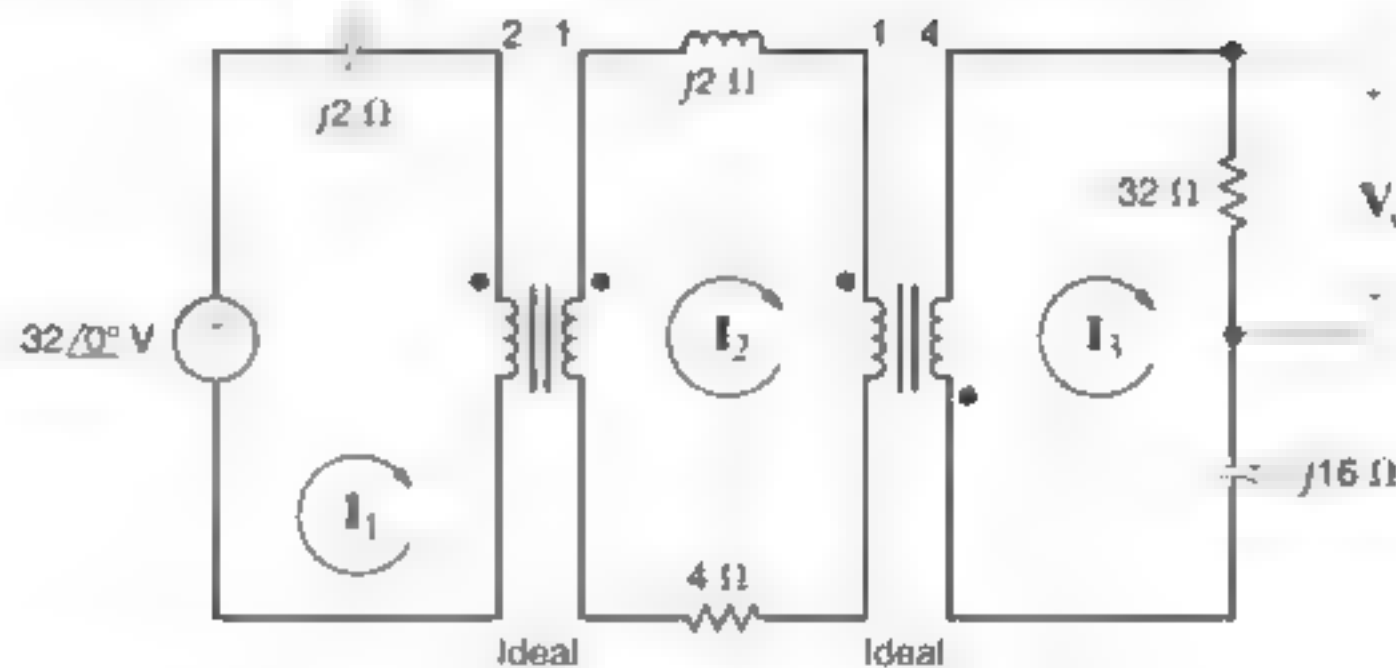


Figura P10.60

10.61 Determine a impedância de entrada vista pela fonte do circuito mostrado na Fig. P10.61.

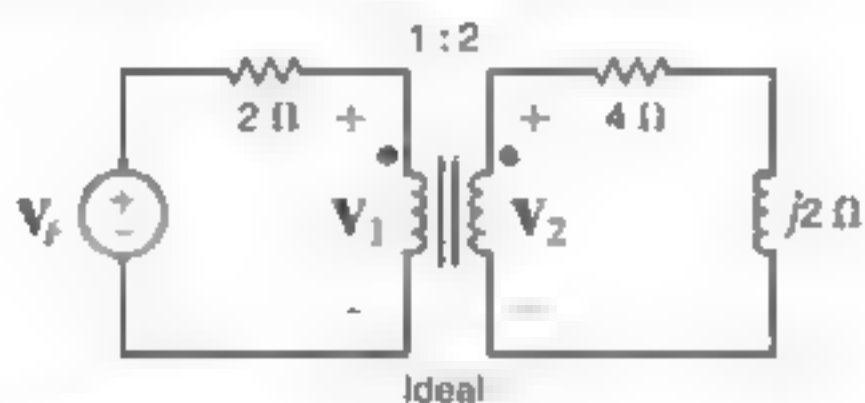


Figura P10.61

10.62 Determine a impedância de entrada vista pela fonte do circuito mostrado na Fig. P10.62.

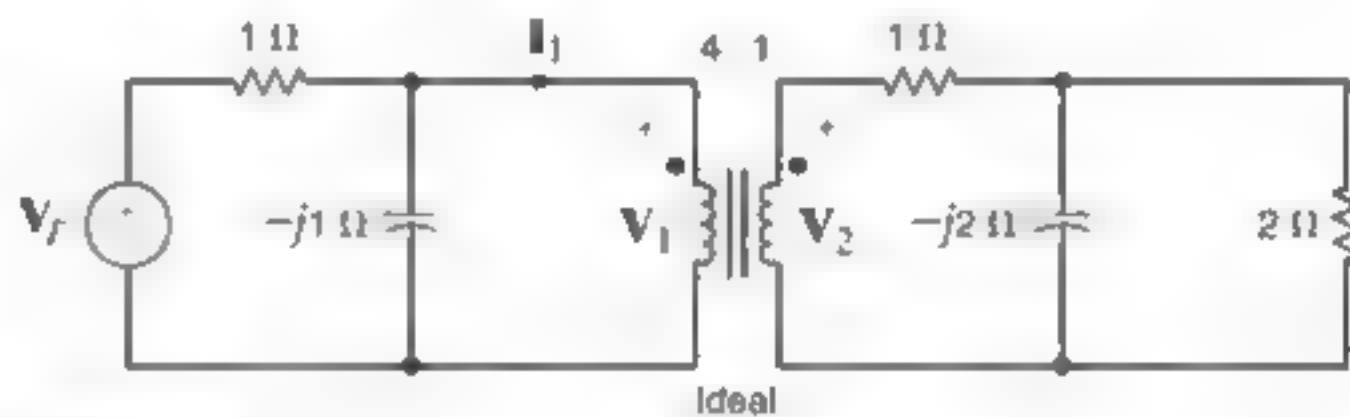


Figura P10.62

10.63 Determine a impedância de entrada vista pela fonte da rede mostrada na Fig. P10.63.

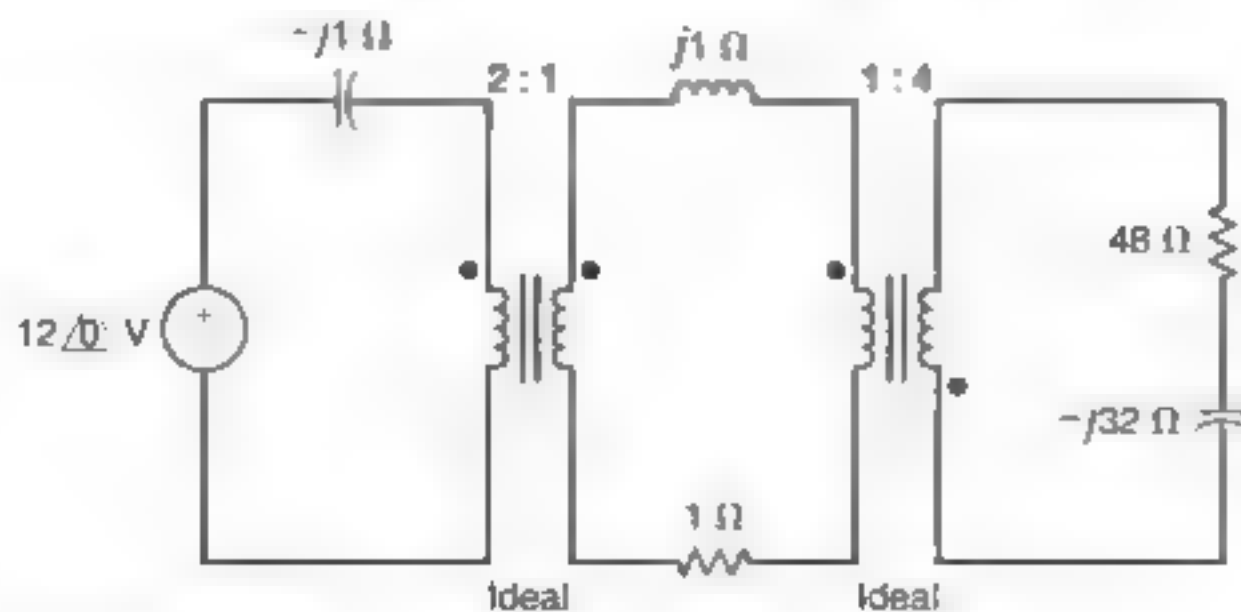


Figura P10.63

- 10.64** Determine a impedância de entrada vista pela fonte da rede mostrada na Fig. P10.64.

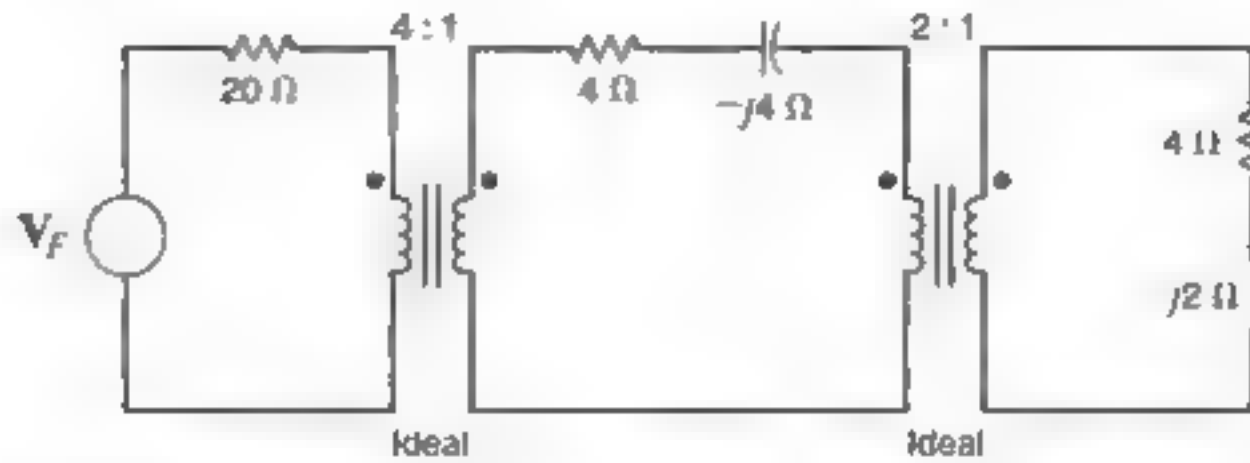


Figura P10.64

- 10.65** No estágio de saída do amplificador de um rádio antigo deve haver um casamento de impedâncias com um alto-falante, conforme mostrado na Fig. P10.65. Se a impedância do alto-falante é de 8Ω e o amplificador requer uma impedância de $3,2 \text{ k}\Omega$, determine a razão de espiras necessária ao transformador ideal.

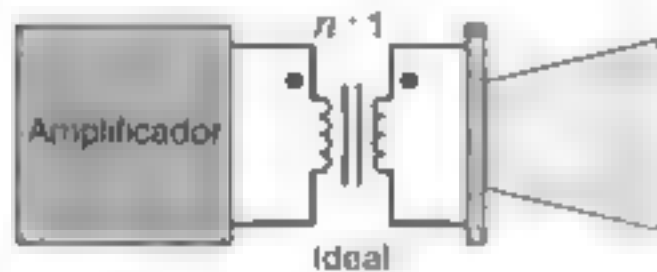


Figura P10.65

- 10.66** No circuito mostrado na Fig. P10.66, considerando que $V_2 = 48 \angle 30^\circ \text{ V}$, determine a tensão V_F .

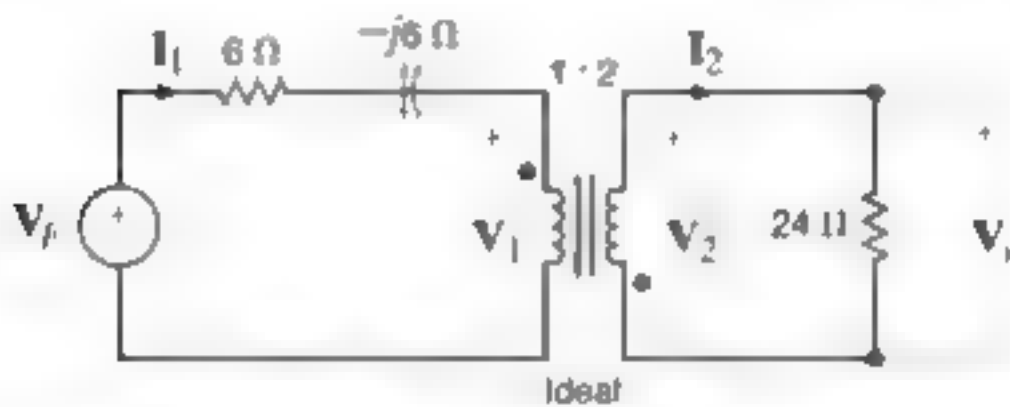


Figura P10.66

- 10.67** Determine a tensão V_F do circuito mostrado na Fig. P10.67.

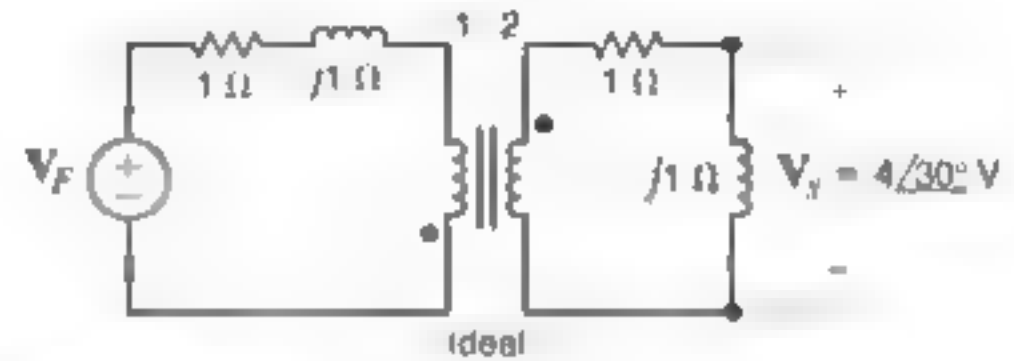


Figura P10.67

- 10.68** Determine a corrente I_F do circuito mostrado na Fig. P10.68.

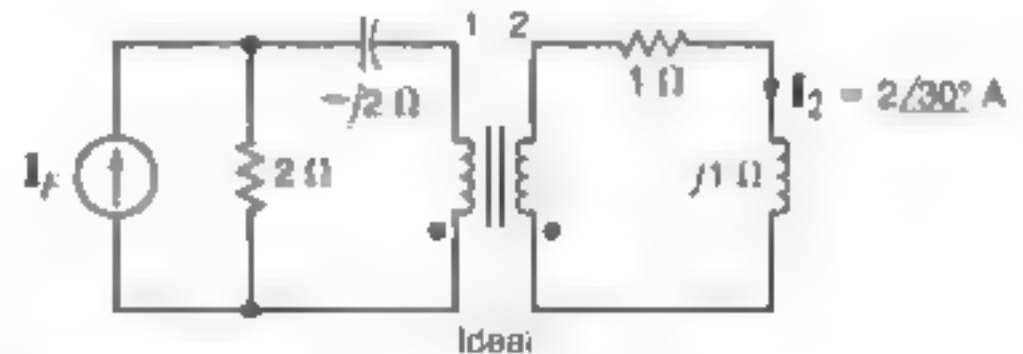


Figura P10.68

- 10.69** Na rede mostrada na Fig. P10.69, se a corrente $I = 4 \angle 0^\circ \text{ A}$, determine a tensão V_F .

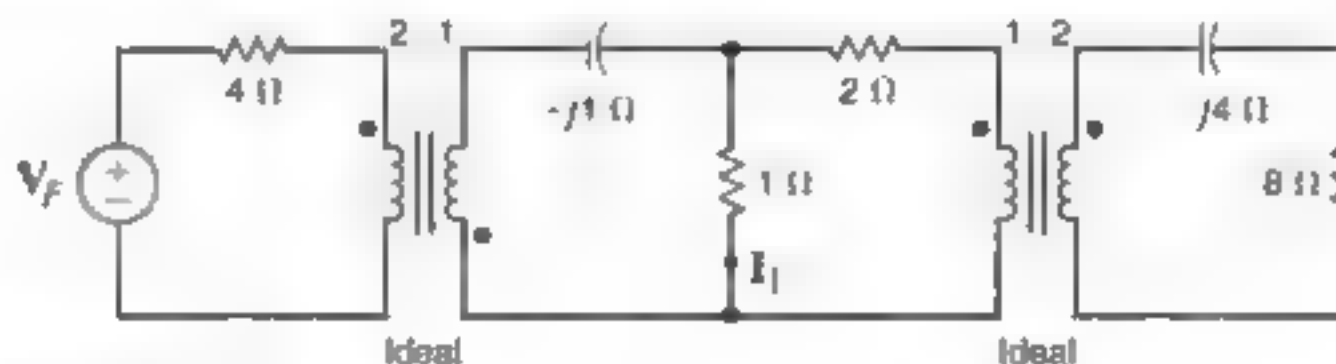


Figura P10.69

- 10.70** No circuito mostrado na Fig. P10.70, se a corrente $I_x = 4 \angle 30^\circ$ A, determine a tensão V_F .

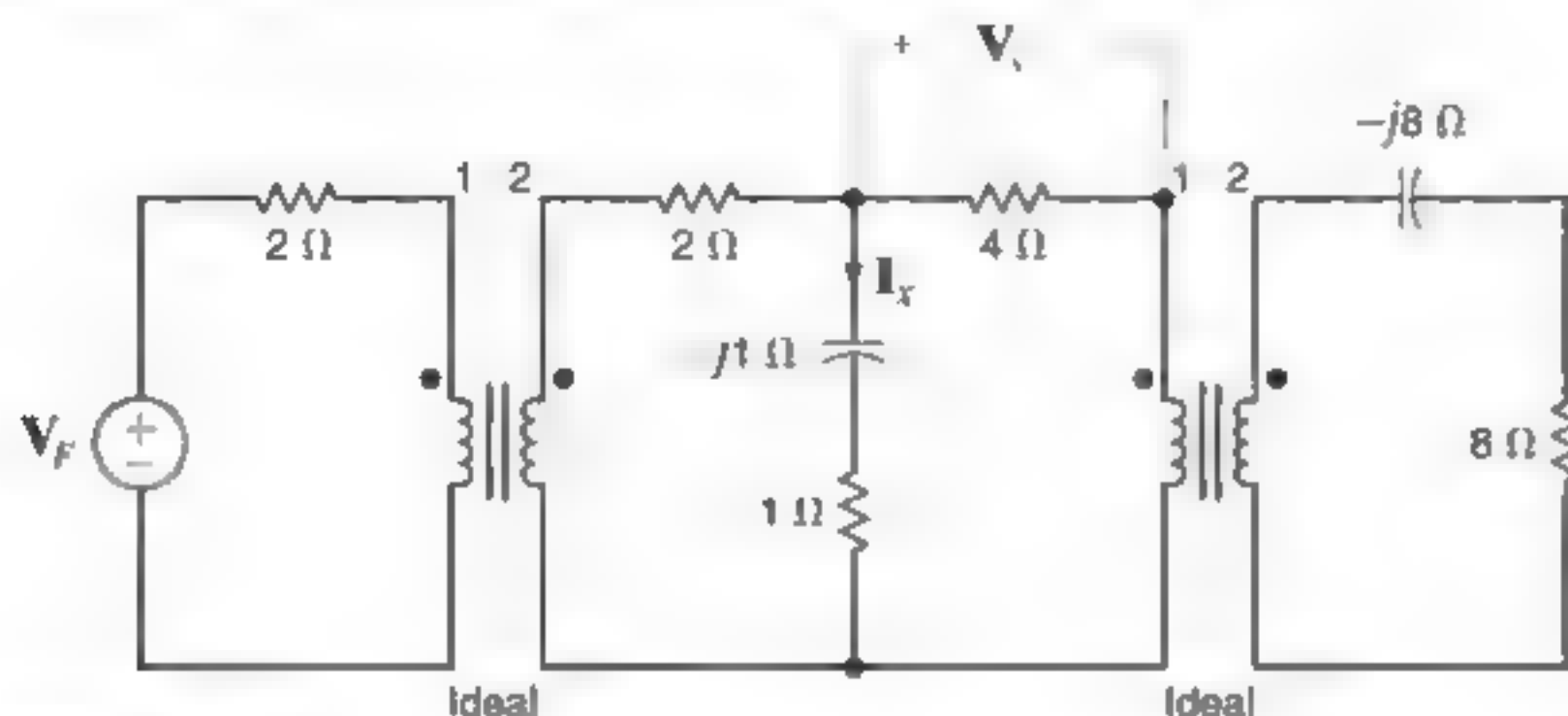


Figura P10.70

- 10.71** De modo a se obter a transferência máxima de potência, deseja-se realizar o casamento de impedâncias entre o estágio do amplificador inversor da Fig. P10.71 e a resistência equivalente de 50Ω da fonte CA na entrada do circuito. Entretanto, os op-amps padronizados apresentam melhor desempenho quando as resistências em seu entorno são de no mínimo algumas centenas de ohms. O ganho do circuito do op-amp deve ser de -10 . Projete o circuito completo selecionando resistores com resistências não inferiores a $1 \text{ k}\Omega$ e especificando a razão de espiras do transformador ideal de modo a atender aos requisitos de ganho e de casamento de impedância.

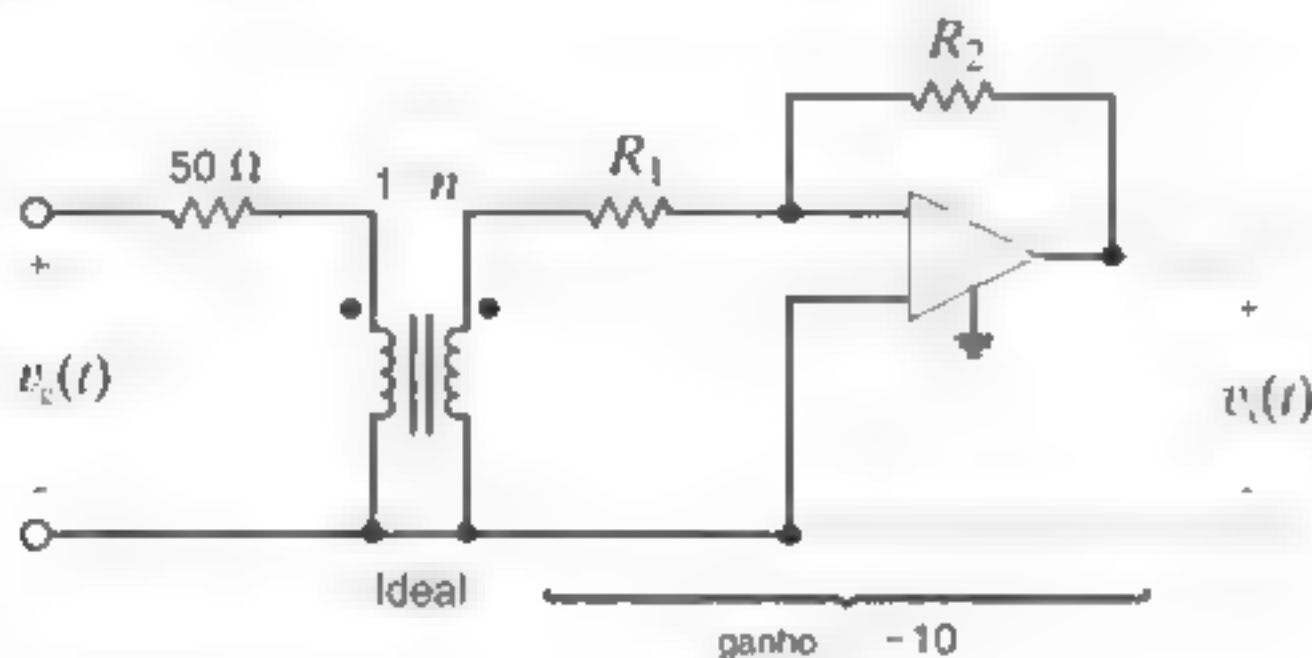


Figura P10.71

- 10.72** Os relógios digitais geralmente dividem um sinal com frequência de 60 Hz para obter um sinal de 1 segundo, 1 minuto ou 1 hora. Uma fonte conveniente para esse sinal de 60 Hz é a linha de alimentação. Entretanto, a amplitude de 120 volts é muito alta para ser utilizada por dispositivos eletrônicos de baixa potência. Um sinal de 3 V a 60 Hz atenderia a esta necessidade. Se um divisor de tensão resistivo for utilizado para reduzir a tensão de 120 para 3 V , o nível de calor gerado será inaceitável. Além disso, é muito oneroso utilizar um transformador nessa aplicação. Os relógios digitais são itens de consumo e devem ser suficientemente baratos para serem competitivos. O problema então é projetar um circuito que produza uma tensão entre $2,5 \text{ V}$ e 3 V a 60 Hz a partir de uma linha de tensão CA de 120 V , sem dissipar qualquer calor e sem utilizar um transformador. O projeto será interfacado com um circuito que possui uma resistência de entrada de 1200 ohms .

PROBLEMAS TÍPICOS DE EXAMES PROFISSIONAIS DE ENGENHARIA

10PEP-1 Na rede mostrada na Fig. 10PEP-1, determine a impedância vista pela fonte.

- a. $4,88 \angle 19,75^\circ \Omega$
- b. $2,56 \angle 31,26^\circ \Omega$
- c. $5,37 \angle -26,57^\circ \Omega$
- d. $8,23 \angle -10,61^\circ \Omega$

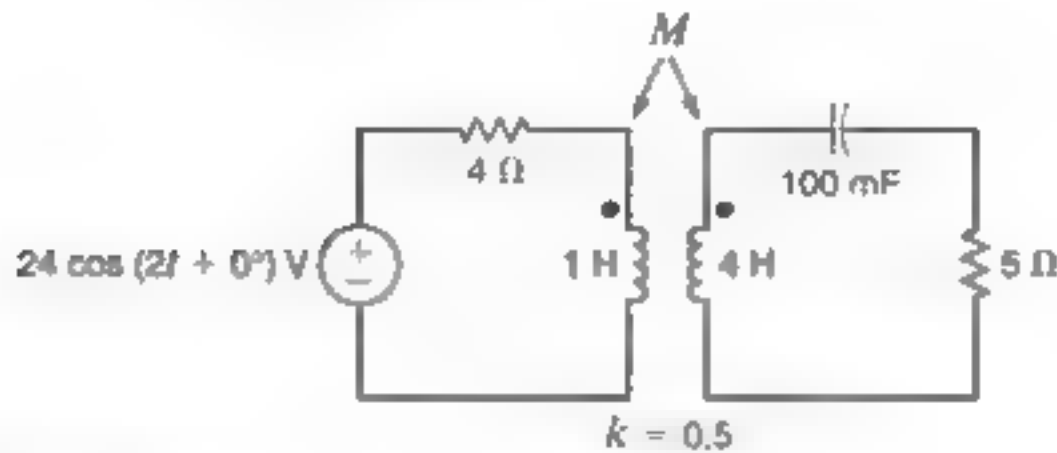


Figura 10PEP-1

10PEP-2 No circuito mostrado na Fig. 10PEP-2, selecione o valor da razão de espiras do transformador, $n = N_2/N_1$, de forma que ocorra o casamento de impedâncias para a condição de máxima potência transferida. Utilizando esse valor de n , calcule a potência absorvida pelo resistor de 3Ω .

- a. 100,75 W
- b. 37,5 W
- c. 55,6 W
- d. 75 W

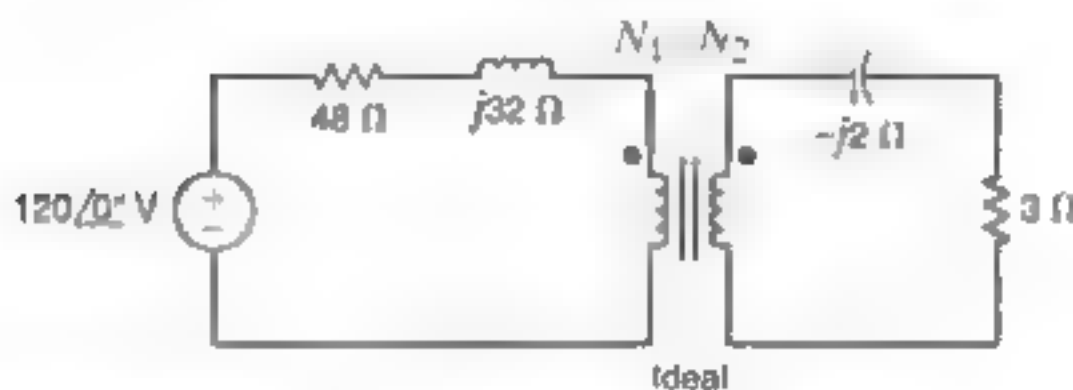


Figura 10PEP-2

10PEP-3 No circuito mostrado na Fig. 10PEP-3, selecione a razão de espiras do transformador ideal que compatibiliza a saída do amplificador transistor com o alto-falante representado pela carga de 16Ω .

- a. 18
- b. 30
- c. 10
- d. 25

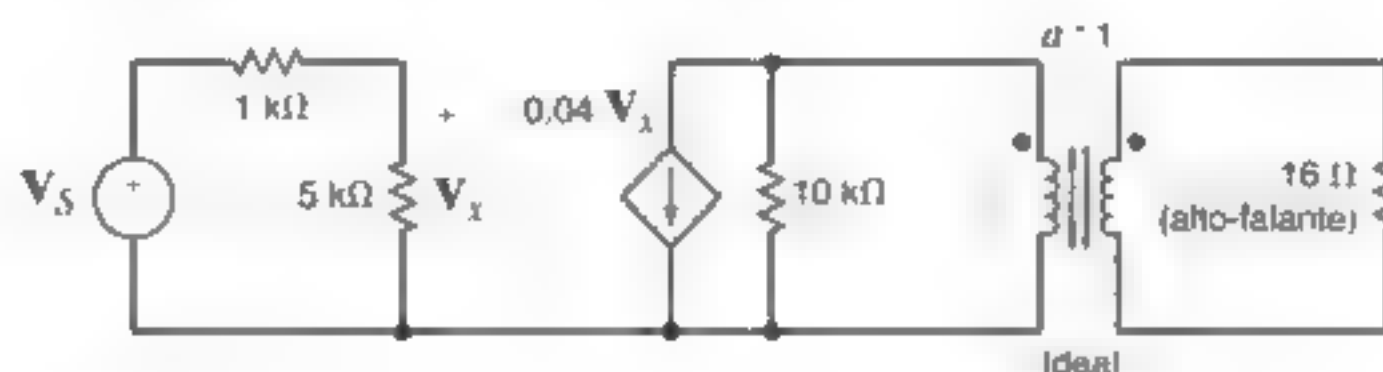


Figura 10PEP-3

10PEP-4 Qual é o valor da corrente I_2 do circuito mostrado na Fig. 10PEP-4?

- a. $11,77 \angle 35,25^\circ \text{ A}$
- b. $5,85 \angle 20,62^\circ \text{ A}$
- c. $23,54 \angle 11,31^\circ \text{ A}$
- d. $15,36 \angle 8,48^\circ \text{ A}$

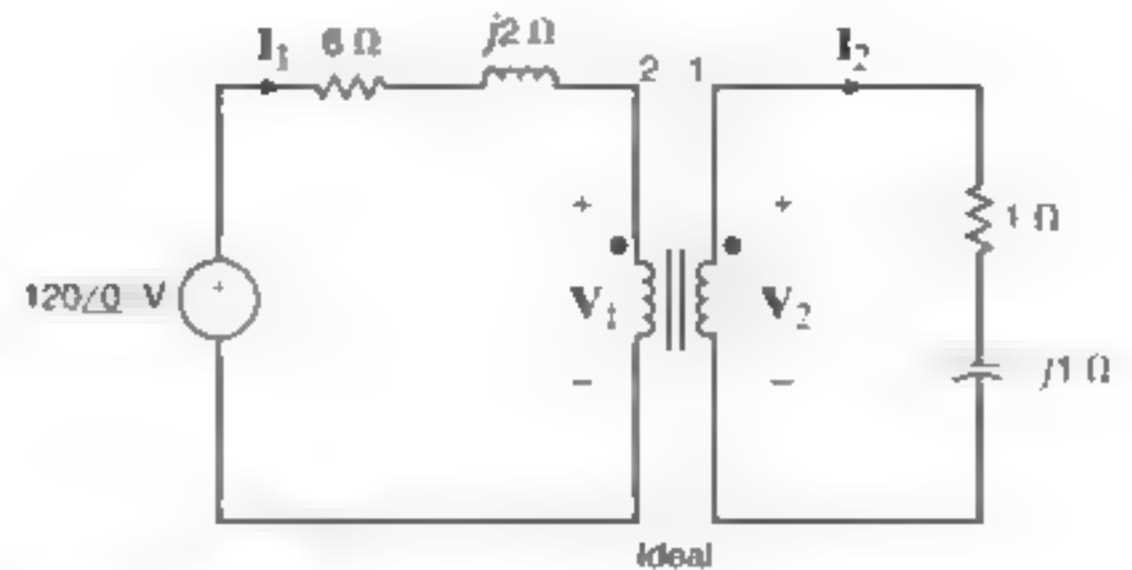


Figura 10PEP-4

10PEP-5 Qual é o valor da corrente I_2 do circuito mostrado na Fig. 10PEP-5?

- a. $16,97 \angle -45^\circ \text{ A}$
- b. $10,54 \angle 30^\circ \text{ A}$
- c. $12,02 \angle -15^\circ \text{ A}$
- d. $8,25 \angle -45^\circ \text{ A}$

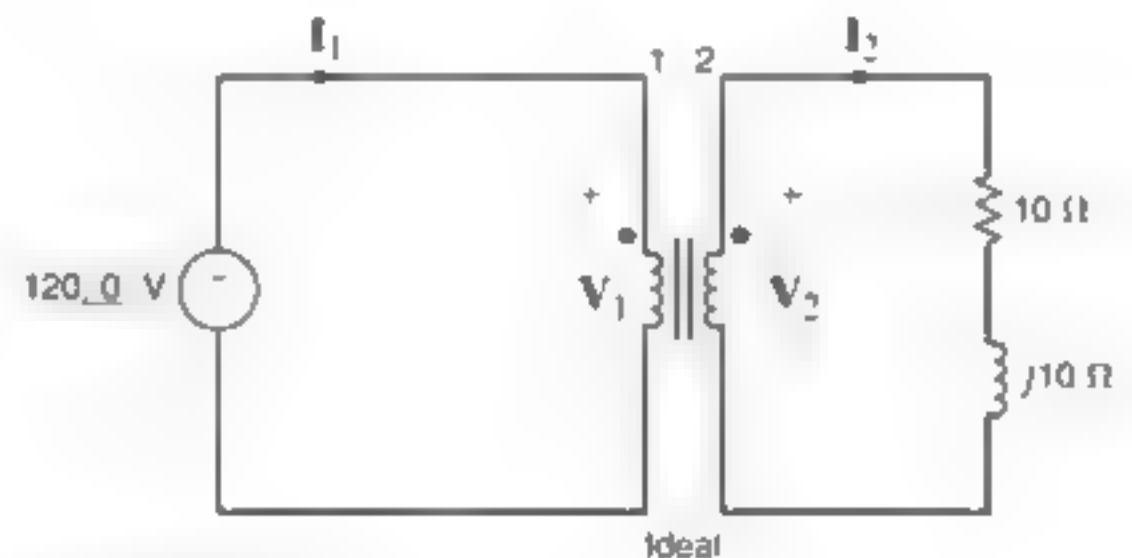


Figura 10PEP-5

CIRCUITOS POLIFÁSICOS



Stephen Strathdee/iStockphoto

AS METAS DE APRENDIZAGEM DESTE CAPÍTULO SÃO:

- Saber as características de um circuito de três fases equilibrado
- Conhecer as conexões básicas das configurações estrela e delta
- Saber como calcular as tensões e correntes nos circuitos de três fases equilibrados
- Saber como calcular a potência complexa nos circuitos de três fases equilibrados

Fazendas Eólicas A transformação de um local formador de resíduo em uma fonte real de energia renovável parece uma boa ideia – um bom negócio para a geração de energia e para o ambiente. A Dinamarca tem feito exatamente isso com sua fazenda eólica de Middelgrunden instalada em um banco de areia natural a leste do porto de Copenhague. Considerada em 2000 como a maior fazenda eólica *offshore* do mundo, possui 20 turbinas com uma potência nominal total de 40 megawatts. Por mais de 200 anos, o banco de areia foi um local de depósito de lama e outros resíduos contaminantes. Atualmente, os viajantes de avião que chegam a Copenhague pelo norte sentem o impacto visual dessa fonte de energia renovável como um tributo reconhecido ao talento dinamarquês.

A Dinamarca possui mais de 6200 turbinas eólicas produzindo um valor estimado de 89 milhões de quilowatts-hora de eletricidade por ano. Uma das maiores indústrias da Dinamarca, a fabricação de turbinas eólicas tem um considerável mercado em todo o mundo. O impacto ambiental das fazendas eólicas é perceptível

– evitar que toneladas de poluição química sejam geradas pelas fontes convencionais de energia.

A energia renovável gerada pelas fazendas eólicas – a despeito da variabilidade do vento em si – é adicionada diretamente à rede elétrica ou armazenada em dispositivos como baterias eletroquímicas ou capacitores de alta capacidade. A etapa final é o fornecimento dessa energia ao consumidor – um sistema polifásico de eletricidade CA pode fornecer mais energia a menores tensões por meio de cabos de menor bitola do que os dos sistemas monofásicos considerados anteriormente. Neste capítulo é mostrado que um sistema trifásico em equilíbrio fornece uma potência instantânea constante à sua carga. O trabalho com base em cada fase permite o cálculo fácil da fase e das tensões e correntes nas linhas, bem como o cálculo da potência dissipada na linha e da potência fornecida à carga. A alta eficiência é essencial tanto para a geração de potência nas fazendas eólicas quanto para o uso da energia pelos sistemas trifásicos – em ambos os casos tenta-se minimizar as perdas de potência.

11.1 Circuitos Trifásicos

Neste capítulo, apresenta-se uma nova dimensão ao estudo de circuitos CA operando no regime estacionário. Além disso, até agora foram analisados os circuitos denominados circuitos monofásicos. Agora, as técnicas de análise são estendidas aos circuitos polifásicos ou, mais especificamente, aos circuitos trifásicos (isto é, circuitos que possuem três fontes de tensão defasadas no tempo do correspondente a um terço de ciclo).

Existem várias justificativas importantes para que os circuitos trifásicos sejam estudados. É mais vantajoso e econômico

gerar e transmitir energia elétrica no modo polifásico que por meio de sistemas monofásicos. Como consequência, uma boa parte da energia elétrica é transmitida por circuitos polifásicos. Nos Estados Unidos, a frequência dos sistemas de potência é de 60 Hz, enquanto em outros locais do mundo é comum se encontrar a frequência de 50 Hz.

A geração de energia elétrica no modo polifásico é acompanhada por um gerador elétrico, o qual converte a energia mecânica em energia elétrica. Essa energia mecânica pode ser produzida em uma barragem ou instalação hidrelétrica, como a mostrada na Fig. 11.1. Conforme ilustrado na Fig. 11.2, a água armazenada em um reservatório passa por uma turbina e



Figura 11.1 Unidade de geração hidrelétrica. (Cortesia de Mark Nelms)

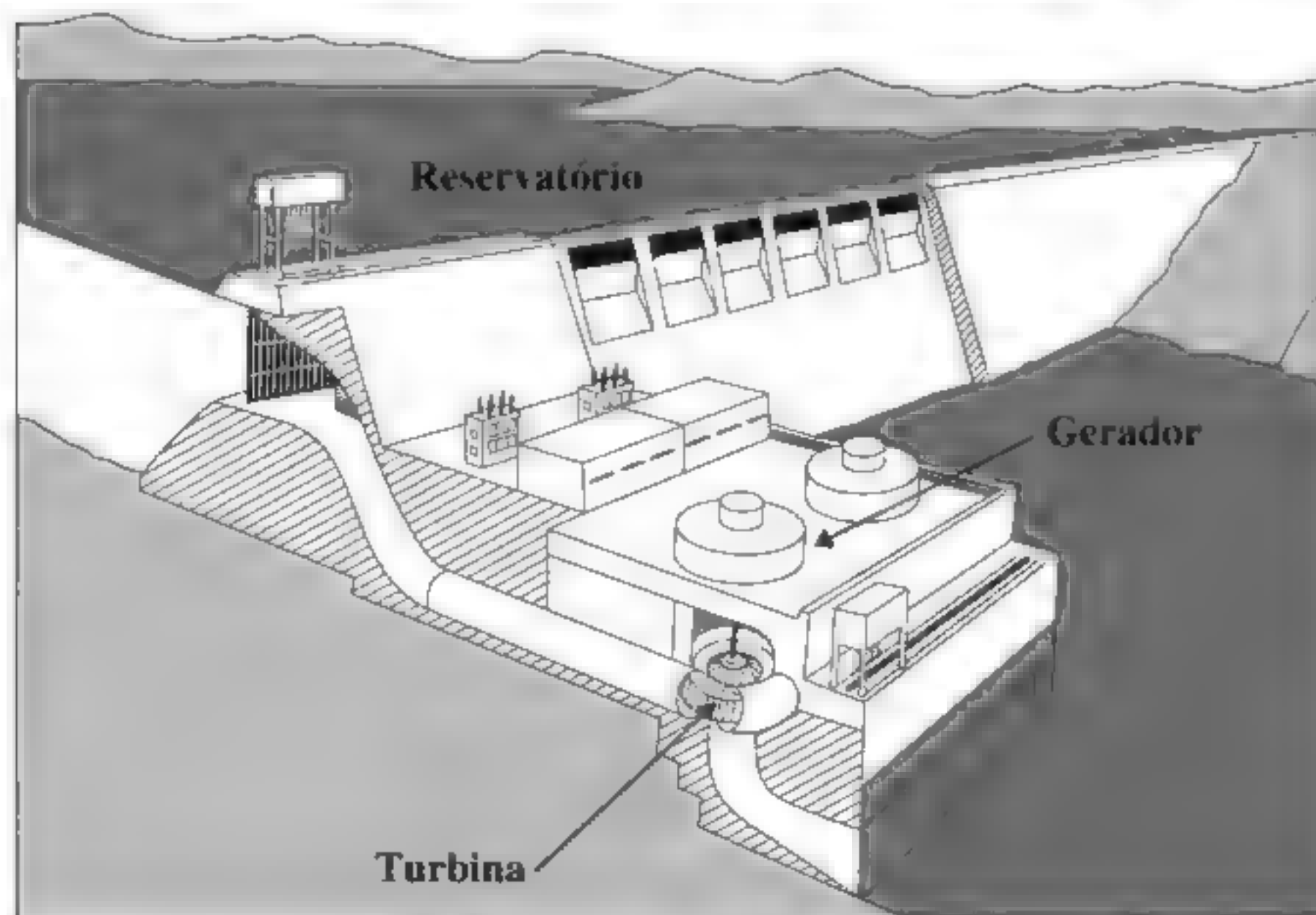


Figura 11.2 Diagrama esquemático de uma unidade de geração hidrelétrica. (Diagrama cortesia da Southern Company)

é despejada no rio a jusante. As turbinas acionam o gerador elétrico que produz as tensões trifásicas. Na unidade geradora que utiliza combustível fóssil, mostrada na Fig. 11.3, a turbina é acionada por vapor. No diagrama da Fig. 11.4, a mistura ar-combustível entra em combustão na caldeira transformando água em vapor para acionar a turbina. A água de resfriamento circula pelo condensador para transformar o vapor que sai da turbina novamente em água para completar o ciclo. Uma usina nuclear de geração, mostrada na Fig. 11.5, também utiliza vapor para acionar a turbina. O calor gerado pela fusão no núcleo do reator produz o vapor.

Observe que os três tipos de unidades de geração são localizados próximos a um corpo d'água, como um rio e, geralmente, não estão próximos das cargas que consomem a energia elétrica. As linhas de transmissão de potência, como as mostradas na Fig. 11.6, são construídas para transportar energia elétrica das unidades de geração até as cargas. A transmissão de energia

elétrica é mais eficiente quando realizada a tensões mais altas. Como essa tensão pode ser extremamente alta em comparação ao nível com que é normalmente utilizada (por exemplo, nas residências), existe a necessidade de elevar e reduzir o nível da tensão. Essa mudança de nível pode ser facilmente obtida nos sistemas CA utilizando transformadores, os quais foram estudados no Capítulo 10. Um exemplo de transformador de potência trifásico é mostrado na Fig. 11.7.

Conforme o próprio nome indica, os circuitos trifásicos são aqueles nos quais a função de forçamento é um sistema trifásico de tensões. Se as três funções senoidais possuírem a mesma magnitude e a mesma frequência, e as tensões forem defasadas de 120° entre si, diz-se que as tensões estão *balanceadas*, ou em equilíbrio. Se as cargas forem tais que as correntes produzidas pelas tensões também estiverem balanceadas, o circuito como um todo será chamado de *circuito trifásico balanceado ou em equilíbrio*.

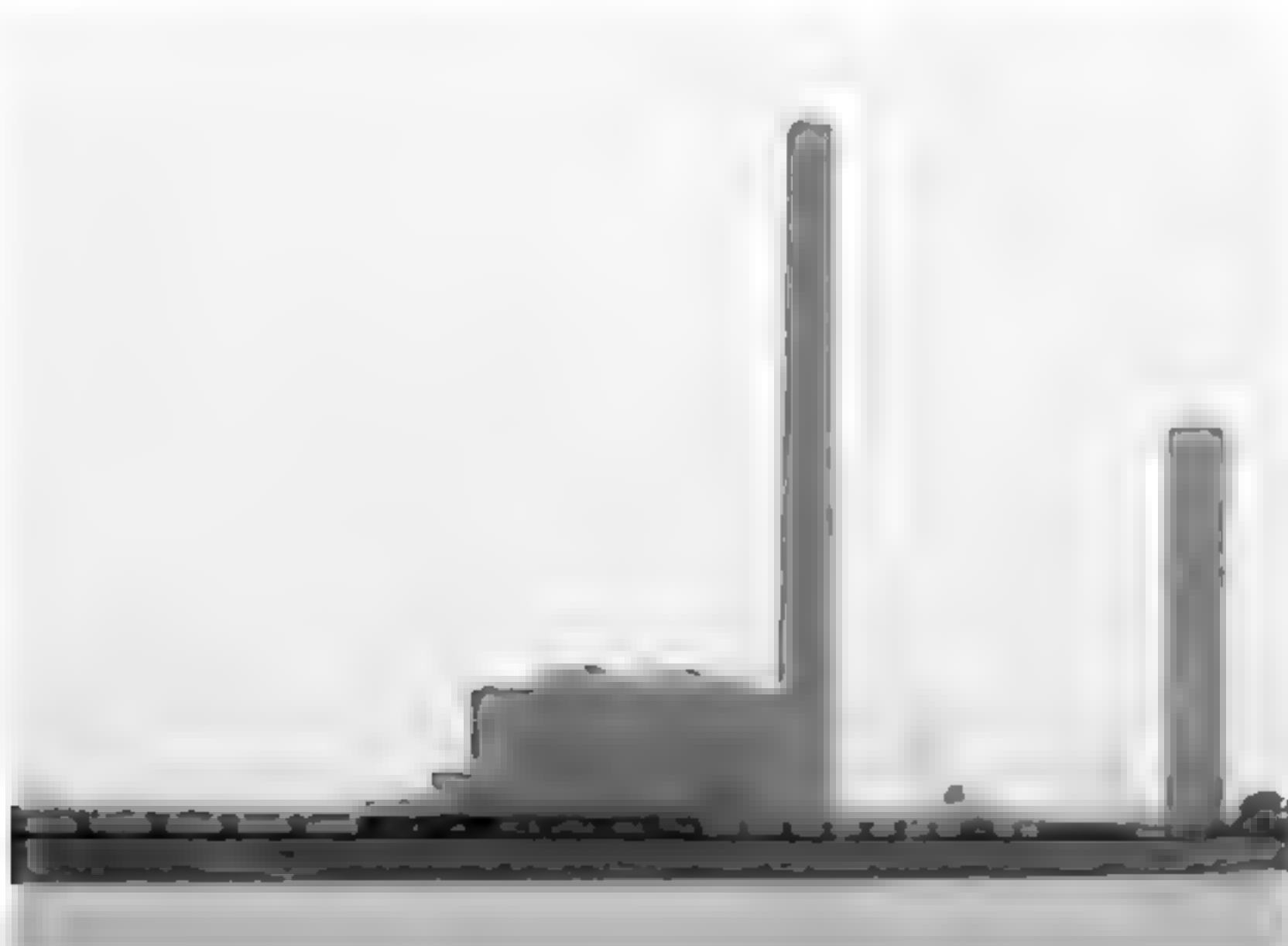


Figura 11.3 Unidade de geração operada por combustível fóssil. (Cortesia de Mark Nelms)

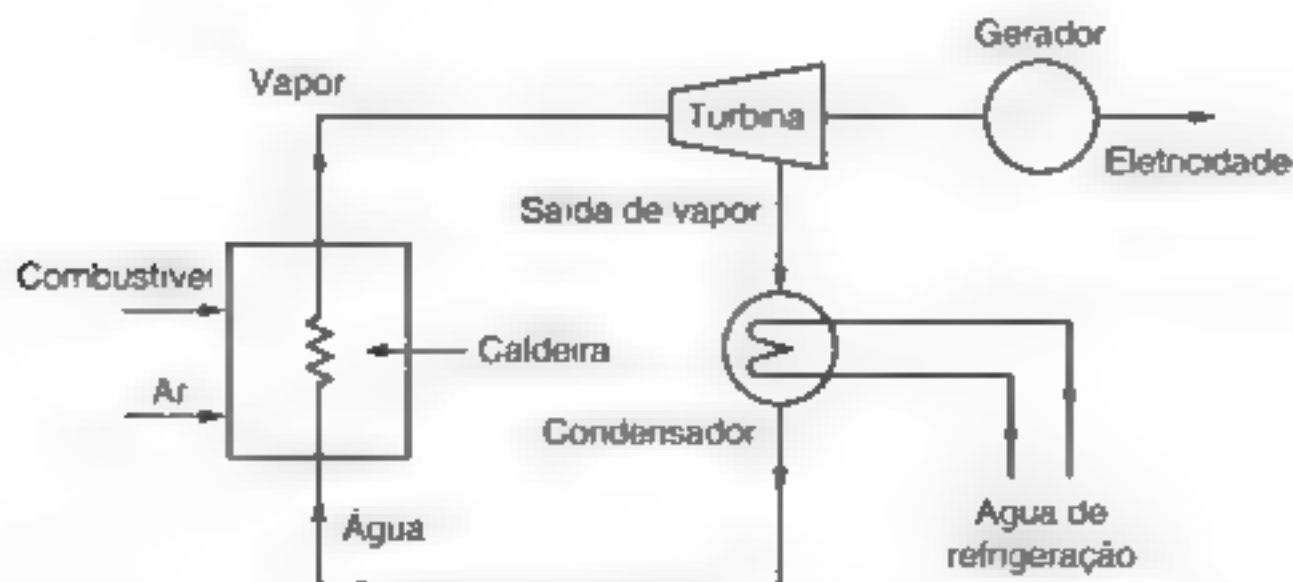


Figura 11.4 Diagrama conceitual de uma unidade de geração operada por combustível fóssil. (Diagrama cortesia da Southern Company)

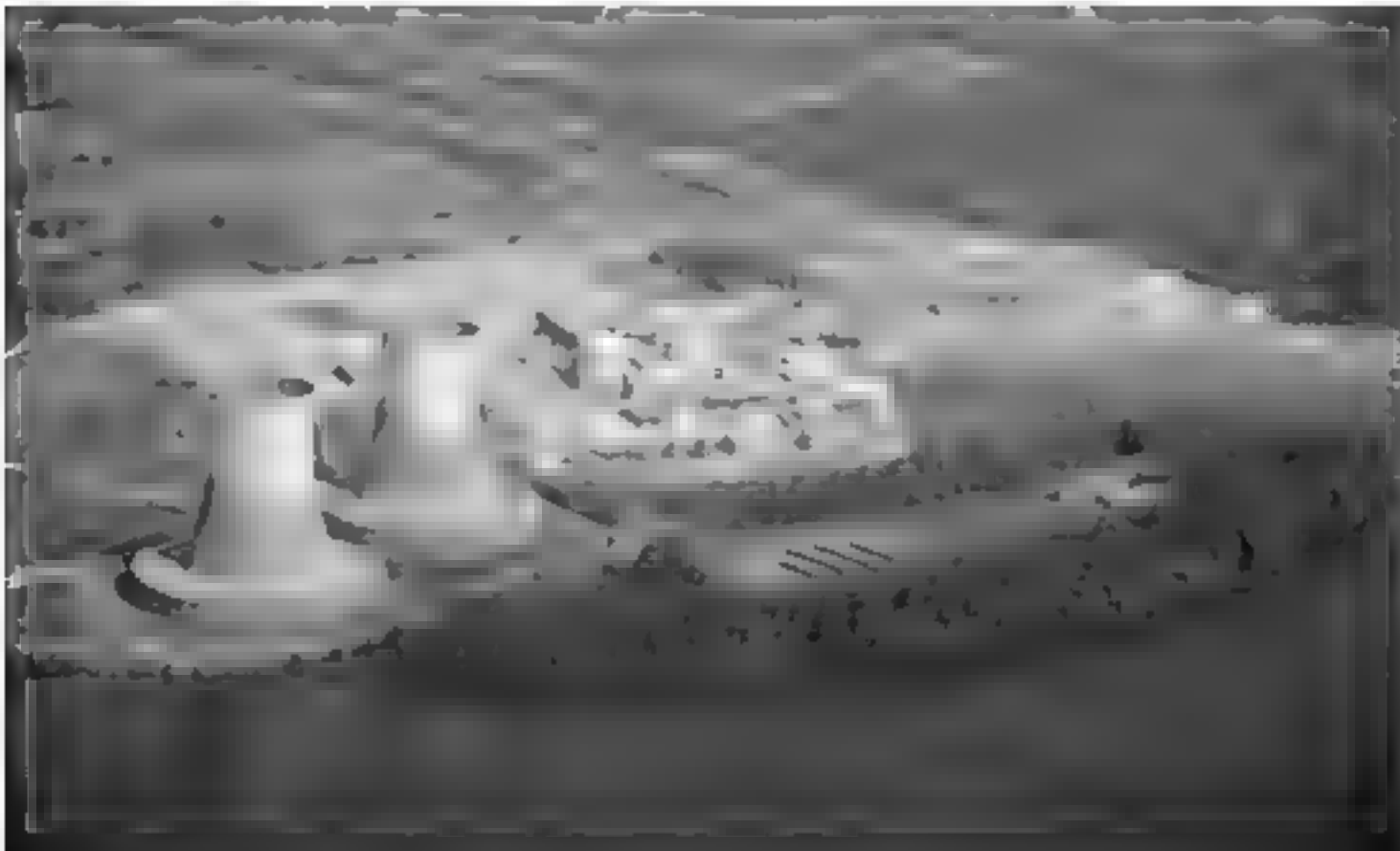


Figura 11.5 Unidade de geração nuclear. (Stockbyte/SUPERSTOCK)



Figura 11.6 Linhas de transmissão de energia. (Cortesia de Mark Nelms)

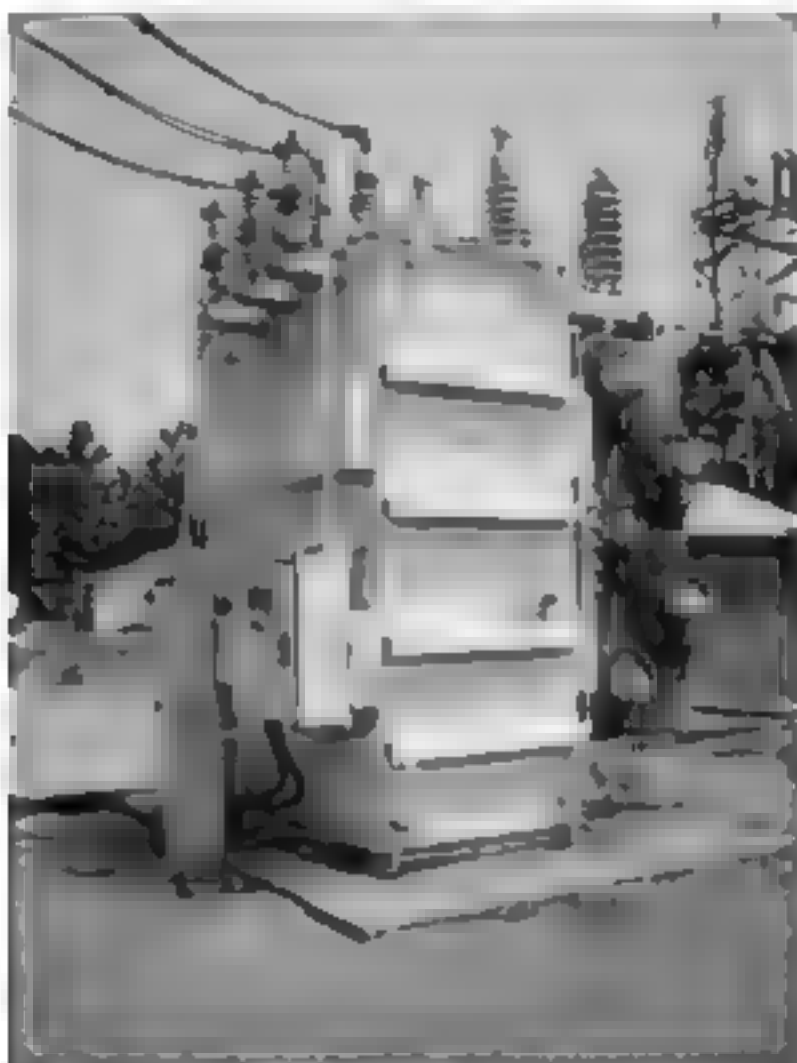


Figura 11.7 Transformador de potência trifásico. (Cortesia de Jeremy Nelms, Talquin Electric Cooperative, Inc.)

Um conjunto balanceado de tensões trifásicas pode ser representado no domínio da frequência conforme mostrado na Fig. 11.8a, na qual foi admitido que suas magnitudes são de 120 V rms. Pela figura se observa que

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_{an} &= 120 \angle 0^\circ \text{ V rms} \\ \mathbf{V}_{bn} &= 120 \angle -120^\circ \text{ V rms} \\ \mathbf{V}_{cn} &= 120 \angle -240^\circ \text{ V rms} \\ &= 120 \angle 120^\circ \text{ V rms} \end{aligned} \quad 11.1$$

A notação de duplo subscrito é exatamente a mesma que foi empregada nos capítulos anteriores; isto é, \mathbf{V}_{an} corresponde à tensão no ponto *a* relativamente ao ponto *n*. A notação de duplo subscrito será também empregada para as correntes; isto é, \mathbf{I}_{an} é utilizada para representar a corrente de *a* para *n*. Entretanto, nesse caso, deve-se ter cuidado ao descrever precisamente a trajetória, uma vez que no circuito haverá mais de uma trajetória entre os dois pontos. Por exemplo, no caso de um único laço, as duas correntes possíveis nas duas trajetórias estarão defasadas de 180° uma da outra.

Os fasores de tensão definidos anteriormente podem ser expressos no domínio do tempo como

$$\begin{aligned} v_{an}(t) &= 120\sqrt{2} \cos \omega t \text{ V} \\ v_{bn}(t) &= 120\sqrt{2} \cos(\omega t - 120^\circ) \text{ V} \\ v_{cn}(t) &= 120\sqrt{2} \cos(\omega t - 240^\circ) \text{ V} \end{aligned} \quad 11.2$$

Essas funções do tempo são mostradas na Fig. 11.8b.

Finalmente, pode-se examinar a potência instantânea gerada por um sistema trifásico. Admita que as tensões indicadas na Fig. 11.8 sejam

$$\begin{aligned} v_{an}(t) &= V_m \cos \omega t \text{ V} \\ v_{bn}(t) &= V_m \cos(\omega t - 120^\circ) \text{ V} \\ v_{cn}(t) &= V_m \cos(\omega t - 240^\circ) \text{ V} \end{aligned} \quad 11.3$$

Estando a carga em equilíbrio, as correntes produzidas pelas fontes são

$$\begin{aligned} i_a(t) &= I_m \cos(\omega t - \theta) \text{ A} \\ i_b(t) &= I_m \cos(\omega t - \theta - 120^\circ) \text{ A} \\ i_c(t) &= I_m \cos(\omega t - \theta - 240^\circ) \text{ A} \end{aligned} \quad 11.4$$

A potência instantânea produzida pelo sistema é

$$\begin{aligned} p(t) &= p_a(t) + p_b(t) + p_c(t) \\ &= V_m I_m [\cos \omega t \cos(\omega t - \theta) \\ &\quad + \cos(\omega t - 120^\circ) \cos(\omega t - \theta - 120^\circ) \\ &\quad + \cos(\omega t - 240^\circ) \cos(\omega t - \theta - 240^\circ)] \end{aligned} \quad 11.5$$

Utilizando a identidade trigonométrica

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)] \quad 11.6$$

a Eq. (11.5) fica

$$\begin{aligned} p(t) &= \frac{V_m I_m}{2} [\cos \theta + \cos(2\omega t - \theta) + \cos \theta \\ &\quad + \cos(2\omega t - \theta - 240^\circ) \\ &\quad + \cos \theta + \cos(2\omega t - \theta - 480^\circ)] \end{aligned} \quad 11.7$$

que pode ser escrita como

$$\begin{aligned} p(t) &= \frac{V_m I_m}{2} [3 \cos \theta + \cos(2\omega t - \theta) \\ &\quad + \cos(2\omega t - \theta - 120^\circ) + \cos(2\omega t - \theta + 120^\circ)] \end{aligned} \quad 11.8$$

Existe uma identidade trigonométrica que conduz a uma simplificação da expressão anterior. A identidade, que será provada posteriormente utilizando-se fasores, é

$$\cos \phi + \cos(\phi - 120^\circ) + \cos(\phi + 120^\circ) = 0 \quad 11.9$$

Empregando-se essa identidade, a expressão da potência fica

$$p(t) = 3 \frac{V_m I_m}{2} \cos \theta \text{ W} \quad 11.10$$

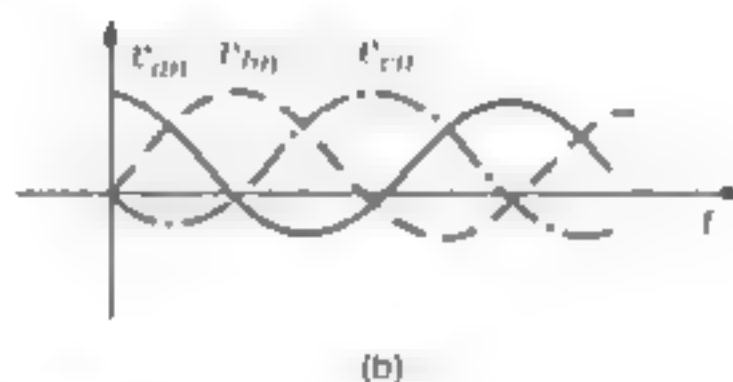
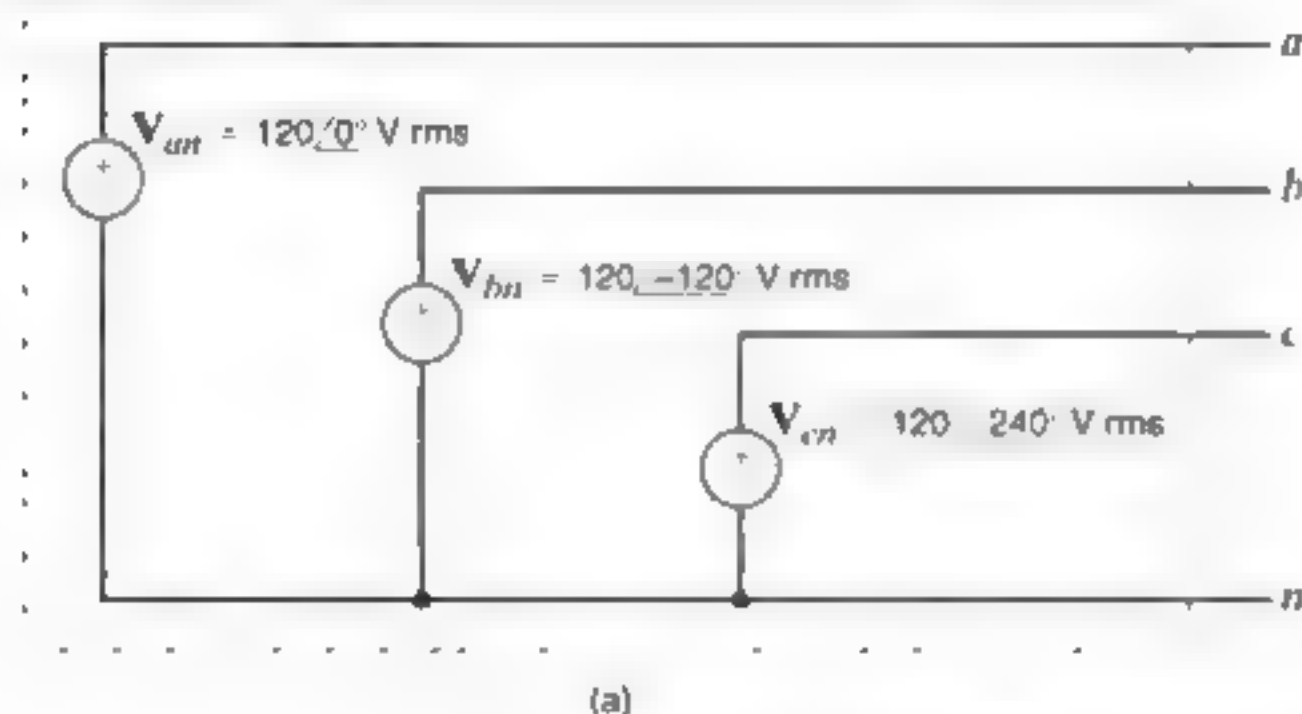


Figura 11.8 Tensões trifásicas balanceadas (ou em equilíbrio).

Note que essa equação indica que a potência instantânea é sempre constante com o tempo, e não pulsante como no caso de sistemas monofásicos. Portanto, a potência fornecida por uma fonte de tensão trifásica é bastante estável, o que representa outra importante motivação para a geração da potência na forma trifásica.

11.2 Conexões Trifásicas

Até agora, a mais importante fonte de tensão polifásica é a fonte trifásica balanceada. Essa fonte, conforme ilustrado pela Fig. 11.9, possui as propriedades mostradas a seguir. As tensões em fase — isto é, a tensão correspondente a cada linha a , b e c , relativamente ao neutro n — são expressas por

$$\begin{aligned} V_{an} &= V_f \angle 0^\circ \\ V_{bn} &= V_f \angle -120^\circ \\ V_{cn} &= V_f \angle +120^\circ \end{aligned} \quad 11.11$$

O diagrama fasor para essas tensões é mostrado na Fig. 11.10. A sequência de fases desse conjunto é chamada de abc (sequência de fase positiva), significando que V_{bn} apresenta um atraso de 120° em relação a V_{an} .

A notação será padronizada de modo que as tensões sejam sempre denominadas V_{an} , V_{bn} e V_{cn} , e serão observadas na ordem abc . Além disso, será normalmente admitido, sem perda de generalidade, que $\angle V_{an} = 0^\circ$.

Uma importante propriedade desse conjunto de tensões em equilíbrio é que

$$V_{an} + V_{bn} + V_{cn} = 0 \quad 11.12$$

Essa propriedade pode facilmente ser percebida pela decomposição dos fasores tensão nas componentes associadas aos eixos real e imaginário. Ela pode também ser demonstrada através da Eq. (11.9).

Do ponto de vista do usuário que conecta uma carga a uma fonte de tensão trifásica em equilíbrio, não é importante saber como as tensões são geradas. É importante notar, todavia, que se as correntes geradas pela conexão de uma carga à fonte de potência mostrada na Fig. 11.9 estão também *equilibradas*, então existem duas possíveis configurações equivalentes para a

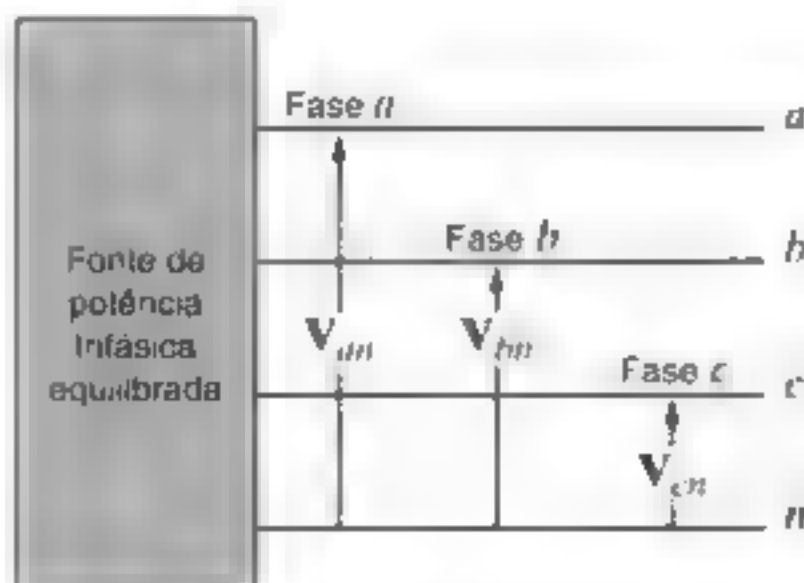


Figura 11.9 Fonte de tensão trifásica em equilíbrio.

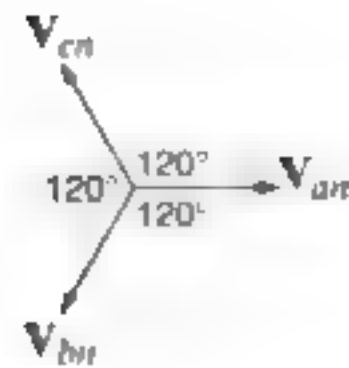


Figura 11.10 Diagrama fasor para uma fonte de tensão trifásica em equilíbrio.

carga. A carga equivalente pode ser considerada como estando conectada segundo uma configuração em *estrela* (Y) ou em *delta* (Δ). A configuração em estrela equilibrada é mostrada na Fig. 11.11a e de forma equivalente na Fig. 11.11b. A configuração em delta é mostrada na Fig. 11.12a e de forma equivalente na Fig. 11.12b. Note que, no caso da conexão em delta, não existe a linha neutra. A função real da linha neutra na conexão estrela será examinada, e será mostrado que, em um sistema em equilíbrio, a linha neutra não conduz qualquer corrente e, para efeito de análise, ela pode ser omitida.

As conexões estrela e delta possuem, cada uma, suas correspondentes vantagens. No caso da conexão estrela, tem-se acesso a duas tensões, linha a linha e linha a neutro, e ela for-

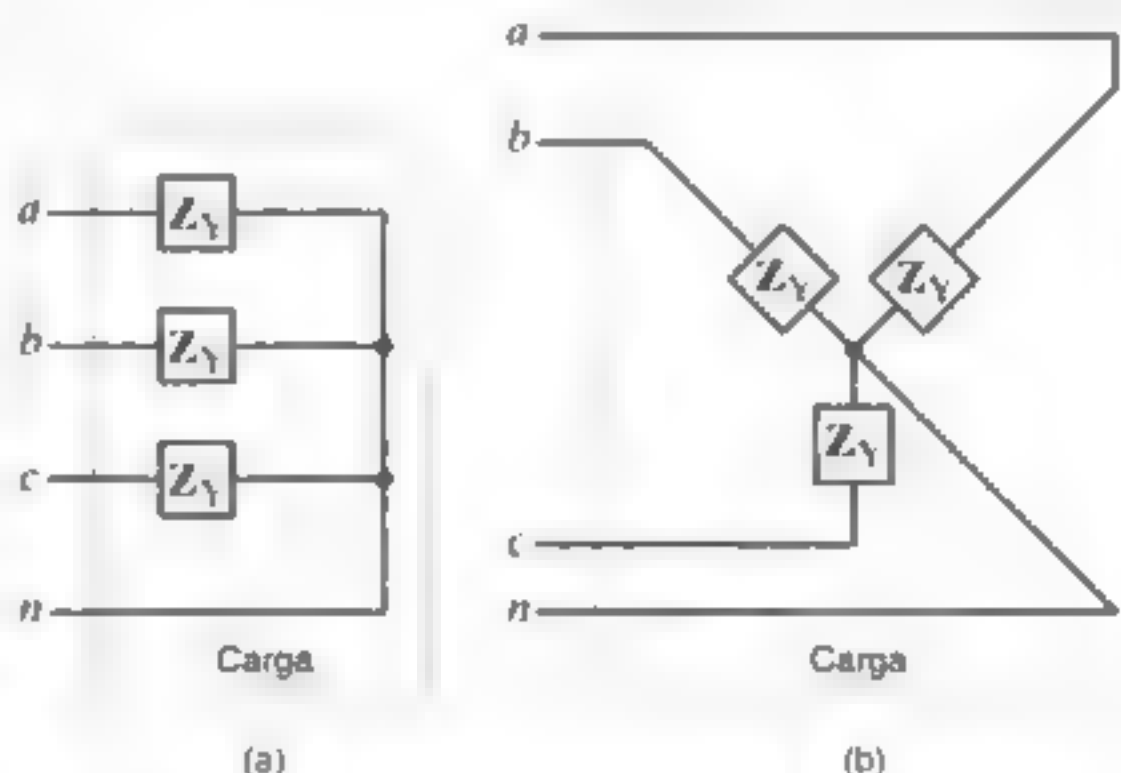


Figura 11.11 Cargas conectadas na configuração estrela (Y).

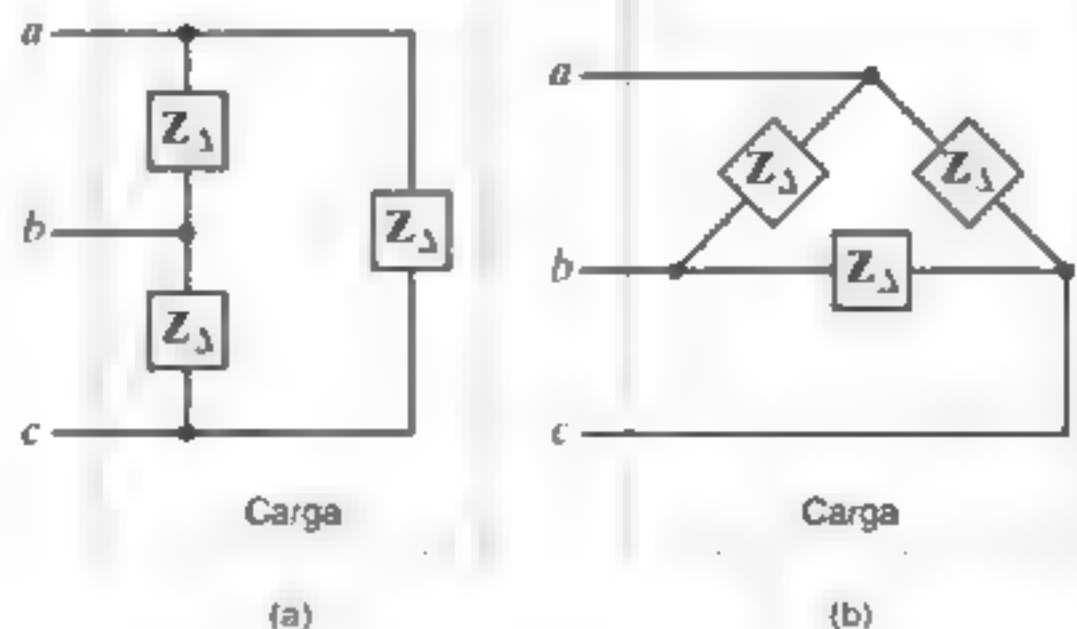


Figura 11.12 Cargas conectadas na configuração delta (Δ).

nece um local conveniente para a conexão ao terra dos sistemas de proteção, isto é, ela limita a magnitude de sobretensões. No caso da conexão delta, essa configuração apresenta uma melhor permanência em equilíbrio ao atender a cargas desbalanceadas e é capaz de bloquear o terceiro harmônico.

11.3 Conexões Fonte/Carga

Uma vez que tanto a fonte quanto a carga podem ser conectadas segundo as configurações em estrela (Y) e em delta (Δ), os circuitos trifásicos em equilíbrio podem ser conectados segundo as configurações Y-Y, Y- Δ , Δ -Y ou Δ - Δ . O procedimento utilizado na análise de todos esses circuitos parte do raciocínio de uma conexão em estrela (Y) e, portanto, a conexão Y-Y será analisada primeiro.

CONEXÃO Y-Y EM EQUILÍBRIO Suponha agora que a fonte e a carga estejam conectadas na configuração estrela (Y), conforme mostrado na Fig. 11.13. As tensões com suas respectivas fases positivas em sequência são

$$\begin{aligned} V_{an} &= V_f \angle 0^\circ \\ V_{bn} &= V_f \angle -120^\circ \\ V_{cn} &= V_f \angle +120^\circ \end{aligned} \quad 11.13$$

em que a tensão V_f , a tensão de fase, representa a intensidade do fasor tensão do neutro para qualquer linha. As tensões *linha a linha* ou simplesmente *tensões de linha* podem ser calculadas utilizando-se a LKT; por exemplo,

$$\begin{aligned} V_{ab} &= V_{an} - V_{bn} \\ &= V_f \angle 0^\circ - V_f \angle -120^\circ \\ V_f &= V \begin{bmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \\ V_f &= \begin{bmatrix} 3 & \sqrt{3} \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \\ &= \sqrt{3} V_f \angle 30^\circ \end{aligned}$$

O fasor soma é mostrado na Fig. 11.14a. De mesmo modo, obtém-se o conjunto de tensões linha-a-linha como

$$\begin{aligned} V_{ab} &= \sqrt{3} V_f \angle 30^\circ \\ V_{bc} &= \sqrt{3} V_f \angle -90^\circ \\ V_{ca} &= \sqrt{3} V_f \angle 210^\circ \end{aligned} \quad 11.14$$

[atenção]

Regras de conversão:

$$V_{ab} = V_{an} + 30^\circ$$

$$V_{ab} = \sqrt{3} V_{an}$$

Todas as tensões de linha juntamente com as tensões de fase são mostradas na Fig. 11.14b. As intensidades das tensões de

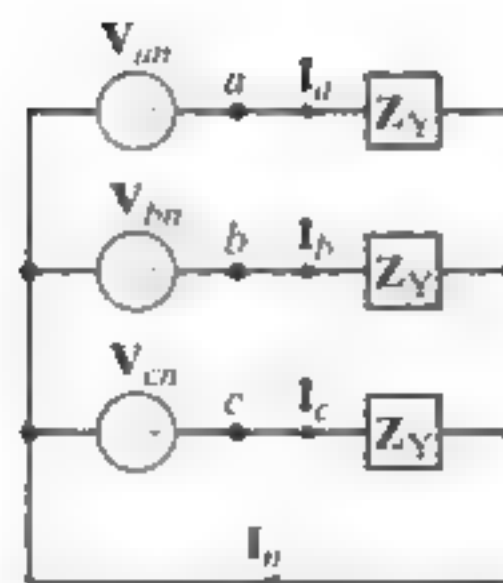


Figura 11.13 Conexão trifásica estrela-estrela em equilíbrio.

linha são representadas como V_L e, portanto, para um sistema em equilíbrio,

$$V_L = \sqrt{3} V_f \quad 11.15$$

Assim, em um sistema com conexão em estrela (Y), a tensão na linha é igual a $\sqrt{3}$ vezes a tensão de fase.

Conforme mostrado na Fig. 11.13, a corrente na linha para a fase a vale

$$I_a = \frac{V_{an}}{Z_Y} = \frac{V_f \angle 0^\circ}{Z_Y} \quad 11.16$$

em que I_b e I_c possuem a mesma magnitude, porém, estão atrasadas em relação a I_a em 120° e 240° , respectivamente.

A corrente no neutro, I_n , é, portanto,

$$I_n = (I_a + I_b + I_c) = 0 \quad 11.17$$

Uma vez que não existe corrente no neutro, esse condutor poderia possuir qualquer impedância, ou poderia ser um circuito aberto, ou ainda, um curto-circuito, e os resultados anteriormente obtidos não seriam alterados.

Conforme ilustrado pela conexão Y-Y mostrada na Fig. 11.13, a corrente na linha que conecta a fonte à carga é idêntica à corrente da fase que flui pela impedância Z_Y . Portanto, em uma conexão Y-Y, tem-se

$$I_L = I_Y \quad 11.18$$

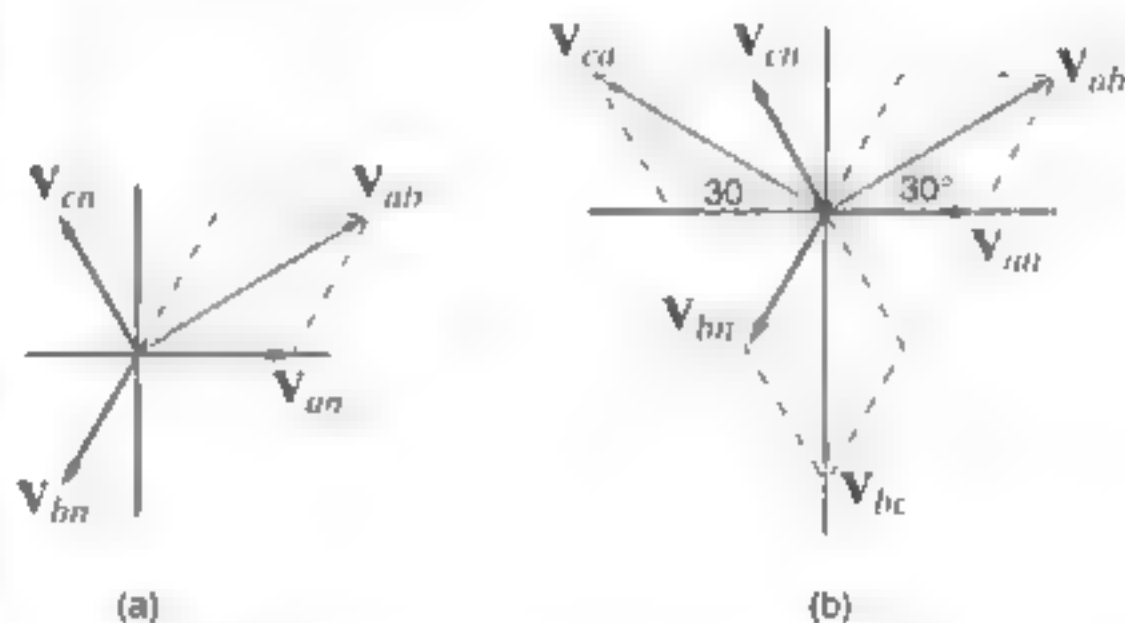


Figura 11.14 Representação das tensões de linha e de fase por meio de fasores em um sistema estrela-estrela em equilíbrio.

em que I_L é a intensidade da corrente da linha e I_Y é a intensidade da corrente na carga conectada em estrela (Y).

Embora se tenha um sistema trifásico composto de três fontes e três cargas, pode-se analisar uma única fase e utilizar a sequência de fase para obter as tensões e correntes nas demais fases. Esse é, certamente, um resultado direto da condição de equilíbrio. Impedâncias podem ainda estar presen-

tes nas linhas; entretanto, enquanto o sistema permanecer em equilíbrio, necessita-se analisar apenas uma de suas fases. Se as impedâncias das linhas a , b e c forem iguais, o sistema estará equilibrado. Lembre-se de que o equilíbrio do sistema não é afetado pelos elementos que possam estar presentes na linha neutra e, como a impedância dessa linha é arbitrária, admite-se que possa ser nula (por exemplo, um curto-circuito).

EXEMPLO 11.1

Uma fonte de tensão trifásica na sequência abc é conectada a uma configuração estrela equilibrada. Sabe-se que ela possui uma tensão de linha expressa por $V_{ab} = 208 \angle -30^\circ$ V rms. Determine as tensões de fase.

SOLUÇÃO

A intensidade da tensão de fase é expressa por

$$V_f = \frac{208}{\sqrt{3}} \\ = 120 \text{ V rms}$$

[atenção]

A fase de $V_{an} = V_{bn} = V_{cn} = 30^\circ$

As relações entre as tensões de linha e de fase são mostradas na Fig. 11.14. Dessa figura pode-se observar que

$$V_{ab} = 120 \angle -60^\circ \text{ V rms}$$

$$V_{bc} = 120 \angle -180^\circ \text{ V rms}$$

$$V_{ca} = 120 \angle +60^\circ \text{ V rms}$$

As intensidades dessas tensões são bastante comuns e, com frequência, ouve-se o comentário de que o serviço de eletricidade de um prédio é, por exemplo, trifásico de 208/120 V rms.

EXEMPLO 11.2

Uma carga trifásica conectada na configuração estrela é alimentada por uma fonte trifásica em estrela com sequência abc em equilíbrio e tensão de fase de 120 V rms. Considerando que a impedância da linha e a impedância da carga por fase são de $1 + j1 \Omega$ e $20 + j10 \Omega$, respectivamente, deseja-se determinar o valor das correntes de linha e das tensões da carga.

SOLUÇÃO

As tensões de fase são

$$V_{an} = 120 \angle 0^\circ \text{ V rms}$$

$$V_{bn} = 120 \angle -120^\circ \text{ V rms}$$

$$V_{cn} = 120 \angle +120^\circ \text{ V rms}$$

O diagrama do circuito por fase é mostrado na Fig. 11.15. A corrente de linha para a fase a vale

$$I_{aA} = \frac{120 \angle 0^\circ}{21 + j11} \\ = 5,06 \angle -27,65^\circ \text{ A rms}$$

[atenção]

$$I_{ba} = I_{ab} + 120^\circ$$

$$I_{ca} = I_{ab} + 120^\circ$$

A tensão na carga para a fase a , que será denominada V_{AN} vale

$$V_{AN} = (5,06 \angle -27,65^\circ)(20 + j10) \\ = 113,15 \angle -1,08^\circ \text{ V rms}$$

As correntes de linha e tensões de carga correspondentes às fases b e c são

$$I_{bB} = 5,06 \angle -147,65^\circ \text{ A rms} \quad V_{bN} = 113,15 \angle -121,08^\circ \text{ V rms}$$

$$I_{cC} = 5,06 \angle -267,65^\circ \text{ A rms} \quad V_{cN} = 113,15 \angle -241,08^\circ \text{ V rms}$$

Para enfatizar e tornar mais compreensível a terminologia aqui utilizada, a tensão de fase, V_f , representa a magnitude do fasor tensão do neutro para qualquer linha, enquanto a tensão de linha, V_L , representa a magnitude do fasor tensão entre quaisquer duas linhas. Assim, os valores de V_L e V_f dependem dos pontos para os quais eles são calculados no sistema.

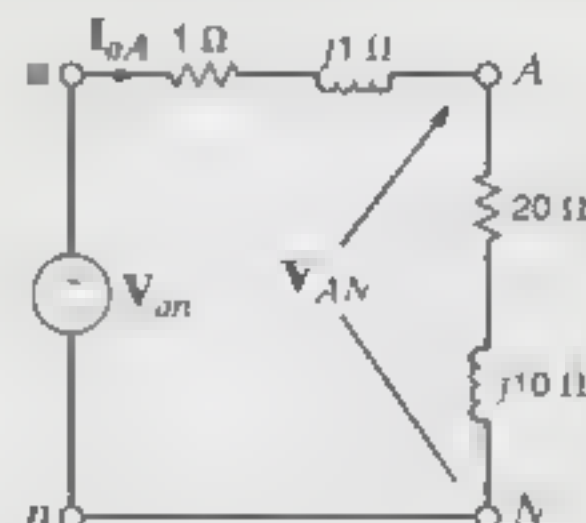


Figura 11.15 Diagrama do circuito por fase para o problema do Exemplo 11.2.

Avaliação do Aprendizado

E11.1 A tensão para a fase a de uma fonte conectada em estrela equilibrada e com sequência de fase abc é $V_{an} = 120 \angle 90^\circ$ V rms. Determine as tensões de linha para essa fonte.

RESPOSTAS:

$$V_{ab} = 208 \angle 120^\circ \text{ V rms};$$

$$V_{bc} = 208 \angle 0^\circ \text{ V rms};$$

$$V_{ca} = 208 \angle -120^\circ \text{ V rms}.$$

E11.2 Uma fonte de tensão trifásica com sequência de fase abc em uma configuração estrela em equilíbrio possui uma tensão de linha $V_{ab} = 208 \angle 0^\circ$ V rms. Determine as tensões de fase da fonte.

RESPOSTAS:

$$V_{an} = 120 \angle -30^\circ \text{ V rms};$$

$$V_{bn} = 120 \angle -150^\circ \text{ V rms};$$

$$V_{cn} = 120 \angle -270^\circ \text{ V rms}.$$

E11.3 Uma carga trifásica conectada em estrela é alimentada por uma fonte trifásica em estrela com sequência abc equilibrada através de uma linha de transmissão com impedância de $1 + j1 \Omega$ por fase. A impedância da carga é de $8 + j3 \Omega$ por fase. Se a tensão da fase a é de $104,02 \angle 26,6^\circ$ V rms, (isto é, $V_f = 104,02$ V rms na extremidade da carga), determine as tensões de fase da fonte.

RESPOSTAS:

$$V_{an} = 120 \angle 34^\circ \text{ V rms};$$

$$V_{bn} = 120 \angle -90^\circ \text{ V rms};$$

$$V_{cn} = 120 \angle -210^\circ \text{ V rms}.$$

E11.4 Uma fonte trifásica com sequência de fase positiva em uma configuração estrela em equilíbrio possui uma tensão de fase de 277 V rms e fornece potência a uma carga com conexão em estrela em equilíbrio. A impedância da carga por fase é de $60 - j40 \Omega$. Determine as correntes de linha do circuito considerando que o ângulo de fase de V_{an} é igual a 0° .

RESPOSTAS:

$$I_{aA} = 3,84 \angle 33,69^\circ \text{ A rms};$$

$$I_{bB} = 3,84 \angle -86,31^\circ \text{ A rms};$$

$$I_{cC} = 3,84 \angle 153,69^\circ \text{ A rms}.$$

E11.5 Um conjunto de tensões na sequência abc alimenta um sistema trifásico estrela-estrela equilibrado. As impedâncias de linha e da carga são de $0,5 + j0,75 \Omega$ e $20 - j24 \Omega$, respectivamente. Se a tensão da carga na fase a é $V_{AN} = 125 \angle 0^\circ$ V rms, determine as tensões de linha da entrada.

RESPOSTAS:

$$V_{ab} = 214,8 \angle 41,6^\circ \text{ V rms};$$

$$V_{bc} = 214,8 \angle -78,4^\circ \text{ V rms};$$

$$V_{ca} = 214,8 \angle 161,6^\circ \text{ V rms}.$$

E11.6 Em um sistema trifásico estrela-estrela em equilíbrio, a potência total nas linhas é de 650 W. A tensão $V_{AN} = 117 \angle 15^\circ$ V rms e o fator de potência da carga são de 0,88 em avanço. Se a impedância da linha é de $1 + j2 \Omega$, determine a impedância da carga.

RESPOSTA:

$$Z_L = 7 - j3,78 \Omega.$$

A análise anterior indica que é possível tratar um circuito trifásico equilibrado baseando-se simplesmente em uma das fases e utilizando a relação de fase para determinar todas as tensões e correntes. Examina-se agora a situação em que a fonte ou a carga é conectada através de uma configuração em delta (Δ).

FONTE CONECTADA EM DELTA Considere a fonte conectada em delta mostrada na Fig. 11.16a. Note que as fontes são conectadas linha-a-linha. Determinou-se, anteriormente, que as relações entre as tensões linha-a-linha e linha-ao-neutro são dadas pela Eq. (11.14) e ilustradas pela Fig. 11.14 para uma sequência de tensões de fase abc . Portanto, se as fontes em delta são

$$V_{ab} = V_L \angle 0^\circ$$

$$V_{bc} = V_L \angle -120^\circ$$

$$V_{ca} = V_L \angle +120^\circ$$

11.19

em que V_L é a magnitude da tensão de fase, as fontes equivalentes na configuração em estrela mostradas na Fig. 11.16b são

$$V_{an} = \frac{V_L}{\sqrt{3}} \angle -30^\circ = V_f \angle -30^\circ$$

$$V_{bn} = \frac{V_L}{\sqrt{3}} \angle -150^\circ = V_f \angle -150^\circ \quad 11.20$$

$$V_{cn} = \frac{V_L}{\sqrt{3}} \angle -270^\circ = V_f \angle -90^\circ$$

em que V_f é a magnitude da tensão de fase de uma fonte equivalente conectada em estrela. Portanto, se uma rede possui uma fonte conectada em delta, pode-se, facilmente, convertê-la de uma configuração delta para uma configuração estrela, de modo que todos os procedimentos discutidos anteriormente possam ser aplicados na análise.

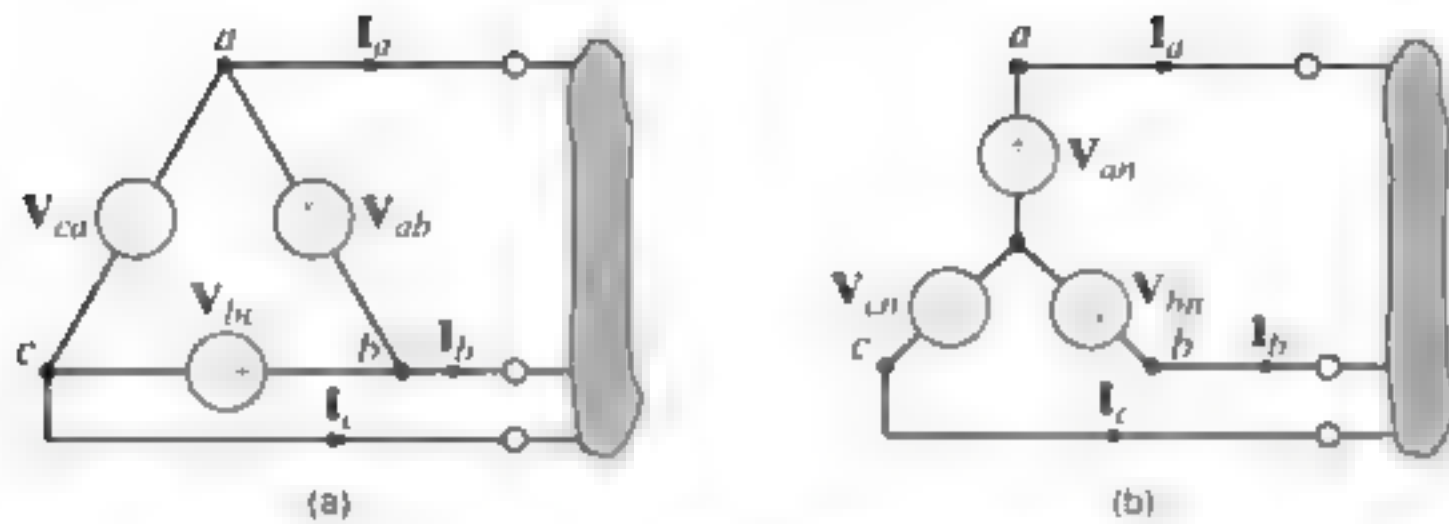


Figura 11.16 Fontes conectadas nas configurações delta e estrela.

Estratégia para Solução de Problemas

Circuitos de Potência CA Trifásicos em Equilíbrio

Etapa 1. Converta a conexão fonte/carga para a configuração estrela-estrela considerando que a fonte, a carga ou ambas estejam conectadas em delta. Esse procedimento deve-se ao fato de uma conexão estrela-estrela poder ser utilizada facilmente para a obtenção dos fasores incógnitos.

Etapa 2. Estando o sistema trifásico em equilíbrio, apenas os fasores incógnitos para a fase *a* do circuito necessitam ser determinados.

Etapa 3. Finalmente, converta os fasores conhecidos para os fasores correspondentes no sistema original.

EXEMPLO 11.3

Considere a rede mostrada na Fig. 11.17a. Deseja-se determinar as correntes de linha e a magnitude da tensão de linha na carga.

SOLUÇÃO

O diagrama monofásico da rede é mostrado na Fig. 11.17b. A corrente de linha I_{aA} é

$$I_{aA} = \frac{(208/\sqrt{3}) \angle -30^\circ}{12,1 - j4,2} = 9,38 \angle -49,14^\circ \text{ A rms}$$

e, assim, $I_{bB} = 9,38 \angle -169,14^\circ \text{ V rms}$ e $I_{cC} = 9,38 \angle 70,86^\circ \text{ V rms}$. A tensão V_{AN} será, portanto,

$$V_{AN} = (9,38 \angle -49,14^\circ)(12 + j4) = 118,65 \angle -30,71^\circ \text{ V rms}$$

Assim, a magnitude da tensão de linha na carga vale

$$V_L = \sqrt{3} (118,65) = 205,51 \text{ V rms}$$

A tensão da fase na fonte é $V_f = 208/\sqrt{3} = 120 \text{ V rms}$, enquanto a tensão de fase na carga é $V_f = 205,51/\sqrt{3} = 118,65 \text{ V rms}$. Naturalmente, deve-se ter cuidado com a notação utilizada e especificar onde a tensão de fase ou a tensão de linha está sendo medida.

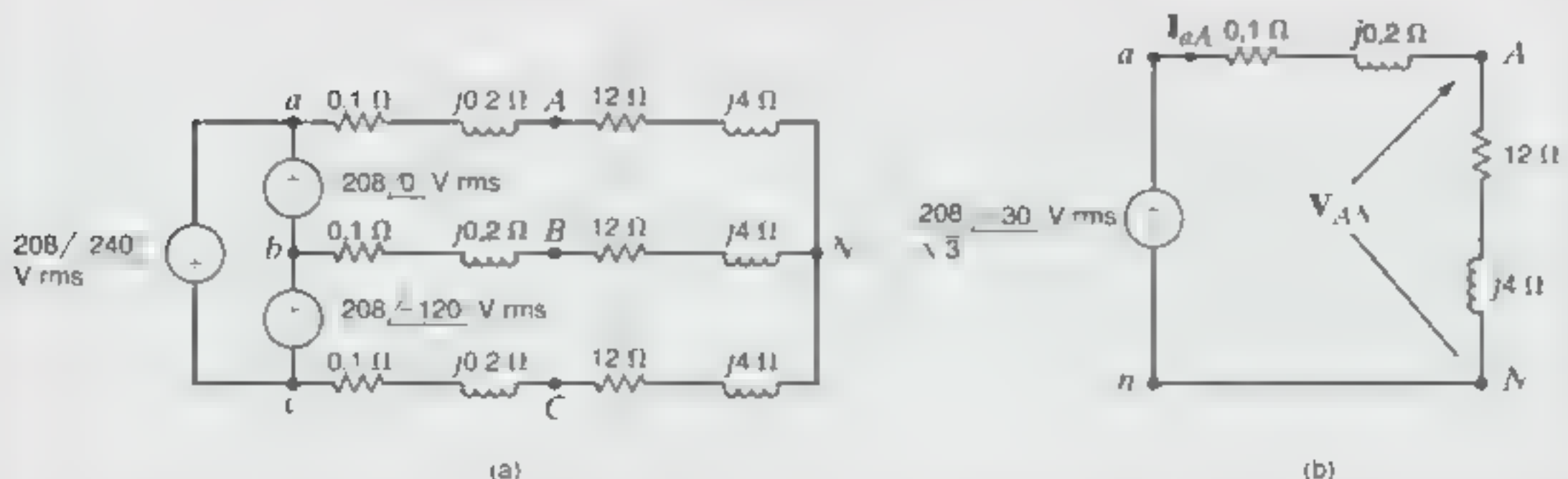


Figura 11.17 Rede na configuração delta-estrela e um diagrama monofásico equivalente (fase a).

Avaliação do Aprendizado

E11.7 Considere a rede mostrada na Fig. E11.7. Calcule a magnitude das tensões de linha na carga.

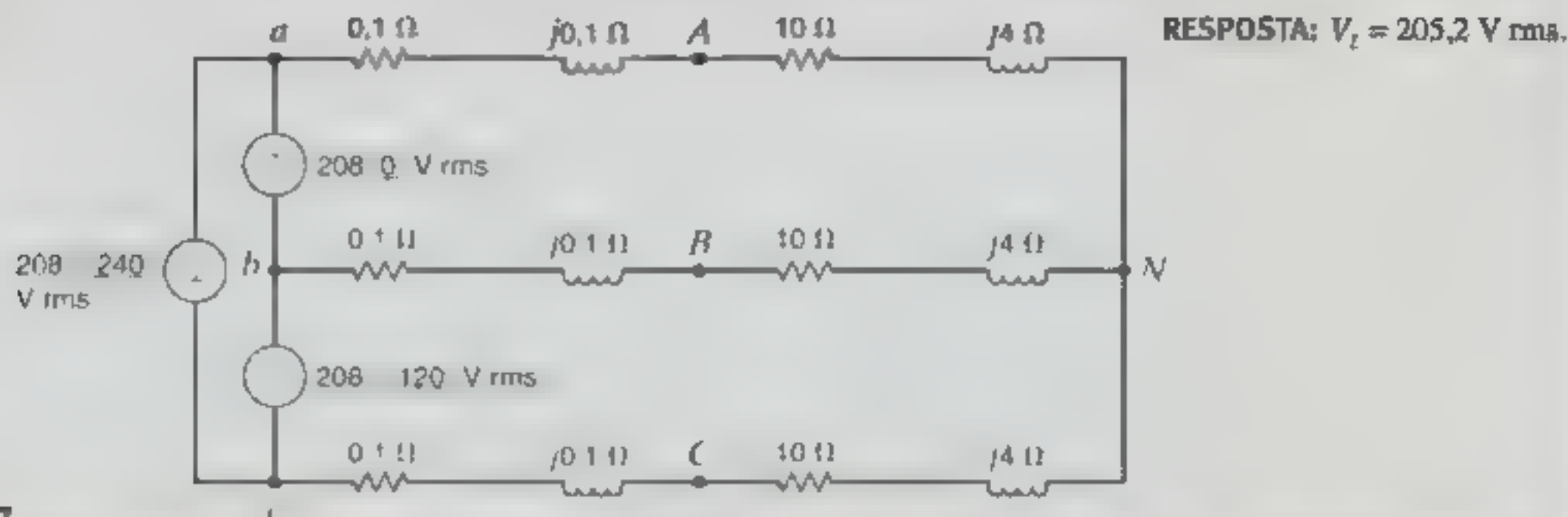


Figura E11.7

E11.8 Determine a magnitude da tensão de linha na carga do circuito mostrado na Fig. E11.8

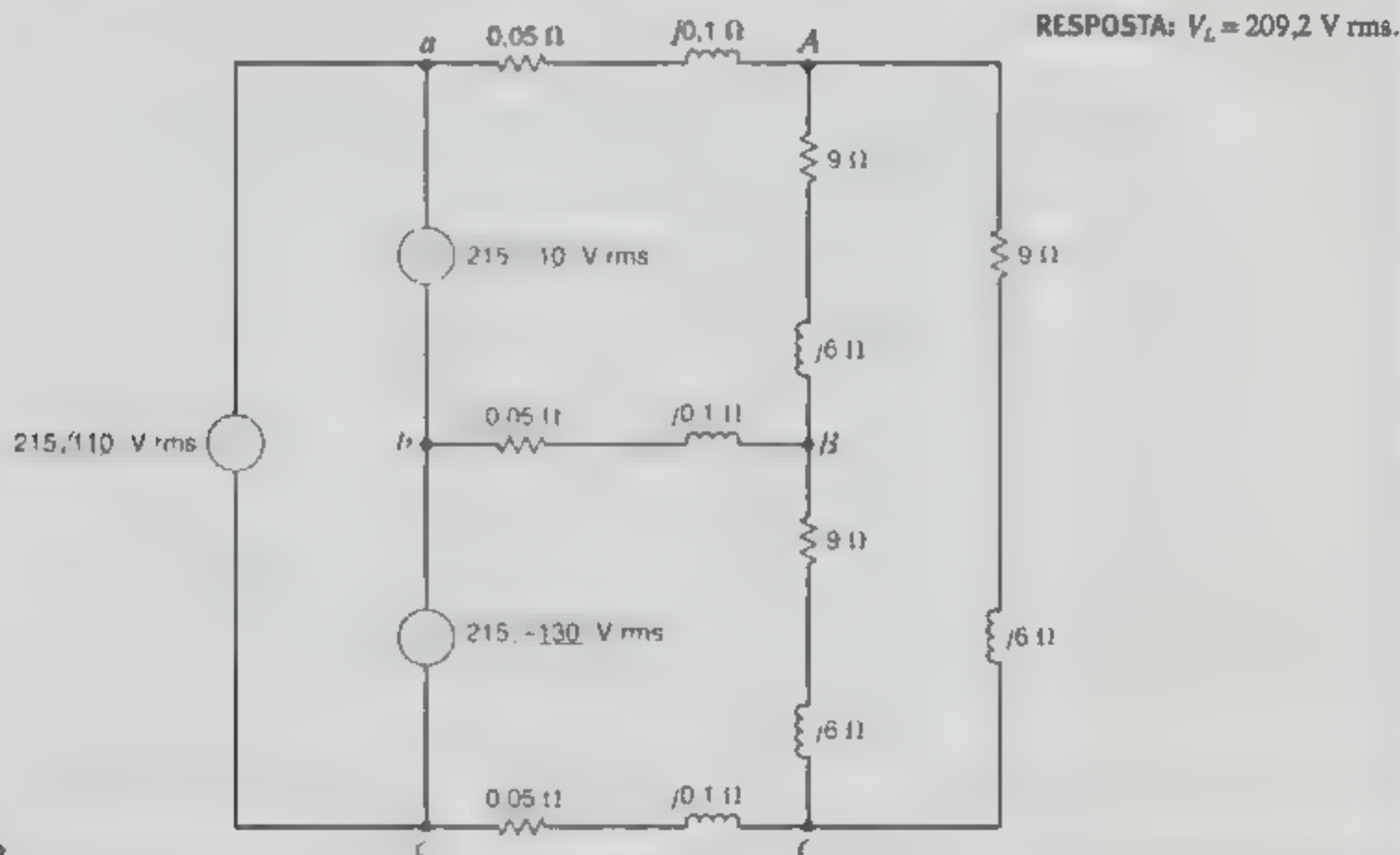


Figura E11.8

CARGA CONECTADA EM DELTA Considere agora a carga conectada em delta (Δ) mostrada na Fig. 11.18. Note que nessa conexão a tensão linha-a-linha é a tensão entre os terminais de cada impedância de carga.

Se as tensões de fase da fonte são

$$\mathbf{V}_{an} = V_f \angle 0^\circ$$

$$\mathbf{V}_{bn} = V_f \angle -120^\circ$$

$$\mathbf{V}_{cn} = V_f \angle +120^\circ$$

então as tensões de linha são

$$\mathbf{V}_{ab} = \sqrt{3} V_f \angle 30^\circ = V_L \angle 30^\circ = \mathbf{V}_{AB}$$

$$\mathbf{V}_{bc} = \sqrt{3} V_f \angle -90^\circ = V_L \angle -90^\circ = \mathbf{V}_{BC} \quad 11.22$$

$$\mathbf{V}_{ca} = \sqrt{3} V_f \angle 210^\circ = V_L \angle 210^\circ = \mathbf{V}_{CA}$$

11.21

em que V_L é a magnitude da tensão de linha tanto na carga conectada na configuração delta quanto na fonte, uma vez que não há impedância de linha presente na rede.

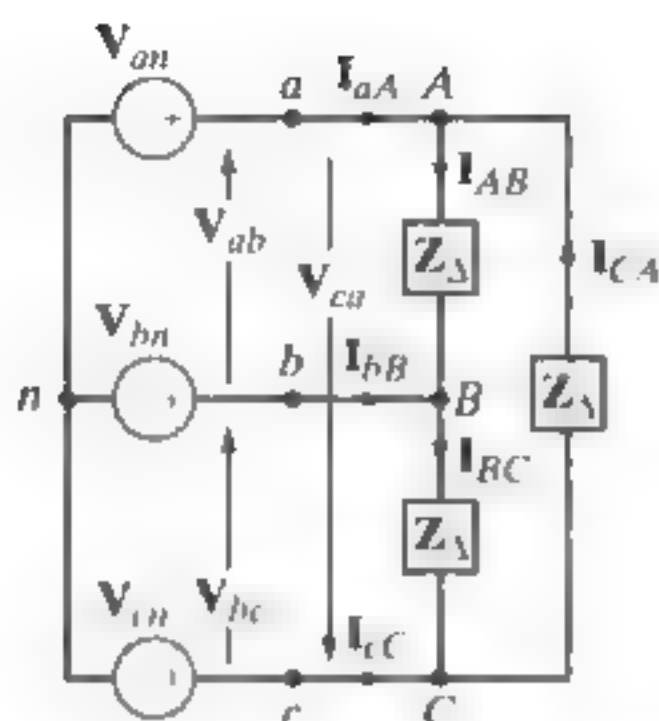


Figura 11.18 Sistema trifásico na configuração estrela-delta em equilíbrio.

Pela Fig. 11.18, nota-se que se $Z_Y = Z_\Delta/\theta$ as correntes de fase na carga são

$$I_{aA} = \frac{V_{aA}}{Z_Y} \quad 11.23$$

em que I_{bB} e I_{cC} possuem a mesma intensidade, porém com atraso relativo a I_{aA} de 120° e 240° , respectivamente. A LKC

pode agora ser empregada em combinação com as correntes de fase para a determinação das correntes de linha. Por exemplo,

$$I_{aA} = I_{AB} + I_{AC} \\ = I_{AB} - I_{CA}$$

Entretanto, talvez seja mais fácil converter a carga equilibrada conectada em delta para uma carga equilibrada conectada em estrela utilizando a transformação Δ -Y. Essa conversão é possível, uma vez que as transformações estrela-delta e delta-estrela discutidas no Capítulo 2 também são válidas para impedância no domínio da frequência. No caso da rede em equilíbrio, as equações de transformação são reduzidas a

$$Z_Y = \frac{1}{3} Z_\Delta$$

e, assim, a corrente de linha I_{aA} será, simplesmente,

$$I_{aA} = \frac{V_{aA}}{Z_Y}$$

Finalmente, utilizando o mesmo procedimento empregado anteriormente para determinar a relação entre as tensões de linha e as tensões de fase em uma conexão Y-Y, pode-se mostrar que a relação entre as *magnitudes* das correntes de fase na carga conectada em Δ e as correntes de linha é

$$I_L = \sqrt{3} I_\Delta \quad 11.24$$

EXEMPLO 11.4

Uma carga em equilíbrio, conectada na configuração delta, contém um resistor de $10 \, \Omega$ em série com um indutor de $20 \, \text{mH}$ em cada fase. A fonte de tensão é uma sequência *abc* trifásica de $60 \, \text{Hz}$ equilibrada em estrela com uma tensão $V_{an} = 120 \angle 30^\circ \, \text{V rms}$. Deseja-se determinar todas as correntes da configuração Δ e as correntes das linhas.

SOLUÇÃO

A impedância por fase na carga em delta é $Z_\Delta = 10 + j7,54 \, \Omega$. A tensão de linha vale $V_{ab} = 120 \sqrt{3} \angle 60^\circ \, \text{V rms}$. Como não existe impedância de linha, $V_{AB} = V_{ab} = 120 \sqrt{3} \angle 60^\circ \, \text{V rms}$. Assim,

$$I_{AB} = \frac{120 \sqrt{3} \angle 60^\circ}{10 + j7,54} \\ = 16,60 \angle +22,98^\circ \, \text{A rms}$$

Sendo $Z_\Delta = 10 + j7,54 \, \Omega$, então

$$Z_Y = \frac{1}{3} Z_\Delta \\ = 3,33 + j2,51 \, \Omega$$

Logo, a corrente de linha será

$$I_{aA} = \frac{V_{aA}}{Z_Y} = \frac{120 \angle 30^\circ}{3,33 + j2,51} \\ = \frac{120 \angle 30^\circ}{4,17 \angle 37,01^\circ} \\ = 28,78 \angle -7,01^\circ \, \text{A rms}$$

Portanto, as correntes remanescentes de fase e de linha são

$$I_{BC} = 16,60 \angle -97,02^\circ \, \text{A rms} \quad I_{bB} = 28,78 \angle -127,01^\circ \, \text{A rms}$$

$$I_{CA} = 16,60 \angle +142,98^\circ \, \text{A rms} \quad I_{cC} = 28,78 \angle +112,99^\circ \, \text{A rms}$$

Resumindo, a relação entre a tensão de linha e a tensão de fase, e a corrente de linha e a corrente de fase, para ambas as configurações, Y e Δ , são mostradas na Fig. 11.19. As correntes

e as tensões são mostradas para uma das fases. As duas outras fases possuem a mesma magnitude, porém estão atrasadas de 120° e 240° , respectivamente.

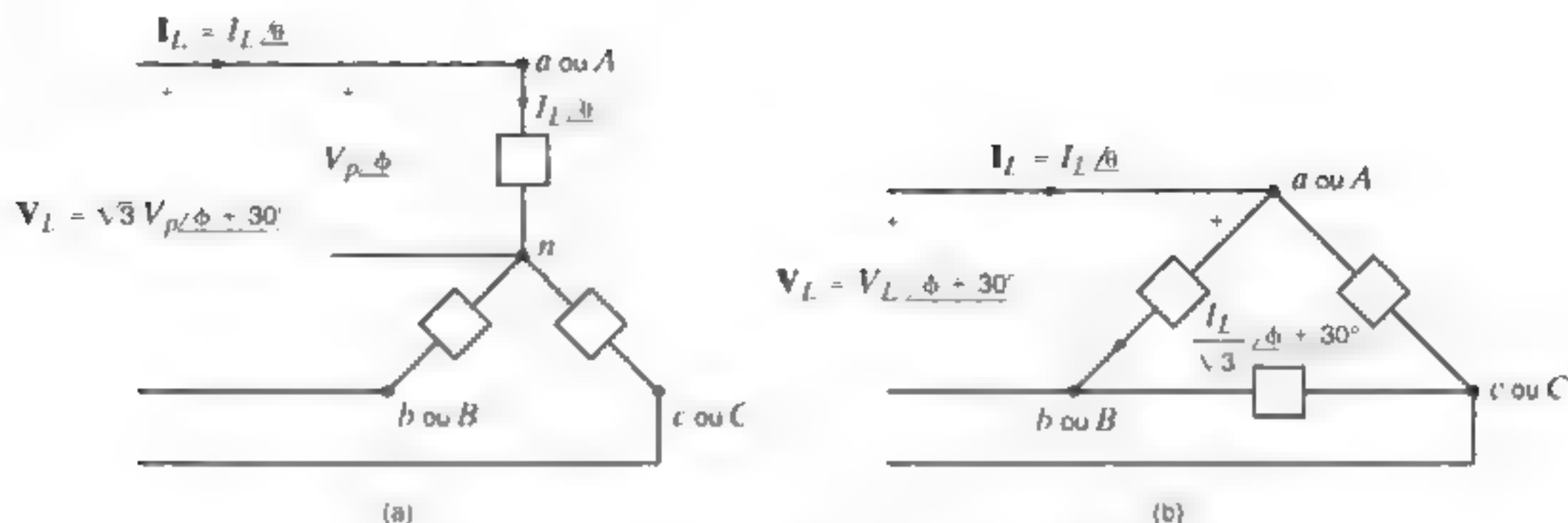


Figura 11.19 Relações entre tensão e corrente para as configurações Y e Δ .

Uma observação cuidadosa da Tabela 11.1 indica que as seguintes regras são aplicáveis na solução de problemas referentes a sistemas trifásicos em equilíbrio:

- As fases das tensões e das correntes em uma conexão Δ estão 30° à frente das fases referentes à conexão Y.
- A magnitude da tensão de linha ou, de modo equivalente, da tensão de fase da conexão Δ , é igual a $\sqrt{3}$ vezes a magnitude da tensão de fase da conexão Y.
- A magnitude da corrente de linha, ou, de modo equivalente, da corrente de fase da conexão Y, é igual a $\sqrt{3}$ vezes a magnitude da corrente de fase da conexão Δ .
- A impedância de carga na conexão Y é igual a um terço daquela referente à conexão Δ e a fase é idêntica.

TABELA 11.1 Relações entre tensão, corrente e impedância para as configurações Y e Δ

	Y	Δ
Tensão de linha (V_{ab} ou V_{AB})	$\sqrt{3} V_p \angle \phi + 30^\circ$ $= V_L \angle \phi + 30^\circ$	$V_L \angle \phi + 30^\circ$
Corrente de linha I_{LA}	$I_L \angle \theta$	$I_L \angle \theta$
Tensão de fase	$V_p \angle \phi$ (V_{an} ou V_{AN})	$\sqrt{3} V_p \angle \phi + 30^\circ$
Corrente de fase	$I_L \angle \theta$	$\frac{I_L}{\sqrt{3}} \angle \theta + 30^\circ$
Impedância da carga	$Z_Y \angle \phi - \theta$	$3Z_Y \angle \phi - \theta$

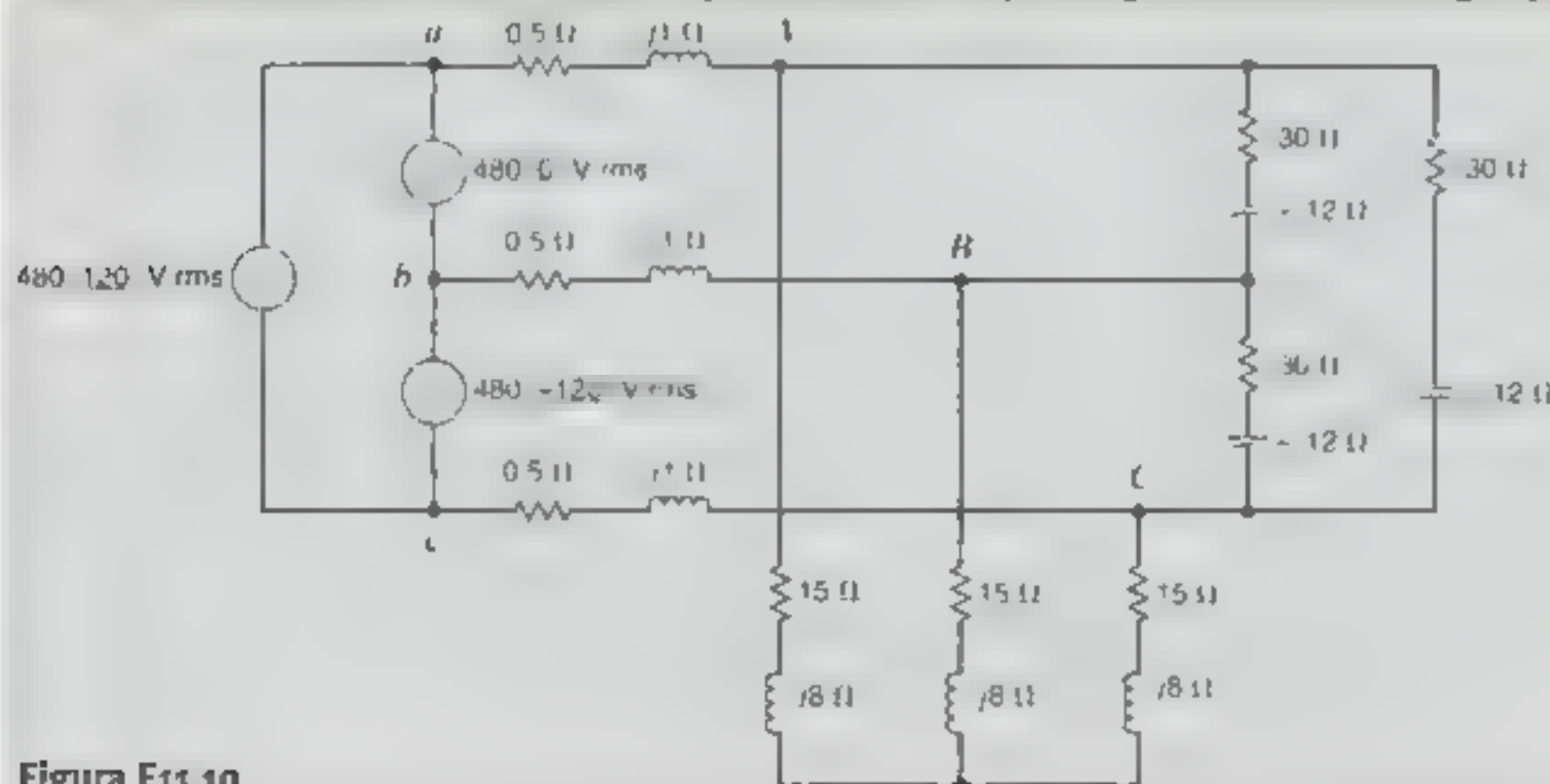
Avaliação do Aprendizado

E11.9 Uma fonte de tensão trifásica na sequência abc conectada em uma conexão estrela equilibrada fornece potência a uma carga conectada na configuração delta em equilíbrio. A corrente de linha para a fase a é $I_{LA} = 12 \angle 40^\circ$ A rms. Determine as correntes de fase na carga conectada na configuração delta.

RESPOSTAS:

$$\begin{aligned} I_{AB} &= 6,93 \angle 70^\circ \text{ A rms;} \\ I_{BC} &= 6,93 \angle -50^\circ \text{ A rms;} \\ I_{CA} &= 6,93 \angle 170^\circ \text{ A rms.} \end{aligned}$$

E11.10 Determine as correntes de linha e a potência absorvida pela carga conectada na configuração delta mostrada na Fig. E11.10.



RESPOSTAS:

$$\begin{aligned} I_{LA} &= 35,76 \angle -34,74^\circ \text{ A rms;} \\ I_{LB} &= 35,76 \angle -154,74^\circ \text{ A rms;} \\ I_{LC} &= 35,76 \angle 85,26^\circ \text{ A rms;} \\ &17,29 - j6,92 \text{ kVA} \end{aligned}$$

Figura E11.10

11.4 Relações de Potência

Se a carga for conectada na configuração estrela ou na configuração delta, a potência real e reativa por fase será

$$\begin{aligned} P_f &= V_f I_f \cos \theta \\ Q_f &= V_f I_f \sin \theta \end{aligned} \quad 11.25$$

em que θ é o ângulo entre a tensão de fase e a corrente de linha. Para um sistema conectado em estrela, $I_f = I_L$ e $V_f = V_L/\sqrt{3}$ e, para um sistema conectado em delta, $I_f = I_L/\sqrt{3}$ e $V_f = V_L$. Portanto,

$$\begin{aligned} P_f &= \frac{V_L I_L}{\sqrt{3}} \cos \theta \\ Q_f &= \frac{V_L I_L}{\sqrt{3}} \sin \theta \end{aligned} \quad 11.26$$

As potências real e reativa totais para todas as três fases serão, assim,

$$\begin{aligned} P_T &= 3 P_f = \sqrt{3} V_L I_L \cos \theta \\ Q_T &= 3 Q_f = \sqrt{3} V_L I_L \sin \theta \end{aligned} \quad 11.27$$

e, portanto, a intensidade da potência complexa (potência aparente) será

$$\begin{aligned} S_T &= \sqrt{P_T^2 + Q_T^2} \\ &= \sqrt{3} V_L I_L \end{aligned}$$

e

$$S_T = 0$$

EXEMPLO 11.5

Um sistema trifásico estrela-delta em equilíbrio possui uma tensão de linha de 208 V rms. A potência real total absorvida pela carga é de 1200 W. Se o ângulo do fator de potência da carga é de 20° em atraso, determine a intensidade da corrente de linha e o valor da impedância da carga por fase na configuração em delta.

SOLUÇÃO

A corrente de linha pode ser obtida pela Eq. (11.26). Uma vez que a potência real por fase é de 400 W, tem-se

$$\begin{aligned} 400 &= \frac{208 I_L}{\sqrt{3}} \cos 20^\circ \\ I_L &= 3,54 \text{ A rms} \end{aligned}$$

A intensidade da corrente em cada ramo da carga conectada na configuração em delta é

$$\begin{aligned} I_\Delta &= \frac{I_L}{\sqrt{3}} \\ &= 2,05 \text{ A rms} \end{aligned}$$

Portanto, o valor da impedância em delta em cada fase da carga é

$$\begin{aligned} Z_\Delta &= \frac{V_f}{I_\Delta} \\ &= \frac{208}{2,05} \\ &= 101,46 \Omega \end{aligned}$$

Sendo o ângulo do fator de potência igual a 20° em atraso, a impedância da carga será

$$\begin{aligned} Z_\Delta &= 101,46 \angle 20^\circ \\ &= 95,34 + j34,70 \Omega \end{aligned}$$

EXEMPLO 11.6

Deseja-se determinar as potências real e reativa por fase na carga, e a potência real total, reativa e complexa na fonte do circuito do Exemplo 11.2.

SOLUÇÃO

Com base nos dados apresentados no Exemplo 11.2, a potência complexa por fase na carga vale

$$\begin{aligned} S_{\text{carga}} &= VI^* \\ &= (113,15 \angle -1,08^\circ)(5,06 \angle 27,65^\circ) \\ &= 572,54 \angle 26,57^\circ \\ &= 512,07 + j256,09 \text{ VA} \end{aligned}$$

Portanto, as potências real e reativa por fase na carga são 512,07 W e 256,09 var, respectivamente.

A potência complexa por fase na fonte é

$$\begin{aligned} S_{\text{fonte}} &= VI^* \\ &= (120 \angle 0^\circ)(5,06 \angle 27,65^\circ) \\ &= 607,2 \angle 27,65^\circ \\ &= 537,86 + j281,78 \text{ VA} \end{aligned}$$

Portanto, a potência total real, a potência reativa e a potência aparente na fonte são, respectivamente, 1613,6 W, 845,2 var e 1821,6 VA.

EXEMPLO 11.7

Uma fonte trifásica em equilíbrio alimenta três cargas conforme descrito a seguir:

- Carga 1: 24 kW com fator de potência de 0,6 em atraso
- Carga 2: 10 kW com fator de potência unitário
- Carga 3: 12 kVA com fator de potência de 0,8 em avanço

Se a tensão de linha na carga é de 208 V rms a 60 Hz, determine a corrente de linha e o fator de potência combinado das cargas.

SOLUÇÃO

Utilizando os dados fornecidos obtém-se

$$S_1 = 24.000 + j32.000$$

$$S_2 = 10.000 + j0$$

$$S_3 = 12.000 \angle -36,9^\circ = 9600 - j7200$$

[atenção]

A soma das três potências complexas:

$$S_{\text{comp}} = S_1 + S_2 + S_3$$

Portanto,

$$S_{\text{comp}} = 43.600 + j24.800 \\ = 50.160 \angle 29,63^\circ \text{ VA}$$

$$I_L = \frac{S_{\text{comp}}}{\sqrt{3} V_L} \\ = \frac{50.160}{208 \sqrt{3}}$$

$$I_L = 139,23 \text{ A rms}$$

e o fator de potência combinado será

$$\text{fp}_{\text{comp}} = \cos 29,63^\circ \\ = 0,869 \text{ em atraso}$$

EXEMPLO 11.8

Considerando o sistema trifásico do Exemplo 11.7, determine a tensão de linha e o fator de potência na fonte considerando uma impedância de linha $Z_{\text{linha}} = 0,05 + j0,02 \Omega$.

SOLUÇÃO

A potência complexa absorvida pela impedância de linha é

$$S_{\text{linha}} = 3(R_{\text{linha}} I_L^2 + jX_{\text{linha}} I_L^2) \\ = 2908 + j1163 \text{ VA}$$

Portanto, a potência complexa fornecida pela fonte vale

$$S_F = S_{\text{comp}} + S_{\text{linha}} \\ 43.600 + j24.800 + 2908 + j1163 \\ = 53.264 \angle 29,17^\circ \text{ VA}$$

[atenção]

Lembre-se de que a potência complexa para todas as três linhas é

$$S_{\text{linha}} = 3I_L^2 Z_{\text{linha}}$$

Logo, a tensão de linha na fonte será

$$V_L = \frac{S_F}{\sqrt{3} I_L} \\ = 220,87 \text{ V rms}$$

e o fator de potência na fonte valerá

$$\text{fp}_F = \cos 29,17^\circ \\ = 0,873 \text{ em atraso}$$

EXEMPLO 11.9

Considere o sistema trifásico mostrado na Fig. 11.20. Calcule a potência real perdida pela resistência da linha para uma tensão de linha $V_L = 500 \text{ kV rms}$ e 50 kV rms .

SOLUÇÃO

Para $V_L = 500 \text{ kV rms}$,

$$I_L = \frac{S_{\text{comp}}}{\sqrt{3} V_L} = \frac{10000}{\sqrt{3}(500)} = 11,55 \text{ kA rms}$$

e as perdas de potência real na linha serão

$$P_{\text{linha}} = 3I_L^2 R_{\text{linha}} = 3(11,55)^2(0,1) = 0,4 \text{ MW}$$

Para $V_L = 50 \text{ kV rms}$,

$$I_L = \frac{10000}{\sqrt{3}(50)} = 11,55 \text{ kA rms}$$

e

$$P_{\text{linha}} = 3I_L^2 R_{\text{linha}} = 3(11,55)^2(0,1) = 40 \text{ MW.}$$

As perdas na linha a 50 kV rms são 100 vezes maiores do que as perdas a 500 kV rms . Esse exemplo ilustra o fato de a transmissão de potência a tensões mais altas ser mais eficiente devido à redução nas perdas. O transformador discutido no Capítulo 10 permite que o nível da tensão nos sistemas CA seja facilmente alterado. Os geradores elétricos das plantas de potência geram tensões de linha da ordem de 25 kV. Os transformadores são utilizados para aumentar essa tensão para transmissão desde as plantas até os centros de cargas.

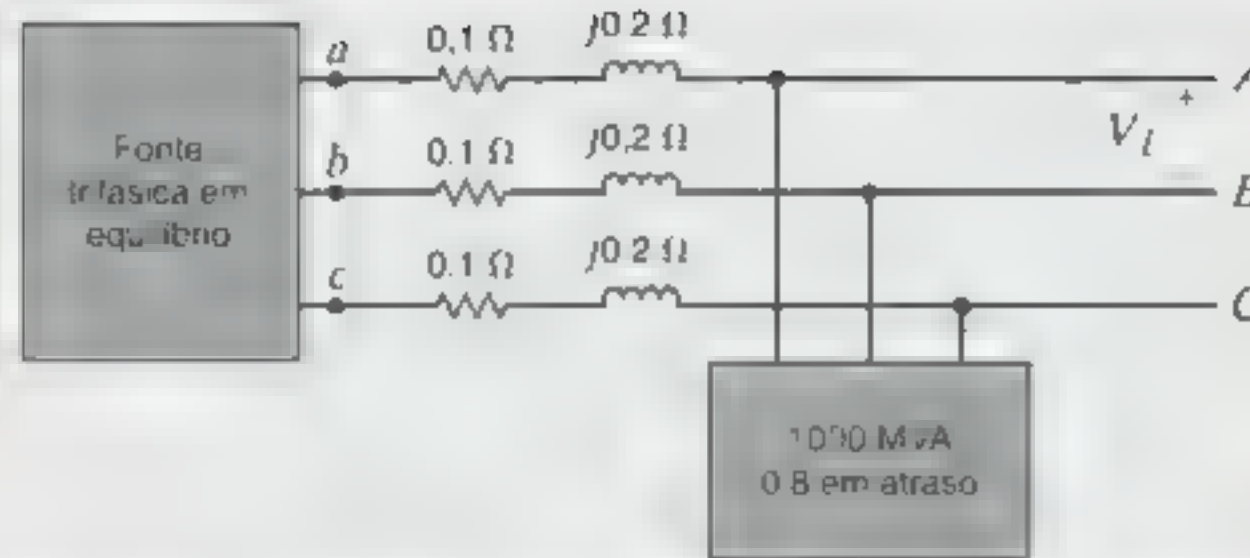


Figura 11.20 Sistema trifásico para o cálculo das perdas em linhas referentes a diferentes tensões na carga.

Avaliação do Aprendizado

E11.11 Um sistema trifásico estrela-estrela em equilíbrio possui uma tensão de linha de 208 V rms. A potência real total absorvida pela carga é de 12 kW a um fator de potência de 0,8 em atraso. Determine a impedância da carga por fase.

RESPOSTA:
 $Z = 2,88 / 36,87^\circ \Omega$.

E11.12 Para o sistema estrela-estrela em equilíbrio descrito no problema de Avaliação do Aprendizado E11.3, determine as potências real e reativa, e a potência complexa tanto para a fonte quanto para a carga.

RESPOSTAS:
 $S_{\text{carga}} = 1186,77 + j444,66 \text{ VA}$ e
 $S_{\text{fonte}} = 1335,65 + j593,55 \text{ VA}$.

E11.13 Uma linha de 480 V rms alimenta duas cargas trifásicas em equilíbrio. Considerando que as duas cargas sejam distribuídas como

- Carga 1: 5 kVA com fator de potência de 0,8 em atraso
- Carga 2: 10 kVA com fator de potência de 0,9 em atraso.

determine a intensidade da corrente de linha oriunda da fonte de 480 V rms.

RESPOSTA:
 $I_L = 17,97 \text{ A rms}$.

E11.14 Se a tensão de linha nas cargas do circuito mostrado na Fig. E11.14 for de 480 V rms, determine a tensão de linha e o fator de potência na fonte.

RESPOSTAS:
 $V_L = 501,7 \text{ V rms}$ e
 $\text{fp} = 0,9568$ em atraso.

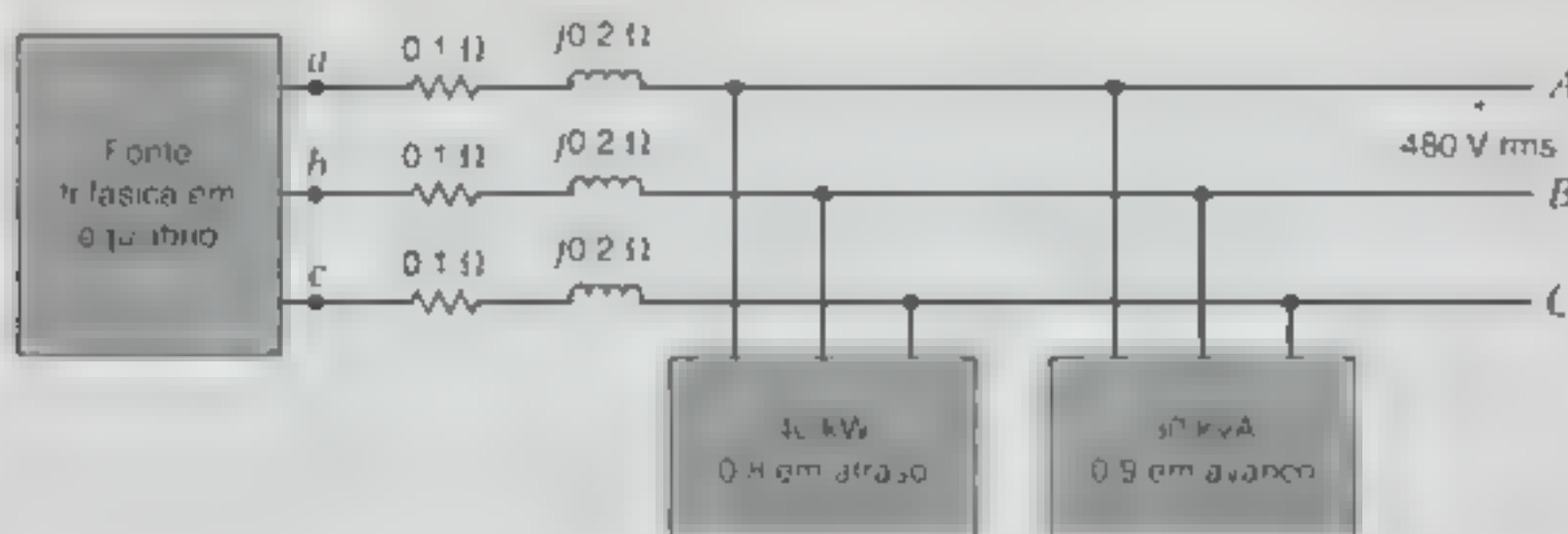


Figura E11.14

11.5 Correção do Fator de Potência

Na Seção 9.7 foi mostrada uma técnica simples para se elevar o fator de potência de uma carga. O procedimento envolveu a seleção criteriosa de um capacitor e sua colocação em paralelo com a carga. Em um sistema trifásico em equilíbrio, a correção do fator de potência é realizada exatamente do mesmo modo. É importante notar que o valor de S_{cap} especificado na Eq. (9.37)

é obtido por três capacitores e, além disso, V_{rms} na equação é a tensão entre os terminais de cada capacitor. O exemplo a seguir ilustra a técnica.

[atenção]

Principais precauções para a correção do fator de potência trifásico.
 Deve-se fazer a distinção entre as potências P_L e P_T .
 Deve-se utilizar a tensão V rms apropriada para as conexões Y e Δ .

EXEMPLO 11.10

No sistema trifásico em equilíbrio mostrado na Fig. 11.21, a tensão de linha vale 34,5 kV rms a 60 Hz. Deseja-se obter os valores dos capacitores C de forma que a carga total tenha um fator de potência de 0,94 em avanço.

SOLUÇÃO

Seguindo-se o desenvolvimento apresentado na Seção 9.7 para a correção do fator de potência de redes monofásicas, obtém-se

$$\begin{aligned} S_{\text{original}} &= 24 / \cos^{-1} 0,78 \text{ MVA} \\ &= 18,72 + j15,02 \text{ MVA} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \theta_{\text{nov}} &= -\cos^{-1} 0,94 \\ &= -19,95^\circ \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} S_{\text{nov}} &= 18,72 + j18,72 \tan(-19,95^\circ) \\ &= 18,72 - j6,80 \text{ MVA} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} S_{\text{cap}} &= S_{\text{nov}} - S_{\text{original}} \\ &= -j21,82 \text{ MVA} \end{aligned}$$

[atenção]

A potência reativa a ser fornecida pela capacitância C é obtida pela expressão

$$jQ_{\text{cap}} = j\omega C V_{\text{rms}}^2$$

A tensão de fase para a conexão estrela (Y) vale

$$V_Y = \frac{34,5 \text{ kV}}{\sqrt{3}}$$

Portanto,

$$-j\omega C V_{\text{rms}}^2 = -j21,82 \text{ MVA}$$

e, como a tensão de linha vale 34,5 kV rms, tem-se

$$(377) \left(\frac{34,5 \text{ kV}}{\sqrt{3}} \right)^2 C = \frac{21,82}{3} \text{ M}$$

Logo,

$$C = 48,6 \mu\text{F}$$

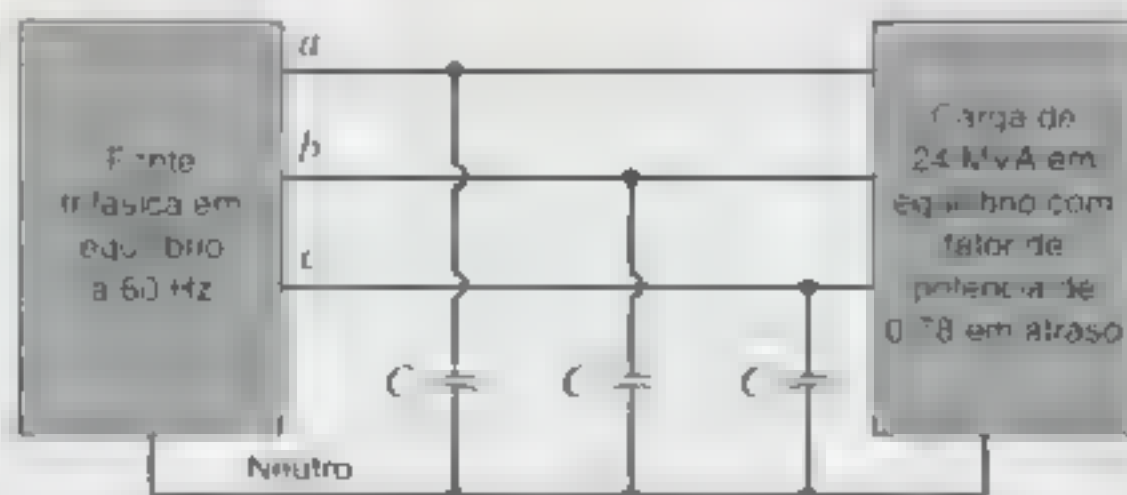


Figura 11.21 Rede utilizada no Exemplo 11.10.

Avaliação do Aprendizado

E11.15 Determine o valor da capacitância C no Exemplo 11.10 de modo que a carga apresente um fator de potência de 0,90 em atraso.

RESPOSTA: $C = 13,26 \mu\text{F}$.

E11.16 Determine o valor da capacitância C do circuito mostrado na Fig. E11.16 de modo que o fator de potência da fonte seja de 0,98 em atraso.

RESPOSTA: $C = 14 \mu\text{F}$.

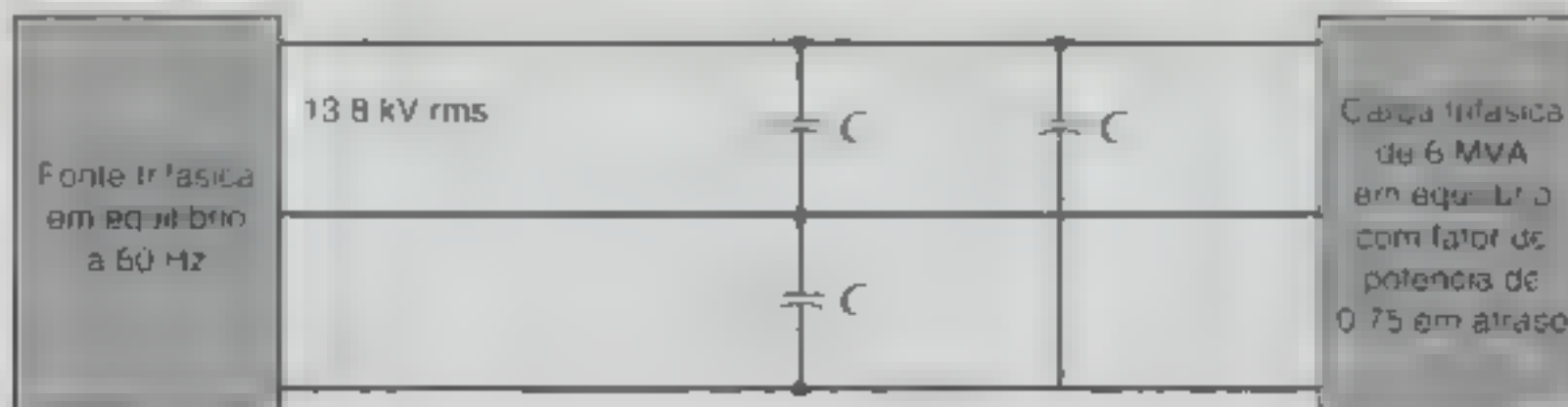


Figura E11.16

Finalmente, lembre-se de que toda discussão deste capítulo foi dedicada a sistemas em equilíbrio (balanceados). Entretanto, é extremamente importante destacar que nos sistemas

trifásicos desbalanceados o problema é bem mais complicado devido ao acoplamento mútuo da indutância entre as fases nos equipamentos de potência.

11.6 Exemplos de Aplicação

O primeiro dos três exemplos a seguir ilustra a maneira pela qual o fluxo de potência é medido quando alguns equipamentos

estão interconectados, respondendo a questão de quem está fornecendo potência a quem. O último exemplo mostra o procedimento real através do qual os capacitores são especificados pelo fabricante para a correção do fator de potência.

EXEMPLO DE APLICAÇÃO 11.11

Dois sistemas trifásicos em equilíbrio, X e Y , são interconectados por linhas cuja impedância $Z_{\text{linha}} = 1 + j2 \Omega$. As tensões nas linhas são $V_{ab} = 12 \angle 0^\circ \text{ kV rms}$ e $V_{AB} = 12 \angle 5^\circ \text{ kV rms}$ conforme mostrado na Fig. 11.22a. Deseja-se determinar qual dos sistemas é a fonte e qual é a carga, e a potência média fornecida pela fonte e absorvida pela carga.

SOLUÇÃO

Ao se construir o circuito do sistema para cada fase, conforme mostrado na Fig. 11.22b, a análise será essencialmente a mesma realizada no Exemplo 9.12.

A rede mostrada na Fig. 11.22b indica que

$$\begin{aligned} I_{aA} &= \frac{V_{an} - V_{AN}}{Z_{\text{linha}}} \\ &= \frac{\frac{12 \angle 0^\circ}{\sqrt{3}} - \frac{12 \angle 5^\circ}{\sqrt{3}}}{1 + j2} \\ &= \frac{6.928 \angle -30^\circ - 6.928 \angle -25^\circ}{1 + j2} \\ &= 270.30 \angle -180.93^\circ \text{ A rms} \end{aligned}$$

A potência média absorvida pelo sistema Y é

$$\begin{aligned} P_Y &= \sqrt{3} V_{AB} I_{aA} \cos(\theta_{V_{AB}} - \theta_{I_{aA}}) \\ &= \sqrt{3} (12.000) (270.30) \cos(-25^\circ + 180.93^\circ) \\ &= -5.130 \text{ MW} \end{aligned}$$

Note que o sistema Y não é a carga e sim a fonte, e fornece uma potência de 5,130 MW.

O sistema X absorve a seguinte potência média:

$$P_X = \sqrt{3} V_{ab} I_{aA} \cos(\theta_{V_{ab}} - \theta_{I_{aA}})$$

em que

$$I_{aA} = -I_{Aa} = 270.30 \angle -0.93^\circ \text{ A rms}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} P_X &= \sqrt{3} (12.000) (270.30) \cos(-30^\circ + 0.93^\circ) \\ &= 4.910 \text{ MW} \end{aligned}$$

logo, o sistema X é a carga.

A diferença entre a potência fornecida pelo sistema Y e a potência absorvida pelo sistema X , será, portanto, a potência absorvida pela resistência das três linhas.

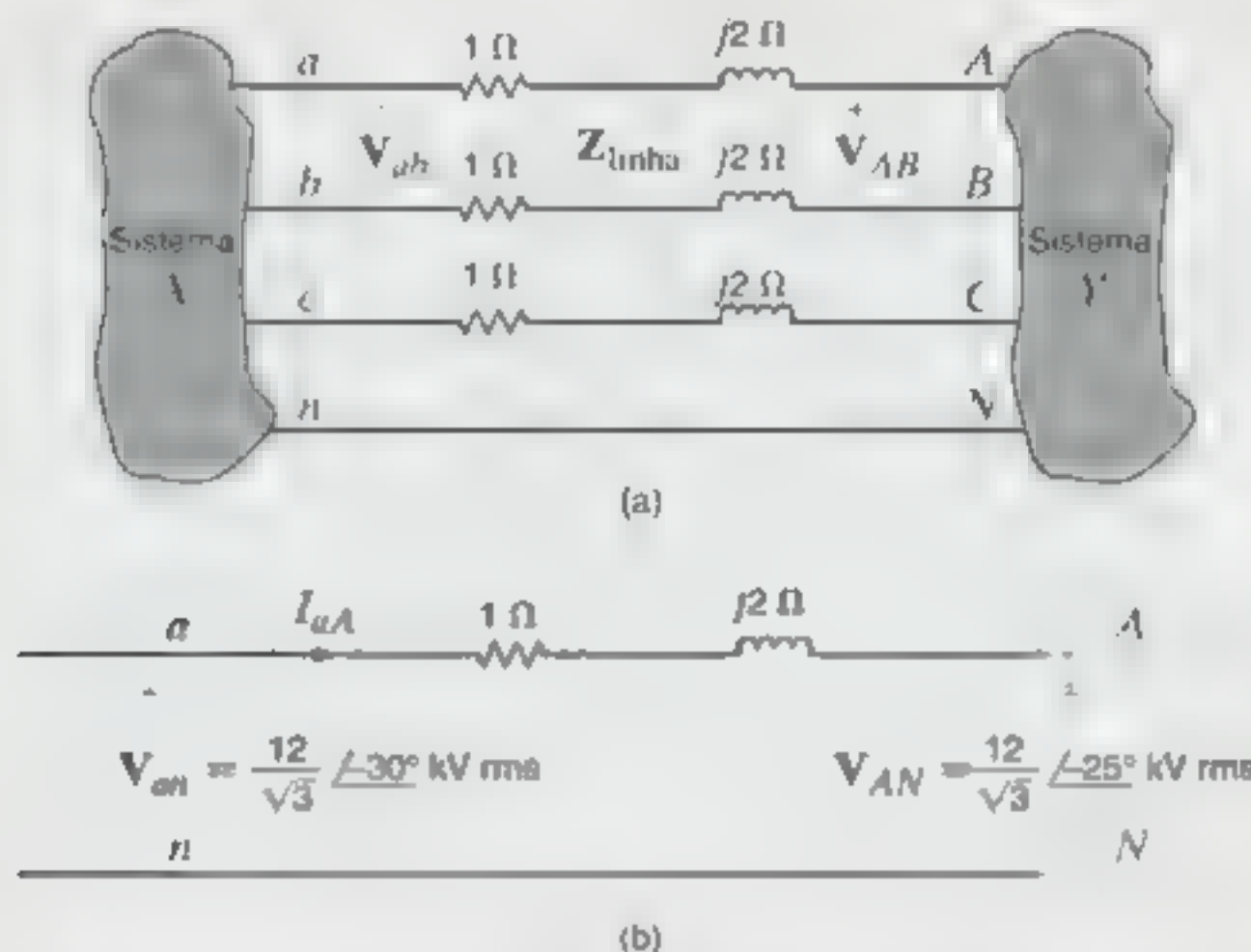


Figura 11.22 Circuitos utilizados no Exemplo 11.11: (a) sistema trifásico original, (b) circuito por fase.

Esse exemplo ilustra um ponto interessante. Note que a diferença de fase entre os dois terminais da linha de potência determina o sentido do fluxo de potência. Como as diversas companhias de fornecimento de energia em todo o território de um país estão integradas formando a malha de distribuição de energia do país, a diferença de fase entre as linhas de trans-

missão interconectadas reflete na maneira pela qual a energia é transferida entre companhias distribuidoras.

Os capacitores utilizados na correção do fator de potência são geralmente especificados pelos fabricantes em unidades de vars, e não em farads. Naturalmente, o fornecedor deve também especificar a tensão de projeto na qual o capacitor deve operar,

e a frequência de 60 Hz deve ser assumida. A relação entre a capacitância e a potência nominal em vars é

$$Q_R = \frac{V^2}{Z_C}$$

em que Q_R é a potência nominal em vars, V é a tensão nominal e Z_C é a impedância do capacitor a 60 Hz. Assim, a uma tensão de 500 V, um capacitor de 600 vars possui uma capacitância de

$$C = \frac{Q_R}{\omega V^2} = \frac{600}{(377)(500)^2}$$

■

$$C = 6,37 \mu\text{F}$$

e pode ser utilizado em qualquer aplicação em que a tensão entre seus terminais não exceda o valor limite de 500 V.

EXEMPLO DE APLICAÇÃO 11.12

Examina-se agora, de forma genérica, o aumento de custo da correção do fator de potência; especificamente, qual deve ser a capacitância de modo a se melhorar o fator de potência de uma quantidade fixa, por exemplo, de 0,01?

SOLUÇÃO

A resposta a essa questão depende, principalmente, de dois fatores: da potência aparente e do fator de potência original antes da correção. Essa dependência pode ser ilustrada pelo desenvolvimento das equações para os fatores de potência original e novo, e seus correspondentes ângulos de fator de potência. Sabe-se que

$$f_{p_{\text{original}}} = \cos(\theta_{\text{original}}) \quad \tan(\theta_{\text{original}}) = \frac{Q_{\text{original}}}{P} \quad 11.28$$

$$f_{p_{\text{novo}}} = \cos(\theta_{\text{novo}}) \quad \tan(\theta_{\text{novo}}) = \frac{Q_{\text{original}} - Q_C}{P}$$

A diferença nos fatores de potência é de 0,01, portanto,

$$f_{p_{\text{novo}}} - f_{p_{\text{original}}} = 0,01 \quad 11.29$$

Resolvendo-se essas equações para a relação Q_C/P , uma vez que a potência reativa e a capacitância são proporcionais entre si, tem-se a potência reativa por watt, necessária para melhorar o fator de potência em 0,01. Utilizando a Eq. (11.28), pode-se escrever

$$\begin{aligned} \frac{Q_C}{P} &= \frac{Q_{\text{original}}}{P} - \tan(\theta_{\text{novo}}) = \tan(\theta_{\text{original}}) - \tan(\theta_{\text{novo}}) \\ &= \tan[\arccos(f_{p_{\text{original}}})] - \tan[\arccos(f_{p_{\text{original}}} + 0,01)] \end{aligned} \quad 11.30$$

Uma representação gráfica da Eq. (11.30), mostrada na Fig. 11.23, apresenta algumas implicações interessantes. Primeiro, a melhora de 0,01 requerida para um fator de potência é mínima quando o fator de potência original é próximo a 0,81. Assim, uma melhoria incremental naquela região é menos dispendiosa. Segundo, quando o fator de potência original tende à unidade, as variações no fator de potência são mais onerosas para serem implementadas.

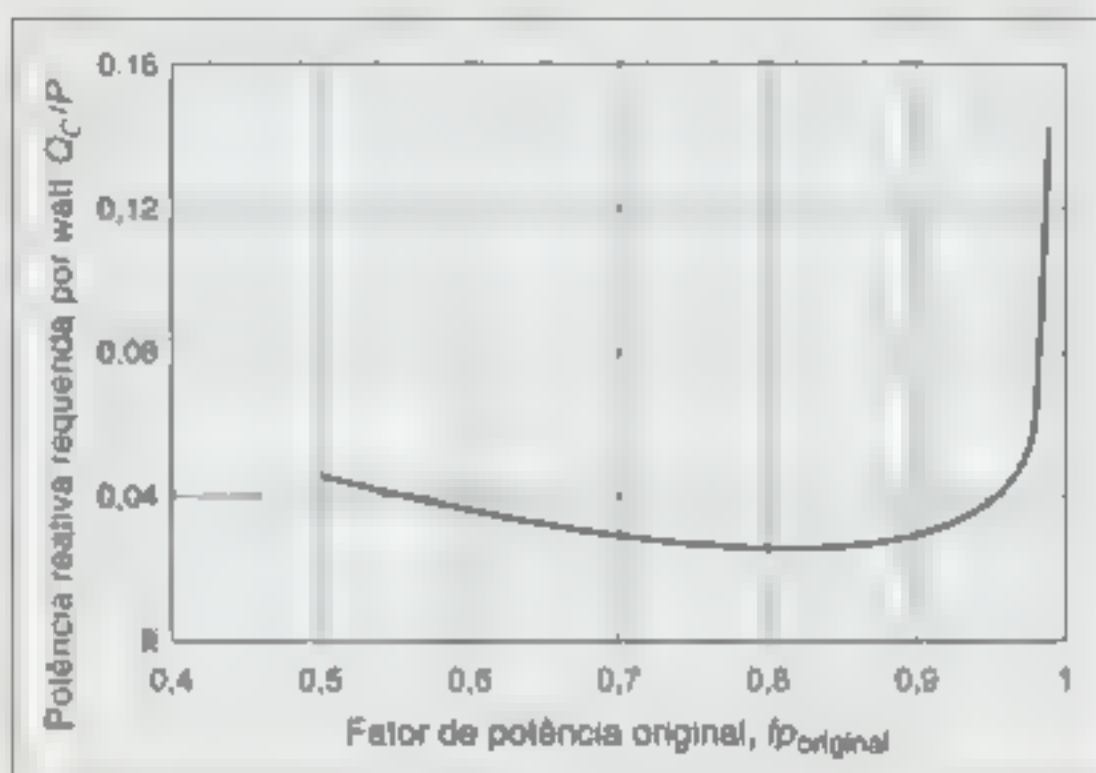


Figura 11.23 Representação gráfica da potência reativa requerida por watt, necessária para melhorar o fator de potência original em 0,01.

EXEMPLO DE APLICAÇÃO 11.13

A Tabela 11.2 lista os valores nominais de tensão e potência para três capacitores de correção do fator de potência. Pode-se determinar quais deles, se é que algum, podem ser empregados no Exemplo 11.10.

TABELA 11.2 Tensões e potências nominais para os capacitores utilizados na correção do fator de potência

Capacitor	Tensão nominal (V)	Potência nominal (vars)
1	10,0	4,0
2	50,0	25,0
3	20,0	7,5

SOLUÇÃO

Pela Fig. 11.21, pode-se perceber que a tensão entre os terminais dos capacitores é a tensão entre a linha e o neutro, que vale

$$V_{\text{linha}} = \frac{34\,500}{\sqrt{3}}$$

ou

$$V_{\text{linha}} = 19,9 \text{ kV}$$

Portanto, apenas os capacitores com tensões limites maiores ou iguais a 19,9 kV podem ser utilizados nessa aplicação, o

que elimina o capacitor 1. Pode-se, agora, determinar a capacitância dos capacitores 2 e 3. Para o capacitor 2,

$$C_2 = \frac{Q}{\omega V^2} = \frac{25 \times 10^6}{(377)(50\,000)^2}$$

ou

$$C_2 = 26,53 \mu\text{F}$$

que é muito menor do que os $48,6 \mu\text{F}$ necessários. A capacitância do capacitor 3 é

$$C_3 = \frac{Q}{\omega V^2} = \frac{7,5 \times 10^6}{(377)(20\,000)^2}$$

ou

$$C_3 = 49,7 \mu\text{F}$$

que é 2,5% maior que o valor necessário. Obviamente, o capacitor 3 é a melhor escolha.

11.7 Exemplos de Projeto

No primeiro exemplo desta seção, será analisada a seleção tanto do condutor quanto do capacitor para o caso de um problema prático de correção do fator de potência.

EXEMPLO DE PROJETO 11.14

Duas lojas estão instaladas em uma linha bastante solicitada, conforme mostrado na Fig. 11.24. As lojas são alimentadas por uma fonte trifásica de 60 Hz em equilíbrio cuja tensão de linha é de 13,8 kV rms. A linha de potência é constituída por condutores #4ACSR (cabo de aço com reforço de alumínio) cuja corrente nominal é de 170 A rms.

Deseja-se instalar uma terceira loja na linha, conforme mostrado na Fig. 11.24. Determine (1) se o condutor #4ACSR permite a instalação dessa terceira loja, e (2) o valor de capacitores, conectados em estrela, necessários para alterar o fator de potência global das três lojas para 0,92 em atraso.

SOLUÇÃO

1. A potência complexa para cada uma das três cargas é

$$S_1 = 700 / 36,9^\circ = 560 + j420 \text{ kVA}$$

$$S_2 = 1000 / 60^\circ = 500 + j866 \text{ kVA}$$

$$S_3 = 800 / 25,8^\circ = 720 + j349 \text{ kVA}$$

Portanto, a potência complexa total é

$$\begin{aligned} S_T &= S_1 + S_2 + S_3 \\ &= 1780 + j1635 \\ &= 2417 / 42,57^\circ \text{ kVA} \end{aligned}$$

Uma vez que

$$S_T = \sqrt{3} V_L I_L$$

a corrente na linha vale

$$\begin{aligned} I_L &= \frac{(2417)(10^3)}{\sqrt{3} (13,8)(10^3)} \\ &= 101,1 \text{ A rms} \end{aligned}$$

Sendo esse valor bem inferior ao valor nominal de 170 A rms, o condutor está dimensionado apropriadamente e

pode, com segurança, atender às necessidades da terceira loja.

2. O fator de potência combinado para as três cargas é obtido pela expressão

$$\cos \theta = \text{fp} = \frac{1780}{2417} = 0,7365 \text{ em atraso}$$

Incorporando-se capacitores, deseja-se alterar esse fator de potência para 0,92 em atraso. Esse novo fator de potência corresponde a um ângulo θ_{novo} de $23,07^\circ$. Portanto, a nova potência complexa vale

$$\begin{aligned} S_{\text{novo}} &= 1780 + j1780 \tan(23,07^\circ) \\ &= 1780 + j758,28 \text{ kVA} \end{aligned}$$

Conforme ilustrado na Fig. 9.17, a diferença entre S_{novo} e S_T é a parcela fornecida pelo capacitor puramente reativo e, portanto,

$$S_{\text{cap}} = jQ_C = S_{\text{novo}} - S_T$$

■

$$\begin{aligned} jQ_C &= j(758,28 - 1635) \\ &= j876,72 \text{ kVA} \end{aligned}$$

Assim,

$$j\omega C V_{\text{rms}}^2 = \frac{j876,72 \text{ k}}{3}$$

e

$$377 \left(\frac{13,8 \times 10^3}{\sqrt{3}} \right)^2 C = \frac{876,72}{3} \times 10^3$$

Portanto,

$$C = 12,2 \mu\text{F}$$

Logo, três capacitores com esse valor, conectados em estrela na carga, fornecerão um fator de potência total de 0,92 em atraso.



Figura 11.24 Circuito utilizado no Exemplo 11.14.

EXEMPLO DE PROJETO 11.15

Os circuitos de controle utilizados nos equipamentos trifásicos de alta tensão geralmente operam a tensões bem menores. Por exemplo, uma fonte de potência de 10 kW pode operar com uma tensão de linha de 480 V rms, enquanto seu circuito de controle é alimentado por uma fonte de potência CC interna a ± 5 V. As tensões mais baixas não são apenas mais seguras em sua operação, mas também permitem aos engenheiros incorporar facilmente op-amps e a eletrônica digital no sistema de controle. É de grande conveniência testar o circuito de controle sem ter que conectá-lo diretamente a uma fonte trifásica de 480 V rms. Portanto, projeta-se agora um emulador trifásico de baixa potência que simule um sistema trifásico à baixa tensão e baixo custo, e permita seu uso em uma bancada de testes de circuitos de controle. O emulador deve gerar o faseamento apropriado, porém, com uma magnitude que seja ajustável entre 1 e 4 volts de pico.

SOLUÇÃO

O projeto, mostrado na Fig. 11.25, será constituído de três partes: um ajuste de magnitude, um gerador do ângulo de fase e um gerador de fase B. A entrada CA é uma onda senoidal de 60 Hz com pico aproximado de 5 V. Essa tensão pode ser gerada a partir de uma tomada de parede de 120 V rms utilizando um transformador redutor com uma razão de espiras de

$$n = \frac{120\sqrt{2}}{5} = 34:1$$

O circuito potenciômetro mostrado na Fig. 11.26a pode ser utilizado de modo a permitir o ajuste da magnitude. Os resistores R_1 e R_2 estabelecem os limites da tensão entre 1 e 4 V. Pode-se utilizar uma simples divisão de tensão para determinar as relações entre R_1 , R_2 e R_p . Quando o contato ocorre na região inferior do potenciômetro mostrado na Fig. 11.26a, tem-se

$$V = 1 = 5 \left[\frac{R_2}{R_1 + R_2 + R_p} \right] \Rightarrow R_1 + R_p = 4R_2 \quad 11.31$$

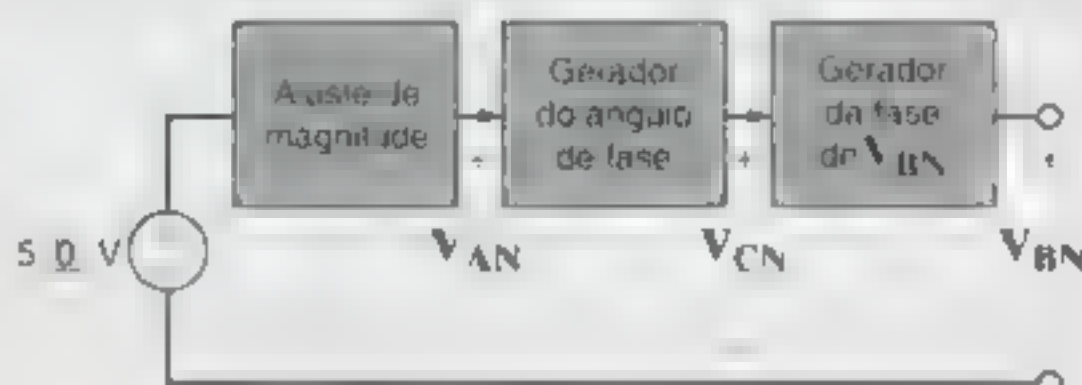


Figura 11.25 Diagrama de blocos de um emulador trifásico.

e quando o contato ocorre na região superior,

$$V_1 = 4 = 5 \left[\frac{R_2 + R_p}{R_1 + R_2 + R_p} \right] \Rightarrow R_2 + R_p = 4R_1 \quad 11.32$$

Manipulando-se as Eqs. (11.31) e (11.32), tem-se como requisito que $R_1 = R_2 = R_p/3$. Para que os valores desses resistores sejam determinados, deve-se simplesmente escolher um deles. Sabe-se que os resistores são comercializados em uma grande faixa de valores e em pequenos incrementos. Os potenciômetros, por outro lado, não. Os valores típicos dos potenciômetros são: 10, 20, 50, 100, 200, 500, ... 10 k, ... 100 k, 200 k, 500 k, ... até cerca de 10 M Ω . Como o potenciômetro oferece menos opções, será escolhido o valor de 10 k Ω , o que fornece $R_1 = R_2 = 3,3$ k Ω — um valor padronizado de resistência. A tensão V_1 será estabelecida como a tensão de fase V_{AN} .

Considera-se, em seguida, o gerador do ângulo de fase. Como os capacitores geralmente são fisicamente menores do que os indutores, será utilizada a simples rede RC mostrada na Fig. 11.26b para desviar a fase de V_1 . Estabelecido um ângulo de fase de 0° para V_1 , sabe-se que a fase de V_2 deve estar entre 0 e -90 graus. Infelizmente, necessita-se de um ângulo de fase de $+120^\circ$ para se gerar V_{CN} . Ao se gerar um ângulo de fase de -60° e inverter a onda senoidal resultante, será produzido um ângulo de fase equivalente de $+120^\circ$! A inversão pode ser realizada por uma configuração de op-amp inversor. Para produzir um ângulo de fase de -60° em V_2 , é necessário que

$$\omega CR_1 = \tan(60^\circ) = 1,732 \Rightarrow R_1 C = 4,59 \times 10^{-3}$$

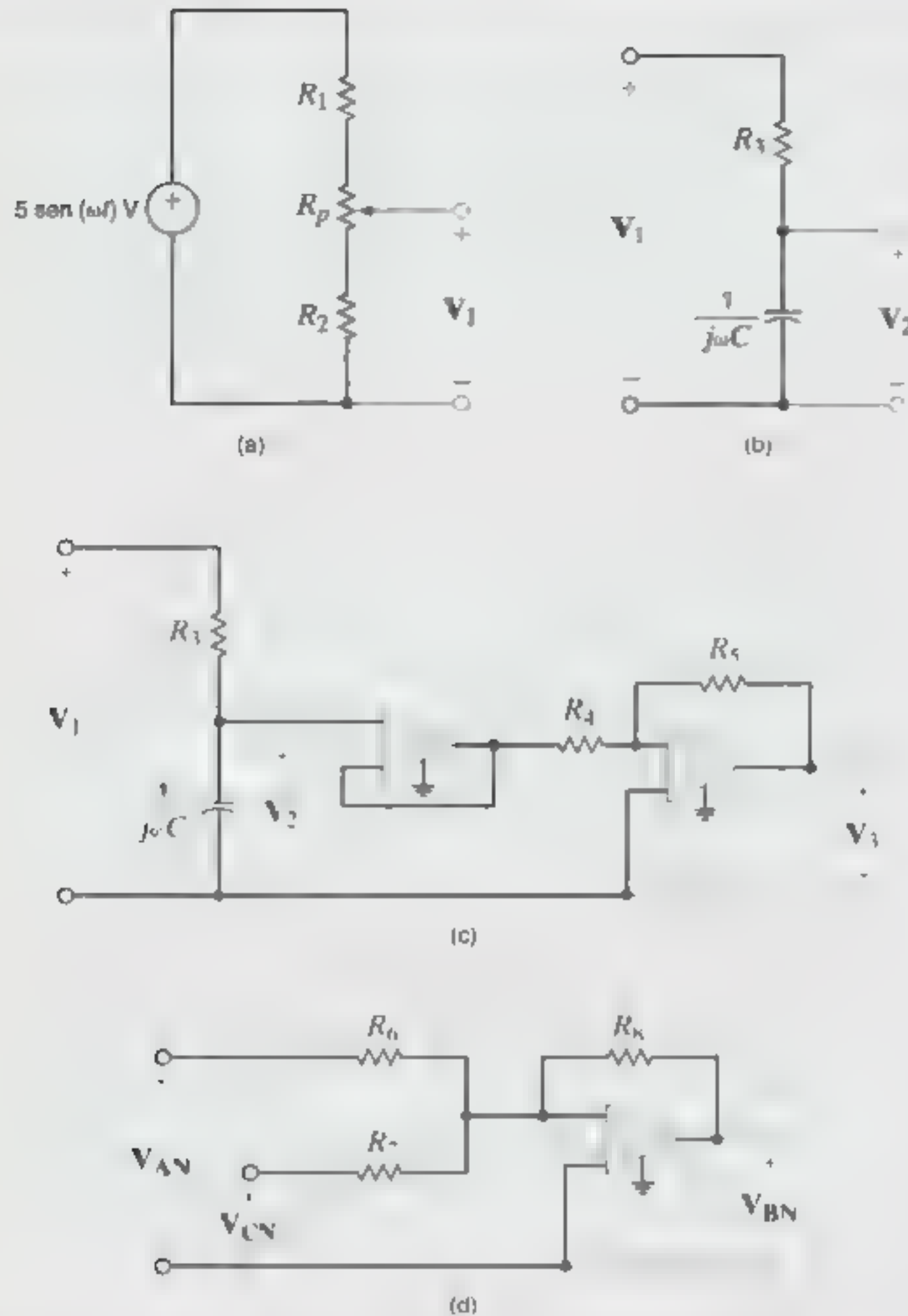


Figura 11.26 Subcircuitos do emulador trifásico: (a) subcircuito de ajuste da magnitude, (b) região R - C do gerador do ângulo de fase, (c) gerador do ângulo de fase completo e (d) gerador da fase de V_{BN} .

Será escolhido um valor padronizado de 120 nF para C , o qual conduz a uma resistência $R_1 = 38,3 \text{ k}\Omega$. Esse é um valor padronizado a uma tolerância de 1% . Utilizando esses valores, V_2 será

$$V_2 = V \left[\frac{1}{1 + j\omega C R_1} \right] = \frac{V}{2,0} \quad (6) \quad 11.33$$

Pela Eq. (11.33) nota-se que o inversor também deve apresentar um ganho de 2 para restabelecer a magnitude de V_2 . O circuito gerador do ângulo de fase completo é mostrado na Fig. 11.26c, em que os resistores $R_4 = 10 \text{ k}\Omega$ e $R_5 = 20 \text{ k}\Omega$ foram escolhidos de modo a produzir o ganho necessário. Agora, a tensão V_3 é utilizada para representar V_{CN} . O ganho unitário adicional do estágio de armazenamento isola a resistência as-

sociada ao inversor do gerador de fase R - C . Desse modo o inversor não alterará o ângulo de fase.

Finalmente, deve-se gerar a tensão de fase V_{BN} . Como a soma das tensões trifásicas é nula, pode-se escrever

$$V_{BN} = -V_{AN} - V_{CN}$$

O simples op-amp somador mostrado na Fig. 11.26d realizará essa operação matemática. Para o somador,

$$V_{BN} = \left[\frac{R_8}{R_6} \right] V_{AN} + \left[\frac{R_8}{R_7} \right] V_{CN}$$

É necessário que $R_6 = R_7 = R_8$. Como já se está utilizando alguns resistores de $10 \text{ k}\Omega$, utiliza-se mais três nessa etapa. O circuito completo é mostrado na Fig. 11.27, em que mais um

ganho unitário de armazenamento foi adicionado no potenciômetro. Este ganho isola o gerador de ângulo de fase dos resistores de ajuste de magnitude.

Pode parecer que os op-amps foram utilizados muito liberadamente, sendo necessário um total de quatro para todo o circuito. Entretanto, a maioria dos fabricantes de op-amps distribui seus kits nas configurações simples (um único op-amp),

dupla (dois op-amps) e quádrupla (quatro op-amps). Utilizando um kit quádruplo, verifica-se que o circuito necessitará de exatamente um circuito integrado. Como observação final, deve-se lembrar que as tensões de suprimento dos op-amps devem ser superiores às tensões máximas de entrada ou de saída nos terminais dos op-amps, cujo valor é de 4 V. Portanto, serão especificadas fontes de +10 V.

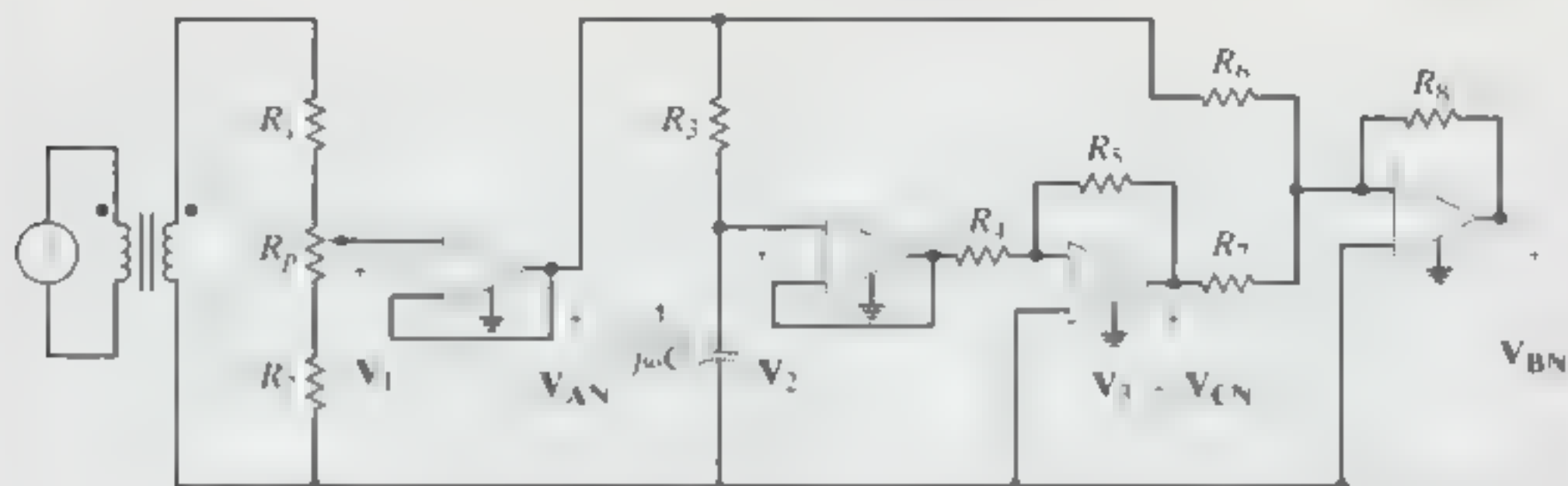


Figura 11.27 Emulador trifásico completo com magnitude de tensão variável.

RESUMO

- Uma importante vantagem do sistema trifásico em equilíbrio é que ele propicia uma distribuição de energia bastante uniforme.
- Devido à condição de equilíbrio, é possível analisar um circuito com base em cada uma de suas fases, o que conduz a uma significativa redução do esforço computacional para a solução.
- Uma fonte de tensão trifásica em equilíbrio possui três tensões senoidais de mesma amplitude e frequência, e cada tensão é defasada de 120° em relação às demais. A sequência de fase positiva para a fonte de tensão equilibrada é uma sequência em que V_{bn} está atrasada de 120° em relação a V_{an} e V_{cn} está atrasada em 120° em relação a V_{bn} .
- As relações entre as fontes conectadas nas configurações estrela e delta são mostradas na Tabela 11.1
- A terminologia utilizada nas redes trifásicas é mostrada na Tabela 11.3
- Nos sistemas em equilíbrio, a soma das tensões e a soma das correntes são nulas.

$$V_{an} + V_{bn} + V_{cn} = 0$$

$$I_a + I_b + I_c = 0 \quad (\text{sem corrente na linha neutra})$$

e

$$V_{ab} + V_{bc} + V_{ca} = 0$$

$$I_{ab} + I_{bc} + I_{ca} = 0$$

TABELA 11.3 Terminologia das redes trifásicas

GRANDEZA	CONFIGURAÇÃO ESTRELA	CONFIGURAÇÃO DELTA
Corrente de linha (I_L)		
I_a, I_b, I_c	Corrente de fase (I_f)	
Tensão entre linha e neutro (V)		
V_{an}, V_{bn}, V_{cn}	Tensão de fase (V_f)	
V_{ab}, V_{bc}, V_{ca}	Tensão entre linha e linha, fase e fase e de linha (V_L)	
	Tensão de fase (V_f)	
I_{ab}, I_{bc}, I_{ca}	Corrente de fase (I_f)	

- As etapas recomendadas para a solução de circuitos CA trifásicos em equilíbrio são as seguintes:
 1. Se a conexão fonte/carga não possui a configuração estrela-estrela, converta o sistema para a configuração estrela-estrela.
 2. Determine os fasores incógnitos na conexão estrela-estrela e trate apenas da fase α .
 3. Converta os fasores agora conhecidos de volta para os fasores correspondentes à conexão original.
- A correção do fator de potência nas instalações trifásicas balanceadas é obtida do mesmo modo discutido para os casos de instalações monofásicas. Três capacitores são colocados em paralelo com a carga para reduzir a fase em atraso causada pela carga trifásica.

PROBLEMAS

- 11.1** Esquematize uma representação fasorial de uma fonte trifásica em equilíbrio, conectada em delta e na sequência abc , incluindo as tensões V_{an} , V_{bn} e V_{cn} se $V_{an} = 120 \angle 15^\circ$ V rms.
- 11.2** Esquematize uma representação fasorial do sistema trifásico em equilíbrio que contenha tanto as tensões de fase quanto as tensões de linha se $V_{an} = 120 \angle 90^\circ$ V rms. Indique todas as magnitudes e admita uma sequência de fase abc .
- 11.3** Esquematize uma representação fasorial do sistema trifásico em equilíbrio que contenha tanto as tensões de fase quanto as tensões de linha se $V_{an} = 100 \angle 45^\circ$ V rms. Indique todas as magnitudes e admita uma sequência de fase abc .
- 11.4** Esquematize uma representação fasorial do sistema trifásico em equilíbrio que contenha tanto as tensões de fase quanto as tensões de linha se $V_{ab} = 208 \angle 60^\circ$ V rms. Indique todos os fasores e admita uma sequência de fase abc .
- 11.5** Uma fonte de tensão trifásica em estrela em equilíbrio e com sequência positiva possui uma tensão de fase de $V_{an} = 240 \angle 90^\circ$ V rms. Determine as tensões de linha da fonte.
- 11.6** Determine a impedância equivalente Z da rede mostrada na Fig. P11.6.

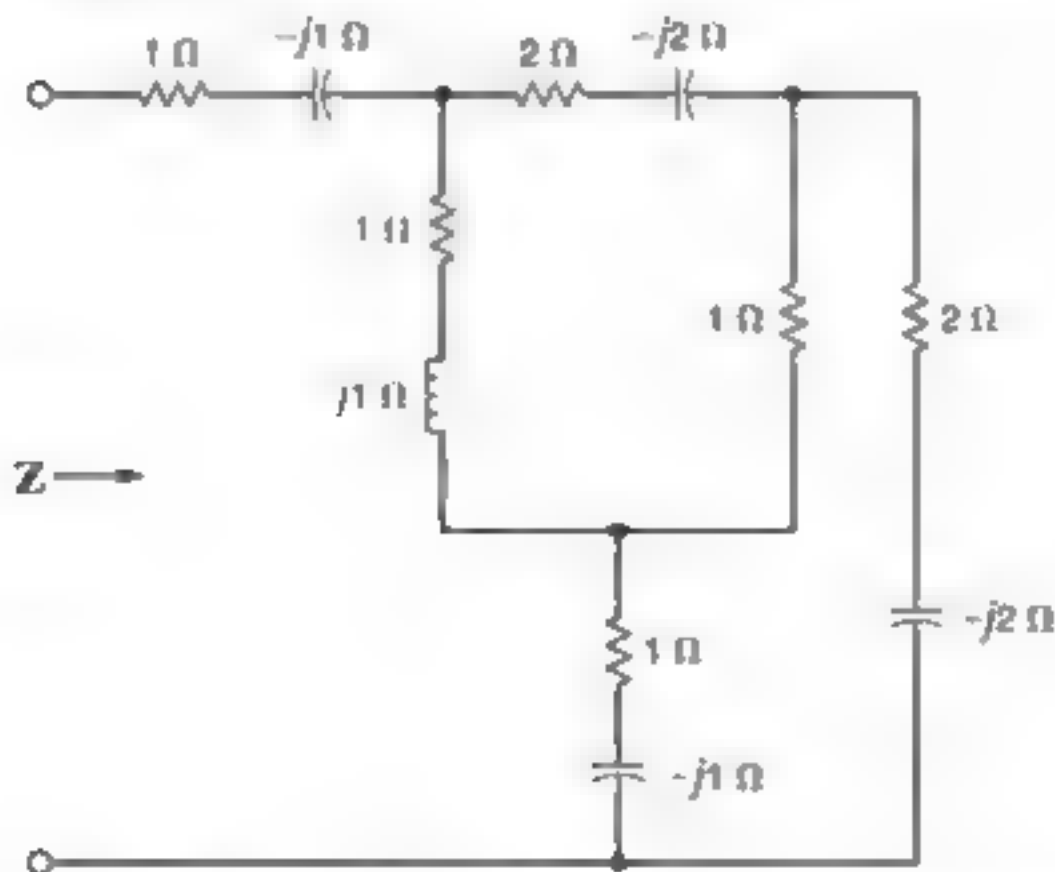


Figura P11.6

- 11.7** Determine as impedâncias equivalentes Z_{ab} , Z_{bc} e Z_{ca} da rede mostrada na Fig. P11.7.

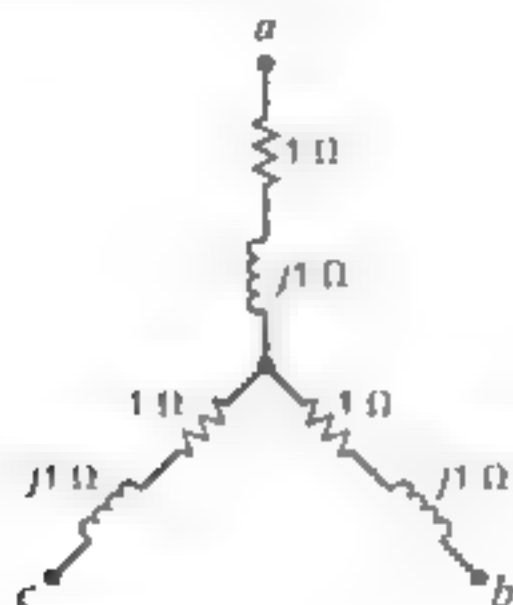


Figura P11.7

- 11.8** Determine a impedância equivalente Z da rede mostrada na Fig. P11.8.

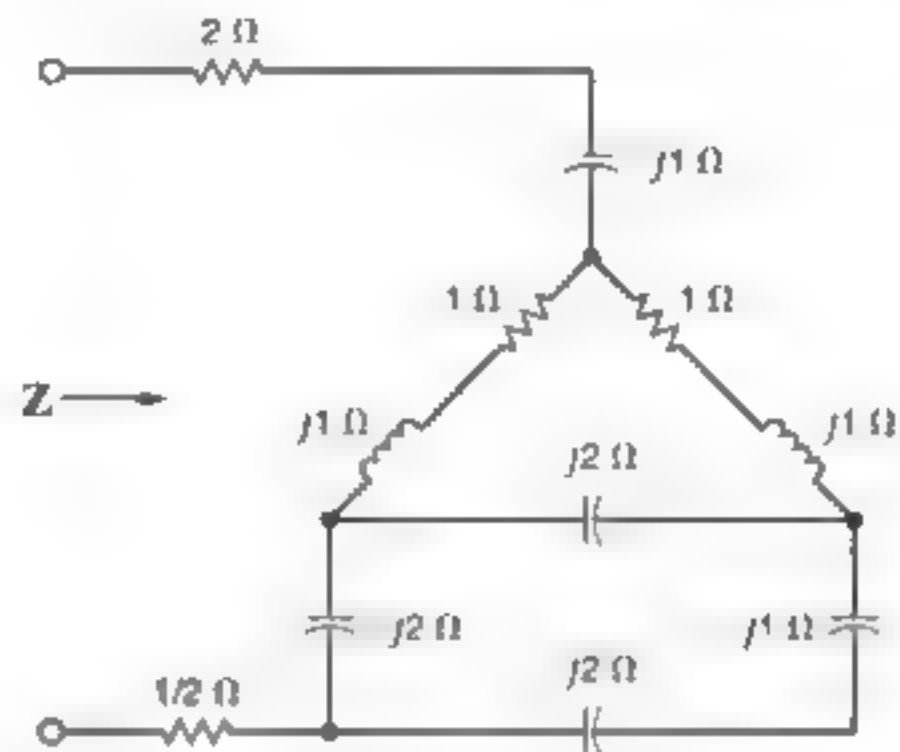


Figura P11.8

- 11.9** Determine a impedância equivalente Z da rede mostrada na Fig. P11.9.

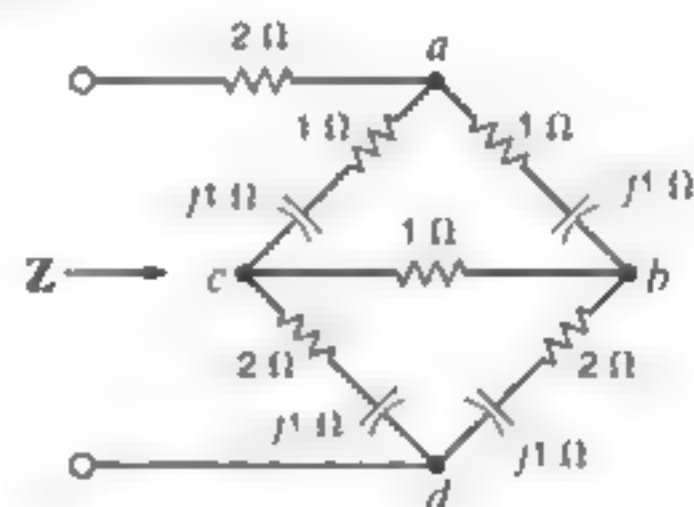


Figura P11.9

- 11.10** Uma fonte trifásica em equilíbrio, conectada em estrela e com sequência positiva, possuindo uma tensão de fase de 120 V rms, fornece energia a uma carga em equilíbrio conectada em estrela. A impedância da carga por fase é de $40 + j10 \Omega$. Determine as correntes de linha no circuito se $\angle V_{an} = 0^\circ$.
- 11.11** Uma fonte trifásica em equilíbrio, conectada em estrela e com sequência positiva, fornece energia a uma carga em equilíbrio conectada em estrela. A magnitude das tensões de linha é de 208 V rms. Se a impedância da carga por fase é de $36 + j12 \Omega$, determine as correntes de linha considerando que $\angle V_{an} = 0^\circ$.
- 11.12** Em um sistema trifásico em equilíbrio com configuração estrela-estrela, a fonte apresenta um conjunto de tensões na sequência abc com $V_{an} = 120 \angle 60^\circ$ rms. A impedância por fase da carga é de $12 + j16 \Omega$. Se a impedância de linha por fase é de $0,8 + j1,4 \Omega$, determine as correntes e as tensões de linha.
- 11.13** Um conjunto de tensões na sequência abc alimenta um sistema trifásico em equilíbrio na configuração estrela-estrela. Se a corrente de linha na fase a é de $16,78 \angle 20,98^\circ$, a impedância de linha é de $1,2 + j1,8 \Omega$ e a tensão de entrada é de $V_{ab} = 440 \angle 70^\circ$ V rms, determine a impedância da carga.

- 11.14** Uma fonte trifásica em equilíbrio, conectada em estrela e com sequência *abc*, alimenta uma carga em equilíbrio conectada em delta. A impedância por fase da carga em delta é de $12 + j9 \Omega$. A tensão da linha na fonte é $V_{ab} = 120 \sqrt{3} \angle 40^\circ \text{ V rms}$. Se a impedância de linha é igual a zero, determine as correntes de linha no sistema estrela-delta equilibrado.
- 11.15** Uma fonte trifásica de 60 Hz em equilíbrio, conectada em estrela e com sequência *abc*, alimenta uma carga em equilíbrio conectada em delta. A impedância de fase na carga consiste em um resistor de 20Ω em série com um indutor de 50 mH, e a tensão de fase na fonte é $V_{an} = 120 \angle 20^\circ \text{ V rms}$. Se a impedância de linha é igual a zero, determine as correntes de linha no sistema.
- 11.16** Uma fonte trifásica em equilíbrio, conectada em estrela e com sequência *abc*, fornece energia a uma carga em equilíbrio conectada em estrela. A impedância por fase na carga é de $14 + j12 \Omega$. Se a tensão para a fase *a* na fonte é $V_{an} = 120 \angle 80^\circ \text{ V rms}$ e a impedância de linha é igual a zero, determine as correntes de fase na fonte conectada em estrela.
- 11.17** Uma fonte trifásica em equilíbrio, conectada em estrela e com sequência *abc*, fornece energia a uma carga em equilíbrio conectada em estrela. A impedância da linha é de $1 + j5 \Omega$ e a impedância da carga por fase é de $25 + j25 \Omega$. Se a tensão de linha da fonte $V_{ab} = 208 \angle 0^\circ \text{ V rms}$, determine as correntes de linha.
- 11.18** Uma fonte trifásica em equilíbrio conectada em estrela e com sequência de fase *abc* fornece energia a uma carga em equilíbrio e conectada em estrela. A impedância da linha por fase é de $1 + j0 \Omega$ e a impedância da carga por fase é de $20 + j20 \Omega$. Se a tensão de linha da fonte V_{ab} for $100 \angle 0^\circ \text{ V rms}$, determine as correntes das linhas.
- 11.19** Um conjunto de tensões na sequência *abc* alimenta um sistema trifásico em equilíbrio na configuração estrela-estrela. As impedâncias da linha e da carga são $1 + j1 \Omega$ e $10 + j10 \Omega$, respectivamente. Se a tensão da carga na fase *a* é $V_{AN} = 110 \angle 30^\circ \text{ V rms}$, determine as tensões de linha na entrada.
- 11.20** Em um sistema trifásico em equilíbrio com configuração estrela-estrela, a fonte apresenta um conjunto de tensões na sequência *abc*. A tensão da carga na fase *a* é $V_{AN} = 108,58 \angle 79,81^\circ \text{ V rms}$, $Z_{\text{linha}} = 1 + j1,4 \Omega$ e $Z_{\text{carga}} = 10 + j13 \Omega$. Determine a sequência de tensões de entrada.
- 11.21** Uma sequência de tensões *abc* em equilíbrio alimenta um sistema trifásico em equilíbrio com configuração estrela-estrela. As impedâncias da linha e da carga são $0,6 + j0,9 \Omega$ e $8 + j12 \Omega$, respectivamente. A tensão da carga na fase *a* é $V_{AN} = 116,63 \angle 10^\circ \text{ V rms}$. Determine a tensão de linha V_{ab} .
- 11.22** Em um sistema trifásico em equilíbrio com configuração estrela-estrela, a fonte apresenta um conjunto de tensões na sequência *abc*. A tensão da carga na fase *a* é $V_{AN} = 110 \angle 80^\circ \text{ V rms}$, $Z_{\text{linha}} = 1 + j1,4 \Omega$ e $Z_{\text{carga}} = 10 + j13 \Omega$. Determine a sequência de tensões linha-neutro.
- 11.23** Em um sistema trifásico em equilíbrio com configuração estrela-estrela, a fonte apresenta um conjunto de tensões na sequência *abc*. A tensão da carga na fase *a* é $V_{AN} = 120 \angle 60^\circ \text{ V rms}$, $Z_{\text{linha}} = 2 + j1,4 \Omega$ e $Z_{\text{carga}} = 10 + j10 \Omega$. Determine as tensões de entrada.
- 11.24** Em um sistema trifásico em equilíbrio com configuração estrela-estrela, a fonte apresenta um conjunto de tensões na sequência *abc*. $Z_{\text{linha}} = 1 + j1 \Omega$, $Z_{\text{carga}} = 14 + j12 \Omega$ e a tensão da carga na fase *a* é $V_{AN} = 440 \angle 30^\circ \text{ V rms}$. Determine a tensão de linha V_{ab} .
- 11.25** Uma sequência de tensões *abc* em equilíbrio alimenta um sistema trifásico em equilíbrio com configuração estrela-estrela. As impedâncias da linha e da carga são $0,6 + j0 \Omega$ e $8 + j12 \Omega$, respectivamente. A tensão da carga na fase *a* é $V_{AN} = 116,63 \angle 10^\circ \text{ V rms}$. Determine a tensão de linha V_{ab} .
- 11.26** Em um sistema trifásico em equilíbrio com configuração estrela-estrela, a fonte apresenta um conjunto de tensões na sequência *abc*. $Z_{\text{linha}} = 1 + j1,8 \Omega$, $Z_{\text{carga}} = 14 + j12 \Omega$ e a tensão da carga na fase *a* é $V_{AN} = 398,1 \angle 17,99^\circ \text{ V rms}$. Determine a tensão de linha V_{ab} .
- 11.27** Em um sistema trifásico em equilíbrio com configuração estrela-estrela, a fonte apresenta uma sequência de fase *abc* e $V_{an} = 120 \angle 40^\circ \text{ V rms}$. As impedâncias da linha e da carga são, respectivamente, $0,5 + j0,4 \Omega$ e $24 + j18 \Omega$. Determine as correntes na configuração delta da carga.
- 11.28** Em um sistema trifásico em equilíbrio na configuração estrela-estrela, a impedância da carga é de $8 + j4 \Omega$. A fonte possui uma sequência de fase *abc* e $V_{an} = 120 \angle 0^\circ \text{ V rms}$. Considerando que a tensão da carga seja $V_{AN} = 111,62 \angle -1,33^\circ \text{ V rms}$, determine a impedância da linha.
- 11.29** Em um sistema trifásico em equilíbrio na configuração estrela-estrela, a potência total perdida nas linhas é de 400 W. A tensão $V_{AN} = 105,28 \angle 31,56^\circ \text{ V rms}$ e o fator de potência da carga é de 0,77 em atraso. Considerando que a impedância da linha seja de $2 + j1 \Omega$, determine a impedância da carga.
- 11.30** Em um sistema trifásico em equilíbrio na configuração estrela-estrela, a impedância da carga é de $10 + j1 \Omega$. A fonte possui uma sequência de fase *abc* e a tensão de linha é $V_{ab} = 220 \angle 30^\circ \text{ V rms}$. Considerando que a tensão na carga seja $V_{AN} = 120 \angle 0^\circ \text{ V rms}$, determine a impedância da linha.
- 11.31** Em um sistema trifásico em equilíbrio na configuração estrela-estrela, a impedância da carga é de $20 + j12 \Omega$. A fonte possui uma sequência de fase *abc* e $V_{an} = 120 \angle 0^\circ \text{ V rms}$. Considerando que a tensão na carga seja $V_{AN} = 111,49 \angle -0,2^\circ \text{ V rms}$, determine a magnitude da corrente de linha se a carga for repentinamente colocada em curto-circuito.
- 11.32** Em um sistema trifásico em equilíbrio na configuração estrela-estrela, a fonte apresenta um conjunto de tensões na sequência *abc* e $V_{an} = 120 \angle 40^\circ \text{ V rms}$. Se a corrente e a impedância da linha na fase *a* são conhecidas e valem $7,10 \angle -10,28^\circ \text{ A rms}$ e $0,8 + j1 \Omega$, respectivamente, determine a impedância da carga.

- 11.33** Em um sistema trifásico em equilíbrio na configuração estrela-estrela, a fonte apresenta um conjunto de tensões na sequência *abc* e $V_{an} = 120 \angle 50^\circ \text{ V rms}$. A tensão da carga na fase *a* é de $110,65 \angle 29,03^\circ \text{ V rms}$ e a impedância da carga é de $16 + j20 \Omega$. Determine a impedância da linha.
- 11.34** Um conjunto de tensões na sequência *abc* alimenta um sistema trifásico em equilíbrio na configuração estrela-estrela. Se a tensão de entrada é $V_{an} = 440 \angle 10^\circ \text{ V rms}$, a tensão na fase *a* da carga é $V_{AN} = 398,32 \angle 8,72^\circ \text{ V rms}$ e Z_{carga} é de $20 + j24 \Omega$, determine a impedância da linha.
- 11.35** Uma fonte trifásica em equilíbrio com sequência de fase *abc*, alimenta uma carga em equilíbrio. O sistema é conectado na configuração estrela-estrela. A impedância da carga é de $10 + j6 \Omega$, a impedância da linha é de $1 + j0,5 \Omega$ e $\angle V_{AN} = 60^\circ$. A potência total perdida nas linhas é de 470,44 W. Determine a tensão V_{AN} e a magnitude da tensão da fonte.
- 11.36** Uma fonte trifásica em equilíbrio com sequência *abc* alimenta um sistema estrela-estrela em equilíbrio. $Z_{linha} = 0,8 + j0,2 \Omega$, $Z_{carga} = 12 + j6 \Omega$ e $\angle V_{AN} = 30^\circ$. A potência total absorvida pela carga é de 2 kW. Determine a potência total perdida nas linhas.
- 11.37** Uma fonte de 60 Hz trifásica em equilíbrio conectada em estrela e com sequência de fase *abc* alimenta uma carga em equilíbrio e conectada em uma configuração delta. A impedância de fase na carga consiste em um resistor de 20Ω em série com um indutor de 20 mH, e a tensão de fase na fonte é $V_{an} = 120 \angle 30^\circ \text{ V rms}$. Considerando que a impedância da linha seja nula, determine as correntes das linhas no sistema.
- 11.38** Em um sistema trifásico em equilíbrio, uma fonte conectada na configuração delta fornece energia a uma carga conectada em estrela. Considerando uma impedância de linha de $0,2 + j0,4 \Omega$, uma impedância de carga de $3 + j2 \Omega$ e uma tensão de fase da fonte $V_{ab} = 208 \angle 10^\circ \text{ V rms}$, determine a magnitude da tensão de linha na carga.
- 11.39** Em um sistema trifásico em equilíbrio com configuração estrela-estrela, a fonte apresenta um conjunto de tensões na sequência *abc* e $V_{an} = 120 \angle 50^\circ \text{ V rms}$. A tensão na carga referente à fase *a* é $110 \angle 50^\circ \text{ V rms}$ e a impedância da carga é $16 + j20 \Omega$. Determine a impedância da linha.
- 11.40** Em um sistema trifásico em equilíbrio na configuração estrela-estrela, a fonte apresenta um conjunto de tensões na sequência *abc* e $V_{an} = 120 \angle 40^\circ \text{ V rms}$. Se a corrente na linha da fase *a* e a impedância da linha são conhecidas e valem $6 \angle 15^\circ \text{ A rms}$ e $1 + j1 \Omega$, respectivamente, determine a impedância da carga.
- 11.41** Uma fonte trifásica em equilíbrio conectada em estrela e com sequência de fase *abc* alimenta uma carga em equilíbrio e conectada segundo uma configuração delta. A impedância por fase da carga em delta é igual a $12 + j6 \Omega$. A tensão de linha na fonte é $V_L = 120 \sqrt{3} \angle 40^\circ \text{ V rms}$. Considerando que a impedância da linha seja nula, determine as correntes de linha no sistema estrela-delta em equilíbrio.
- 11.42** No sistema trifásico em equilíbrio na configuração delta-estrela, a fonte apresenta uma sequência de fase *abc*. As impedâncias da linha e da carga são $0,6 + j0,3 \Omega$ e $12 + j7 \Omega$, respectivamente. Considerando que a corrente de linha seja $I_{oA} = 9,6 \angle 20^\circ \text{ A rms}$, determine as tensões de fase na fonte.
- 11.43** Em um sistema trifásico em equilíbrio, uma fonte conectada na configuração delta fornece energia a uma carga conectada em estrela. Se a impedância da linha é de $0,2 + j0,4 \Omega$, a impedância da carga é $6 + j4 \Omega$ e a tensão de fase na fonte é $V_{ab} = 210 \angle 40^\circ \text{ V rms}$, determine a magnitude da tensão de linha na carga.
- 11.44** Um conjunto de tensões na sequência *abc* alimenta um sistema trifásico em equilíbrio na configuração estrela-estrela. Se $V_{an} = 440 \angle 30^\circ \text{ V rms}$, $V_{AN} = 413,28 \angle 29,78^\circ \text{ V rms}$ e $Z_{linha} = 2 + j1,5 \Omega$, determine a impedância da carga.
- 11.45** Uma fonte trifásica em equilíbrio conectada em estrela e com sequência de fase *abc* alimenta uma carga em equilíbrio e conectada em uma configuração delta. A impedância por fase da carga em delta é igual a $20 + j4 \Omega$. Se a tensão $V_{AB} = 115 \angle 35^\circ \text{ V rms}$ determine a corrente da linha.
- 11.46** Uma fonte trifásica em equilíbrio conectada em estrela e com sequência de fase *abc* fornece energia a uma carga em equilíbrio e conectada em delta. A impedância por fase da carga é igual a $14 + j7 \Omega$. Se a tensão da fonte para a fase *a* é $V_{an} = 120 \angle 80^\circ \text{ V rms}$ e a impedância da linha é nula, determine as correntes de fase na fonte conectada em estrela.
- 11.47** Em um sistema trifásico em equilíbrio com configuração delta-delta, a fonte apresenta uma sequência de fase *abc*. As impedâncias da linha e da carga são $0,3 + j0,2 \Omega$ e $9 + j6 \Omega$, respectivamente. Se a corrente da carga na configuração delta é $I_{AN} = 15 \angle 40^\circ \text{ A rms}$, determine as tensões de fase da fonte.
- 11.48** Uma fonte trifásica em equilíbrio conectada em estrela e com sequência de fase *abc* alimenta uma carga em equilíbrio e conectada em uma configuração delta. A impedância por fase da carga em delta é igual a $10 + j8 \Omega$. Se a impedância da linha é nula e a corrente de linha na fase *a* é conhecida e vale $I_{oA} = 28,10 \angle -28,66^\circ \text{ A rms}$, determine a tensão V_{AB} na carga.
- 11.49** Em um sistema trifásico em equilíbrio com configuração estrela-delta, a fonte apresenta uma sequência de fase *abc* e $V_{an} = 120 \angle 0^\circ \text{ V rms}$. Se a impedância da linha é nula e corrente da linha é $I_{oA} = 5 \angle 20^\circ \text{ A rms}$, determine a impedância da carga por fase na configuração delta.
- 11.50** A impedância de uma carga trifásica consiste em uma configuração estrela em equilíbrio, em paralelo com uma configuração delta em equilíbrio. Qual é a carga em estrela equivalente e qual é a carga em delta equivalente se as impedâncias de fase das configurações estrela e delta são $6 + j3 \Omega$ e $15 + j10 \Omega$, respectivamente?

- 11.51** Em um sistema trifásico em equilíbrio, a fonte é uma configuração estrela em equilíbrio com sequência de fase *abc* e $V_{an} = 120/20^\circ$ V rms. A carga consiste em duas configurações estrela em equilíbrio com impedâncias de fase de $8 + j2 \Omega$ e $12 + j3 \Omega$. Considerando que a impedância da linha seja nula, determine as correntes de linha e as correntes de fase para cada carga.
- 11.52** Em um sistema delta-delta trifásico em equilíbrio, a fonte apresenta uma sequência de fase *abc*. O ângulo de fase da tensão da fonte é $\angle V_{ab} = 40^\circ$ e $I_{ab} = 4/15^\circ$ A rms. Se a potência total absorvida pela carga é igual a 1400 W, determine a impedância da carga.
- 11.53** Em um sistema trifásico em equilíbrio, a fonte é uma configuração estrela em equilíbrio com sequência de fase *abc* e $V_{ab} = 215/50^\circ$ V rms. A carga é uma configuração estrela em equilíbrio em paralelo com uma configuração delta em equilíbrio. A impedância de fase da configuração estrela é de $5 + j3 \Omega$ e a impedância de fase da configuração delta é de $18 + j12 \Omega$. Se a impedância da linha é igual a $1 + j0,8 \Omega$, determine as correntes de linha e as correntes de fase nas cargas.
- 11.54** Em um sistema trifásico em equilíbrio, a fonte é uma configuração estrela em equilíbrio com sequência de fase *abc* e $V_{ab} = 208/60^\circ$ V rms. A carga consiste em uma configuração estrela em equilíbrio com impedância de fase de $8 + j5 \Omega$ em paralelo com uma configuração delta em equilíbrio com impedância de fase de $21 + j12 \Omega$. Se a impedância de linha é de $1,2 + j1 \Omega$, determine as correntes de fase na carga com configuração estrela em equilíbrio.
- 11.55** Em um sistema trifásico em equilíbrio, a fonte possui uma sequência de fase *abc* e é conectada na configuração delta. Existem duas cargas conectadas em paralelo. A linha de conexão da fonte às cargas possui uma impedância de $0,2 + j0,1 \Omega$. A carga 1 está conectada em estrela e sua impedância de fase é igual a $4 + j2 \Omega$. A carga 2 está conectada em delta e sua impedância de fase é igual a $12 + j9 \Omega$. A corrente I_{AB} na carga em delta é de $16/45^\circ$ A rms. Determine as tensões de fase na fonte.
- 11.56** Em um sistema trifásico em equilíbrio, a fonte apresenta uma sequência de fase *abc* e é conectada na configuração delta. Existem duas cargas em paralelo conectadas na configuração estrela. As impedâncias de fase da carga 1 e da carga 2 são de $4 + j4 \Omega$ e $10 + j4 \Omega$, respectivamente. A impedância da linha que conecta a fonte às cargas é de $0,3 + j0,2 \Omega$. Se a corrente na fase *a* da carga 1 é $I_{AN} = 10/20^\circ$ A rms, determine as correntes da configuração delta na fonte.
- 11.57** Uma fonte trifásica em equilíbrio com sequência de fase *abc*, alimenta uma carga em equilíbrio. O sistema é conectado na configuração estrela-estrela e $\angle V_{un} = 0^\circ$. A impedância da linha é de $0,5 + j0,2 \Omega$, a impedância da carga é de $16 + j10 \Omega$, e a potência total absorvida pela carga é de 2000 W. Determine a magnitude da tensão da fonte V_{an} .
- 11.58** Uma fonte trifásica conectada em delta e em equilíbrio fornece energia a uma carga consistindo em uma configuração delta em equilíbrio em paralelo com uma configuração estrela em equilíbrio. A impedância de fase da configuração delta é de $24 + j12 \Omega$ e a impedância de fase da configuração estrela é de $12 + j8 \Omega$. As tensões da fonte com sequência de fase *abc* são $V_{ab} = 440/60^\circ$ V rms, $V_{bc} = 440/-60^\circ$ V rms e $V_{ca} = 440/-180^\circ$ V rms, e a impedância de linha por fase é de $1 + j0,08 \Omega$. Determine as correntes de linha e a potência absorvida pela carga conectada na configuração estrela.
- 11.59** A magnitude da potência complexa (potência aparente) fornecida por um sistema trifásico estrela-estrela em equilíbrio é de 3600 VA. A tensão de linha é de 208 V rms. Se a impedância de linha for desprezível e o ângulo do fator de potência da carga for de 25° , determine a impedância da carga.
- 11.60** Uma fonte conectada em estrela com sequência de fase *abc*, possuindo uma tensão de $120/0^\circ$ V rms na fase *a*, é acoplada a uma carga conectada em estrela com uma impedância por fase de $100/70^\circ \Omega$. Se a impedância da linha é de $1/20^\circ \Omega$, determine a potência complexa total produzida pelas fontes de tensão e as potências real e reativa dissipadas pela carga.
- 11.61** Um sistema trifásico estrela-estrela equilibrado possui uma tensão de linha de 208 V rms. A corrente de linha é de 6 A rms e a potência real total absorvida pela carga é de 1800 W. Determine a impedância por fase da carga, considerando desprezível a impedância da linha.
- 11.62** Uma fonte trifásica conectada em estrela na sequência *abc* fornece 14 kVA a um fator de potência de 0,75 em atraso a uma carga na configuração delta. Se a carga em delta consome 12 kVA a um fator de potência de 0,7 em atraso e possui uma corrente de fase de $10/-30^\circ$ A rms, determine a impedância por fase da carga e da linha.
- 11.63** Uma fonte trifásica em equilíbrio alimenta as seguintes cargas.
- Carga 1: 60 kVA com $\text{fp} = 0,8$ em atraso
Carga 2: 30 kVA com $\text{fp} = 0,75$ em atraso
- A tensão de linha na carga é de 208 V rms a 60 Hz. Determine a corrente de linha e o fator de potência combinado na carga.
- 11.64** Uma fonte trifásica em equilíbrio alimenta duas cargas.
- Carga 1: 36 kVA com $\text{fp} = 0,8$ em atraso
Carga 2: 18 kVA com $\text{fp} = 0,6$ em atraso
- A tensão de linha na carga é de 208 V rms a 60 Hz. Obtenha a corrente de linha e o fator de potência combinado na carga.

- 11.65** As cargas relacionadas a seguir são alimentadas por uma fonte trifásica em equilíbrio.

Carga 1: 18 kVA com $\text{fp} = 0,8$ em atraso
 Carga 2: 8 kVA com $\text{fp} = 0,8$ em avanço
 Carga 3: 12 kVA com $\text{fp} = 0,75$ em atraso

A tensão na carga é de 208 V rms a 60 Hz. Considerando uma impedância de linha desprezível, determine o fator de potência na fonte.

-  **11.66** Uma fonte trifásica em equilíbrio alimenta as seguintes cargas:

Carga 1: 20 kVA com $\text{fp} = 0,8$ em atraso
 Carga 2: 10 kVA com $\text{fp} = 0,7$ em avanço
 Carga 3: 10 kW com fator de potência unitário
 Carga 4: 16 kVA com $\text{fp} = 0,6$ em atraso

A tensão de linha na carga é de 208 V rms a 60 Hz e a impedância de linha é de $0,02 + j0,04 \Omega$. Determine a tensão de linha e o fator de potência na fonte.

- 11.67** Um pequeno shopping center contém três lojas que representam três cargas trifásicas em equilíbrio. As linhas de potência que alimentam o shopping representam uma fonte trifásica com uma tensão de linha de 13,8 kV rms. As três cargas são:

Carga 1: 400 kVA com $\text{fp} = 0,9$ em atraso
 Carga 2: 200 kVA com $\text{fp} = 0,85$ em atraso
 Carga 3: 100 kVA com $\text{fp} = 0,90$ em atraso

Determine a corrente da linha de potência.

- 11.68** As seguintes cargas são alimentadas por uma fonte trifásica em equilíbrio.


Carga 1: 20 kVA com $\text{fp} = 0,8$ em atraso
 Carga 2: 4 kVA com $\text{fp} = 0,8$ em avanço
 Carga 3: 10 kVA com $\text{fp} = 0,75$ em atraso

A tensão da carga é de 208 V rms a 60 Hz. Considerando que a impedância da linha seja desprezível, determine o fator de potência na fonte.

- 11.69** Uma fonte trifásica em equilíbrio fornece potência a três cargas. As cargas são:

Carga 1: 30 kVA com $\text{fp} = 0,8$ em atraso
 Carga 2: 24 kW com $\text{fp} = 0,6$ em avanço
 Carga 3: desconhecida

Se a tensão de linha e a potência complexa total na carga são 208 V rms e $60 \angle 0^\circ$ kVA, respectivamente, determine a carga incógnita.

-  **11.70** Uma fonte trifásica em equilíbrio fornece potência a três cargas. As cargas são:

Carga 1: 24 kVA com $\text{fp} = 0,6$ em atraso
 Carga 2: 10 kW com $\text{fp} = 0,75$ em atraso
 Carga 3: desconhecida

Se a tensão de linha na carga é de 208 V rms, a magnitude da potência complexa total é de 35,52 kVA e o fator de potência combinado na carga é de 0,88 em atraso, determine a carga incógnita.

- 11.71** Uma fonte trifásica em equilíbrio fornece potência a três cargas. As cargas são:

Carga 1: 18 kVA com $\text{fp} = 0,8$ em atraso
 Carga 2: 10 kW com $\text{fp} = 0,6$ em avanço
 Carga 3: desconhecida

Se a tensão de linha na carga é de 208 V rms, a corrente de linha na fonte é de 116,39 A rms e o fator de potência combinado na carga é de 0,86 em atraso, determine a carga incógnita.

- 11.72** Uma fonte trifásica em equilíbrio fornece potência a três cargas. As cargas são:

Carga 1: 30 kVA com $\text{fp} = 0,8$ em atraso
 Carga 2: 24 kW com $\text{fp} = 0,6$ em avanço
 Carga 3: desconhecida

A tensão de linha na carga e a corrente de linha na fonte são 208 V rms e 166,8 A rms, respectivamente. Se o fator de potência combinado na carga é unitário, determine a carga incógnita.

- 11.73** Uma fonte trifásica em equilíbrio fornece potência a três cargas. As cargas são:

Carga 1: 24 kW com $\text{fp} = 0,8$ em atraso
 Carga 2: 10 kVA com $\text{fp} = 0,7$ em avanço
 Carga 3: desconhecida

Se a tensão de linha na carga é de 208 V rms, a magnitude da potência complexa total é de 41,93 kVA e o fator de potência combinado na carga é de 0,86 em atraso, determine a carga desconhecida.

- 11.74** Uma fonte trifásica na sequência *abc* conectada em estrela com $V_{\text{un}} = 220 \angle 0^\circ$ V rms fornece potência a uma carga conectada em estrela que consome 50 kW de potência em cada fase com um $\text{fp} = 0,8$ em atraso. Três capacitores, cada um com impedância de $-j2,0 \Omega$, são conectados em paralelo com a carga em uma configuração estrela. Determine o fator de potência da carga combinada vista pela fonte.

- 11.75** Considerando que os três capacitores da rede do Problema 11.74 sejam conectados em uma configuração delta, determine o fator de potência da carga combinada vista pela fonte.

- 11.76** Determine a capacitância C da rede mostrada na Fig. P11.76 de modo que a carga total tenha um fator de potência de 0,87 em avanço.

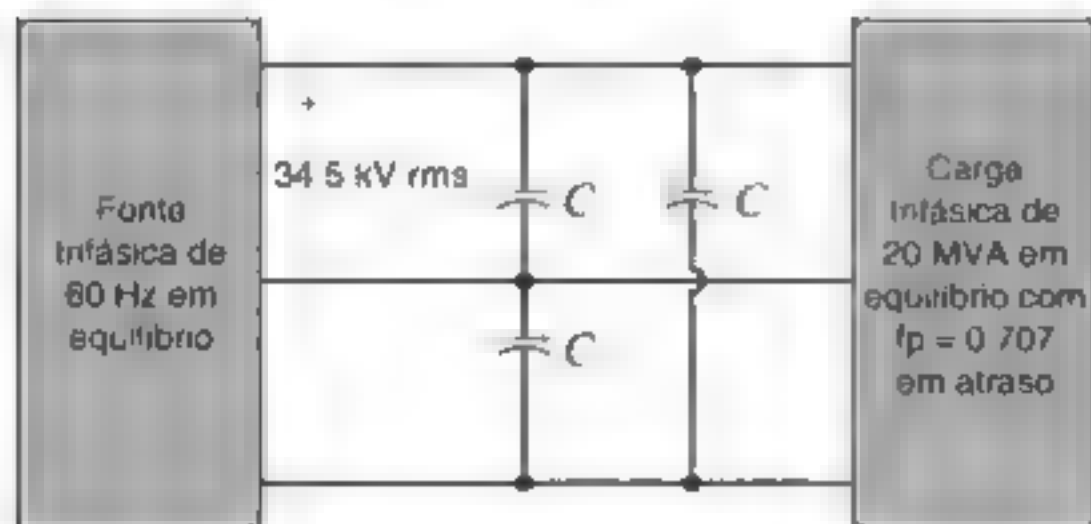


Figura P11.76

- 11.78** Determine a capacitância C da rede mostrada na Fig. P11.78 de modo que a carga total tenha um fator de potência de 0,87 em atraso.

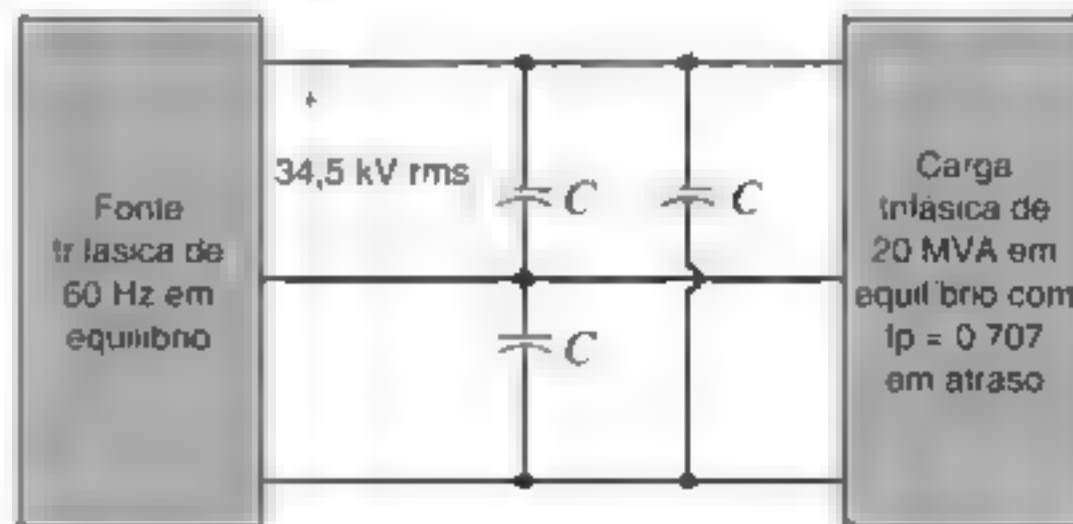


Figura P11.78

- 11.77** Determine a capacitância C da rede mostrada na Fig. P11.77 de modo que a carga total tenha um fator de potência de 0,9 em atraso.

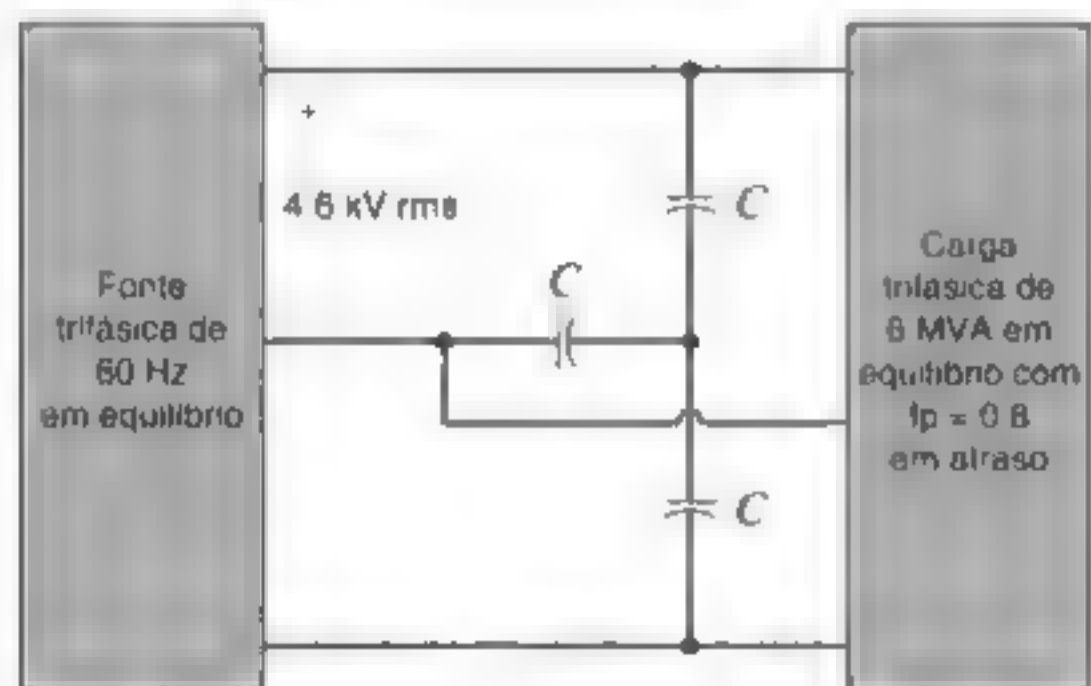


Figura P11.77

- 11.79** Determine a capacitância C da rede mostrada na Fig. P11.79 de modo que a carga total tenha um fator de potência de 0,9 em avanço.

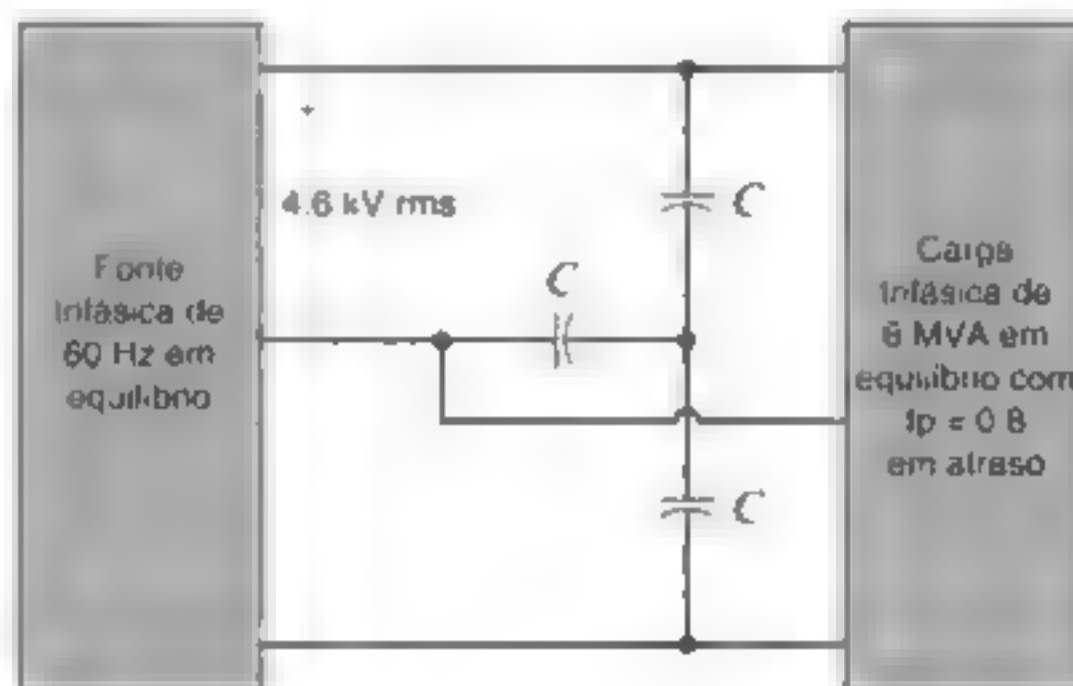


Figura P11.79

- 11.80** Um procedimento padronizado utilizado pelas companhias de fornecimento de energia é dividir seus consumidores em usuários monofásicos e usuários trifásicos. A companhia deve atender aos usuários trifásicos, tipicamente as indústrias, com três fases. Entretanto, os usuários monofásicos, residências e iluminação comercial, são conectados a uma única fase. Para reduzir o custo de cabeamento, todos os usuários monofásicos em uma determinada vizinhança são conectados conjuntamente. Isso significa que, mesmo que os usuários trifásicos apresentem cargas perfeitamente equilibradas para a malha de distribuição de potência, as cargas monofásicas jamais estarão em equilíbrio, resultando em um fluxo de corrente na conexão neutra. Considere a rede de 60 Hz em sequência abc mostrada na Fig. P11.80. Com uma tensão de linha de $416 \angle 30^\circ$ V rms a fase a alimenta os usuários monofásicos da Rua A, a fase b alimenta a Rua B, e a fase c alimenta a Rua C. Além disso, a carga industrial trifásica, que é conectada na configuração delta, está em equilíbrio. Determine a corrente no neutro.

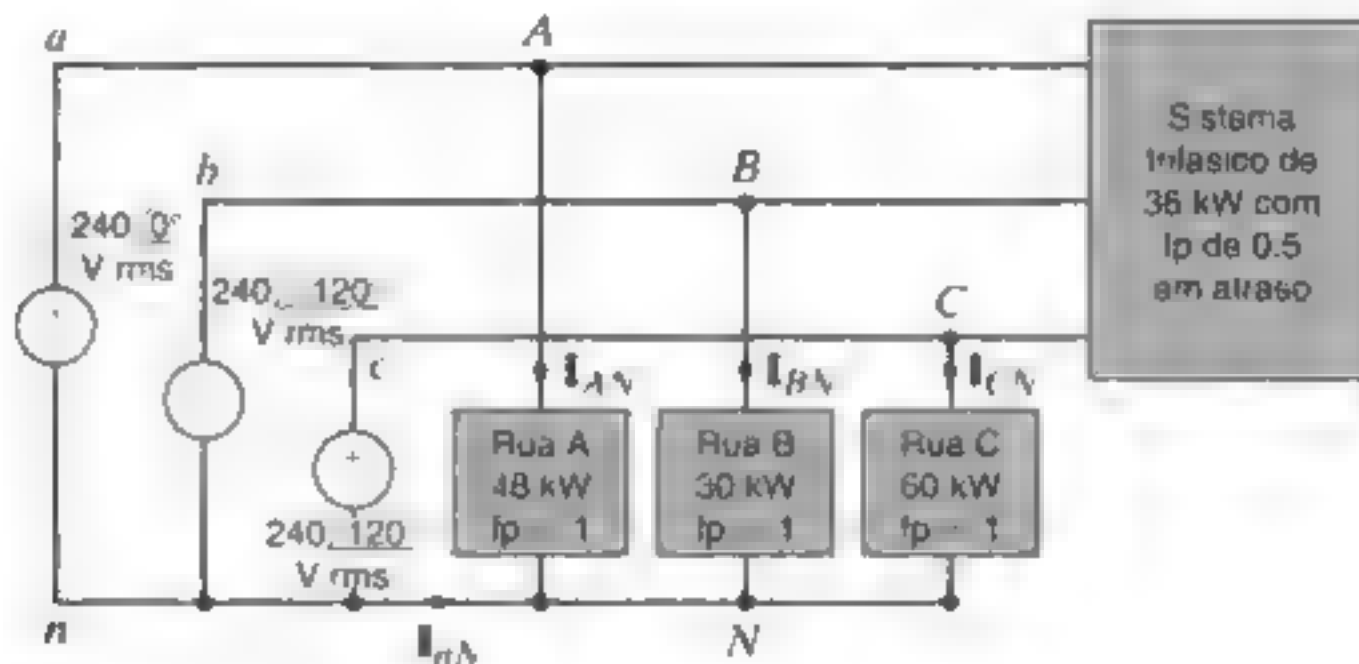


Figura P11.80

PROBLEMAS TÍPICOS DE EXAMES PROFISSIONAIS DE ENGENHARIA

- 11PEP-1** Uma carga conectada na configuração estrela consiste em uma impedância RL em série. As medições indicam que a tensão rms entre os terminais de cada elemento é de 84,85 V. Se a corrente rms de linha é de 6 A, determine a potência complexa total para a carga na configuração trifásica.
- $1,25 \angle 45^\circ \text{ kVA}$
 - $4,32 \angle 30^\circ \text{ kVA}$
 - $3,74 \angle 60^\circ \text{ kVA}$
 - $2,16 \angle 45^\circ \text{ kVA}$
- 11PEP-2** Uma carga trifásica conectada em delta em equilíbrio consiste em uma impedância de $12 + j12 \Omega$. Se a tensão de linha na carga é medida e vale 230 V rms, determine a potência real total absorvida pela configuração trifásica.
- 6,62 kW
 - 2,42 kW
 - 3,36 kW
 - 5,82 kW
- 11PEP-3** Duas cargas trifásicas em equilíbrio estão conectadas em paralelo. Uma carga com impedância de fase de $24 + j18 \Omega$ é conectada em delta, e a outra possui uma impedância de fase de $6 + j4 \Omega$ e está conectada na configuração estrela. Se a tensão linha-a-linha é de 208 V rms, determine a corrente de linha.
- $15,84 \angle -60,25^\circ \text{ A rms}$
 - $28,63 \angle 35,02^\circ \text{ A rms}$
 - $40,49 \angle 30,27^\circ \text{ A rms}$
 - $35,32 \angle 90,53^\circ \text{ A rms}$
- 11PEP-4** A potência complexa total na carga de um sistema trifásico em equilíbrio é de $24 \angle 30^\circ \text{ kVA}$. Determine a potência real por fase.
- 3,24 kW
 - 4,01 kW
 - 6,93 kW
 - 8,25 kW
- 11PEP-5** Uma carga trifásica em equilíbrio opera a 90 kW com uma tensão de linha na carga de $480 \angle 0^\circ \text{ V rms}$ a 60 Hz. A potência aparente da carga trifásica é de 100 kVA. Saiba-se que a carga possui um fator de potência em atraso. Qual é a potência reativa trifásica total da carga?
- 22,43 kvar
 - 30,51 kvar
 - 25,35 kvar
 - 43,59 kvar

DESEMPENHO DAS REDES EM FUNÇÃO DA FREQUÊNCIA



David Redfern/Redferns/Getty Images, Inc.

AS METAS DE APRENDIZAGEM DESTE CAPÍTULO SÃO:

- Compreender o desempenho dos circuitos constituídos pelos elementos básicos R , L e C quando sujeitos a diversos níveis de frequência
- Conhecer os diferentes tipos de funções de rede e a definição de polos e zeros
- Ser capaz de traçar o diagrama de Bode de uma função de rede
- Saber como gerar um diagrama de Bode
- Saber como analisar os circuitos ressonantes em série e em paralelo
- Ser introduzido aos conceitos de escalamento em magnitude e frequência
- Aprender as características dos filtros básicos, como passa-baixa, passa-alta, passa-banda e rejeição de banda
- Saber como analisar os filtros passivos e ativos básicos

Música e Frequência O tempo e a frequência são os dois lados de uma mesma moeda, os sinais são descritos de duas formas distintas. A música, por exemplo, é ouvida como um sinal no domínio do tempo, porém, a taxa de amostragem para sua gravação digital, a masterização e a fabricação dependem da largura de banda do sinal – uma descrição no domínio da frequência. Ambas as “linguagens” – tempo e frequência – são utilizadas no projeto dos equipamentos de gravação e reprodução. Para os equipamentos iPods e MP3 nos laptops, a largura de banda deve ser suficientemente larga para reproduzir músicas nas faixas de frequência desde o baixo até o violino e desde a tuba até a flauta. Como referência, nos concertos de flautas são desenvolvidos sons desde 262 Hz até aproximadamente 2 kHz (dó central até três oitavas acima).

Sua audição deve ser sensível a uma largura de banda que se estende a frequências pelo menos tão altas quanto as mais altas frequências presentes nos sinais musicais. A voz e outros sinais podem ser modulados para uma banda de frequências muito superiores; tão altas, em alguns casos, que podem ser ouvidas apenas por animais ou pelo Super-homem. A audição para sinais de alta frequência tende a se deteriorar quando você fica mais idoso. Isso pode ser uma vantagem quando você ainda é jovem. Por exemplo, você pode baixar sinais de chamadas telefônicas de alta frequência que sejam inaudíveis por um professor de meia-idade. Por outro lado, algumas lojas de conveniência evitam a radiodifusão por meio de sinais de alta frequência que não poderiam ser ouvidos pela maioria dos adultos e que seriam muito irritantes aos adolescentes.

A frequência variável é tão importante para os circuitos elétricos quanto na descrição dos sinais musicais. Os diagramas de resposta no domínio da frequência das funções de transferência em tensão mostram a magnitude em decibéis e a fase em graus na escala linear em função da frequência em radianos na escala logarítmica. O projeto de filtros utilizando as técnicas de frequência variável resulta em circuitos em série ou paralelo que forne-

cem os espectros de frequência desejados – passa-baixa, passa-alta ou passa-banda – para os sistemas de gravação, comunicação e radar. Seus aparelhos de telefone celular, televisão e iPod ou MP3 utilizam esses princípios. O ritmo musical reproduzido por gravações de alta qualidade e os tons claros gerados pelo alto desempenho deixam o ouvinte extremamente satisfeito – desde que a largura de banda seja adequada.

12.1 Análise da Resposta no Domínio da Frequência

Nos capítulos anteriores, foi investigada a resposta das redes *RLC* sujeitas a entradas senoidais. Em particular, foi considerada uma entrada senoidal de 60 Hz. Neste capítulo, admite-se que a frequência de excitação seja uma variável e avalia-se o desempenho da rede em função da frequência. Inicialmente, considere o efeito da frequência variável nos componentes já conhecidos – o resistor, o indutor e o capacitor. A impedância do resistor mostrado na Fig. 12.1a no domínio da frequência é

$$Z_R = R = R / \angle 0^\circ$$

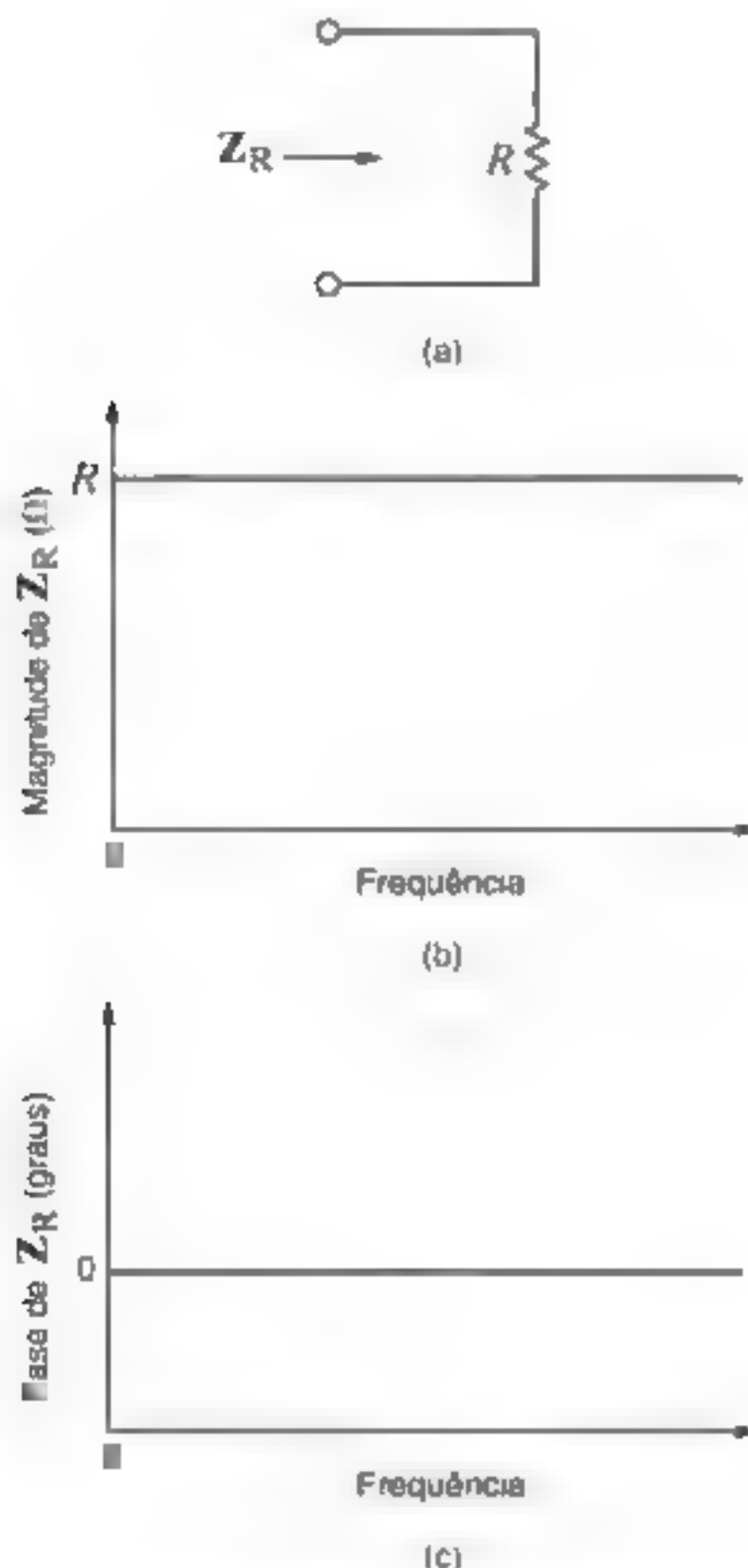


Figura 12.1 Impedância independente da frequência para um resistor.

A magnitude e a fase são constantes e independentes da frequência. Os gráficos esquemáticos da magnitude e da fase de Z_R são mostrados nas Figs. 12.1b e c. Naturalmente, essa é uma situação muito simples.

Para o indutor mostrado na Fig. 12.2a, a impedância Z_L no domínio da frequência é

$$Z_L = j\omega L = \omega L / \angle 90^\circ$$

O ângulo de fase é constante e vale 90° , porém, a magnitude de Z_L é diretamente proporcional à frequência. As Figs. 12.2b e c mostram, esquematicamente, a magnitude e a fase de Z_L em função da frequência. Note que, para baixas frequências, a impedância do indutor é bem pequena. De fato, para um sinal

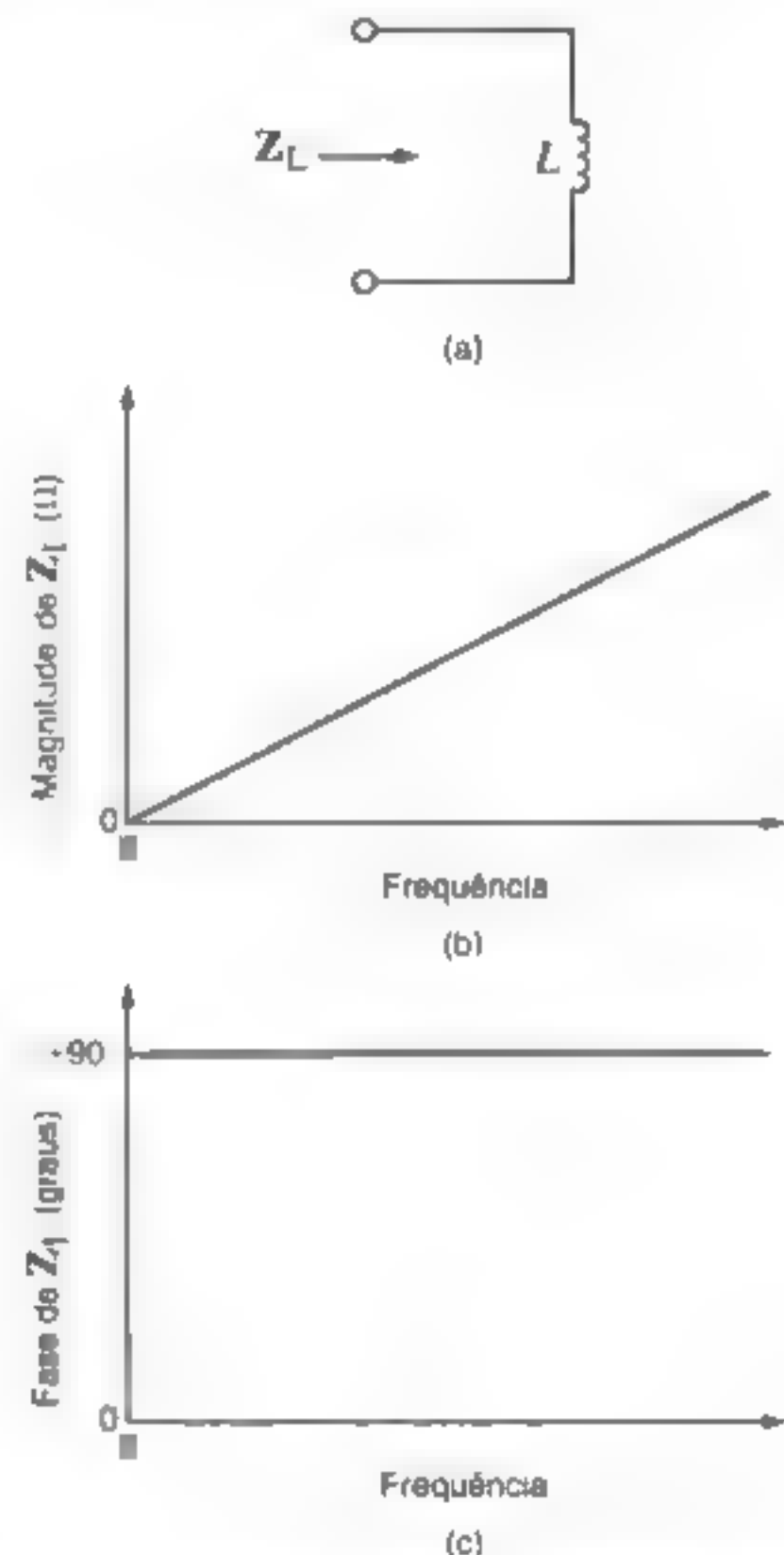


Figura 12.2 Impedância dependente da frequência para um indutor.

CC, Z_L é igual a zero e o indutor responde como se fosse um curto-circuito. Em contrapartida, quando a frequência aumenta, a impedância também aumenta.

Considere, a seguir, o capacitor mostrado na Fig. 12.3a. A impedância nesse caso é

$$Z_C = \frac{1}{j\omega C} = \frac{1}{\omega C} \angle -90^\circ$$

Mais uma vez, a fase da impedância é constante, porém, agora, a magnitude é inversamente proporcional à frequência, conforme mostrado nas Figs. 12.3b e c. Note que a impedância tende a infinito, isto é, um circuito aberto, quando ω se aproxima de zero e Z_C tende a zero quando ω tende a infinito.

Investiga-se agora um circuito mais complexo: a rede RLC em série mostrada na Fig. 12.4a. A impedância equivalente é

$$Z_{eq} = R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}$$

ou

$$Z_{eq} = \frac{(j\omega)^2 LC + j\omega RC + 1}{j\omega C}$$

As respostas para a magnitude e a fase dessa função são mostradas nas Figs. 12.4b e c.

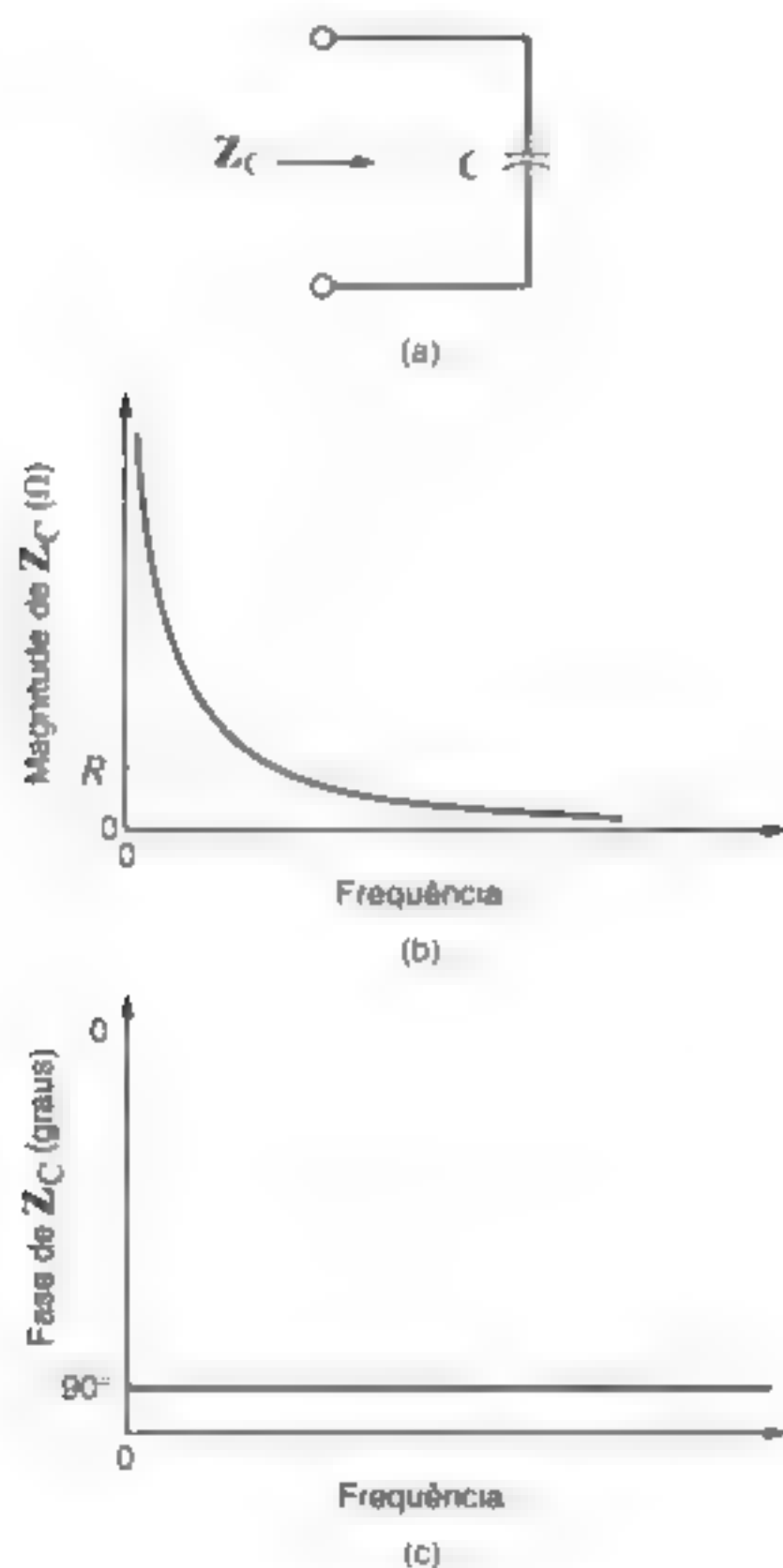


Figura 12.3 Impedância dependente da frequência para um capacitor.

Observe que, para frequências muito baixas, o capacitor comporta-se como um circuito aberto e, portanto, a impedância é muito alta nessa faixa. Para altas frequências, o capacitor apresenta um efeito muito pequeno, e a impedância é dominada pelo indutor, cuja impedância é crescente com a frequência.

Para circuitos mais complicados, as equações se tornam mais complexas. Com o objetivo de simplificá-las, pode-se proceder à substituição $j\omega = s$. (Essa substituição possui um significado mais importante, o qual será discutido nos capítulos posteriores.) Com essa substituição, a expressão para Z_{eq} fica

$$Z_{eq} = \frac{s^2 LC + sRC + 1}{sC}$$

Procedendo-se a uma revisão dos quatro circuitos que foram investigados até agora, observa-se que, em cada caso, a impedância é a razão entre dois polinômios expressos através da variável s e pode ser escrita, em sua forma geral, como

$$Z(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{a_m s^m + a_{m-1} s^{m-1} + \dots + a_1 s + a_0}{b_n s^n + b_{n-1} s^{n-1} + \dots + b_1 s + b_0} \quad 12.1$$

em que $N(s)$ e $D(s)$ são os polinômios de ordem m e n , respectivamente. Um aspecto extremamente importante da Eq. (12.1) é que ela se aplica não só a impedâncias, como também a todas

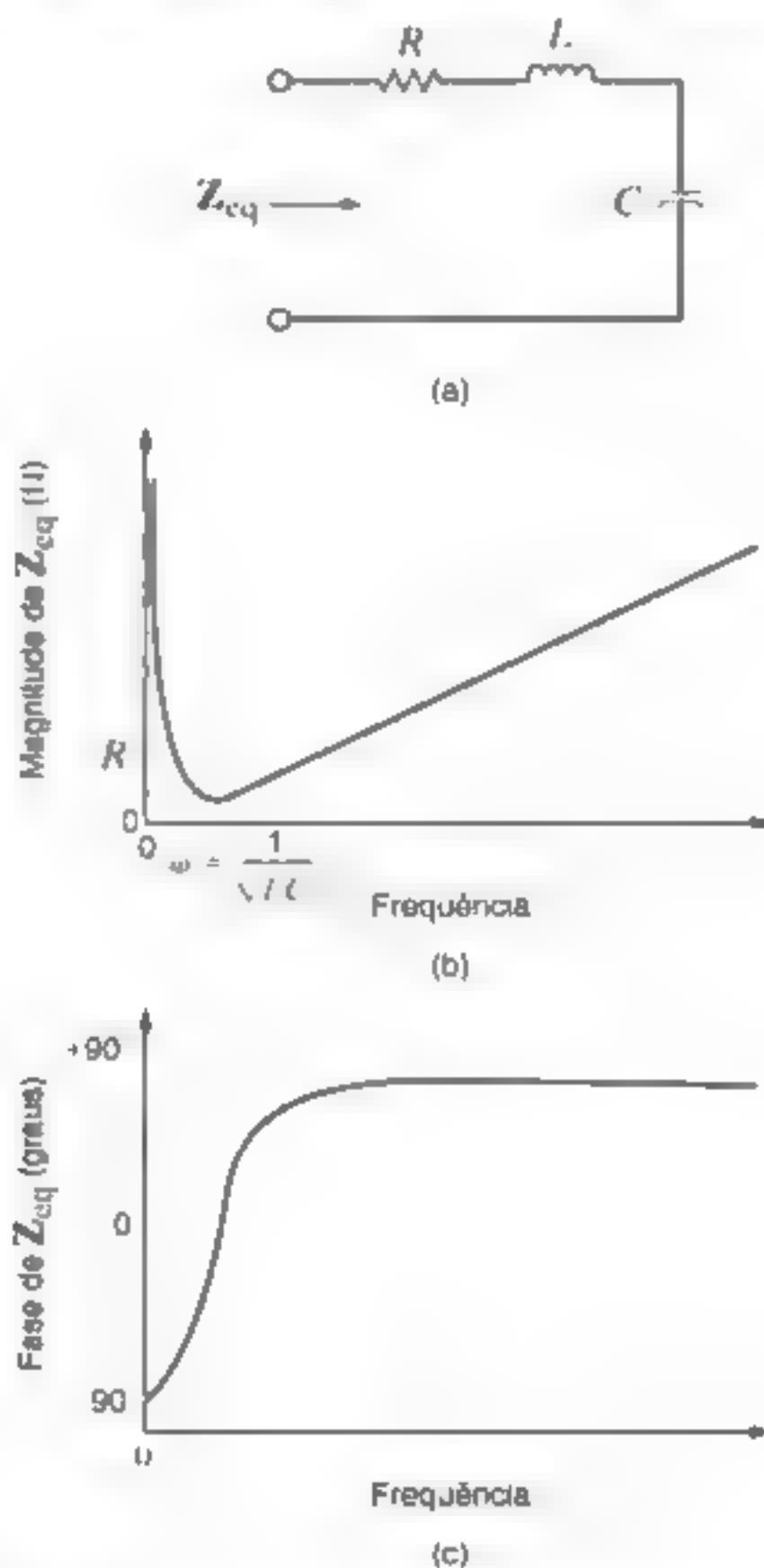


Figura 12.4 Impedância dependente da frequência para uma rede RLC em série.

as tensões, correntes, admitâncias e ganhos da rede. A única restrição é que os valores de todos os componentes do circuito (resistores, capacitores, indutores e fontes dependentes) devem ser definidos por números reais.

Demonstra-se agora o modo pelo qual a tensão entre os terminais de um componente de uma rede *RLC* em série varia com a frequência.

EXEMPLO 12.1

Considere a rede mostrada na Fig. 12.5a. Deseja-se determinar a variação da tensão de saída em função da frequência para uma faixa de 0 a 1 kHz.

SOLUÇÃO

Utilizando a divisão de tensão, a saída pode ser expressa como

$$V_o = \left(\frac{R}{R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}} \right) V_s$$

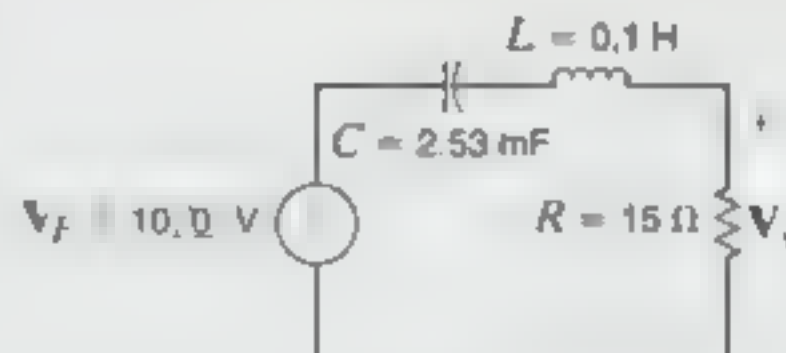
ou, de modo equivalente

$$V_o = \left(\frac{j\omega CR}{(j\omega)^2 LC + j\omega CR + 1} \right) V_s$$

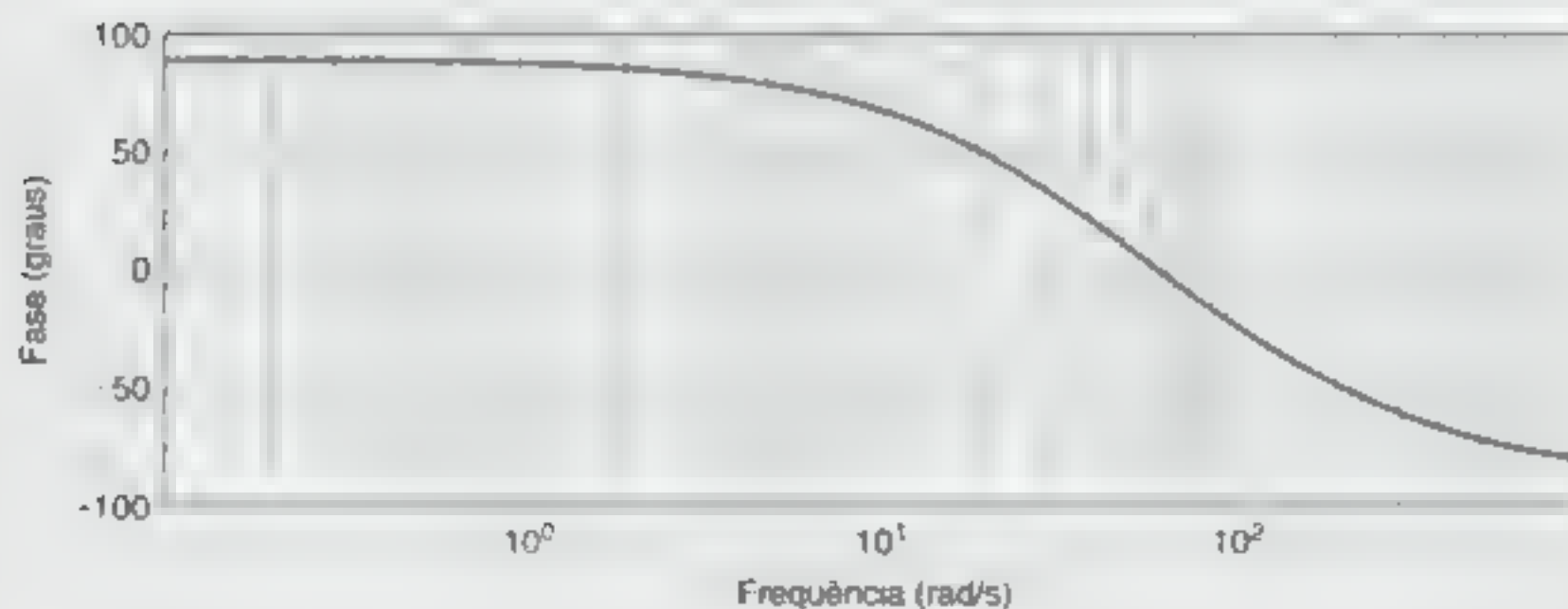
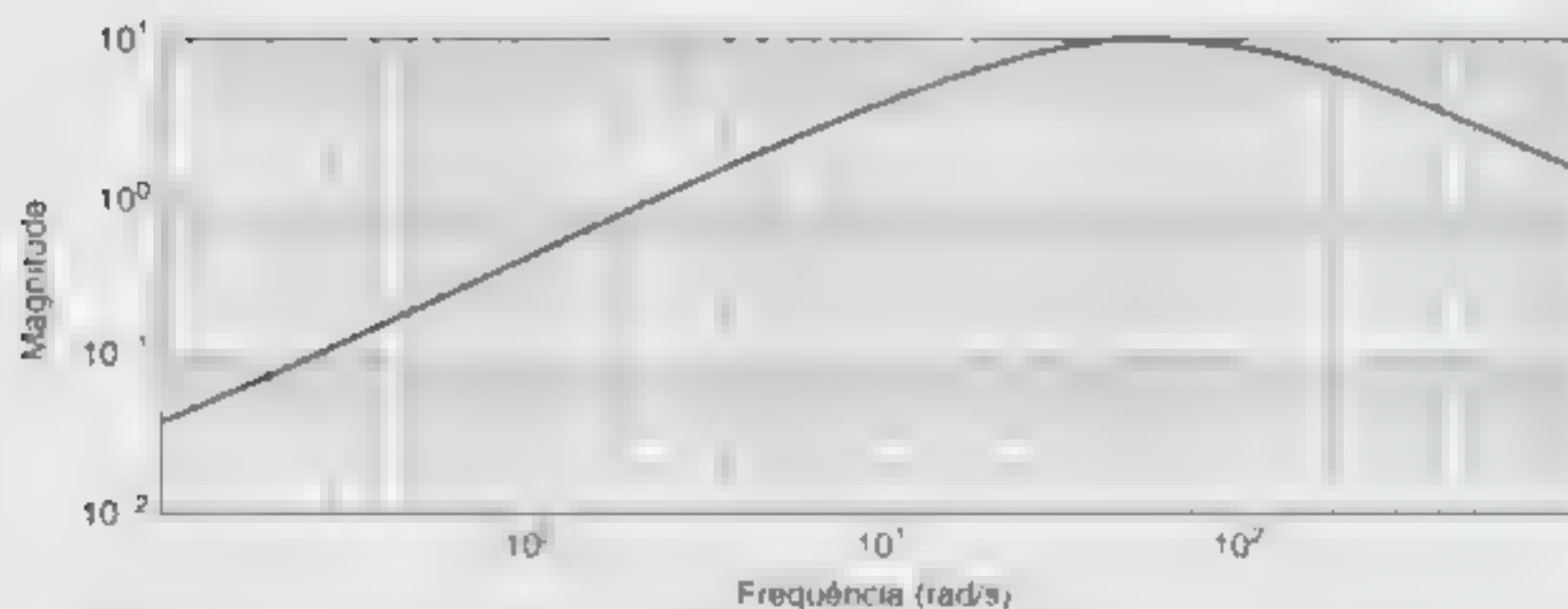
Utilizando os valores dos componentes, essa equação fica

$$V_o = \left(\frac{(j\omega)(37,95 \times 10^{-3})}{(j\omega)^2(2,53 \times 10^{-4}) + j\omega(37,95 \times 10^{-3}) + 1} \right) 10 \angle 0^\circ$$

As características de magnitude e fase resultantes são expressas em eixos de gráficos na escala semilogarítmica com a frequência indicada em um eixo logarítmico. Os gráficos obtidos para a variável V_o são mostrados na Fig. 12.5b.



(a)



(b)

Figura 12.5 (a) Rede *RLC* em série e (b) simulação de sua resposta no domínio da frequência.

Nas seções subsequentes será mostrado que a utilização de um gráfico semilogarítmico é muito útil na representação das respostas no domínio da frequência.

Como aplicação introdutória da análise e caracterização da resposta de um circuito a frequências variáveis, considera-se um amplificador estereó. Em particular, é estabelecida inicialmente a faixa de frequências na qual o amplificador deve operar e, em seguida, caracteriza-se exatamente que tipo de desempenho é esperado para esse circuito. A faixa de frequências do amplificador deve ser mais ampla do que a do ouvido humano, que aproximadamente situa-se entre 50 Hz e 15.000 Hz. Consequentemente, os amplificadores estéreos típicos são projetados para operar na faixa de frequências de 50 Hz a 20.000 Hz. Além disso, deseja-se preservar a fidelidade do sinal quando ele passa pelo amplificador. Assim, o sinal de saída deveria ser uma cópia exata do sinal de entrada multiplicado por um fator de ganho. Essa situação requer que o ganho seja independente da frequência ao longo da faixa de frequências especificada de 50 Hz a 20.000 Hz. Um esboço ideal desse requisito para um ganho de 1.000 é mostrado na Fig. 12.6, na qual a região média é definida como a parte da curva em que o ganho é constante e é limitada por dois pontos, que serão referidos como f_{BAIXA} e f_{ALTA} . Note, mais uma vez, que o eixo da frequência é logarítmico e, assim, a resposta em frequência é apresentada em um gráfico semilogarítmico.

Um modelo para o amplificador descrito graficamente pela curva da Fig. 12.6 é mostrado na Fig. 12.7a com o circuito equivalente no domínio da frequência apresentado na Fig. 12.7b.

Sendo a entrada um sinal senoidal em regime estacionário, pode-se utilizar a análise no domínio da frequência para obter o ganho

$$G(j\omega) = \frac{V_s(j\omega)}{V_F(j\omega)}$$

que, com a substituição de $j\omega$ por s , pode ser expresso como

$$G(s) = \frac{V_s(s)}{V_F(s)}$$

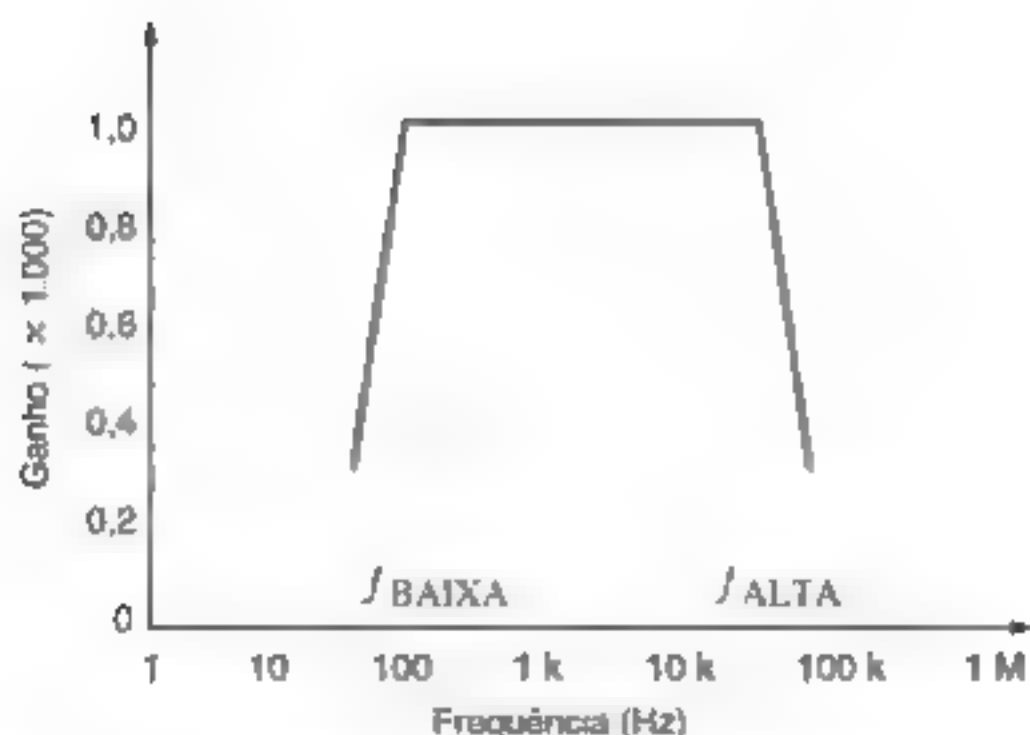


Figura 12.6 Requisitos da resposta em frequência de um amplificador.

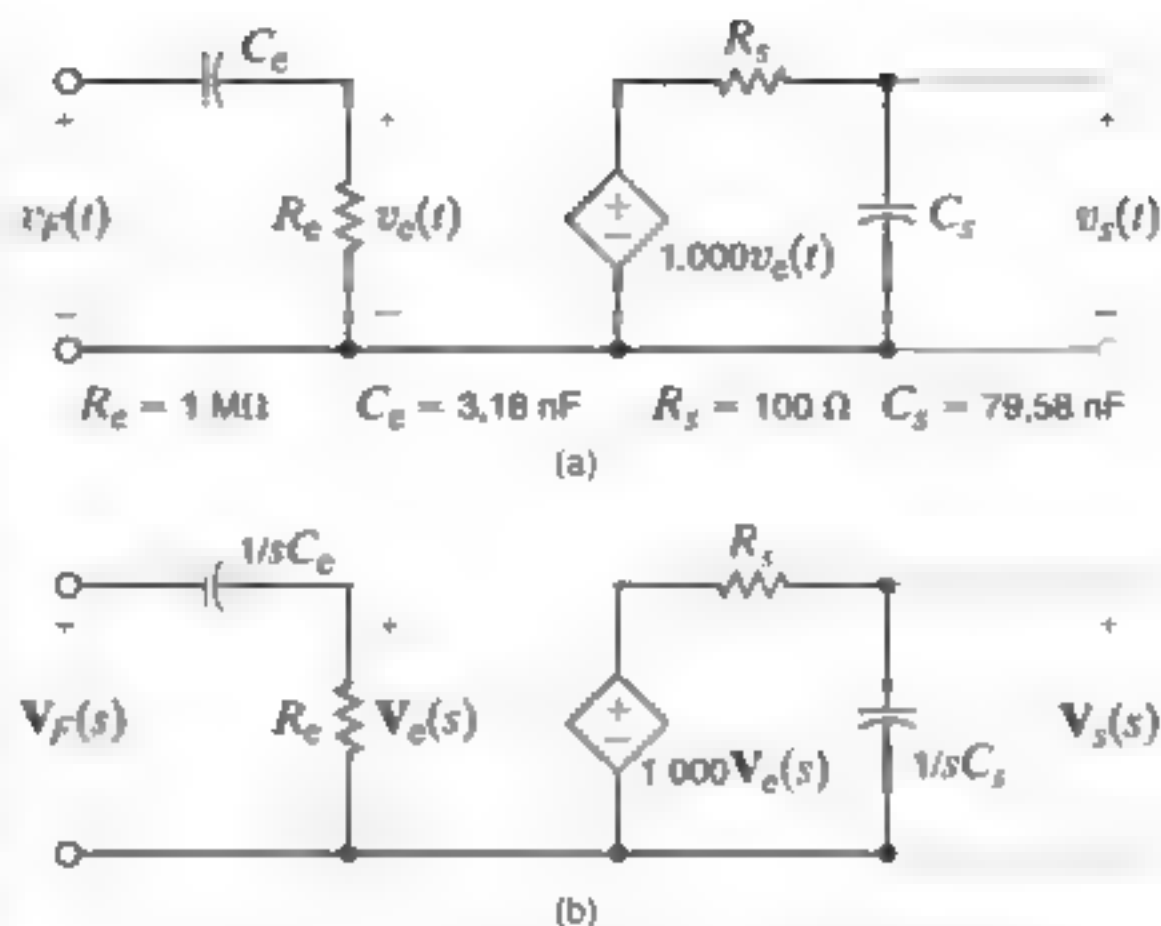


Figura 12.7 Rede equivalente de um amplificador.

Utilizando a divisão de tensão, obtém-se que o ganho é

$$\begin{aligned} G_p(s) &= \frac{V_s(s)}{V_F(s)} = \frac{V_c(s)}{V_F(s)} \frac{V_s(s)}{V_c(s)} \\ &= \left[\frac{R_e}{R_e + 1/sC_e} \right] (1000) \left[\frac{1/sC_s}{R_s + 1/sC_s} \right] \end{aligned}$$

ou

$$G_p(s) = \left[\frac{sC_e R_e}{1 + sC_e R_e} \right] (1000) \left[\frac{1}{1 + sC_s R_s} \right]$$

Utilizando os valores dos componentes mostrados na Fig. 12.7a, obtém-se

$$G_p(s) = \left[\frac{s}{s + 100\pi} \right] (1000) \left[\frac{40.000\pi}{s + 40.000\pi} \right]$$

em que 100π e 40.000π são os valores equivalentes de 50 Hz e 20.000 Hz, respectivamente. Uma vez que $s = j\omega$, a função da rede é, de fato, complexa. Um gráfico preciso de $G(s)$ é mostrado na Fig. 12.8, em que é superposta a curva esquemática da

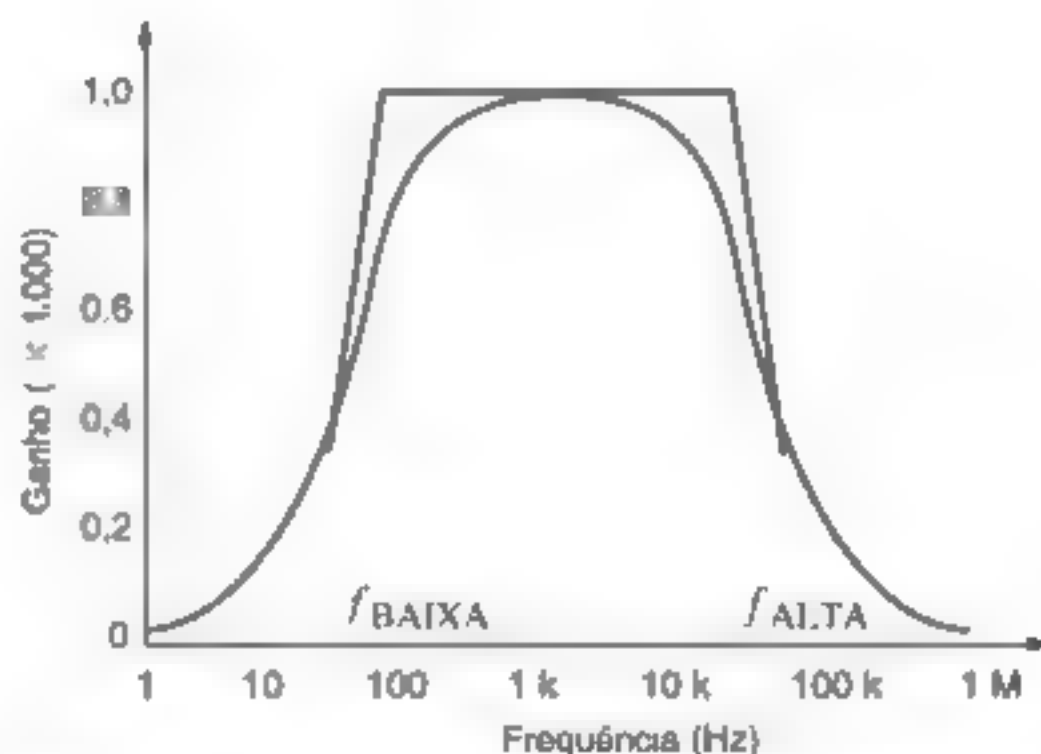


Figura 12.8 Ganhos exato e aproximado de um amplificador no domínio da frequência.

Fig. 12.6, A curva exata apresenta suaves transições em f_{BAIXA} e f_{ALTA} ; caso contrário, os gráficos seriam bastante coincidentes.

A expressão de $G_v(s)$ é examinada com mais detalhe relativamente à curva mostrada na Fig. 12.8. Admita que f esteja bem no meio da faixa de frequências; de modo que

$$f_{\text{BAIXA}} \ll f \ll f_{\text{ALTA}}$$

ou

$$100\pi \ll |s| \ll 40.000\pi$$

Nessas condições, a função representativa da rede fica

$$G_v(s) \approx \left[\frac{s}{s} \right] (1000) \left[\frac{1}{1 + 0} \right]$$

ou

$$G_v(s) = 1000$$

Assim, na região bem central da faixa, o ganho é constante. Todavia, se a frequência de excitação diminui no sentido de f_{BAIXA} , então o $|s|$ será comparável a 100π e

$$G_v(s) \approx \left[\frac{s}{s + 100\pi} \right] (1000)$$

Uma vez que $R_1 C_1 = 1/100\pi$, percebe-se que o capacitor C_1 é o responsável pela tendência de queda no ganho para baixas frequências. Analogamente, quando a frequência se aproxima de f_{ALTA} , o ganho tende a diminuir pela influência de C_2 .

Ao longo desse exemplo de amplificador, foi introduzido o conceito de redes dependentes da frequência de excitação e de-

monstrou-se que o desempenho das redes dependentes da frequência deve-se aos componentes reativos presentes na rede.

FUNÇÕES DE REDE Na seção anterior, foi introduzido o termo *ganho em tensão*, $G_v(s)$. Esse termo representa, na realidade, apenas uma das várias funções de rede, designada genericamente como $H(s)$, e define a razão entre a resposta e a entrada. Como a função descreve uma reação devida a uma excitação em algum outro ponto do circuito, as funções de rede são também chamadas de *funções de transferência*. Além disso, as funções de transferência não são limitadas às razões de tensão. Uma vez que nas redes elétricas as entradas e as saídas podem ser tanto tensões quanto correntes, existem quatro possíveis funções de rede, conforme listado na Tabela 12.1.

Existem também as *funções diretoras pontuais*, que são impedâncias ou admitâncias definidas em um único par de terminais. Por exemplo, a impedância de entrada de uma rede é uma função diretora pontual.

TABELA 12.1 Funções de transferência de redes

ENTRADA	SINAL	FUNÇÃO DE TRANSFERÊNCIA	SÍMBOLO
Tensão	Tensão	Ganho em tensão	$G_v(s)$
Corrente	Tensão	Transimpedância	$Z(s)$
Corrente	Corrente	Ganho em corrente	$G_i(s)$
Tensão	Corrente	Transadmitância	$Y(s)$

EXEMPLO 12.2

Deseja-se determinar a admitância de transferência $[I_2(s)/V_1(s)]$ e o ganho em tensão da rede mostrada na Fig. 12.9.

SOLUÇÃO

As equações de malha da rede são

$$(R_1 + sL)I_1(s) - sLI_2(s) = V_1(s)$$

$$sLI_1(s) + \left(R_2 + sL + \frac{1}{sC} \right) I_2(s) = 0$$

$$V_2(s) = I_2(s)R_2$$

A solução das equações para $I_2(s)$ fornece

$$I_2(s) = \frac{sLV_1(s)}{(R_1 + sL)(R_2 + sL + 1/sC) - s^2L^2}$$

Portanto, a admitância de transferência $[I_2(s)/V_1(s)]$ é

$$Y_T(s) = \frac{I_2(s)}{V_1(s)} = \frac{LCs^2}{(R_1 + R_2)LCs^2 + (L + R_1R_2C)s + R_1}$$

e o ganho em tensão é

$$G_v(s) = \frac{V_2(s)}{V_1(s)} = \frac{LCR_2s}{(R_1 + R_2)LCs^2 + (L + R_1R_2C)s + R_1}$$

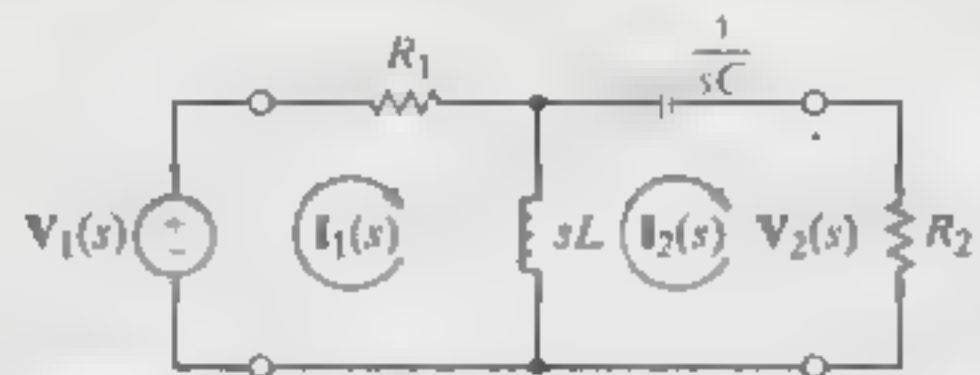


Figura 12.9 Circuito empregado no Exemplo 12.2.

POLOS E ZEROS Conforme indicado anteriormente, a função de rede pode ser expressa como a razão entre dois polinômios escritos segundo a variável s . Além disso, sendo os valores dos componentes do circuito, ou fontes controladas, números reais, pode-se notar que os coeficientes dos dois polinômios serão reais. Portanto, a função de rede pode ser expressa na forma

$$H(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{a_ms^m + a_{m-1}s^{m-1} + \dots + a_1s + a_0}{b_ns^n + b_{n-1}s^{n-1} + \dots + b_1s + b_0}$$

em que $N(s)$ é o polinômio de grau m do numerador e $D(s)$ é o polinômio de grau n do denominador. A Eq. (12.2) pode também ser escrita na forma

$$H(s) = K_0 \frac{(s - z_1)(s - z_2) \cdots (s - z_m)}{(s - p_1)(s - p_2) \cdots (s - p_n)} \quad 12.3$$

em que K_0 é uma constante, z_1, \dots, z_m são as raízes de $N(s)$, e p_1, \dots, p_n são as raízes de $D(s)$. Note que, se $s = z_1$, ou z_2, \dots, z_m , então $H(s)$ torna-se nulo e, assim, z_1, \dots, z_m são chamados de zeros da função de transferência. Analogamente, se $s = p_1$, ou

p_2, \dots, p_n , então $H(s)$ tende a infinito e, portanto, p_1, \dots, p_n são chamados de polos da função. Tanto os zeros quanto os polos podem, na realidade, ser complexos. Todavia, se forem complexos, eles devem ocorrer na forma de pares conjugados, uma vez que os coeficientes dos polinômios são reais. A representação da função de rede especificada na Eq. (12.3) é extremamente importante e geralmente é empregada para representar qualquer sistema linear invariante com o tempo. A importância dessa forma está no fato de as propriedades dinâmicas de um sistema poderem ser determinadas a partir da análise de seus polos.

Avaliação do Aprendizado

E12.1 Determine a impedância motriz pontual para a tensão $V_A(s)$ do amplificador mostrado na Fig. 12.7b.

RESPOSTA:

$$Z(s) = R + \frac{1}{sC_1} \left[1 + \left(\frac{100\pi}{s} \right) \right] \text{ M}\Omega$$

E12.2 Determine a localização dos polos e dos zeros, em hertz, e o valor de K_0 para a rede do amplificador mostrada na Fig. 12.7.

RESPOSTAS: $z_1 = 0 \text{ Hz (CC)}$,
 $p_1 = -50 \text{ Hz}$, $p_2 = -20.000 \text{ Hz}$
 e $K_0 = (4 \times 10^{-5}) \pi$.

E12.3 Determine a função de transferência em tensão $V_2(s)/V_1(s)$ em função da variável s para a rede mostrada na Fig. E12.3

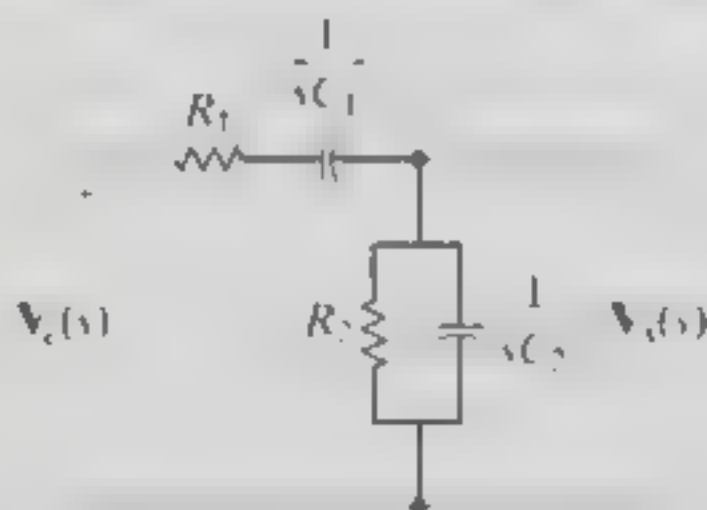


Figura E12.3

RESPOSTA:

$$\frac{s}{R_1 C_2 \left[s^2 + \frac{C_1 R_2 + C_2 R_2 + C_1 R_1}{R_1 R_2 C_1 C_2} s + \frac{1}{R_1 R_2 C_1 C_2} \right]}$$

12.2 Análise no Domínio da Frequência das Funções Senoidais

Embora existam casos específicos em que uma rede opera apenas com uma frequência (por exemplo, a rede de um sistema de potência), em geral, há interesse em se conhecer o comportamento da rede em função da frequência. Na análise em regime estacionário de uma rede sujeita a uma excitação senoidal, a função de rede pode ser expressa como

$$H(j\omega) = M(\omega)e^{j\phi(\omega)} \quad 12.4$$

em que $M(\omega) = |H(j\omega)|$ e $\phi(\omega)$ é a fase. Um gráfico dessas duas funções, que são geralmente chamadas de *características de magnitude e fase*, mostra a forma pela qual a resposta varia com a frequência de entrada ω . Será ilustrado agora o procedimento utilizado para se realizar uma análise no domínio da frequência,

avaliando-se apenas a função para algumas frequências na faixa de interesse.

RESPOSTA EM FREQUÊNCIA UTILIZANDO O DIAGRAMA DE BODE

Se as características da rede forem representadas através de gráficos que utilizam uma escala semilogarítmica (isto é, uma escala linear para as ordenadas e uma escala logarítmica para as abscissas), os gráficos resultantes são conhecidos como *diagramas de Bode* (uma homenagem a Hendrik W. Bode). Esse tipo de gráfico é uma ferramenta poderosa tanto na análise quanto no projeto de sistemas e redes cujo comportamento depende da frequência, como filtros, sintonizadores e amplificadores. Ao construir o gráfico, traça-se o valor de $20 \log_{10} M(\omega)$ versus $\log_{10}(\omega)$, em vez de $M(\omega)$ versus ω . A vantagem dessa técnica é que, em vez de marcar as características ponto a ponto, empregam-se aproximações retilíneas para obter a característica de forma mais eficiente. A ordenada utilizada para

a representação da magnitude é o decibel (dB). Essa unidade foi originalmente empregada para medir a razão de potências; isto é,

$$\text{número de dB} = 10 \log_{10} \frac{P_2}{P_1} \quad 12.5$$

Se as potências forem absorvidas por dois resistores iguais, então,

$$\begin{aligned} \text{número de dB} &= 10 \log_{10} \frac{V_2^2/R}{V_1^2/R} = 10 \log_{10} \frac{I_2^2 R}{I_1^2 R} \\ &= 20 \log_{10} \frac{V_2}{V_1} = 20 \log_{10} \frac{I_2}{I_1} \end{aligned} \quad 12.6$$

O termo "dB" ficou tão popular que é atualmente utilizado para razões entre tensões e entre correntes, conforme ilustrado na Eq. (12.6), sem considerar a impedância empregada em cada caso.

No caso do regime estacionário de uma entrada senoidal, $H(j\omega)$ na Eq. (12.3) pode ser expressa, geralmente, como

$$H(j\omega) = \frac{K_0(j\omega)^{\pm N} [1 + j\omega\tau] [1 + 2\zeta_3(j\omega\tau_3) + (j\omega\tau_3)^2] \cdots}{(1 + j\omega\tau_0) [1 + 2\zeta_b(j\omega\tau_b) + (j\omega\tau_b)^2] \cdots} \quad 12.7$$

Note que essa equação contém os seguintes fatores típicos:

1. Um fator independente da frequência $K_0 > 0$
2. Polos e zeros da forma $j\omega$ na origem; isto é, $(j\omega)^{+N}$ para os zeros e $(j\omega)^{-N}$ para os polos
3. Polos e zeros da forma $(1 + j\omega\tau)$
4. Polos ou zeros quadráticos da forma $1 + 2\zeta(j\omega\tau) + (j\omega\tau)^2$

O cálculo do logaritmo da magnitude da função $H(j\omega)$ na Eq. (12.7) fornece

$$\begin{aligned} 20 \log_{10} |H(j\omega)| &= 20 \log_{10} K_0 \pm 20N \log_{10} |j\omega| \\ &\quad + 20 \log_{10} |1 + j\omega\tau_1| \\ &\quad + 20 \log_{10} |1 + 2\zeta_3(j\omega\tau_3) + (j\omega\tau_3)^2| \\ &\quad + \cdots - 20 \log_{10} |1 + j\omega\tau_0| \\ &\quad - 20 \log_{10} |1 + 2\zeta_b(j\omega\tau_b) + (j\omega\tau_b)^2| \cdots \end{aligned} \quad 12.8$$

Note que foram utilizados os seguintes fatos: o logaritmo do produto de dois ou mais termos é igual à soma dos logaritmos dos termos individuais, o logaritmo do quociente de dois termos é igual à diferença dos logaritmos dos termos individuais e $\log_{10} A^n = n \log_{10} A$.

O ângulo de fase de $H(j\omega)$ é

$$\begin{aligned} \angle H(j\omega) &= 0 \pm N(90^\circ) + \tan^{-1} \omega\tau_1 + \tan^{-1} \left(\frac{2\zeta_3 \omega\tau_3}{1 - \omega^2\tau_3^2} \right) \\ &\quad + \cdots - \tan^{-1} \omega\tau_0 - \tan^{-1} \left(\frac{2\zeta_b \omega\tau_b}{1 - \omega^2\tau_b^2} \right) \end{aligned} \quad 12.9$$

As Eqs. (12.8) e (12.9) indicam que é possível traçar as curvas referentes a cada fator individualmente em um mesmo gráfico e, em seguida, somá-las algebricamente para obter a característica total do sistema. Alguns dos termos individuais são agora examinados e será mostrada uma maneira eficiente de traçá-los no diagrama de Bode.

Termo Constante O termo $20 \log_{10} K_0$ representa uma magnitude constante com desvio fase nulo (sem defasagem), conforme mostrado na Fig. 12.10a.

Polos ou Zeros na Origem Os polos e os zeros na origem são da forma $(j\omega)^{\pm N}$, em que o sinal + é utilizado para um zero e o sinal - é utilizado para um polo. A magnitude dessa função é $\pm 20N \log_{10} \omega$, que representa uma linha reta em uma carta semi-logarítmica com inclinação de $\pm 20N$ dB/década; isto é, o valor será alterado de um fator de $20N$ a cada vez que a frequência é multiplicada por 10, e a fase dessa função é uma constante igual a $\pm N(90^\circ)$. As características de magnitude e fase para polos e zeros na origem são mostradas nas Figs. 12.10b e c, respectivamente.

Polo ou Zero Simples Aproximações lineares podem ser empregadas quando um único polo ou um único zero da forma

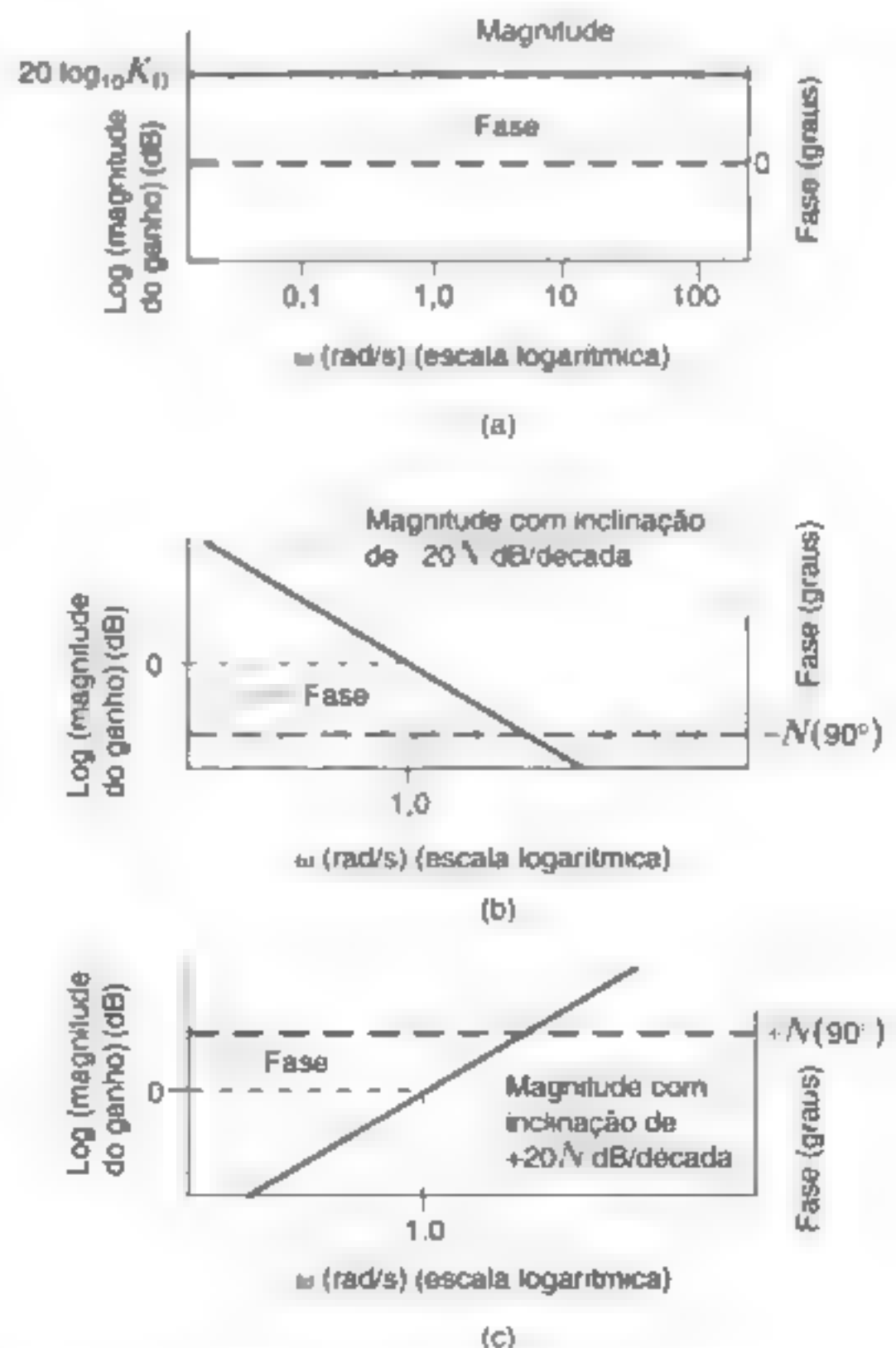


Figura 12.10 Magnitude e fase de um termo constante, e polos e zeros na origem.

$(1 + j\omega\tau)$ está presente na função de rede. Para $\omega\tau \ll 1$, $(1 + j\omega\tau) \approx 1$ e, portanto, $20 \log_{10} |(1 + j\omega\tau)| = 20 \log_{10} 1 = 0$ dB. De modo similar, se $\omega\tau \gg 1$, então $(1 + j\omega\tau) \approx j\omega\tau$ e, assim, $20 \log_{10} |(1 + j\omega\tau)| \approx 20 \log_{10} \omega\tau$. Portanto, para $\omega\tau \ll 1$ a resposta é 0 dB e para $\omega\tau \gg 1$ a resposta apresenta uma inclinação que é a mesma daquela referente a um único polo ou um único zero na origem. A interseção dessas duas assíntotas, uma para $\omega\tau \ll 1$ e uma para $\omega\tau \gg 1$, é o ponto em que $\omega\tau = 1$, ou $\omega = 1/\tau$, que é chamada de *frequência de corte*. Nessa frequência de corte, na qual $\omega = 1/\tau$, $20 \log_{10} |(1 + j1)| = 20 \log_{10} (2)^{1/2} = 3$ dB. Portanto, a curva real desvia-se da assíntota por 3 dB na frequência de corte. Pode ser mostrado que, para a metade e para o dobro da frequência de corte, os desvios são de 1 dB. O ângulo de fase associado a um único polo ou um único zero é $\phi = \tan^{-1} \omega\tau$, que é uma curva de arco-tangente. Portanto, a defasagem é de 45° na frequência de corte e de $26,6^\circ$ e $63,4^\circ$ nas frequências iguais à metade e ao dobro da frequência de corte, respectivamente. A curva real da magnitude para um polo dessa forma é mostrada na Fig. 12.11a. Para um zero, a curva de magnitude e a assíntota para $\omega\tau \gg 1$ possuem uma inclinação positiva, e a curva de fase se estende de 0° a $+90^\circ$, conforme mostrado na Fig. 12.11b. Caso múltiplos polos ou zeros da forma $(1 + j\omega\tau)^N$

estejam presentes, a inclinação da assíntota de altas frequências será multiplicada por N , o desvio entre a curva real e a assíntota na frequência de corte será igual a $3N$ dB, e a curva de fase se estenderá de 0 a $N(90^\circ)$ e valerá $N(45^\circ)$ na frequência de corte.

Polos ou Zeros Quadráticos Os polos ou zeros quadráticos são da forma $1 + 2\zeta(j\omega\tau) + (j\omega\tau)^2$. Esse termo é dependente não só da frequência ω , como também do termo adimensional ζ , que é chamado de *fração de amortecimento*. Se $\zeta > 1$ ou $\zeta = 1$, as raízes serão reais e distintas ou reais e iguais, respectivamente, e esses dois casos já foram tratados. Se $\zeta < 1$, as raízes serão complexos conjugados e é esse o caso que será analisado agora. Seguindo o argumento anterior para um único polo ou um único zero, o logaritmo da magnitude de um fator quadrático é igual a 0 dB para $\omega\tau \ll 1$. Para $\omega\tau \gg 1$,

$$20 \log_{10} |1 - (\omega\tau)^2 + 2j\zeta(\omega\tau)| \approx 20 \log_{10} |(\omega\tau)^2| = 40 \log_{10} |\omega\tau|$$

e, portanto, para $\omega\tau \gg 1$, a inclinação da curva logarítmica representativa da magnitude apresenta um ganho de $+40$ dB/década para um zero quadrático e de -40 dB/década para um polo quadrático. Entre os dois extremos, $\omega\tau \ll 1$ e $\omega\tau \gg 1$, o comportamento da função depende da fração de amortecimento

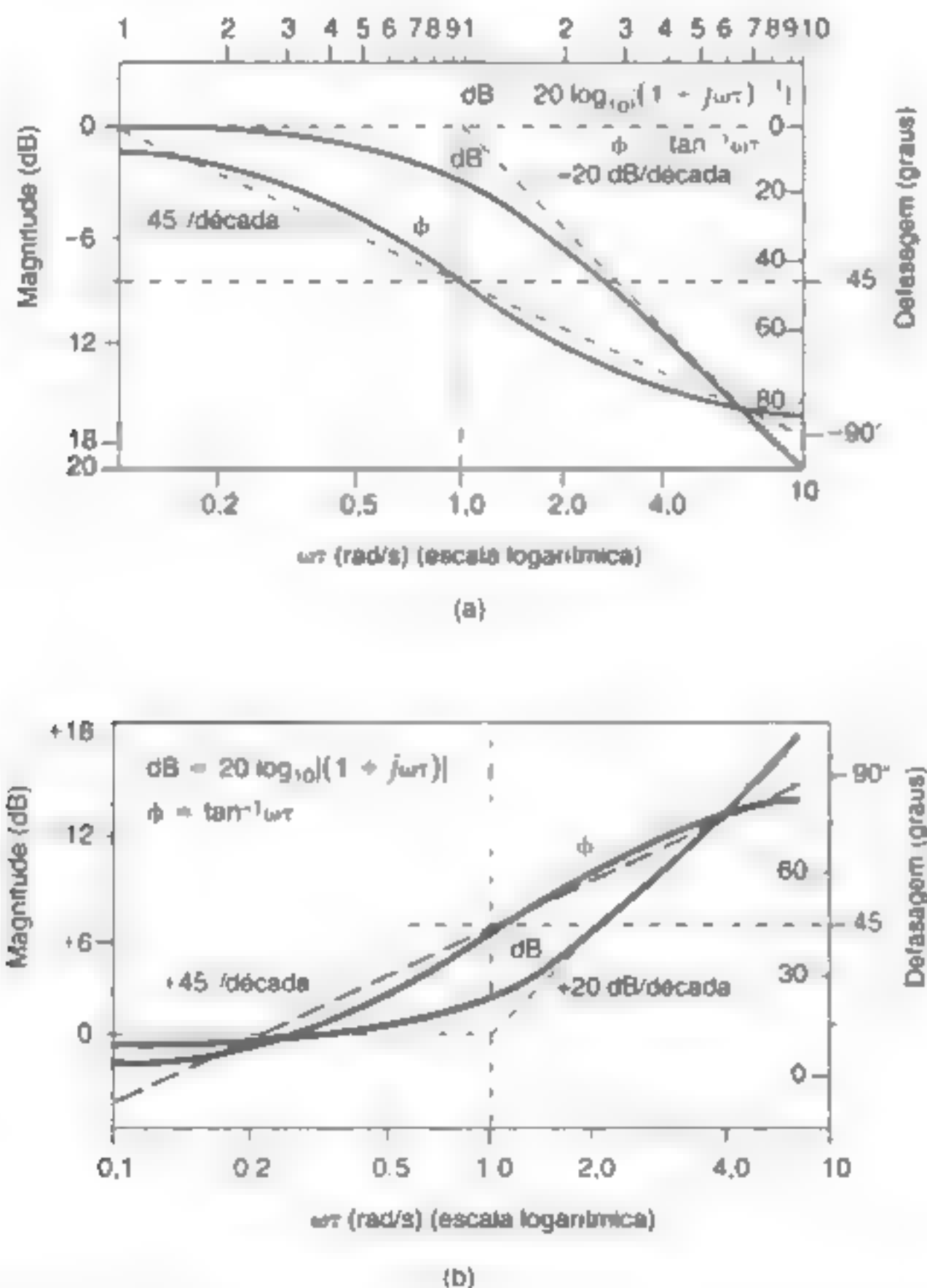


Figura 12.11 Diagramas de magnitude e fase (a) para um polo simples e (b) para um zero simples.

ζ . A Fig. 12.12a ilustra o modo pelo qual a curva logarítmica da magnitude para um *polo* quadrático varia em função da fração de amortecimento. A defasagem para o fator quadrático é $\tan^{-1} 2\zeta\omega\tau/[1 - (\omega\tau)^2]$. O gráfico ilustrando a fase para *polos* quadráticos é mostrado na Fig. 12.12b. Note que, nesse caso, a fase varia

de 0° , para frequências em que $\omega\tau \ll 1$, até -180° , para frequências em que $\omega\tau \gg 1$. Para os zeros quadráticos, as curvas de magnitude e fase são invertidas; isto é, a curva logarítmica da magnitude possui uma inclinação de $+40$ dB/década para $\omega\tau \gg 1$, e a curva de fase é de 0° para $\omega\tau \ll 1$ e $+180^\circ$ para $\omega\tau \gg 1$.

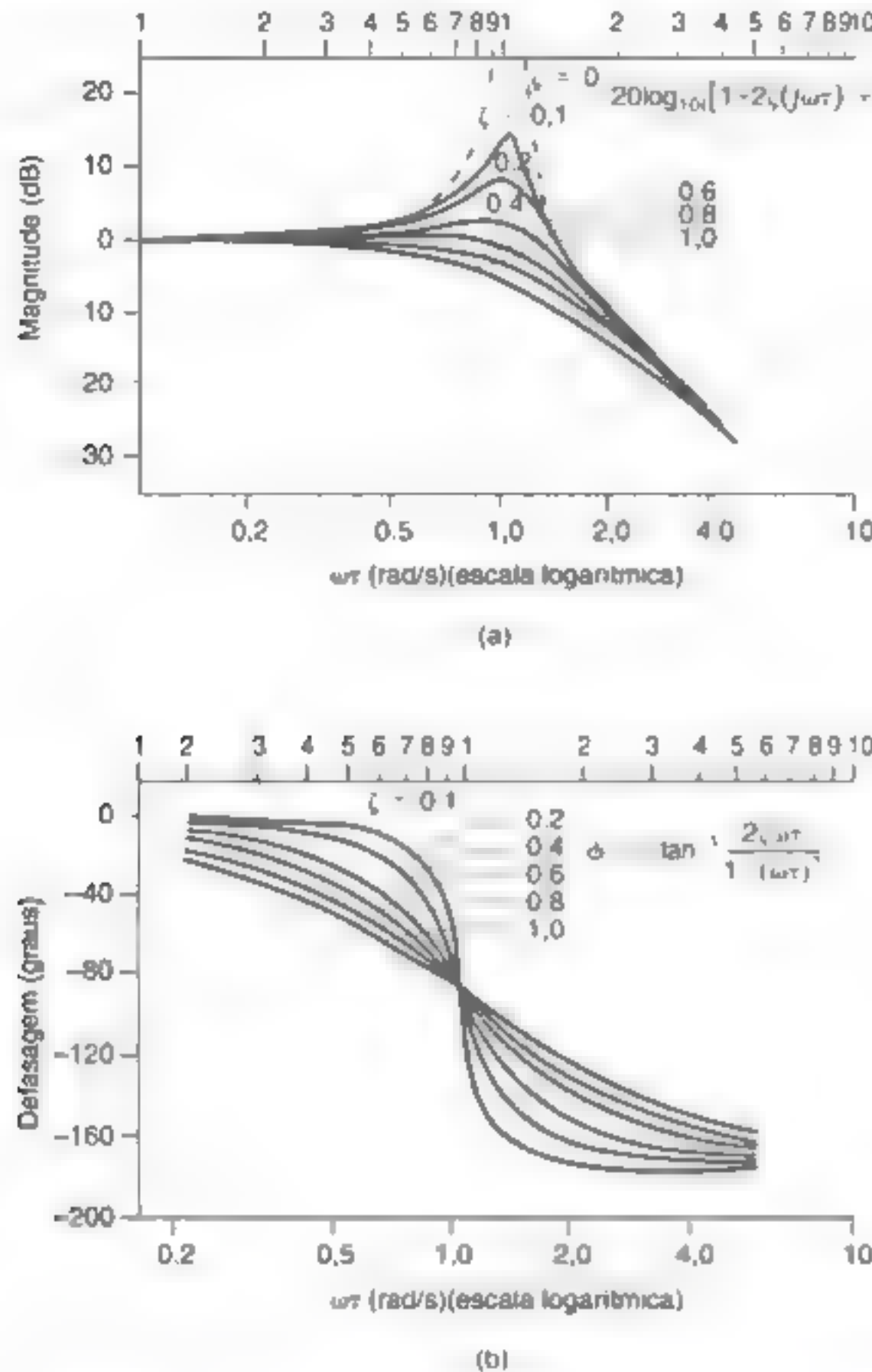


Figura 12.12 Diagramas de magnitude e fase para polos quadráticos.

EXEMPLO 12.3

Deseja-se gerar os gráficos com as curvas de magnitude e fase para a função de transferência

$$G_v(j\omega) = \frac{10(0.1j\omega + 1)}{(j\omega + 1)(0.02j\omega + 1)}$$

SOLUÇÃO

Note que essa função está na forma padronizada, uma vez que todos os termos estão na forma $(j\omega\tau + 1)$. Para se determinar as características combinadas da magnitude e da fase, serão

representados graficamente e de forma individual os termos assintóticos e, em seguida, estes serão somados conforme estabelecido pelas Eqs. (12.8) e (12.9). Considere, inicialmente, o gráfico da magnitude. Como $K_0 = 10$, $20 \log_{10} 10 = 20$ dB, que é uma constante independente da frequência, conforme mostrado na Fig. 12.13a. O zero da função de transferência contribui com um termo da forma $+20 \log_{10} |1 + 0.1j\omega|$, que vale 0 dB para $0.1\omega \ll 1$, apresenta uma inclinação de $+20$ dB/década para $0.1\omega \gg 1$, e possui uma frequência de corte em $\omega = 10$ rad/s. Os polos possuem frequências de corte em $\omega = 1$ e $\omega = 50$ rad/s. O polo com frequência de corte em $\omega = 1$ rad/s contribui com um termo da forma $-20 \log_{10} |1 + j\omega|$.

que é igual a 0 dB para $\omega \ll 1$ e apresenta uma inclinação de -20 dB/década para $\omega \gg 1$. Um argumento similar pode ser utilizado para o polo com frequência de corte em $\omega = 50$ rad/s. Esses fatores são todos mostrados individualmente na Fig. 12.13a.

Considere agora as curvas de fase individualmente. O termo K_0 não é uma função de ω e não contribui para a fase da função de transferência. A curva de fase para o zero é $+\tan^{-1} 0,1\omega$, que é uma curva do tipo arco-tangente que se estende de 0° para $0,1\omega \ll 1$ a $+90^\circ$ para $0,1\omega \gg 1$ e possui uma fase de $+45^\circ$ na frequência de corte. As curvas de fase para os dois polos são $-\tan^{-1} \omega$ e $-\tan^{-1} 0,02\omega$. O termo $-\tan^{-1} \omega$ é igual a

0° para $\omega \ll 1$, -90° para $\omega \gg 1$ e -45° na frequência de corte $\omega = 1$ rad/s. A curva de fase para o outro polo é construída de modo similar. Todas as curvas de fase são mostradas individualmente na Fig. 12.13a.

Conforme estabelecido nas Eqs. (12.8) e (12.9), as curvas de intensidade e de fase representativas da função de transferência como um todo são obtidas simplesmente pela soma dos termos individuais. As curvas resultantes são traçadas na Fig. 12.13b. Note que a curva de magnitude real (linha contínua) difere da aproximação por segmentos retilíneos (linha tracejada) em 3 dB nas frequências de corte e em 1 dB nas frequências iguais à metade e ao dobro das frequências de corte.

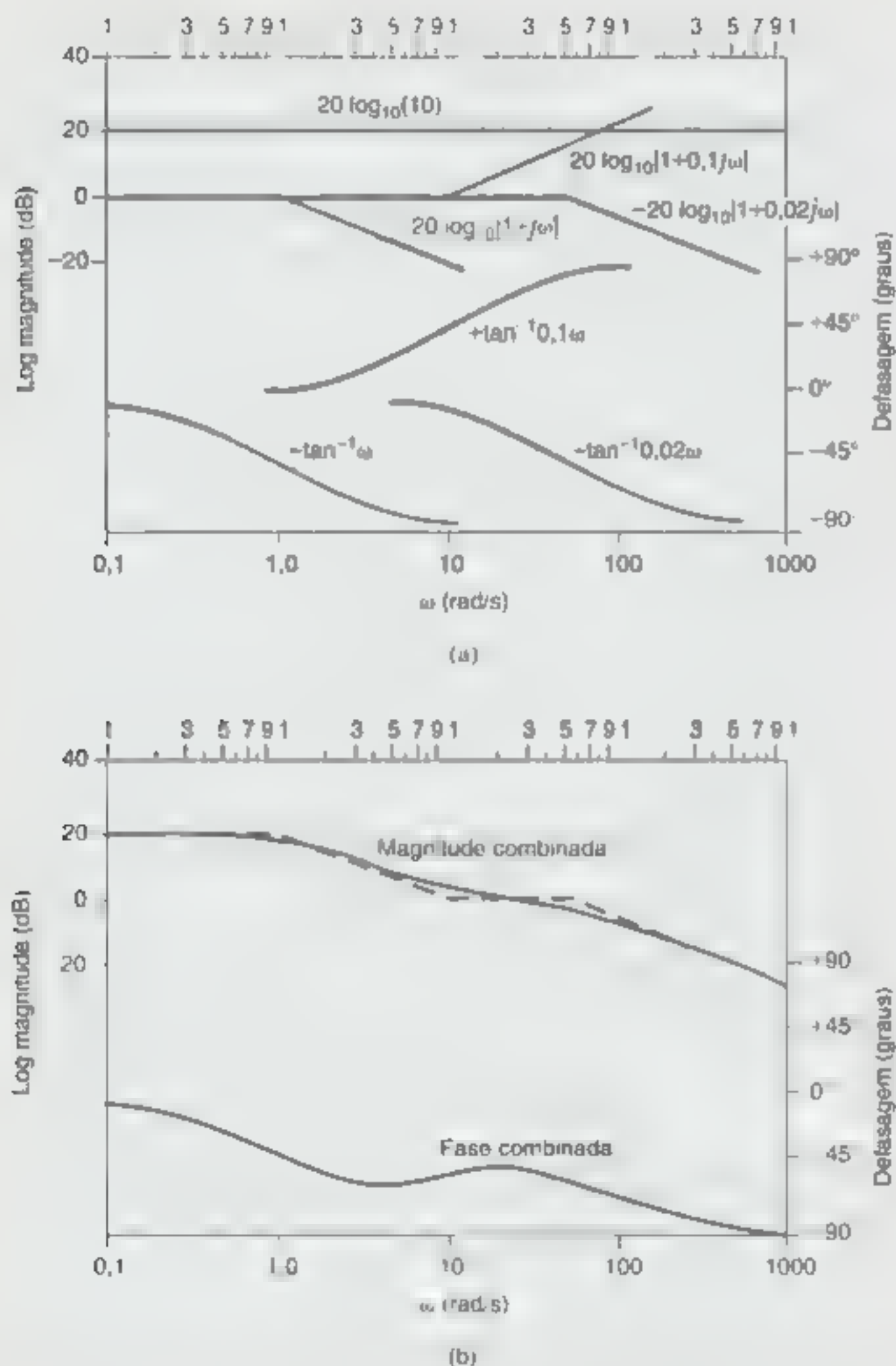


Figura 12.13 (a) Componentes de magnitude e fase para os polos e zeros da função de transferência do Exemplo 12.3; (b) Diagrama de Bode para a função de transferência do Exemplo 12.3.

EXEMPLO 12.4

Construa o diagrama de Bode para a seguinte função de transferência:

$$G_s(j\omega) = \frac{25(j\omega + 1)}{(j\omega)^2(0.1j\omega + 1)}$$

SOLUÇÃO

Novamente, todas as curvas referentes aos termos individuais tanto para magnitude quanto para fase são mostradas nos gráficos da Fig. 12.14a. A linha reta com inclinação de -40 dB/década é gerada pelo duplo polo na origem. Essa linha representa um gráfico de $-40 \log_{10} \omega$ versus ω e, portanto, passa por 0 dB em $\omega = 1$ rad/s. A fase para o duplo polo é constante e vale -180° para todas as frequências. Os demais termos são representados conforme ilustrado no Exemplo 12.3.

Os gráficos representativos da combinação de todas as curvas são mostrados na Fig. 12.14b. Mais uma vez, eles são obtidos pela simples soma dos termos individuais apresentados na Fig. 12.14a. Note que para frequências $\omega \ll 1$, a inclinação da curva representativa da magnitude é de -40 dB/década. Em $\omega = 1$ rad/s, que é a frequência de corte do zero, a curva de magnitude muda sua inclinação para -20 dB/década. Em $\omega = 10$ rad/s, que é a frequência de corte do polo, a inclinação da curva de magnitude retorna para -40 dB/década.

A curva de fase combinada parte de -180° devido ao duplo zero na origem. Uma vez que a primeira frequência de corte encontrada é um zero, a curva de fase sofre uma defasagem no sentido de -90° . Entretanto, antes de a curva combinada atingir o ângulo de -90° , o polo com frequência de corte $\omega = 10$ rad/s começa a defasar a curva combinada trazendo-a novamente para a fase de -180° .

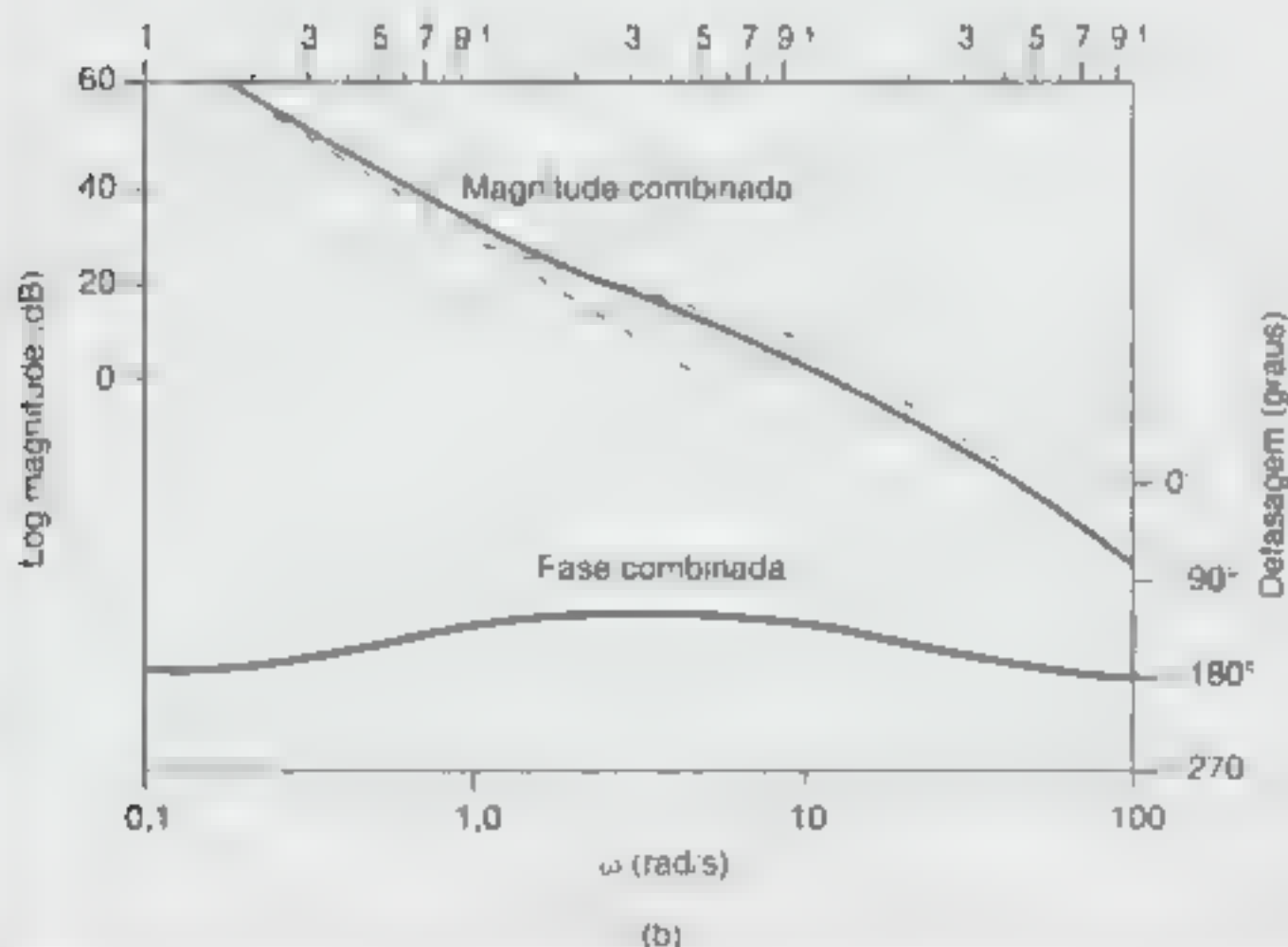
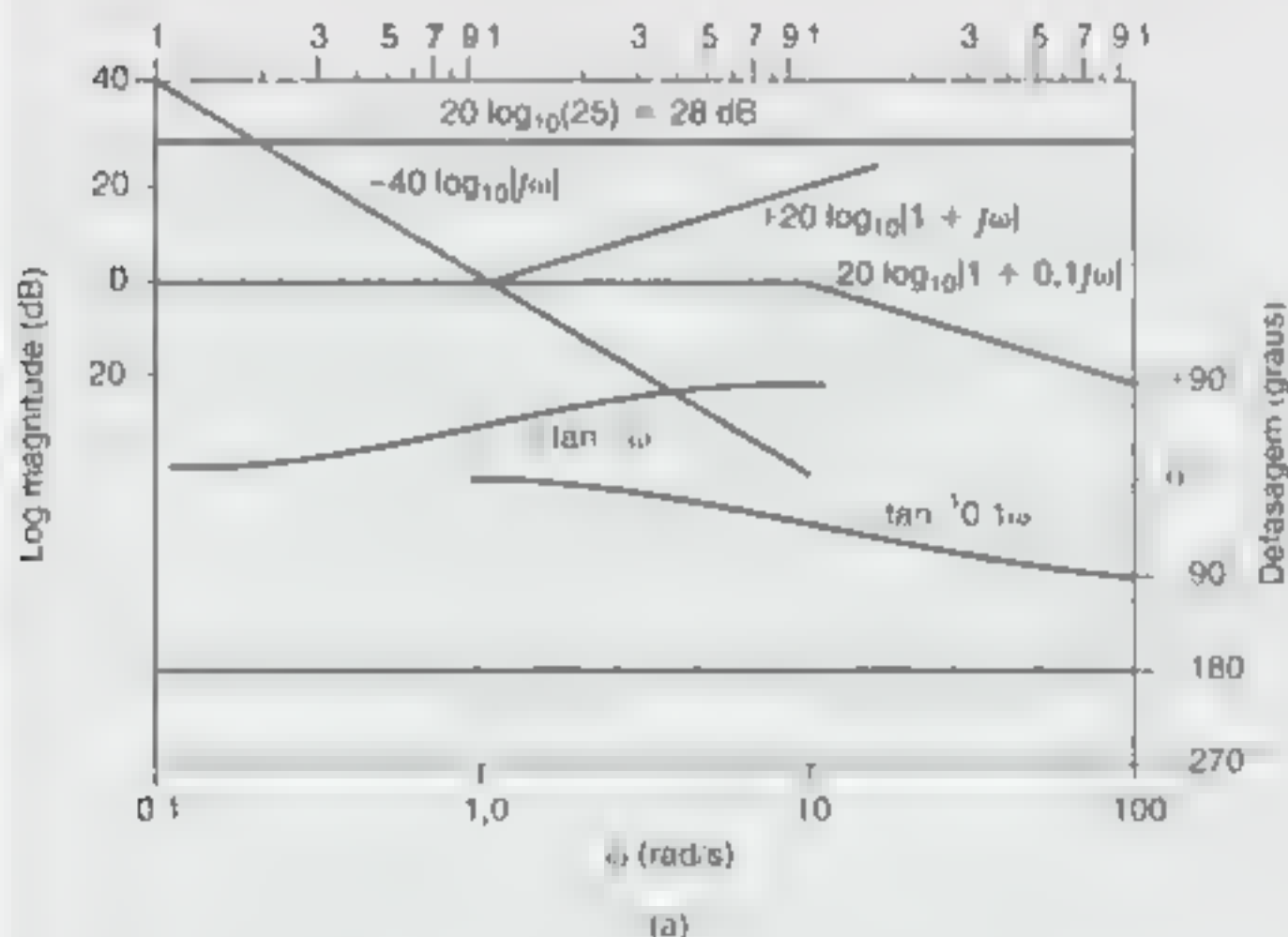


Figura 12.14 (a) Componentes de magnitude e fase para os polos e zeros da função de transferência do Exemplo 12.4; (b) Diagrama de Bode para a função de transferência do Exemplo 12.4.

O Exemplo 12.4 mostra um modo direto de se construir o gráfico referente à forma $K_0/(j\omega)^N$. Para os termos dessa forma, a curva com inclinação inicial de $-20N$ dB/década intercepta o eixo de 0 dB na frequência de $(K_0)^{1/N}$ rad/s; isto é, $-20 \log_{10} |K_0/(j\omega)^N| = 0$ dB implica $K_0/(j\omega)^N = 1$ e, portanto, $\omega = (K_0)^{1/N}$ rad/s. Note que a inclinação projetada da curva da magnitude no Exemplo 12.4 intercepta o eixo 0 dB em uma frequência $\omega = (25)^{1/2} = 5$ rad/s.

Analogamente, pode ser mostrado que para os termos da forma $K_0(j\omega)^N$, a inclinação inicial de $+20N$ dB/década intercepta o eixo 0 dB a uma frequência $\omega = (1/K_0)^{1/N}$ rad/s; isto é, $+20 \log_{10} |K_0(j\omega)^N| = 0$ dB implica $K_0(j\omega)^N = 1$ e, portanto, $\omega = (1/K_0)^{1/N}$ rad/s.

A aplicação dos conceitos que acabaram de ser mostrados permite traçar normalmente o diagrama da magnitude de uma função de transferência em uma única etapa.

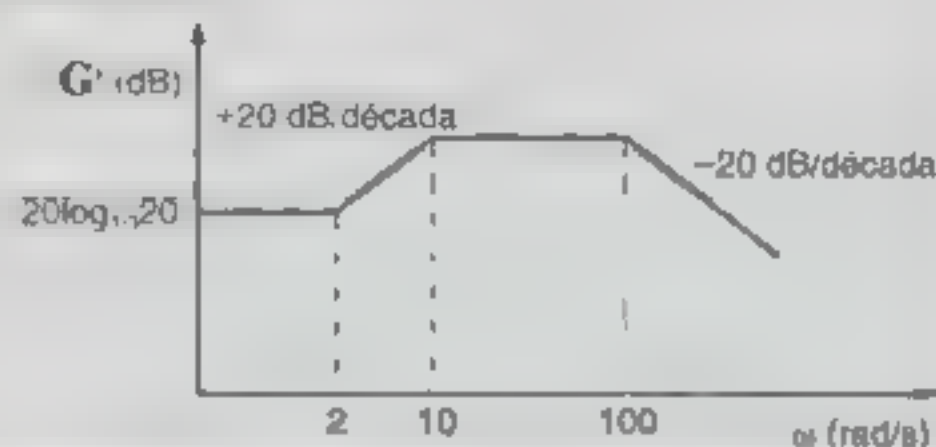
Avaliação do Aprendizado

E12.4 Esboce o diagrama de Bode para a magnitude e indique os valores de todas as inclinações e dos pontos característicos da função

$$G(j\omega) = \frac{10^4(j\omega + 2)}{(j\omega + 10)(j\omega + 100)}$$

Figura E12.4

RESPOSTA:

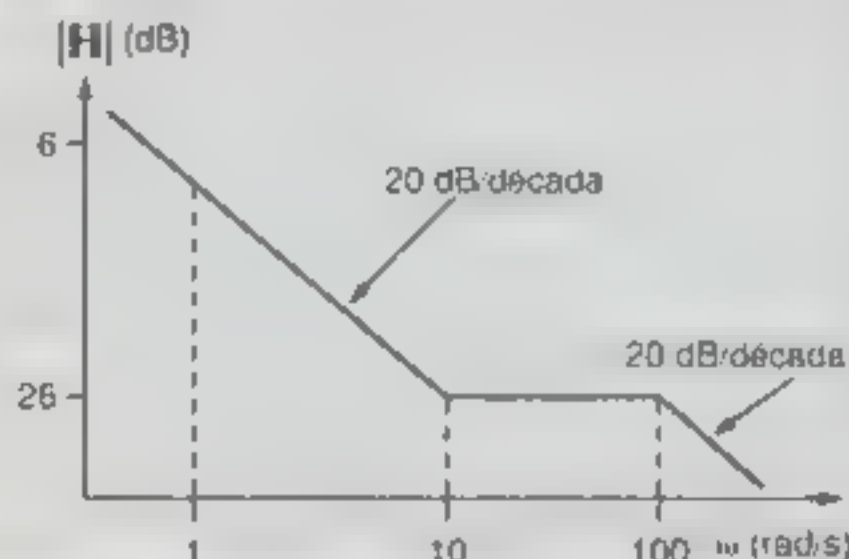


E12.5 Esboce o diagrama de Bode para a magnitude da função de transferência:

$$H(j\omega) = \frac{5(j\omega + 10)}{j\omega(j\omega + 100)}$$

Figura E12.5

RESPOSTA:

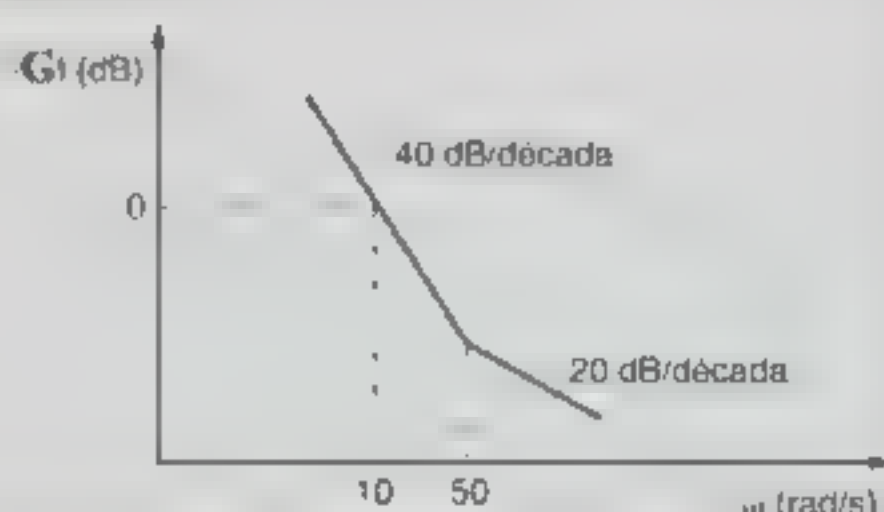


E12.6 Esboce o diagrama de Bode para a magnitude e indique os valores de todas as inclinações e dos pontos característicos da função

$$G(j\omega) = \frac{100(0,02j\omega + 1)}{(j\omega)^2}$$

Figura E12.6

RESPOSTA:

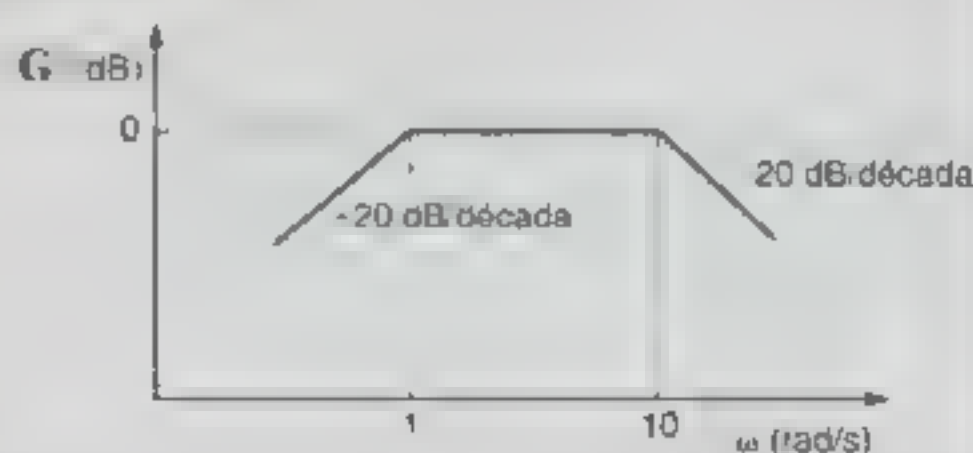


E12.7 Esboce o diagrama de Bode para a magnitude e indique os valores de todas as inclinações e dos pontos característicos da função

$$G(j\omega) = \frac{10j\omega}{(j\omega + 1)(j\omega + 10)}$$

Figura E12.7

RESPOSTA:



EXEMPLO 12.5

Deseja-se construir o diagrama de Bode para a seguinte função de transferência:

$$G_v(j\omega) = \frac{25j\omega}{(j\omega + 0.5)[(j\omega)^2 + 4j\omega + 100]}$$

SOLUÇÃO

Expressando essa função na forma padrão, obtém-se

$$G_v(j\omega) = \frac{0.5j\omega}{(2j\omega + 1)[(j\omega/10)^2 + j\omega/25 + 1]}$$

O diagrama de Bode é mostrado na Fig. 12.15. A inclinação inicial da curva para baixas frequências é de +20 dB/década devido ao zero na origem e essa inclinação intercepta a linha de 0 dB na frequência $\omega = 1/K_0 = 2$ rad/s. Em $\omega = 0.5$ rad/s, a inclinação muda de +20 dB/década para 0 dB/década devido à

presença do polo com frequência de corte $\omega = 0.5$ rad/s. O termo quadrático possui uma frequência de centro $\omega = 10$ rad/s (isto é, $\tau = 1/10$). Como

$$2\zeta\tau = \frac{1}{25}$$

e

$$\tau = 0.1$$

então

$$\zeta = 0.2$$

O traçado da curva apresentada na Fig. 12.12a com fração de amortecimento $\zeta = 0.2$ na frequência de centro $\omega = 10$ rad/s completa a curva da magnitude combinada para a função de transferência.

A curva de fase para as baixas frequências iniciais corresponde a um ângulo de +90°, devido ao zero na origem. Essa curva, a curva de fase para um único polo e a curva de fase para o termo quadrático, conforme definido na Fig. 12.12b, são combinadas resultando na curva de fase composta.

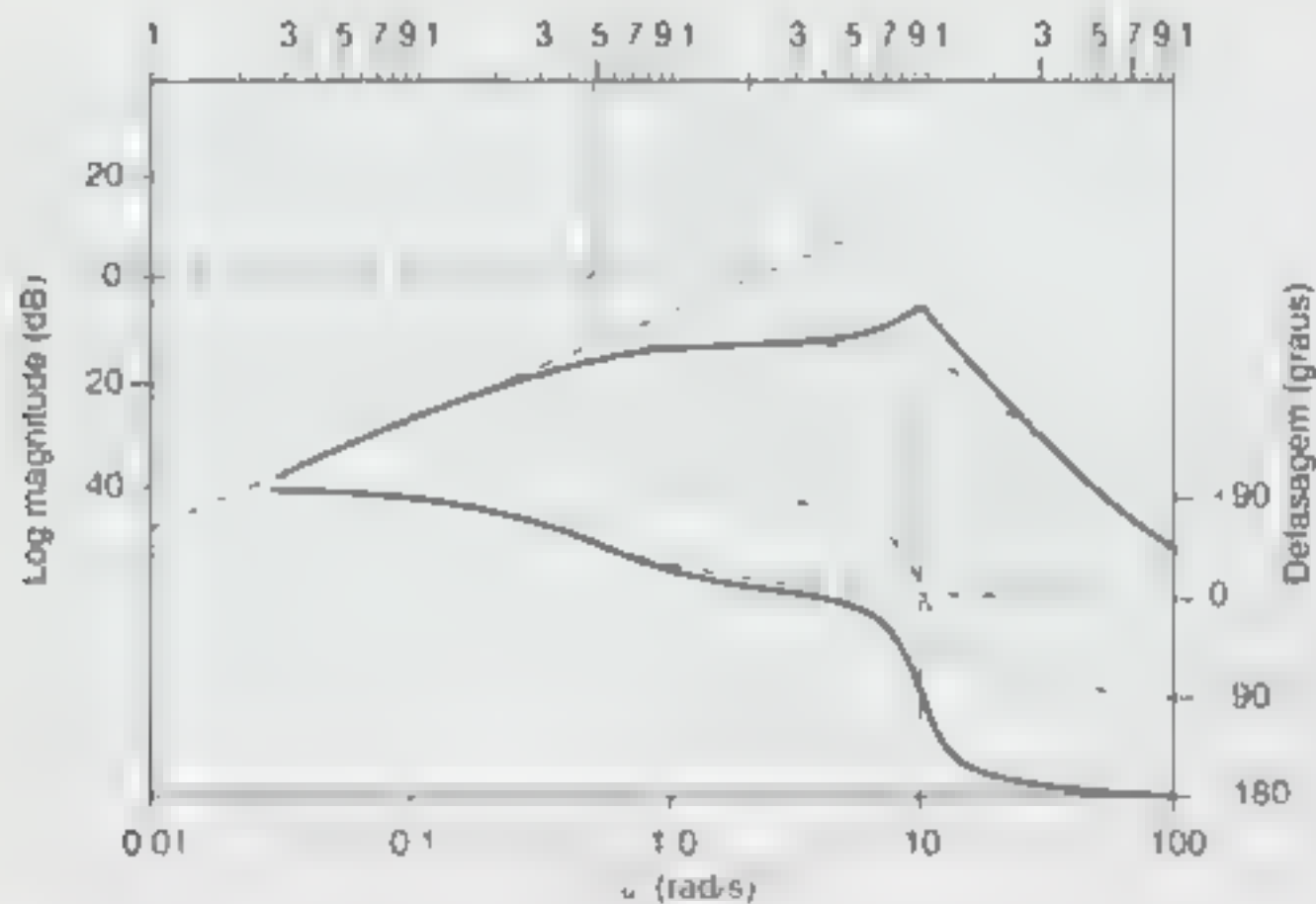


Figura 12.15 Diagrama de Bode para a função de transferência do Exemplo 12.5.

Avaliação do Aprendizado

E12.8 Dada a função $G(j\omega)$ a seguir, esboce sua curva de magnitude em um diagrama de Bode e indique todas as inclinações e pontos característicos.

$$G(j\omega) = \frac{0.2(j\omega + 1)}{j\omega[(j\omega/12)^2 + j\omega/36 + 1]}$$

RESPOSTA

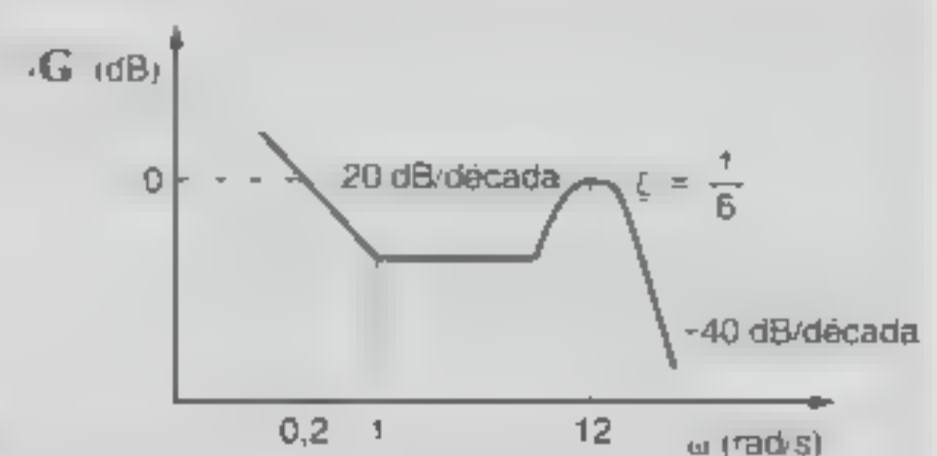


Figura E12.8

DETERMINAÇÃO DA FUNÇÃO DE TRANSFERÊNCIA A PARTIR DO DIAGRAMA DE BODE O exemplo a seguir mostrará o procedimento de obtenção.

EXEMPLO 12.6

Dada a característica assintótica da magnitude mostrada na Fig. 12.16, deseja-se determinar a função de transferência, $G_v(j\omega)$.

SOLUÇÃO

Uma vez que a inclinação inicial é de 0 dB/década e o nível da magnitude é de 20 dB, o fator K_0 pode ser obtido pela expressão

$$20 \text{ dB} = 20 \log_{10} K_0$$

e, assim,

$$K_0 = 10$$

A inclinação de -20 dB/década que parte de $\omega = 0,1 \text{ rad/s}$ indica que o primeiro polo possui uma frequência de corte em $\omega = 0,1 \text{ rad/s}$ e, portanto, um dos fatores no denominador é $(10j\omega + 1)$. A inclinação varia de +20 dB/década em $\omega = 0,5 \text{ rad/s}$, indicando que existe um zero presente com uma frequência de corte em $\omega = 0,5 \text{ rad/s}$ e, portanto, o numerador possui um fator de $(2j\omega + 1)$. Dois polos adicionais estão presentes com frequências de corte em $\omega = 2 \text{ rad/s}$ e $\omega = 20 \text{ rad/s}$. Portanto, a função de transferência composta é

$$G_v(j\omega) = \frac{10(2j\omega + 1)}{(10j\omega + 1)(0,5j\omega + 1)(0,05j\omega + 1)}$$

Observe cuidadosamente as possíveis ramificações desse exemplo visando o projeto de redes.

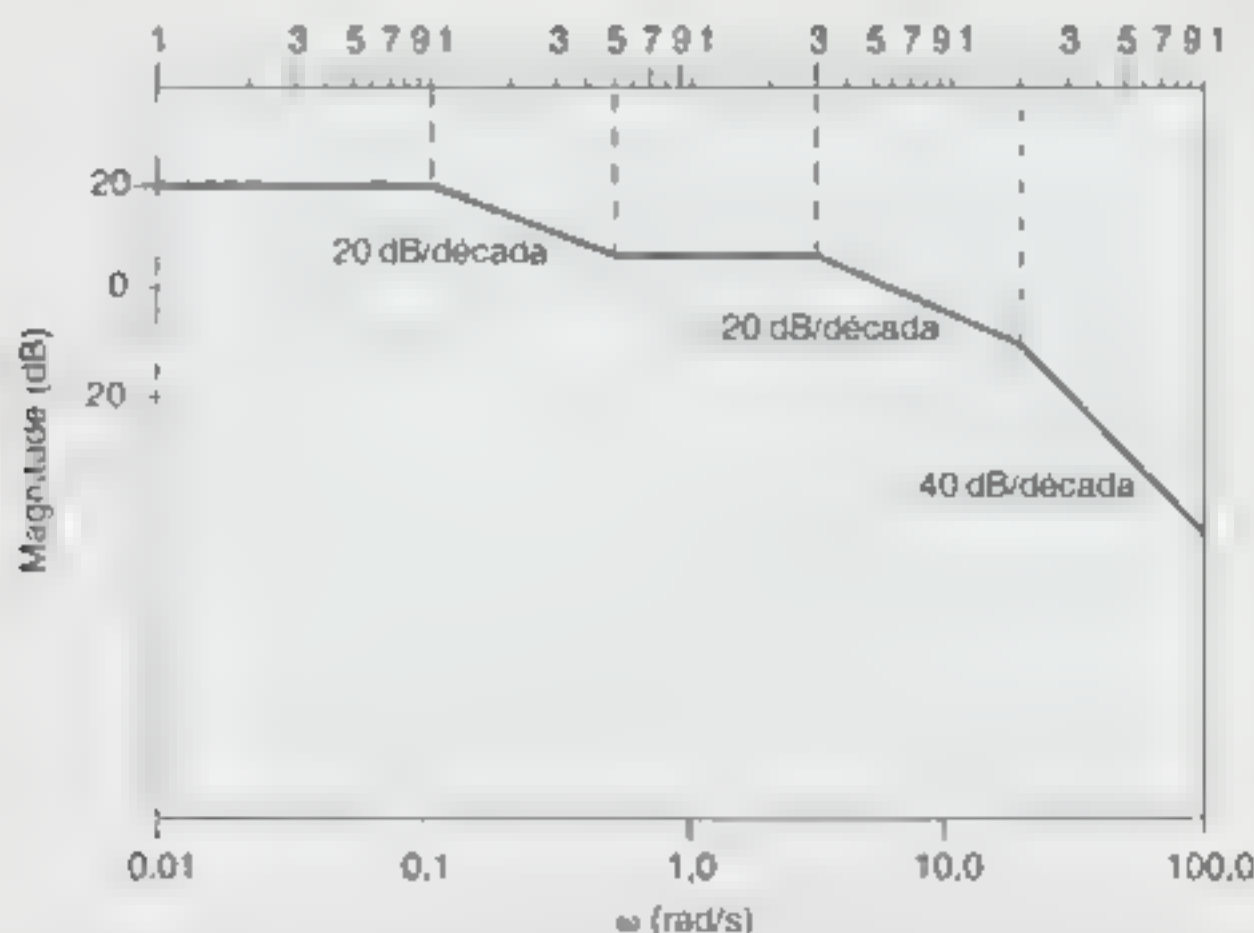


Figura 12.16 Diagrama de magnitude por segmentos de reta do Exemplo 12.6.

Avaliação do Aprendizado

E12.9 Determine a função de transferência $G(j\omega)$ considerando que a aproximação por linhas retas da magnitude para essa função é a mostrada na Fig. E12.9.

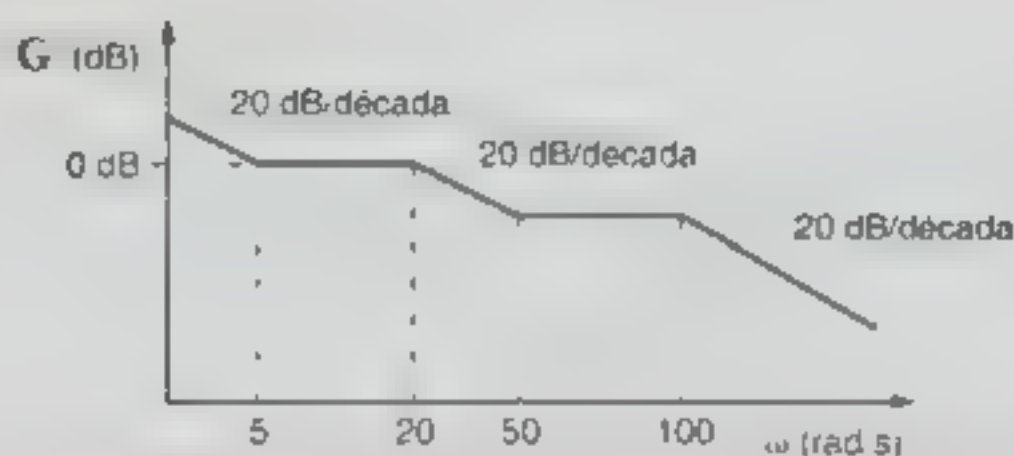


Figura E12.9

RESPOSTA:

$$G(j\omega) = \frac{5 \left(\frac{j\omega}{5} + 1 \right) \left(\frac{j\omega}{50} + 1 \right)}{j\omega \left(\frac{j\omega}{20} + 1 \right) \left(\frac{j\omega}{100} + 1 \right)}$$

E12.10 Obtenha $H(j\omega)$ considerando a curva de magnitude mostrada na Fig. E12.10.

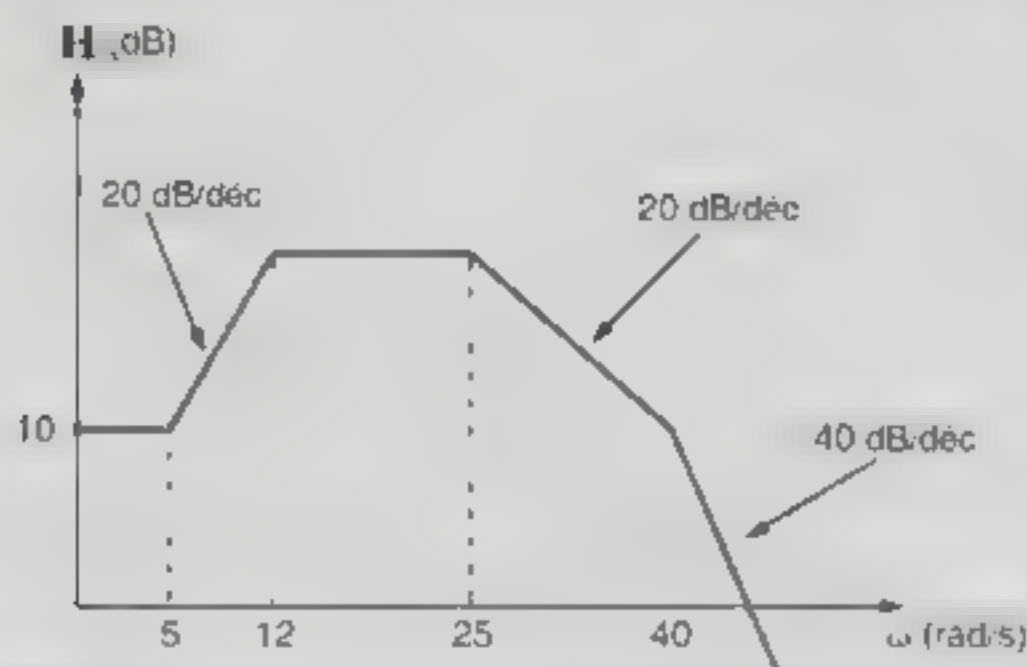


Figura E12.10

RESPOSTA:

$$H(j\omega) = 0.3162 \left(\frac{j\omega}{5} + 1 \right) \left(\frac{j\omega}{25} + 1 \right) \left(\frac{j\omega}{40} + 1 \right)$$

12.3 Circuitos Ressonantes

RESSONÂNCIA DE REDES COM COMPONENTES EM SÉRIE

A Fig. 12.17 mostra um circuito com características de frequências extremamente importantes. A impedância de entrada do circuito RLC é obtida por

$$Z(j\omega) = R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C} = R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) \quad 12.10$$

O termo imaginário será nulo se

$$\omega L - \frac{1}{\omega C} = 0$$

O valor de ω que satisfaz a essa equação é

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad 12.11$$

e com esse valor de ω a impedância do circuito fica

$$Z(j\omega_0) = R \quad 12.12$$

Essa frequência ω_0 , para a qual a impedância do circuito é um número real puro, é também chamada de *frequência de ressonância*, e o circuito, ao operar nessa frequência, é dito estar em

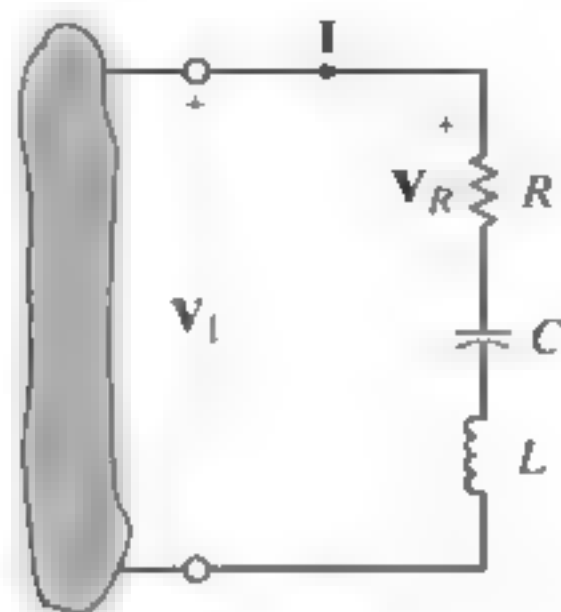


Figura 12.17 Circuitos RLC em série.

ressonância. A ressonância é um fenômeno muito importante nos projetos de engenharia. Por exemplo, os engenheiros ao projetarem o sistema de controle de atitude dos veículos espaciais da série Saturno tiveram que se certificar de que a frequência do sistema de controle não estimulava as frequências (ressonantes) de flexão do corpo do veículo. A excitação das frequências de flexão do veículo poderia causar oscilações que, ao permanecerem sem o devido monitoramento, resultariam no aumento das tensões no material até que o veículo, finalmente, poderia sofrer um dano em sua estrutura.

A ressonância também pode ser benéfica, como, por exemplo, na definição da intensidade e do tom dos sons a serem reproduzidos por instrumentos musicais de corda e de sopro.

Na ressonância, a tensão e a corrente estão em fase e, portanto, o ângulo de fase é nulo e o fator de potência é unitário. Na ressonância, a impedância é mínima e, portanto, a corrente é máxima para uma dada tensão. A Fig. 12.18 ilustra a resposta em frequência do circuito RLC em série. Note que em baixas frequências a impedância do circuito em série é dominada pelo termo capacitivo, e em altas frequências, a impedância é dominada pelo termo indutivo.

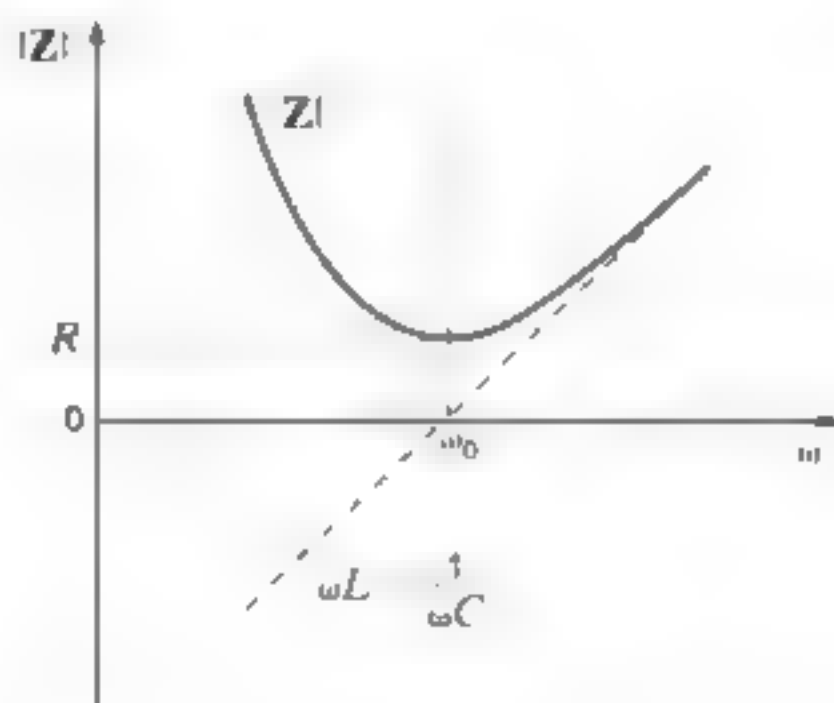


Figura 12.18 Resposta em frequência de um circuito RLC em série.

A ressonância pode ser vista por outra perspectiva – a do diagrama fasor. No circuito em série, a corrente é comum a todos os componentes. Portanto, a corrente é empregada como referência. O diagrama fasor é mostrado na Fig. 12.19 para três valores de frequência: $\omega < \omega_0$, $\omega = \omega_0$ e $\omega > \omega_0$.

No caso em que $\omega < \omega_0$, $V_C > V_L$, θ_Z é negativo e a tensão V_1 se atrasa em relação à corrente. Se $\omega = \omega_0$, $V_L = V_C$, θ_Z é nulo e a tensão V_1 está em fase com a corrente. Se $\omega > \omega_0$, $V_L > V_C$, θ_Z é positivo e a tensão V_1 se adianta em relação à corrente.

Para o circuito em série, define-se o comumente denominado *fator de qualidade* Q como

$$Q = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{1}{\omega_0 C R} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} \quad 12.13$$

Q é um fator muito importante nos circuitos ressonantes e suas ramificações serão ilustradas no decorrer desta seção.

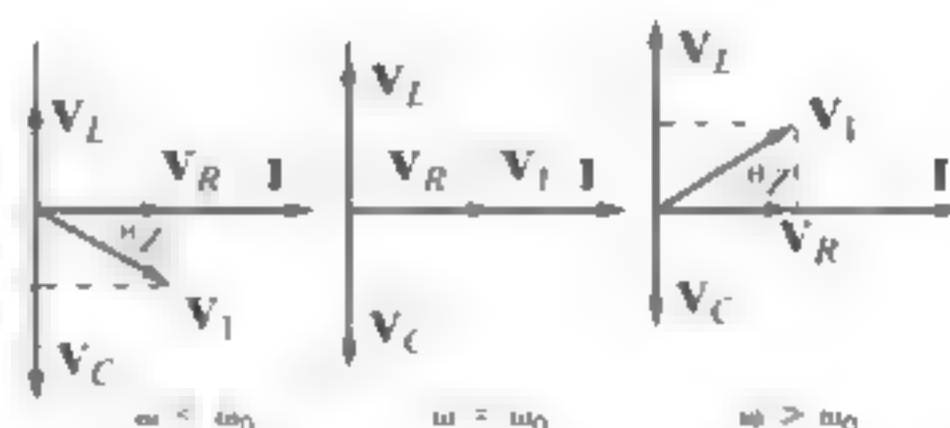


Figura 12.19 Diagramas fasores do circuito RLC em série.

EXEMPLO 12.7

Considere a rede mostrada na Fig. 12.20. Seja a determinação da frequência de ressonância, da tensão entre os terminais de cada componente na condição de ressonância e do valor do fator de qualidade.

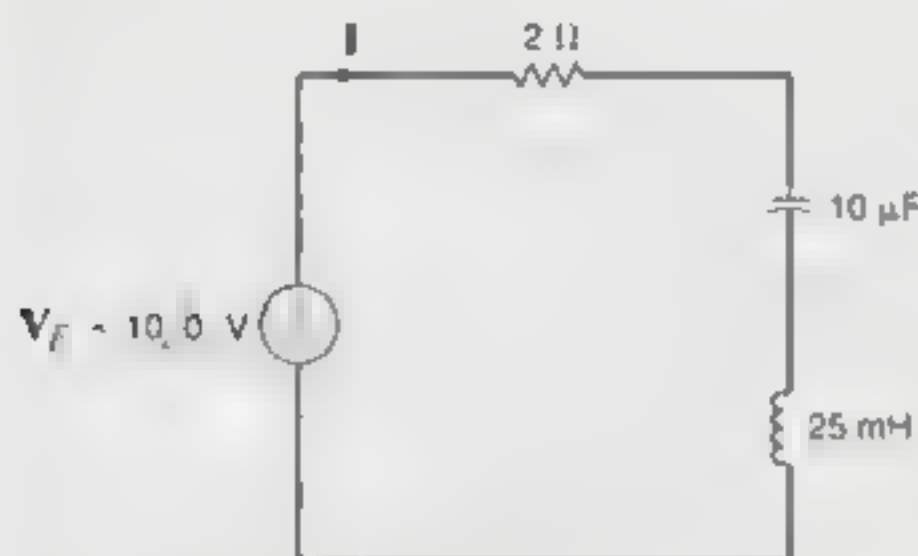


Figura 12.20 Circuito em série.

SOLUÇÃO

A frequência de ressonância é obtida a partir da expressão

$$\begin{aligned} \omega_0 &= \frac{1}{\sqrt{LC}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{(25)(10^{-3})(10)(10^{-6})}} \\ &= 2000 \text{ rad/s} \end{aligned}$$

A essa frequência de ressonância, tem-se

$$I = \frac{V}{Z} = \frac{V}{R} = 5 \angle 0^\circ \text{ A}$$

Portanto,

$$V_R = (5 \angle 0^\circ)(2) = 10 \angle 0^\circ \text{ V}$$

$$V_L = j\omega_0 L I = 250 \angle 90^\circ \text{ V}$$

$$V_C = \frac{I}{j\omega_0 C} = 250 \angle -90^\circ \text{ V}$$

Observe a magnitude das tensões entre os terminais do indutor e do capacitor em relação à tensão de entrada. Note também que essas tensões são iguais e estão defasadas de 180° uma em relação à outra. Portanto, o diagrama fasor para essa condição é o mostrado na Fig. 12.19 para $\omega = \omega_0$. O fator de qualidade Q obtido a partir da Eq. (12.13) vale

$$Q = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{(2)(10^3)(25)(10^{-3})}{2} = 25$$

As tensões entre os terminais do indutor e do capacitor podem ser escritas em função de Q como

$$|V_L| = \omega_0 L |I| = \frac{\omega_0 L}{R} |V_F| = Q |V_F|$$

e

$$|V_C| = \frac{|I|}{\omega_0 C} = \frac{1}{\omega_0 C R} |V_F| = Q |V_F|$$

Essa análise indica que, para uma dada corrente, existe uma tensão de ressonância elevada entre os terminais do indutor e do capacitor que é igual ao produto de Q pela tensão aplicada.

EXEMPLO 12.8

No laboratório de circuitos de uma universidade, os estudantes são solicitados a construir uma rede RLC que apresente o fenômeno da ressonância a uma frequência $f = 1000 \text{ Hz}$, a partir de

um indutor de $0,02 \text{ H}$ cujo fator de qualidade Q é de 200. Um dos estudantes produziu o circuito mostrado na Fig. 12.21, em que a resistência interna do indutor é representada por R .

Considerando que o capacitor escolhido para demonstrar a ressonância foi um capacitor constituído de papel impreg-

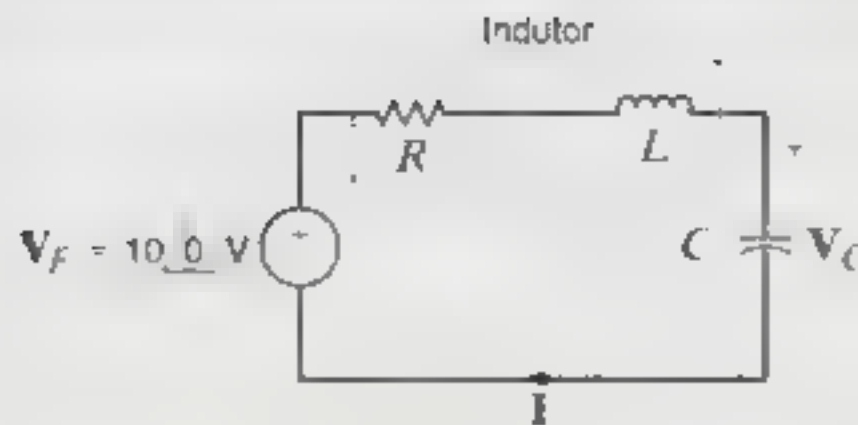


Figura 12.21 Rede ressonante RLC em série.

nado em óleo e que opera a uma tensão nominal de 300 V, determine os parâmetros da rede e o efeito da escolha desse capacitor.

SOLUÇÃO

Para que a ressonância ocorra a 1.000 Hz, o estudante obteve o valor do capacitor necessário utilizando a expressão

$$\omega_r = 2\pi f_r = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

que fornece

$$C = 1,27 \mu\text{F}$$

O estudante selecionou um capacitor constituído de papel impregnado em óleo que opera a uma tensão nominal de 300 V. O valor do resistor foi obtido utilizando a expressão para Q , isto é,

$$Q = \frac{\omega_r L}{R} = 200$$

ou

$$R = 1,59 \Omega$$

Na ressonância, a corrente seria

$$I = \frac{V_F}{R}$$

ou

$$I = 6,28 / 0^\circ \text{ A}$$

Quando construída a rede, a corrente foi medida como apenas

$$I = 1 / 0^\circ \text{ mA}$$

Essa medida claramente indicou que a impedância vista pela fonte era referente a uma resistência de aproximadamente 10 k Ω , em vez de 1,59 Ω – uma diferença significativamente elevada. Suspeitando que o capacitor selecionado era a fonte do problema, o estudante calculou a tensão que deveria ser associada ao capacitor. Se operasse conforme previsto pelo projeto, na ressonância,

$$V_C = \frac{V_F}{R} \left(\frac{1}{j\omega C} \right) = QV_F$$

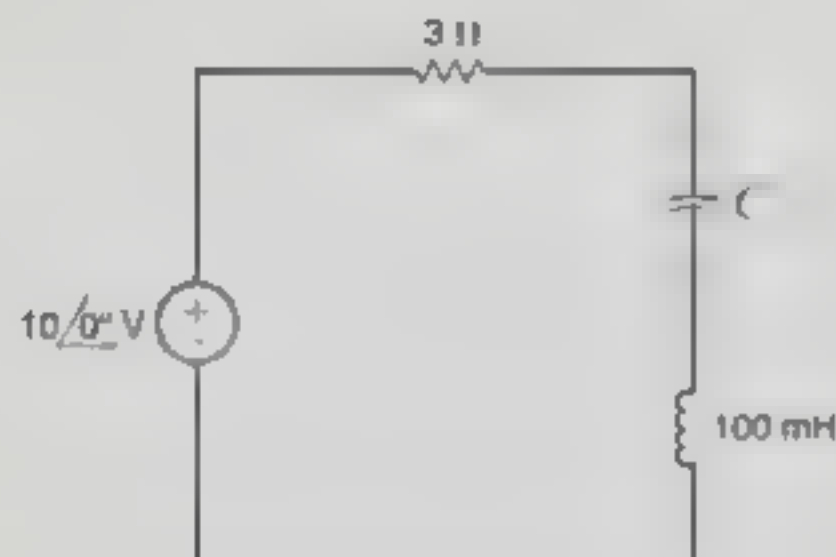
ou

$$V_C = 2000 / -90^\circ \text{ V}$$

que é uma tensão mais de seis vezes superior à tensão nominal do capacitor! Essa sobretensão danificou o capacitor de forma que ele não funcionou apropriadamente. Quando um novo capacitor foi selecionado e a fonte de tensão foi reduzida de um fator de 10, a rede apresentou um funcionamento compatível com um circuito de alto Q .

Avaliação do Aprendizado

E12.11 Dada a rede mostrada na Fig. E12.11, obtenha o valor de C que coloca o circuito em ressonância a 1.800 rad/s.



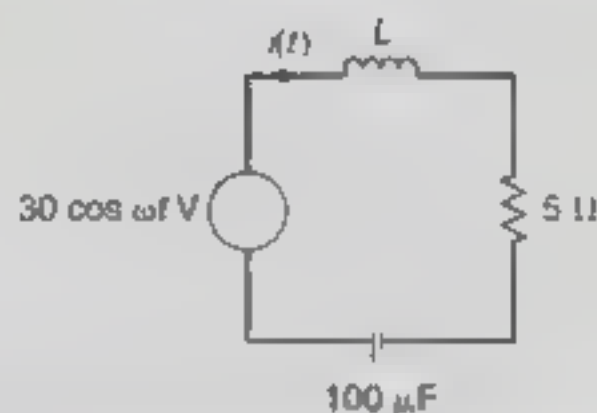
RESPOSTA: $C = 3,09 \mu\text{F}$.

Figura E12.11

E12.12 Dada a rede do Exercício de Avaliação E12.11, determine o fator de qualidade Q da rede e a magnitude da tensão entre os terminais do capacitor.

RESPOSTAS:
 $Q = 60$ e $|V_C| = 600 \text{ V}$.

E12.13 Considerando que a frequência de ressonância da rede mostrada na Fig. E12.13 é de 10.000 rad/s, determine a indutância L . Calcule também a corrente que passa pela rede na condição de ressonância, para $\omega_0/3$ e para $3\omega_0$.



RESPOSTAS:

$L = 100 \mu\text{H}$; $6 \cos 10.000t \text{ A}$;
 $5,294 \cos (3.333t + 28,07^\circ) \text{ A}$;
 $5,294 \cos (30.000t - 28,07^\circ) \text{ A}$.

Figura E12.13

Desenvolve-se agora uma expressão geral para a razão V_R/V_1 da rede mostrada na Fig. 12.17 em função de Q , ω e ω_0 . A impedância do circuito, dada pela Eq. (12.10), pode ser utilizada para determinar a admitância, que pode ser expressa como

$$\begin{aligned} Y(j\omega) &= \frac{1}{R[1 + j(1/R)(\omega L - 1/\omega C)]} \\ &= \frac{1}{R[1 + j(\omega L/R - 1/\omega CR)]} \\ &= \frac{1}{R[1 + jQ(\omega L/RQ - 1/\omega CRQ)]} \end{aligned} \quad 12.14$$

Utilizando o fato de que $Q = \omega_0 L/R = 1/\omega_0 CR$, a Eq. (12.14) fica

$$Y(j\omega) = \frac{1}{R[1 + jQ(\omega/\omega_0 - \omega_0/\omega)]} \quad 12.15$$

Como $I = YV_1$, e a tensão entre os terminais do resistor é $V_R = IR$, então,

$$\frac{V_R}{V_1} = G_v(j\omega) = \frac{1}{1 + jQ(\omega/\omega_0 - \omega_0/\omega)} \quad 12.16$$

e a magnitude e a fase são

$$M(\omega) = \frac{1}{[1 + Q^2(\omega/\omega_0 - \omega_0/\omega)^2]^{1/2}} \quad 12.17$$

e

$$\phi(\omega) = -\tan^{-1} Q \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right) \quad 12.18$$

As representações gráficas dessas funções são mostradas na Fig. 12.22. Note que o circuito tem a forma de um filtro passa-banda. A banda passante, conforme mostrado, é a diferença entre as duas frequências de meia potência. Sendo a potência proporcional ao quadrado da intensidade, essas duas frequências podem ser obtidas atribuindo-se à intensidade o valor $M(\omega) = 1/\sqrt{2}$ isto é,

$$\left| \frac{1}{1 + jQ(\omega/\omega_0 - \omega_0/\omega)} \right| = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Portanto,

$$Q \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right) = \pm 1 \quad 12.19$$

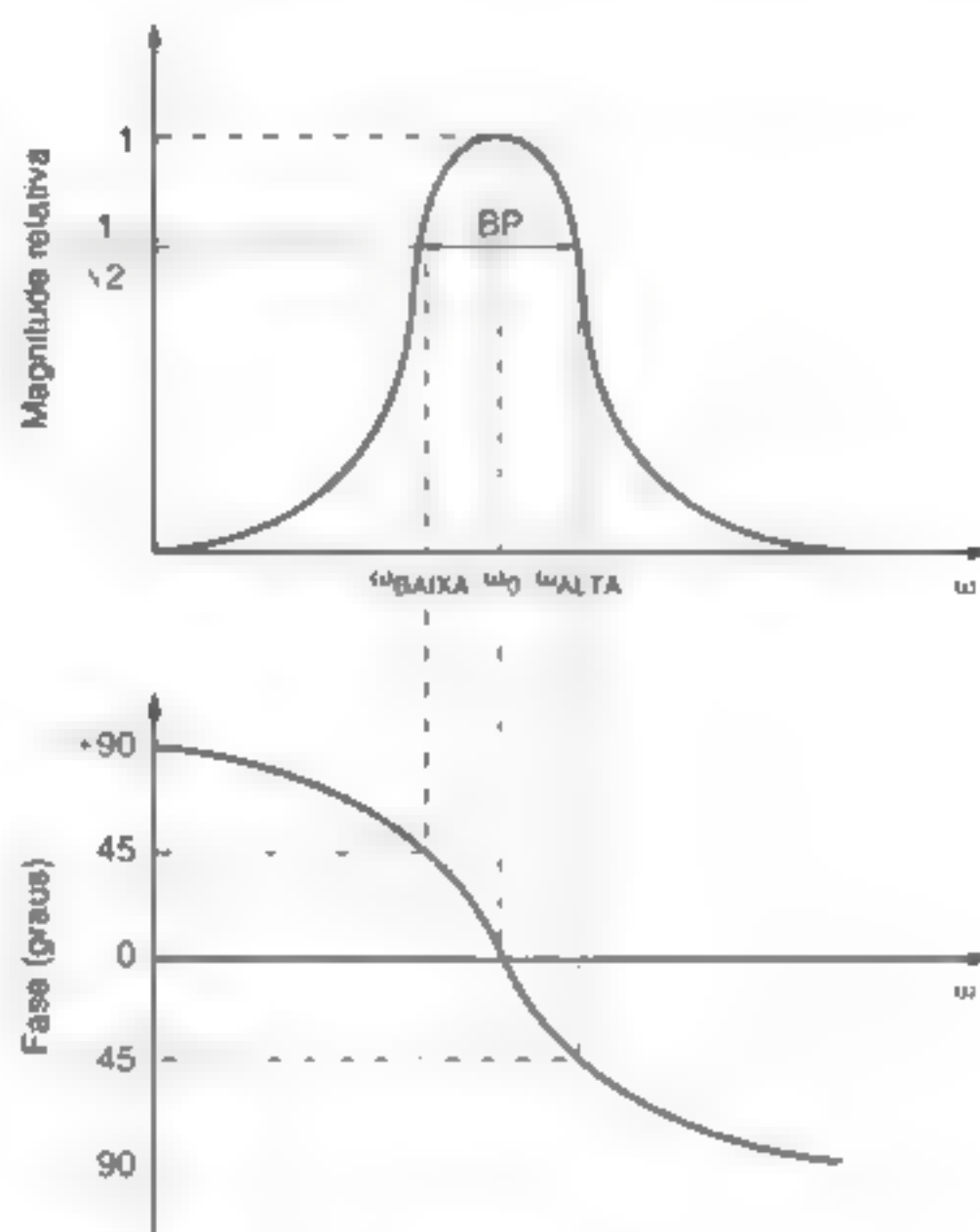


Figura 12.22 Curvas de magnitude e fase para as Eqs. (12.17) e (12.18).

A solução dessa equação fornece quatro frequências,

$$\omega = \pm \frac{\omega_0}{2Q} \pm \omega_0 \sqrt{\left(\frac{1}{2Q}\right)^2 + 1} \quad 12.20$$

Considerando apenas os valores positivos, obtém-se

$$\omega_{\text{BAIXA}} = \omega_0 \left[-\frac{1}{2Q} + \sqrt{\left(\frac{1}{2Q}\right)^2 + 1} \right] \quad 12.21$$

$$\omega_{\text{ALTA}} = \omega_0 \left[\frac{1}{2Q} + \sqrt{\left(\frac{1}{2Q}\right)^2 + 1} \right]$$

[atenção]

As frequências de meia potência e suas dependências de ω_0 e Q são estabelecidas nessas equações.

A subtração dessas duas equações fornece a banda passante, conforme mostrado na Fig. 12.22:

$$BP = \omega_{ALTA} - \omega_{BAIXA} = \frac{\omega_0}{Q} \quad 12.22$$

[atenção]

A banda passante é a diferença entre as frequências de meia potência e depende de ω_0 e Q .

e a multiplicação das duas equações fornece

$$\omega_0^2 = \omega_{BAIXA} \omega_{ALTA} \quad 12.23$$

o que mostra que a frequência de ressonância é a média geométrica das duas frequências de meia potência. Lembre-se de que as frequências de meia potência são pontos para os quais a curva de magnitude logarítmica apresenta uma queda de 3 dB em relação a seu valor máximo. Portanto, a diferença entre as frequências de 3 dB, que caracteriza a largura de banda, é geralmente chamada de banda passante de 3 dB.

Avaliação do Aprendizado

E12.14 Para a rede mostrada na Fig. E12.11, calcule as duas frequências de meia potência e a banda passante da rede.

RESPOSTAS:

$$\omega_{ALTA} = 1.815 \text{ rad/s,}$$

$$\omega_{BAIXA} = 1.785 \text{ rad/s e}$$

$$BP = 30 \text{ rad/s.}$$

A Eq. (12.13) mostra o modo pelo qual Q depende R . Um circuito em série com alto Q possui um pequeno valor de resistência R .

A Eq. (12.22) mostra que a banda passante é inversamente proporcional a Q . Portanto, a seletividade da frequência do circuito é determinada pelo valor de Q . Um circuito com alto Q possui uma pequena banda passante e, portanto, o circuito é muito seletivo. A maneira pela qual Q afeta a seletividade de frequência de uma rede é ilustrada graficamente na Fig. 12.23. Assim, se um sinal com larga faixa de frequências passa por um circuito com alto Q , apenas as componentes de frequência na faixa da banda passante da rede não serão atenuadas; isto é, a rede atua como um filtro passa-banda.

O fator de qualidade Q possui um significado mais geral, que pode ser explorado através da análise de energia do circuito ressonante em série. Seja a excitação do circuito RLC em série em sua frequência ressonante, conforme mostrado na Fig. 12.24. Lembre-se de que a impedância de um circuito RLC na ressonância é exatamente R . Portanto, a corrente $i(t) = (V_m/R) \cos \omega_0 t$ A. A tensão no capacitor é

$$V_C = \frac{1}{j\omega_0 C} I = \frac{1}{j\omega_0 C} \frac{V_m}{R} \cos \omega_0 t = \frac{V_m}{\omega_0 RC} \cos(\omega_0 t - 90^\circ) \quad 12.24$$

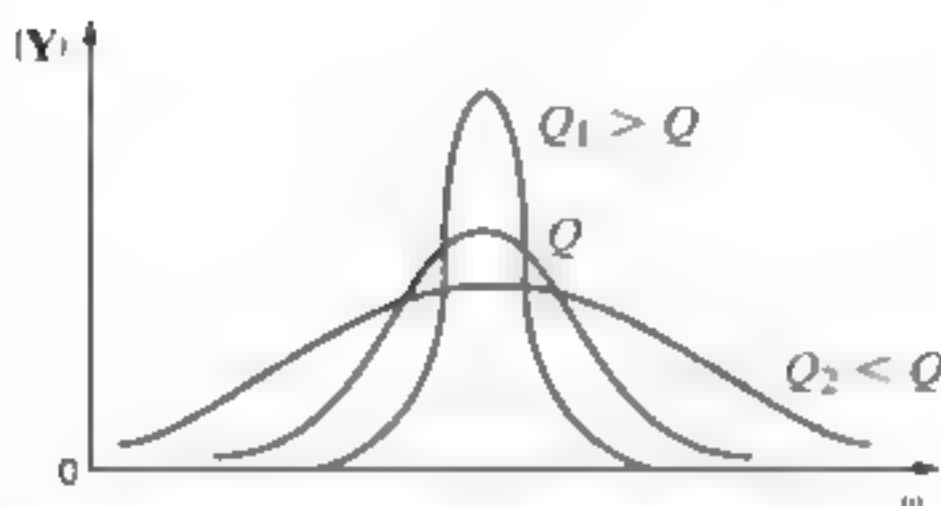


Figura 12.23 Resposta em frequência de uma rede em função do fator de qualidade Q .

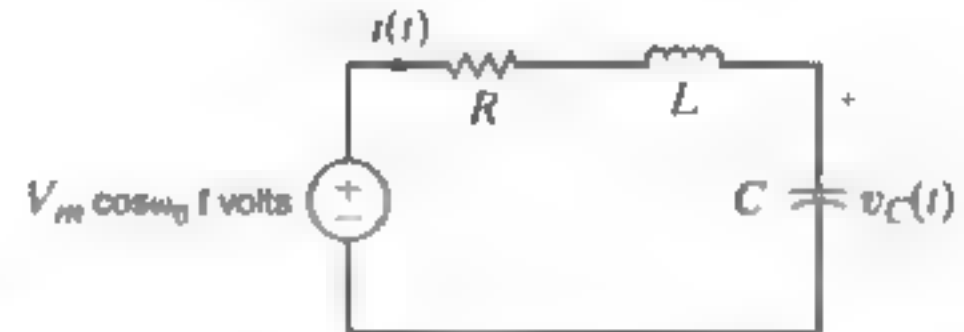


Figura 12.24 Circuito RLC em série excitado em sua frequência de ressonância.

e $v_C(t) = \frac{V_m}{\omega_0 RC} \cos(\omega_0 t - 90^\circ) = \frac{V_m}{\omega_0 RC} \sin \omega_0 t$ volts. Lembre-se também, do Capítulo 6, de que a energia armazenada em um indutor é $(1/2)Li^2$ e a energia armazenada em um capacitor é $(1/2)Cv^2$. Assim, para o indutor,

$$w_L(t) = \frac{1}{2} Li^2(t) = \frac{1}{2} L \left(\frac{V_m}{R} \cos \omega_0 t \right)^2 \quad 12.25$$

$$= \frac{V_m^2 L}{2R^2} \cos^2 \omega_0 t \text{ J}$$

e para o capacitor,

$$w_C(t) = \frac{1}{2} Cv_C^2(t) = \frac{1}{2} C \left(\frac{V_m}{\omega_0 RC} \sin \omega_0 t \right)^2 \quad 12.26$$

$$= \frac{V_m^2}{2\omega_0^2 R^2 C} \sin^2 \omega_0 t \text{ J}$$

Na ressonância, $\omega_0^2 = 1/LC$, logo, a energia armazenada no capacitor pode ser reescrita como

$$w_C(t) = \frac{V_m^2}{2 \left(\frac{1}{LC} \right) R^2 C} \sin^2 \omega_0 t = \frac{V_m^2 L}{2R^2} \sin^2 \omega_0 t \text{ J} \quad 12.27$$

A energia total armazenada no circuito será, portanto, $w_L(t) + w_C(t) = \frac{V_m^2 L}{2R^2} (\cos^2 \omega_0 t + \sin^2 \omega_0 t)$. Da trigonometria, sabe-se

que $\cos^2 \omega_0 t + \sin^2 \omega_0 t = 1$, logo, a energia total armazenada é uma constante que vale $\frac{V_m^2 L}{2R^2}$ J.

Uma vez determinado que a energia total armazenada no circuito ressonante é constante, examina-se agora a energia armazenada no indutor e no capacitor. A Fig. 12.25 representa, de forma normalizada, a energia armazenada em cada componente ao longo de dois períodos. As Eqs (12.25) e (12.27) foram divididas por $\frac{V_m^2 L}{2R^2}$ para fornecer a energia normalizada. Quando um circuito está em ressonância, ocorre uma alternância contínua entre o campo magnético do indutor e o campo elétrico do capacitor. Essa alternância de energia ocorre como o movimento de um pêndulo. A energia armazenada no indutor inicia com um valor máximo, diminui para zero e, então, retorna a um valor máximo; a energia armazenada no capacitor começa

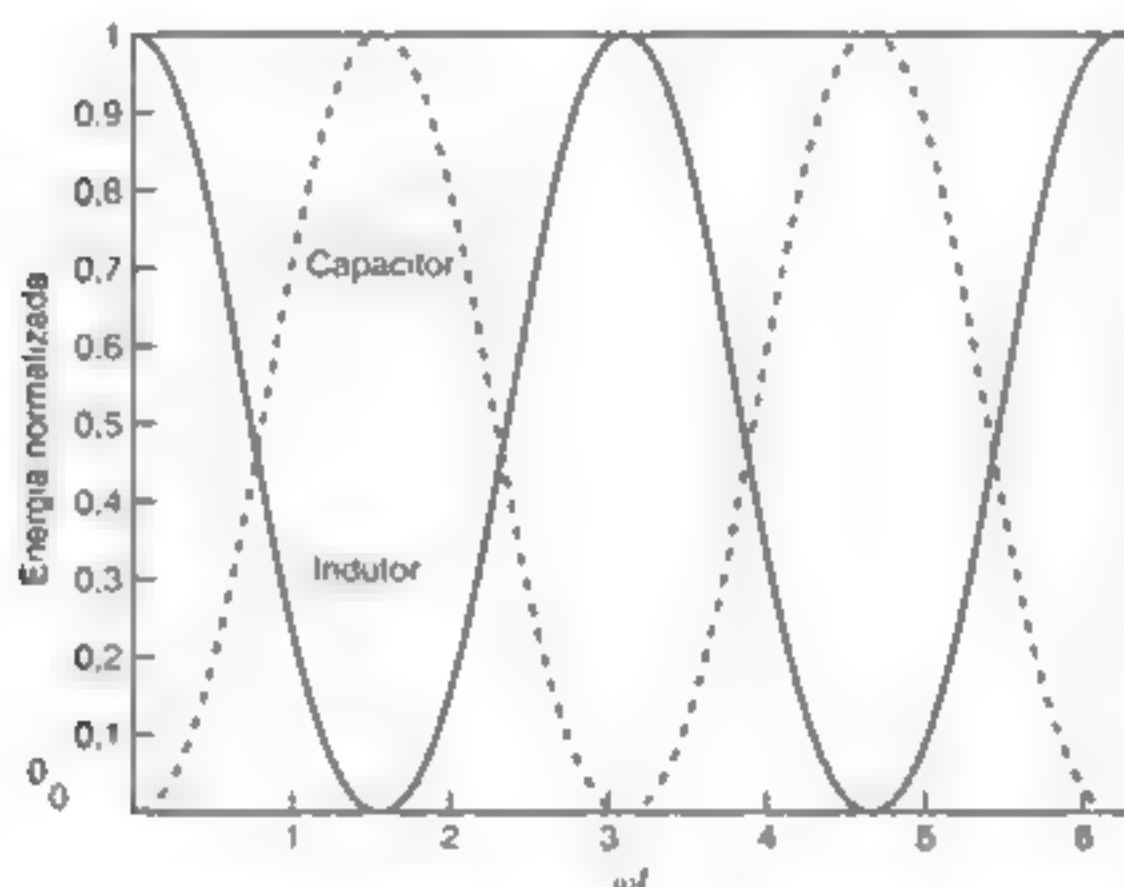


Figura 12.25 Alternância da energia em um circuito ressonante.

nula, aumenta até um máximo e, então retorna a zero. Note que, quando a energia armazenada no indutor é máxima, a energia armazenada no capacitor é nula, e vice-versa. No primeiro meio ciclo, o capacitor absorve energia tão rápido quanto o indutor fornece; o oposto ocorre no próximo meio ciclo. Mesmo sabendo que a energia armazenada em cada componente está variando continuamente, a energia total armazenada no circuito ressonante é constante e, portanto, não varia com o tempo.

A energia máxima armazenada no circuito *RLC* na ressonância é $W_s = \frac{V_m^2 L}{2R^2}$. Seja o cálculo da energia dissipada por ciclo nesse circuito ressonante em série, o qual pode ser expresso por

$$\begin{aligned} W_D &= \int_0^T p_R dt = \int_0^T i^2(t) R dt \\ &= \int_0^T \left(\frac{V_m}{R} \cos^2 \omega_0 t \right)^2 R dt = \frac{V_m^2 T}{2R} \end{aligned} \quad 12.28$$

A razão entre W_s e W_D é

$$\frac{W_s}{W_D} = \frac{\frac{V_m^2 L}{2R^2}}{\frac{V_m^2 T}{2R}} = \frac{L}{RT} = \frac{L}{R} \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{\omega_0 L}{R(2\pi)} \quad 12.29$$

Anteriormente, neste capítulo, o fator de qualidade Q foi definido como $\omega_0 L/R$, logo, a equação anterior pode ser reescrita

$$Q = 2\pi \frac{W_s}{W_D} \quad 12.30$$

A importância dessa expressão de Q reside no fato de ser aplicável a sistemas acústicos, elétricos e mecânicos e, portanto, é geralmente considerada como a definição básica de Q .

EXEMPLO 12.9

Dado um circuito em série com $R = 2 \Omega$, $L = 2 \text{ mH}$ e $C = 5 \mu\text{F}$, deseja-se determinar a frequência de ressonância, o fator de qualidade e a banda passante do circuito. Deseja-se determinar, em seguida, a variação em Q e na BP se R for alterado de 2 para $0,2 \Omega$.

SOLUÇÃO

Utilizando a Eq. (12.11), tem-se

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{[(2)(10^{-3})(5)(10^{-6})]^{1/2}} = 10^4 \text{ rad/s}$$

e, portanto, a frequência de ressonância vale $10^4/2\pi = 1.592 \text{ Hz}$.

O fator de qualidade vale

$$Q = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{(10^4)(2)(10^{-3})}{2} = 10$$

e a banda passante é:

$$\begin{aligned} \text{BP} &= \frac{\omega_0}{Q} = \frac{10^4}{10} \\ &= 10^3 \text{ rad/s} \end{aligned}$$

Se a resistência for alterada para $R = 0,2 \Omega$, o novo valor de Q será 100 e, portanto, a nova banda passante (BP) será de 10^2 rad/s .

Avaliação do Aprendizado

E12.15 Um circuito em série é constituído dos componentes $R = 2 \Omega$, $L = 40 \text{ mH}$ e $C = 100 \mu\text{F}$. Determine a banda passante desse circuito e sua frequência de ressonância.

RESPOSTAS: BP = 50 rad/s e $\omega_0 = 500 \text{ rad/s}$.

E12.16 Um circuito RLC em série possui as seguintes propriedades: $R = 4 \, \Omega$, $\omega_0 = 4.000 \, \text{rad/s}$ e banda passante $BP = 100 \, \text{rad/s}$. Determine os valores de L e C .

RESPOSTAS: $L = 40 \, \text{mH}$ e $C = 1,56 \, \mu\text{F}$.

EXEMPLO 12.10

Deseja-se determinar os parâmetros R , L e C de modo que o circuito mostrado na Fig. 12.26 opere como um filtro passa-banda com ω_0 de $1.000 \, \text{rad/s}$ e banda passante de $100 \, \text{rad/s}$.

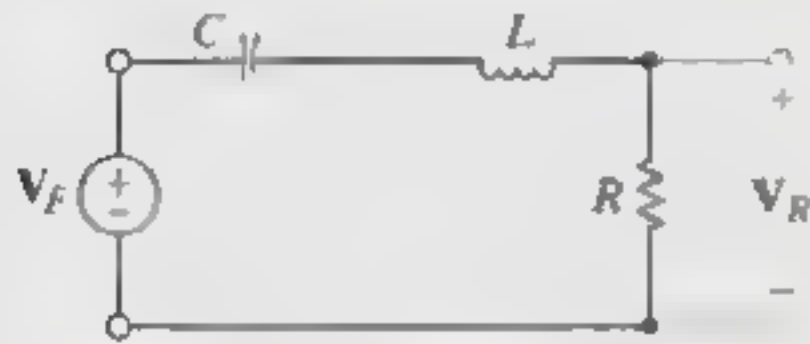


Figura 12.26 Circuito RLC em série.

SOLUÇÃO

O ganho em tensão da rede é

$$G_v(j\omega) = \frac{(R/L)j\omega}{(j\omega)^2 + (R/L)j\omega + 1/LC}$$

Logo,

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

e, uma vez que $\omega_0 = 10^3 \, \text{rad/s}$,

$$\frac{1}{LC} = 10^6$$

A banda passante é

$$BP = \frac{\omega_0}{Q}$$

Assim,

$$Q = \frac{\omega_0}{BP} = \frac{1000}{100} = 10$$

Todavia,

$$Q = \frac{\omega_0 L}{R}$$

Portanto,

$$\frac{1000L}{R} = 10$$

Note que o problema está definido por duas equações com os três parâmetros incógnitos do circuito, R , L e C . Assim, ao selecionar $C = 1 \, \mu\text{F}$, tem-se

$$L = \frac{1}{10^6 C} = 1 \, \text{H}$$

e

$$\frac{1000(1)}{R} = 10$$

o que fornece

$$R = 100 \, \Omega$$

Portanto, os parâmetros $R = 100 \, \Omega$, $L = 1 \, \text{H}$ e $C = 1 \, \mu\text{F}$ produzem as características apropriadas para o filtro.

Nos Exemplos 12.7 e 12.8 verificou-se que a tensão entre os terminais do capacitor ou do indutor no circuito ressonante em série poderia ser bem alta. De fato, ela foi igual a Q vezes a intensidade da tensão da fonte. Lembrando dessa característica, pode-se reexaminar essa rede conforme mostrado na Fig. 12.27. A tensão de saída da rede é

$$V_i = \left(\frac{1}{R + j\omega L + 1/j\omega C} \right) V_F$$

que pode ser escrita como

$$V = \frac{V_F}{1 - \omega^2 LC + j\omega CR}$$

A magnitude dessa tensão pode ser expressa como

$$V = \frac{|V_F|}{\sqrt{(1 - \omega^2 LC)^2 + (\omega CR)^2}} \quad 12.31$$

Considerando a discussão realizada anteriormente, pode-se admitir que o valor máximo da tensão de saída ocorre na frequên-

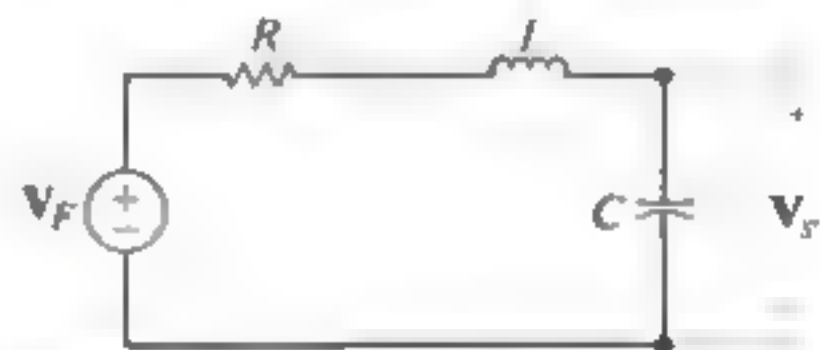


Figura 12.27 Circuito ressonante em série.

cia de ressonância ω_0 . Verifica-se agora se essa consideração é correta. A frequência para a qual $|V_i|$ é máximo é o valor de ω , diferente de zero, que satisfaz a equação

$$\frac{d|V_i|}{d\omega} = 0 \quad 12.32$$

Realizando a derivada indicada e resolvendo para o valor não nulo de $\omega_{\text{máx}}$, obtém-se

$$\omega_{\text{máx}} = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{1}{2} \left(\frac{R}{L} \right)^2} \quad 12.33$$

Empregando as relações $\omega_0^2 = 1/LC$ e $Q = \omega_0 L/R$, a expressão para ω_{\max} pode ser escrita como

$$\omega_{\max} = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}} \quad 12.34$$

Pode-se perceber claramente que $\omega_{\max} \neq \omega_0$; entretanto, ω_0 será muito próximo de ω_{\max} se Q for alto. Além disso, ao substituir

a Eq. (12.34) na Eq. (12.31) e utilizando as relações $\omega_0^2 = 1/LC$, e $\omega_0^2 = C^2 R^2 = 1/Q^2$ obtém-se que

$$|V_{i(\max)}| = \frac{Q|V_F|}{\sqrt{1 - 1/4Q^2}} \quad 12.35$$

Novamente, pode-se perceber que $|V_{i(\max)}| = Q|V_F|$ se a rede possuir um alto fator de qualidade Q .

EXEMPLO 12.11

Dada a rede mostrada na Fig. 12.27, deseja-se determinar ω_0 e ω_{\max} para $R = 50 \, \Omega$ e $R = 1 \, \Omega$ se $L = 50 \, \text{mH}$ e $C = 5 \, \mu\text{F}$.

SOLUÇÃO

Os parâmetros da rede fornecem

$$\begin{aligned} \omega_0 &= \frac{1}{\sqrt{LC}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{(5 \times 10^{-2})(5 \times 10^{-6})}} \\ &= 2.000 \, \text{rad/s} \end{aligned}$$

Se $R = 50 \, \Omega$, tem-se

$$\begin{aligned} Q &= \frac{\omega_0 L}{R} \\ &= \frac{(2.000)(0.05)}{50} \\ &= 2 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \omega_{\max} &= \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}} \\ &= 2.000 \sqrt{1 - \frac{1}{8}} \\ &= 1.871 \, \text{rad/s} \end{aligned}$$

Se $R = 1 \, \Omega$, então $Q = 100$ e $\omega_{\max} = 2.000 \, \text{rad/s}$.

A curva de resposta em frequência da função de transferência da rede para $R = 50 \, \Omega$ e $R = 1 \, \Omega$ pode ser representada graficamente. A função de transferência da rede é

$$\frac{V_i}{V_F} = \frac{1}{2.5 \times 10^{-7}(j\omega)^2 + 2.5 \times 10^{-4}(j\omega) + 1}$$

para $R = 50 \, \Omega$ e

$$\frac{V_i}{V_F} = \frac{1}{2.5 \times 10^{-7}(j\omega)^2 + 5 \times 10^{-6}(j\omega) + 1}$$

para $R = 1 \, \Omega$. A magnitude e a fase da rede com $R = 50 \, \Omega$ e $R = 1 \, \Omega$ são mostradas nas Figs. 12.28a e b, respectivamente.

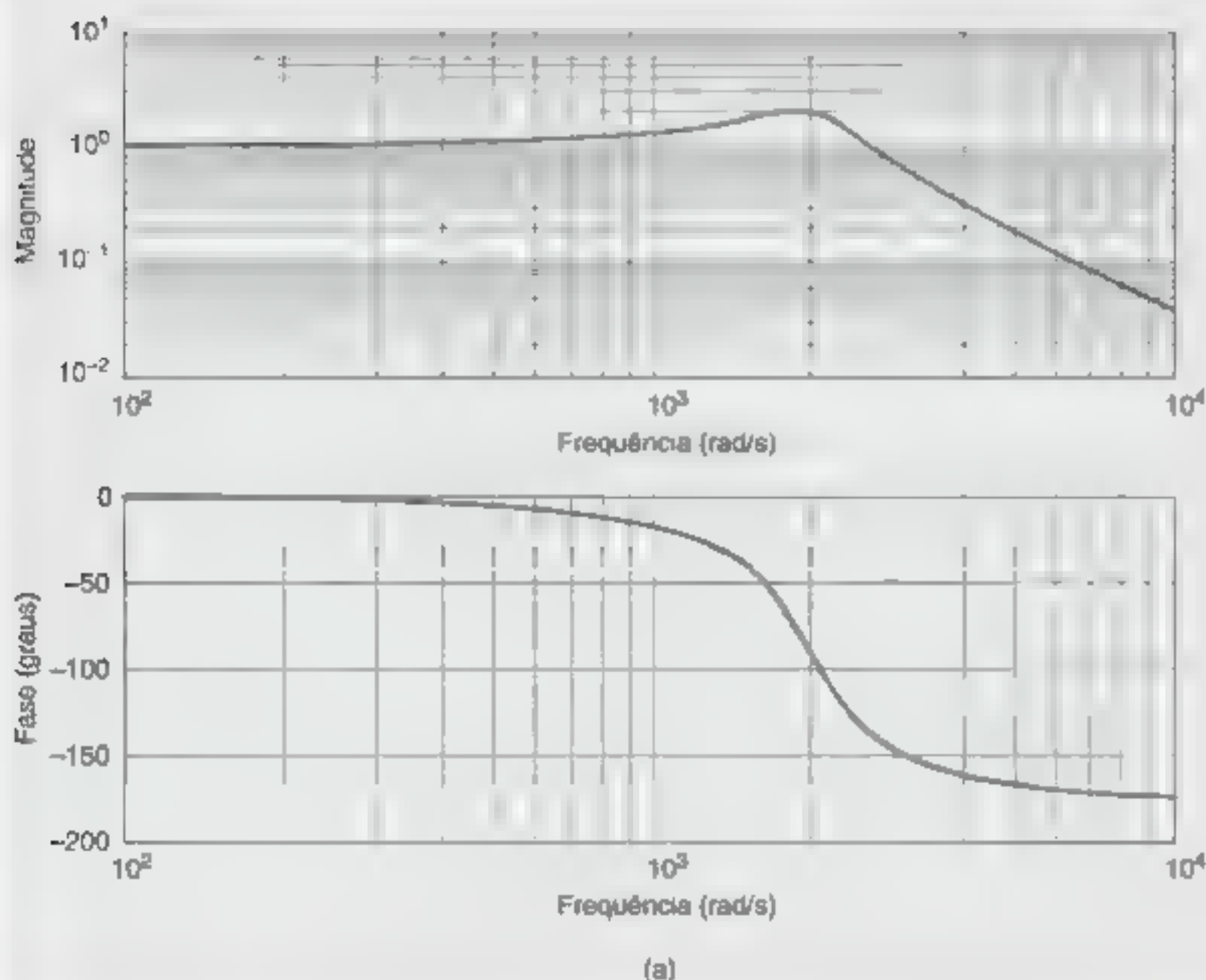


Figura 12.28 Diagrama de resposta em frequência da rede mostrada na Fig. 12.27 com (a) $R = 50 \, \Omega$ e (b) $R = 1 \, \Omega$.

Note que, quando o fator de qualidade Q da rede é pequeno, a resposta em frequência não é seletiva e $\omega_0 \neq \omega_{\text{máx}}$. En-

tretanto, se Q for alto, a resposta em frequência será bastante seletiva e $\omega_0 \approx \omega_{\text{máx}}$.

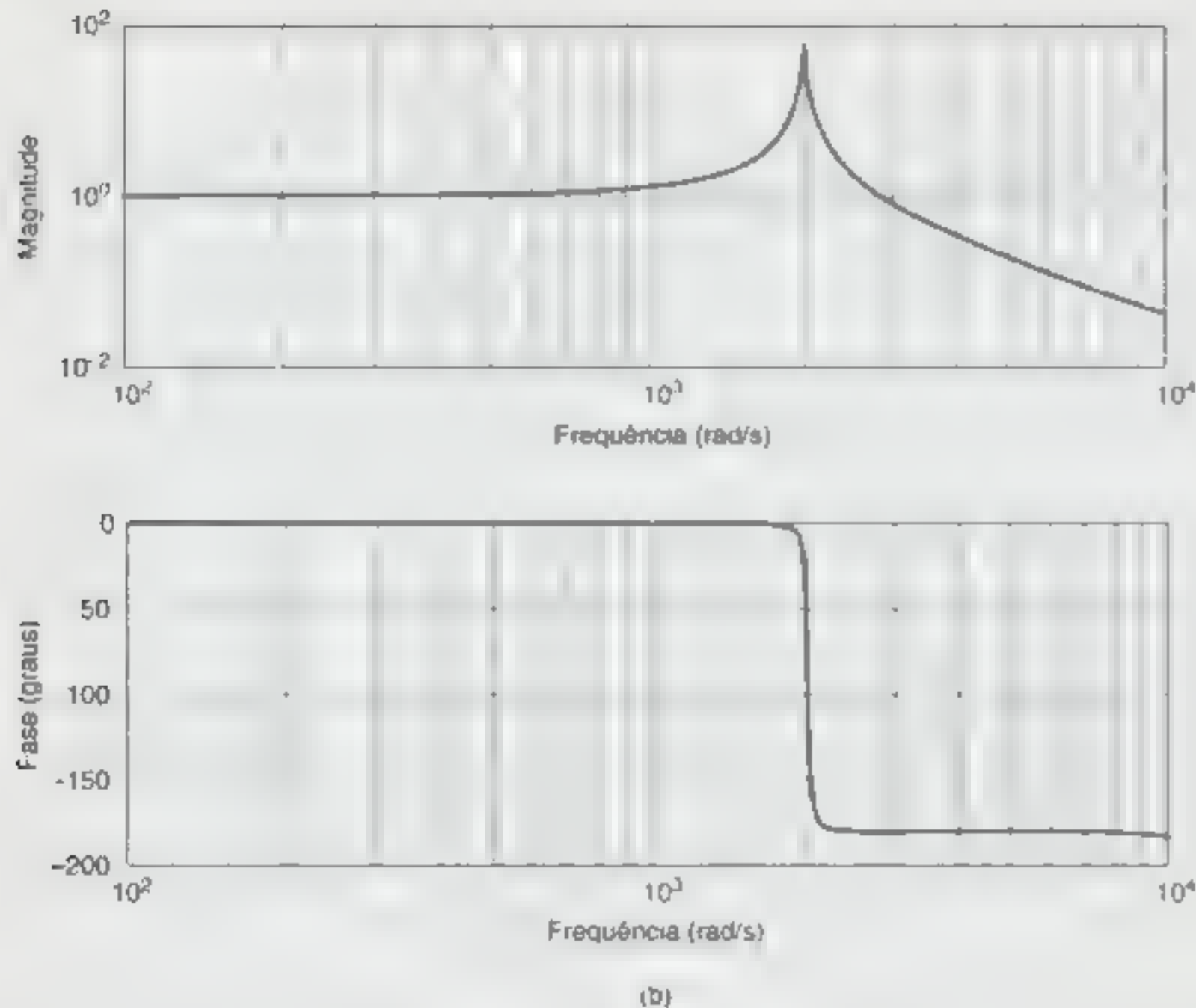


Figura 12.28 (continuação).

EXEMPLO 12.12

No dia 1º de julho de 1940, a terceira ponte mais longa dos Estados Unidos, a ponte sobre o Estreito de Tacoma, foi aberta ao tráfego cruzando Puget Sound em Washington. Em 7 de novembro de 1940, a estrutura entrou em colapso e tornou-se a mais célebre falha estrutural daquele século. Uma fotografia da ponte, tirada durante suas oscilações poucos instantes antes de ela se romper, é mostrada na Fig. 12.29. A explicação do desastre em termos quantitativos é um desafio para os engenheiros civis e especialistas em estruturas, e diversas teorias têm sido apresentadas. Entretanto, o denominador comum de todas as explicações é que o vento que soprava transversalmente à ponte causou, em sua estrutura, a condição de ressonância, apresentando amplitudes tão elevadas que a ponte rompeu por si só. Pode-se teorizar alegando que as rajadas de vento, com frequência próxima da frequência natural da ponte (0,2 Hz), levaram a estrutura à condição de ressonância. Assim, a ponte pode ser grosseiramente modelada como um sistema de segunda ordem. Projeta-se agora uma rede RLC ressonante que demonstre o movimento vertical da ponte e permita investigar o efeito da frequência do vento.

SOLUÇÃO

A rede RLC mostrada na Fig. 12.30 é um sistema de segunda ordem em que a tensão $v_c(t)$ é análoga ao deslocamento vertical da pista de rolagem da ponte (1 volt = 1 pé). Os valores de C , L , R_A e R_B podem ser determinados a partir dos dados recolhidos na internet e a partir de modelos em escala, como se segue:

deslocamento vertical na condição de falha ≈ 4 pés

velocidade do vento na condição de falha ≈ 42 mph

frequência de ressonância $= f_0 \approx 0,2$ Hz

A tensão de saída pode ser expressa como

$$V_c(j\omega) = \frac{j\omega \left(\frac{R_B}{L} \right) V_i(j\omega)}{\omega^2 + j\omega \left(\frac{R_A + R_B}{L} \right) + \frac{1}{LC}}$$



Figura 12.29 Ponte sobre o Estreito de Tacoma na iminência do colapso. (University of Washington Libraries Special Collections, UW21413.)

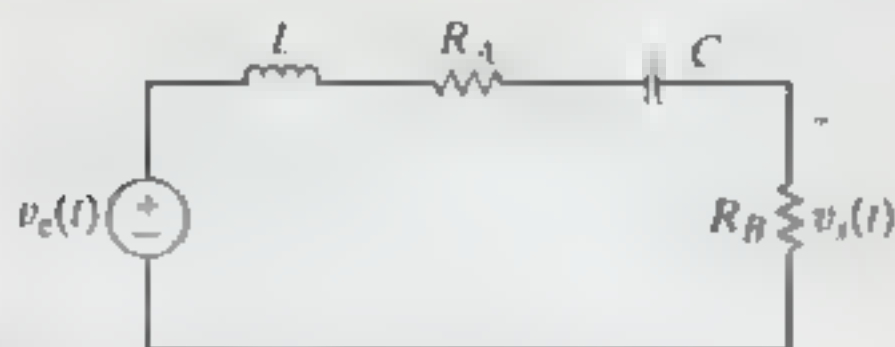


Figura 12.30 Rede RLC ressonante para uma simulação simplificada do comportamento da ponte sobre o Estreito de Tacoma.

da qual se pode facilmente extrair as seguintes expressões:

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = 2\pi(0,2) \text{ rad/s}$$

$$2\zeta\omega_0 = \frac{R_A + R_B}{L}$$

e

$$\frac{V_s(j\omega_0)}{V_c(j\omega_0)} = \frac{R_B}{R_A + R_B} \approx \frac{4 \text{ pés}}{42 \text{ mph}}$$

Pode-se escolher $R_B = 1 \, \Omega$ e $R_A = 9,5 \, \Omega$. Na ausência de dados sobre a fração de amortecimento, ζ , será selecionado um indutor $L = 20 \text{ H}$, que fornece $\zeta = 0,209$ e $Q = 2,39$, o que parece razoável para uma estrutura daquele porte. Com as escolhas antes mencionadas, o valor do capacitor necessário é $C = 31,66 \text{ mF}$. Adotando esses valores para os componentes do circuito, simula-se o efeito de ventos a 42 mph oscilando a uma frequência de 0,05 Hz, 0,1 Hz e 0,2 Hz, utilizando uma análise CA para as três frequências de interesse.

Os resultados são mostrados na Fig. 12.31. Note que a 0,05 Hz o deslocamento vertical (1 ft/V) é de apenas 0,44 ft, enquanto a 0,1 Hz a ponte sofre ondulações de cerca de 1,07 ft. Finalmente, na frequência de ressonância da ponte de 0,2 Hz, essa oscila com amplitudes de 3,77 ft – uma falha catastrófica.

Naturalmente, foi utilizada uma aproximação extremamente simplista para modelagem de uma estrutura tão complexa como a ponte do Estreito de Tacoma. Todavia, esse acidente será revisto no Capítulo 14 no qual será examinado com mais detalhe por meio de um modelo mais preciso (K. Y. Billah e R. H. Scanlan, “Resonance, Tacoma Narrows Bridge Failure and Undergraduate Physics Textbooks”, *American Journal of Physics*, 1991, vol. 59, nº 2, pp. 118–124).

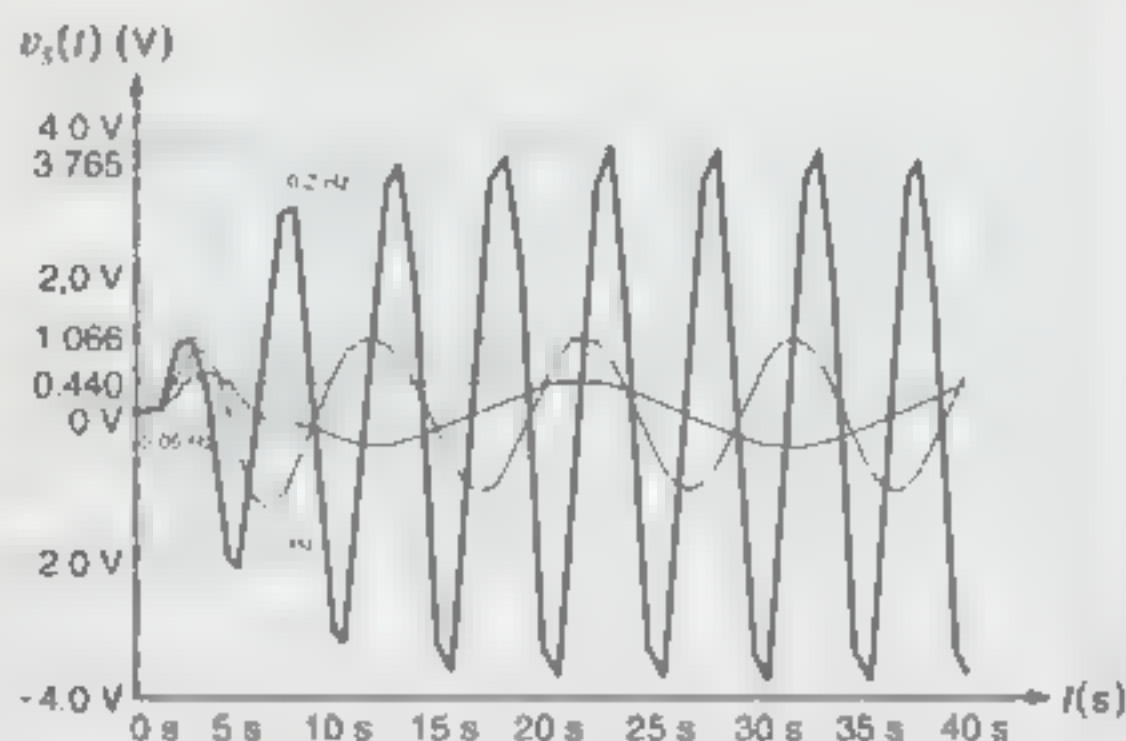


Figura 12.31 Deslocamento vertical simulado (1 volt = 1 pé) da ponte sobre o Estreito de Tacoma para ventos com frequências de 0,05; 0,1 e 0,2 Hz.

RESSONÂNCIA DE REDES COM COMPONENTES EM PARALELO Na apresentação do fenômeno da ressonância até agora, a discussão foi focada no circuito ressonante em série. Naturalmente, a ressonância e todas as suas implicações são também aplicáveis se os componentes *RLC* apresentarem um arranjo em paralelo. Na realidade, os circuitos ressonantes em série e em paralelo possuem muitas semelhanças e poucas diferenças.

Considere a rede mostrada na Fig. 12.32. A fonte de corrente I_F pode ser expressa como

$$\begin{aligned} I_F &= I_G + I_C + I_L \\ &= V_F G + j\omega C V_F + \frac{V_F}{j\omega L} \\ &= V_F \left[G + j \left(\omega C - \frac{1}{\omega L} \right) \right] \end{aligned}$$

Quando a rede está na condição de ressonância,

$$I_F = G V_F \quad 12.36$$

A admitância de entrada do circuito *RLC* em paralelo é

$$Y(j\omega) = G + j\omega C + \frac{1}{j\omega L} \quad 12.37$$

e a admitância do circuito paralelo na ressonância vale

$$Y(j\omega_0) = G \quad 12.38$$

isto é, toda corrente da fonte flui através da condutância G . Isso significa que não haverá corrente passando por L ou C ? Definitivamente não! As correntes I_C e I_L possuem a mesma magnitude, porém, são defasadas de 180° entre si. Portanto, I_F , conforme mostrado na Fig. 12.32, é nula. Além disso, se $G = 0$, a corrente da fonte é nula. O que na realidade ocorre, entretanto, é uma alternância de energia entre o campo elétrico do capacitor e o campo magnético do indutor. Quando um aumenta o outro diminui, e vice-versa.

Analogamente ao caso dos circuitos ressonantes em série, a resposta em frequência, mostrada na Fig. 12.33a, para o circuito ressonante em paralelo revela que a admitância é dominada pelo termo indutivo nas frequências baixas e pelo termo capa-

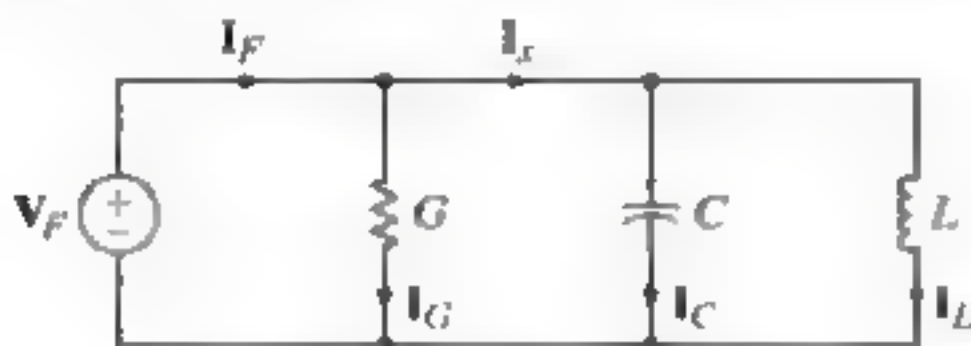


Figura 12.32 Circuito *RLC* em paralelo.

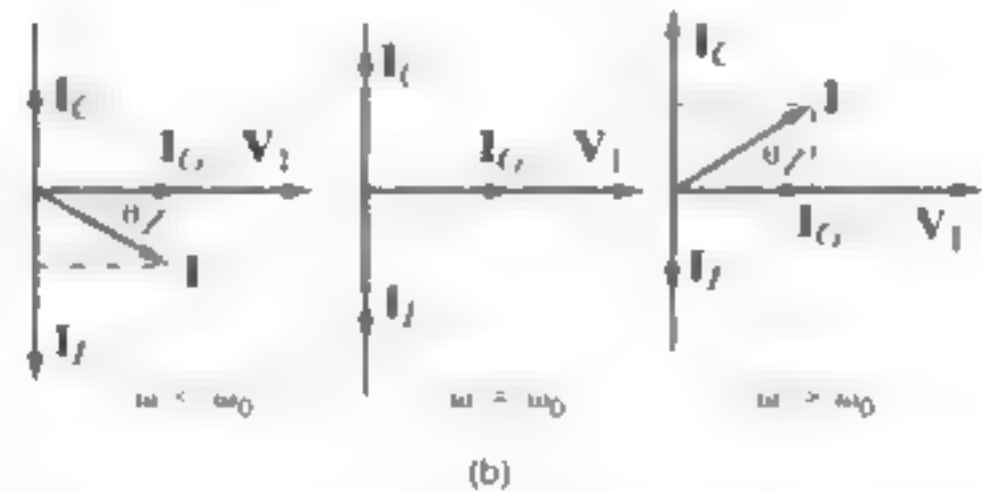
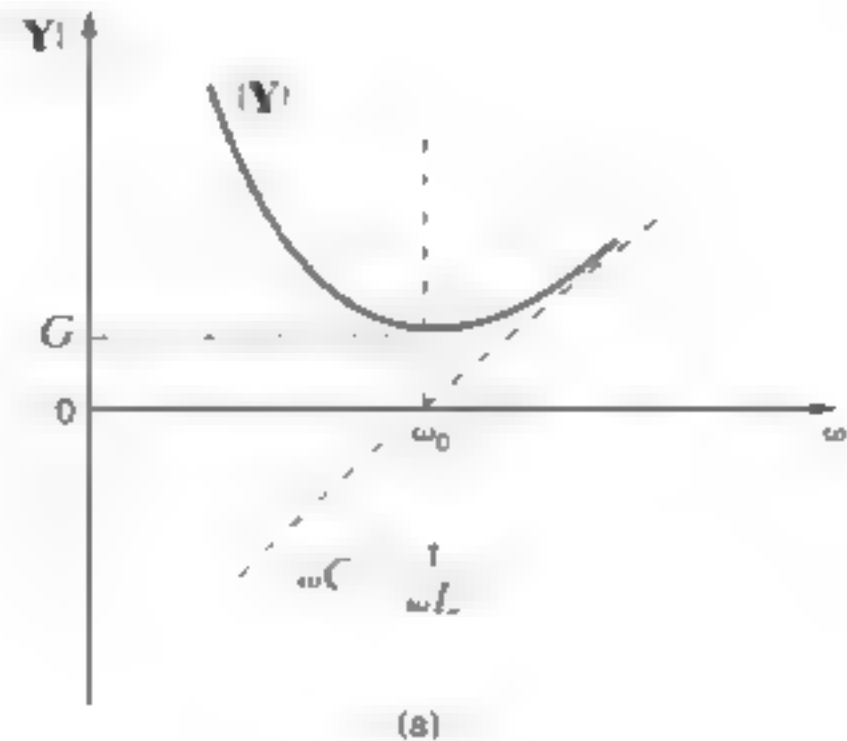


Figura 12.33 (a) Resposta em frequência da admitância e (b) diagrama fasor do circuito ressonante em paralelo.

citivo nas frequências altas. De modo similar, o diagrama fasor para o circuito ressonante paralelo, mostrado na Fig. 12.33b, novamente possui muito em comum com o do circuito em série. Para $\omega < \omega_0$, o ângulo de fase da impedância, θ_Z , é positivo, indicando novamente que a indutância domina no circuito paralelo a frequências baixas. Para $\omega > \omega_0$, θ_Z é negativo e a capacitância domina.

Aplicando a definição geral de ressonância na Fig. 12.22 ao circuito ressonante em paralelo, tem-se o seguinte resultado interessante:

$$Q = \frac{R}{\omega_0 L} = \frac{1}{G \omega_0 L} \quad R \omega_0 C = \frac{\omega_0 C}{G} \quad 12.39$$

Esse resultado parece ser o inverso de Q para o caso em série. Entretanto, as correntes do circuito *RLC* para o caso em paralelo "imitam" as tensões do caso em série.

$$\begin{aligned} |I_C| &= Q |I_F| \\ |I_L| &= Q |I_F| \end{aligned} \quad 12.40$$

EXEMPLO 12.13

A rede mostrada na Fig. 12.32 possui os seguintes parâmetros:

$$\begin{aligned} V_F &= 120 \angle 0^\circ \text{ V}, & G &= 0.01 \text{ S}, \\ C &= 600 \mu\text{F}, & L &= 120 \text{ mH} \end{aligned}$$

Considerando que a fonte opere na frequência de ressonância da rede, calcule as correntes de todos os ramos.

SOLUÇÃO

A frequência de ressonância da rede vale

$$\begin{aligned} \omega_0 &= \frac{1}{\sqrt{LC}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{(120)(10^{-3})(600)(10^{-6})}} \\ &= 117.85 \text{ rad/s} \end{aligned}$$

A essa frequência,

$$Y_C = j\omega_0 C = j7,07 \times 10^{-2} \text{ S}$$

e

$$Y_L = j\left(\frac{1}{\omega_0 L}\right) = -j7,07 \times 10^{-2} \text{ S}$$

Assim, as correntes dos ramos são

$$I_G = GV_S = 1,2 \angle 0^\circ \text{ A}$$

$$I_C = Y_C V_S = 8,49 \angle 90^\circ \text{ A}$$

$$I_L = Y_L V_S = 8,49 \angle -90^\circ \text{ A}$$

e

$$\begin{aligned} I_S &= I_G + I_C + I_L \\ &= I_G = 1,2 \angle 0^\circ \text{ A} \end{aligned}$$

Conforme indicado pela análise, a fonte alimenta apenas as perdas no componente resistivo. Além disso, a tensão e a corrente da fonte estão em fase e, portanto, o fator de potência é unitário.

EXEMPLO 12.14

Dado o circuito *RLC* em paralelo mostrado na Fig. 12.34,

- Deduza a expressão de sua frequência de ressonância, as frequências de meia potência, a banda passante e o fator de qualidade da característica de transferência que relaciona V_s/I_s em função dos parâmetros do circuito R , L e C .
- Calcule as quantidades solicitadas no item (a) considerando $R = 1 \text{ k}\Omega$, $L = 10 \text{ mH}$ e $C = 100 \text{ }\mu\text{F}$.



Figura 12.34 Circuito utilizado no Exemplo 12.14.

SOLUÇÃO

a. A tensão de saída pode ser expressa como

$$V_s = \frac{I_s}{Y_T}$$

e, portanto, a magnitude da característica de transferência desejada pode ser expressa como

$$\left| \frac{V_s}{I_s} \right| = \frac{1}{\sqrt{(1/R^2) + (\omega C - 1/\omega L)^2}}$$

Essa característica é máxima na frequência de ressonância

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad 12.41$$

e, para essa frequência,

$$\left| \frac{V_s}{I_s} \right|_{\text{máx}} = R \quad 12.42$$

Conforme demonstrado anteriormente, nas frequências de meia potência a magnitude é igual a $1/\sqrt{2}$ de seu valor máxi-

mo. Assim, as frequências de meia potência podem ser obtidas pela expressão

$$\frac{1}{\sqrt{(1/R^2) + (\omega C - 1/\omega L)^2}} = \frac{R}{\sqrt{2}}$$

Considerando apenas os valores positivos de ω , a solução dessa equação fornece

$$\omega_{\text{BAIXA}} = -\frac{1}{2RC} + \sqrt{\frac{1}{(2RC)^2} + \frac{1}{LC}} \quad 12.43$$

e

$$\omega_{\text{ALTA}} = \frac{1}{2RC} + \sqrt{\frac{1}{(2RC)^2} + \frac{1}{LC}} \quad 12.44$$

A diferença dessas duas frequências de meia potência fornece a banda passante, isto é,

$$\begin{aligned} \text{BP} &= \omega_{\text{ALTA}} - \omega_{\text{BAIXA}} \\ &= \frac{1}{RC} \end{aligned} \quad 12.45$$

Portanto, o fator de qualidade é

$$\begin{aligned} Q &= \frac{\omega_0}{\text{BP}} \\ &= \frac{RC}{\sqrt{LC}} \\ &= R \sqrt{\frac{C}{L}} \end{aligned} \quad 12.46$$

Utilizando as Eqs. (12.41), (12.45) e (12.46), as Eqs. (12.43) e (12.44) podem ser escritas como

$$\omega_{\text{BAIXA}} = \omega_0 \left[\frac{-1}{2Q} + \sqrt{\frac{1}{(2Q)^2} + 1} \right] \quad 12.47$$

$$\omega_{\text{ALTA}} = \omega_0 \left[\frac{1}{2Q} + \sqrt{\frac{1}{(2Q)^2} + 1} \right] \quad 12.48$$

b. Utilizando os valores fornecidos para os componentes do circuito, obtém-se

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{(10^{-3})(10^{-2})}} = 10^4 \text{ rad/s}$$

As frequências de meia potência são

$$\omega_{\text{BAIXA}} = \frac{-1}{(2)(10^3)(10^{-4})} + \sqrt{\frac{1}{(2)(10^3)^2} + 10^6}$$

$$= 995 \text{ rad/s}$$

$$\omega_{\text{ALTA}} = 1.005 \text{ rad/s}$$

Portanto, a largura da banda passante é

$$BP = \omega_{\text{ALTA}} - \omega_{\text{BAIXA}} = 10 \text{ rad/s}$$

$$Q = 10 \sqrt{\frac{10^6}{10^4}}$$

$$= 100$$

EXEMPLO 12.15

Duas estações de rádio, A e B, transmitem seus sinais na mesma área. A estação A transmite a uma frequência de 100 MHz e a estação B a 98 MHz. Um amplificador sintonizador de estágio único, como o mostrado na Fig. 12.35, pode ser utilizado como sintonizador para filtrar uma das estações. Entretanto, os amplificadores sintonizadores de simples estágio possuem uma fraca seletividade devido a suas bandas passantes. Para reduzir a largura de banda (aumentando o fator de qualidade) dos amplificadores sintonizadores de simples estágio, os projetistas empregam uma técnica chamada de sintonia síncrona. Nesse processo, amplificadores sintonizadores idênticos são instalados em cascata. Para demonstrar esse fenômeno, pode-se construir um diagrama de Bode para o amplificador mostrado na Fig. 12.35 quando sintoniza a estação A (100 MHz), utilizando um, dois, três e quatro estágios de amplificação.

SOLUÇÃO

Utilizando como base o circuito do amplificador de simples estágio mostrado na Fig. 12.35, pode-se construir um sistema de estágios em cascata formando um amplificador sintonizado em sincronia com quatro estágios. Ao se construir, agora, o gráfico de sua resposta em frequência para a faixa de 90 MHz a 110 MHz, obtém-se o diagrama de Bode mostrado na Fig. 12.36.

Pelo diagrama de Bode mostrado na Fig. 12.36 percebe-se que, aumentando o número de estágios, de fato diminui-se a banda passante sem alterar a frequência de centro. Como consequência, o fator de qualidade e a seletividade aumentam. Concomitantemente, ao se adicionar estágios, o ganho para a frequência de 98 MHz (frequência da estação B) diminui e essa estação não é "sintonizada".

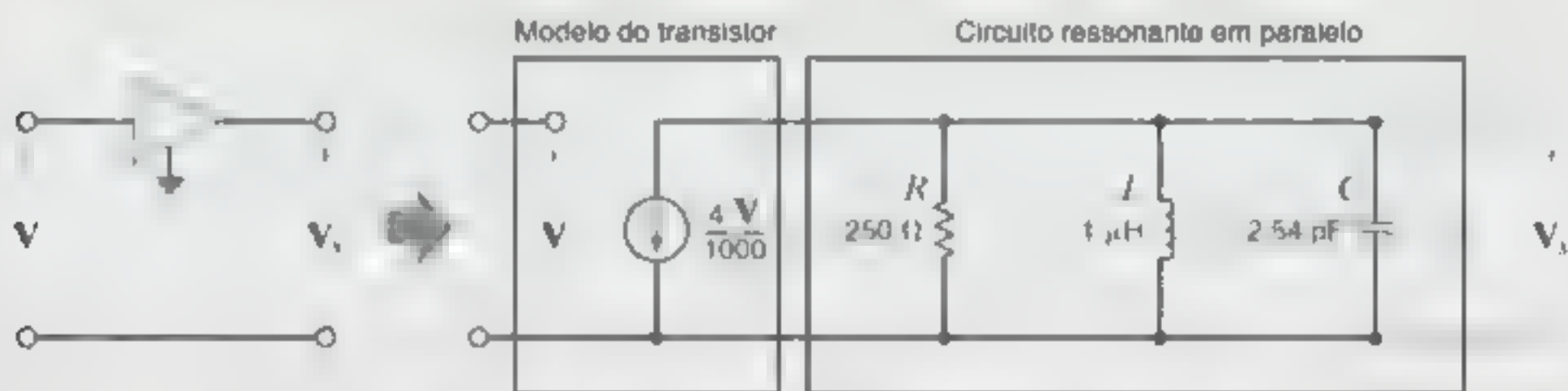


Figura 12.35 Amplificador sintonizador de simples estágio.

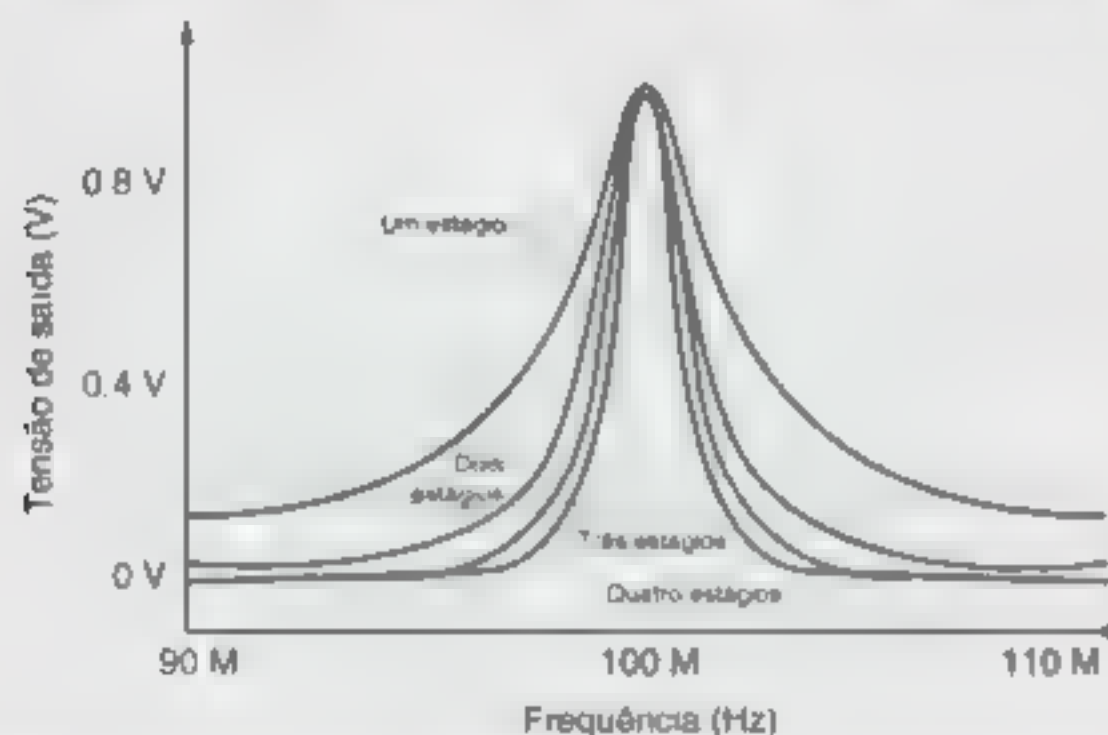


Figura 12.36 Diagramas de Bode para amplificadores sintonizados de um, dois, três e quatro estágios.

Avaliação do Aprendizado

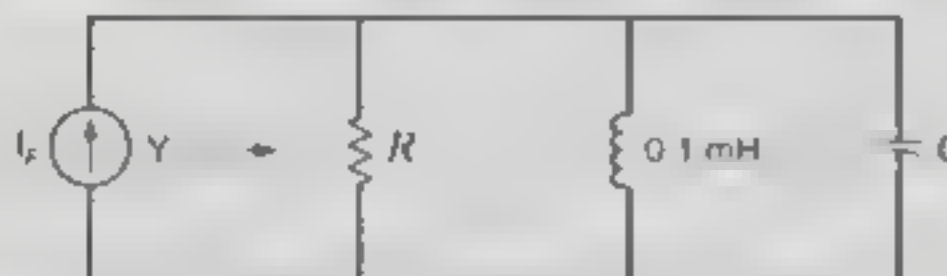
E12.17 Um circuito RLC em paralelo possui os seguintes parâmetros: $R = 2 \text{ k}\Omega$, $L = 20 \text{ mH}$ e $C = 150 \text{ }\mu\text{F}$. Determine a frequência de ressonância, o fator de qualidade Q e a banda passante do circuito.

RESPOSTAS:
 $\omega_0 = 577 \text{ rad/s}$, $Q = 173$ e
 $BP = 3,33 \text{ rad/s}$.

E12.18 Um circuito RLC em paralelo possui os seguintes parâmetros: $R = 6 \text{ k}\Omega$, $BP = 1.000 \text{ rad/s}$ e $Q = 120$. Determine os valores de L , C e ω_0 .

RESPOSTAS:
 $L = 417,5 \text{ }\mu\text{H}$,
 $C = 0,167 \text{ }\mu\text{F}$ e
 $\omega_0 = 119,760 \text{ rad/s}$.

E12.19 O circuito RLC ressonante mostrado na Fig. E12.19 possui uma frequência de ressonância de 12.000 rad/s e uma admitância de 5 mS na ressonância. Determine os valores de R e C .



RESPOSTAS:
 $R = 200 \text{ }\Omega$ e $C = 69,44 \text{ nF}$.

Figura E12.19

Em geral, a resistência da bobina de um indutor não pode ser desprezada e, assim, um circuito ressonante em paralelo mais prático é o mostrado na Fig. 12.37. A admitância de entrada desse circuito é

$$Y(j\omega) = j\omega C + \frac{1}{R + j\omega L}$$

$$= j\omega C + \frac{R - j\omega L}{R^2 + \omega^2 L^2}$$

$$= \frac{R}{R^2 + \omega^2 L^2} + j\left(\omega C - \frac{\omega L}{R^2 + \omega^2 L^2}\right)$$

A frequência para a qual a admitância é um número real puro é

$$\omega_r C - \frac{\omega_r L}{R^2 + \omega_r^2 L^2} = 0 \quad 12.49$$

$$\omega_r = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{L^2}}$$

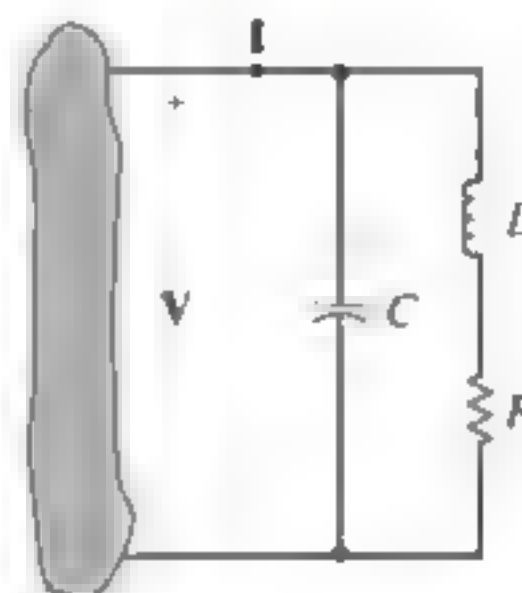


Figura 12.37 Circuito ressonante em paralelo utilizado na prática.

EXEMPLO 12.16

Dado o circuito de tanque mostrado na Fig. 12.38, determine ω_0 e ω , para $R = 50 \text{ }\Omega$ e $R = 5 \text{ }\Omega$.

SOLUÇÃO

Utilizando os valores dos parâmetros da rede, obtém-se

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{(0,05)(5 \cdot 10^{-6})}}$$

$$= 2.000 \text{ rad/s}$$

$$f_0 = 318,3 \text{ Hz}$$

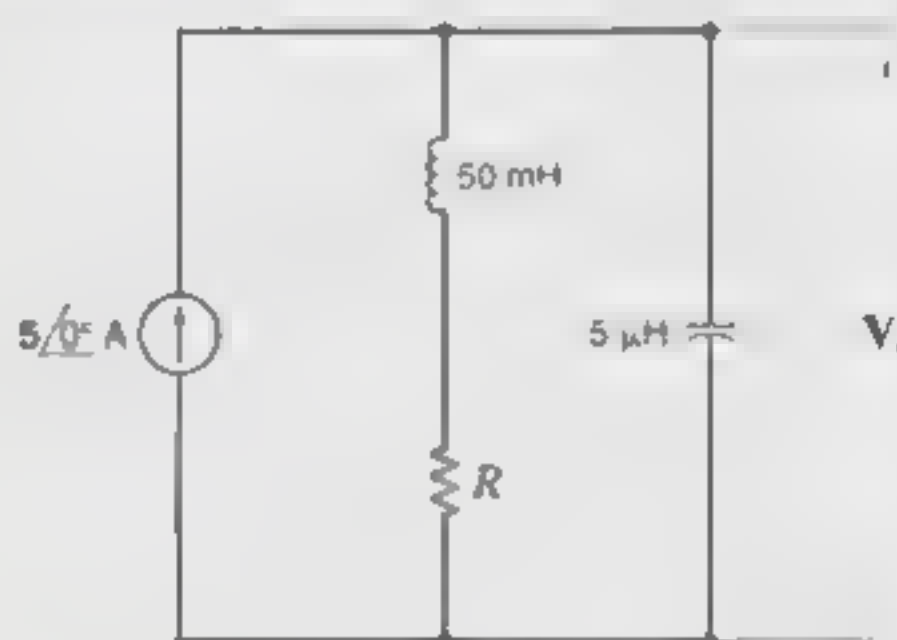


Figura 12.38 Circuito tanque utilizado no Exemplo 12.16.

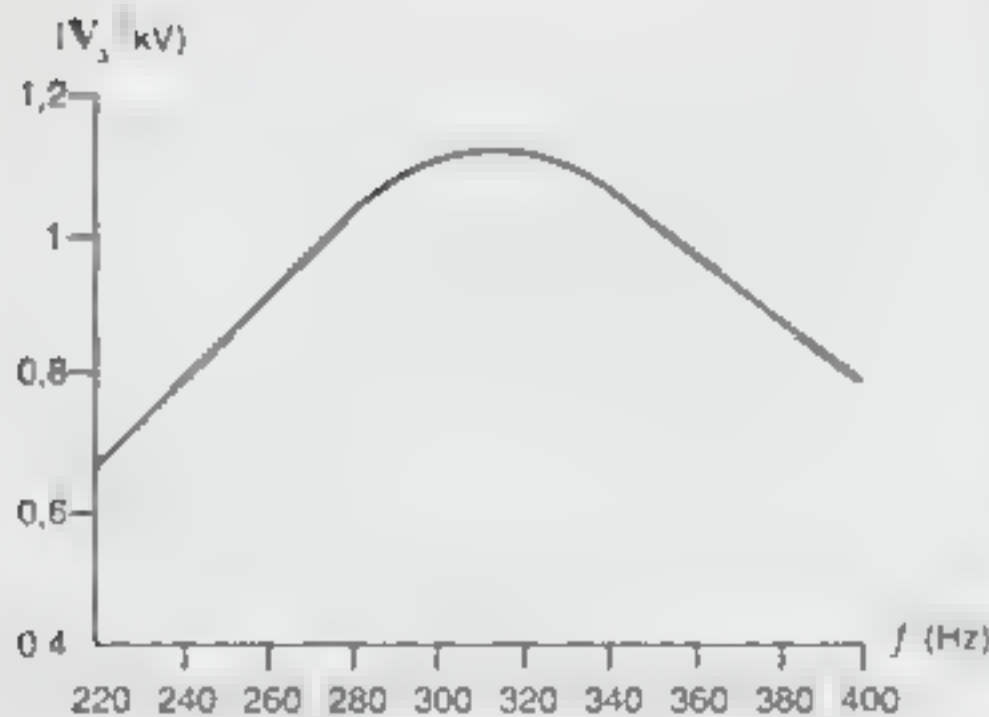
Se $R = 50 \, \Omega$, tem-se

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{L^2}}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{(0,05)(5 \cdot 10^{-6})} - \left(\frac{50}{0,05}\right)^2}$$

$$= 1.732 \text{ rad/s}$$

$$f_r = 275,7 \text{ Hz}$$



(a) $R = 50 \, \Omega$

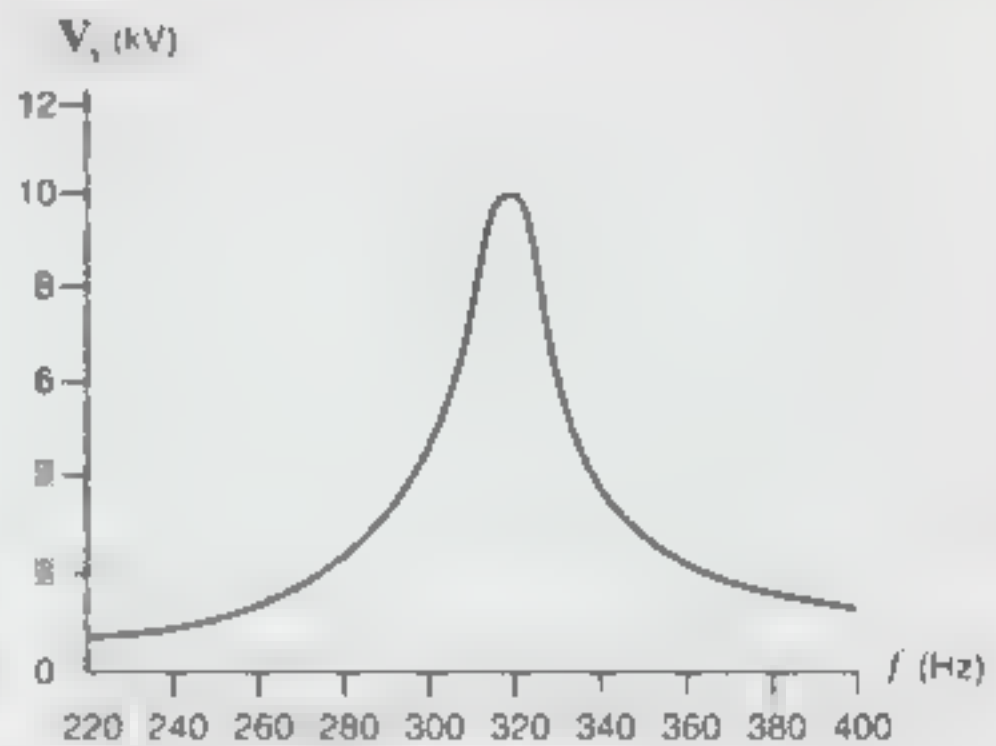
Se $R = 5 \, \Omega$, tem-se

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{(0,05)(5 \cdot 10^{-6})} - \left(\frac{5}{0,05}\right)^2}$$

$$= 1.997 \text{ rad/s}$$

$$f_r = 317,9 \text{ Hz}$$

Note que, quando $R \rightarrow 0$, $\omega_r \rightarrow \omega_0$. Esse fato é também ilustrado nas curvas de resposta em frequência mostradas nas Figs. 12.39a e b, em que são apresentadas as variações de $|V_s|$ com a frequência para $R = 50 \, \Omega$ e $R = 5 \, \Omega$, respectivamente.



(b) $R = 5 \, \Omega$

Figura 12.39 Curvas de resposta em frequência para o Exemplo 12.16.

Algumas das características aprendidas a respeito da ressonância apresentada nos diagramas de Bode mostrados anteriormente são agora relacionadas. A admitância para o circuito ressonante em série é

$$Y(j\omega) = \frac{1}{R + j\omega L + 1/j\omega C}$$

$$= \frac{j\omega C}{(j\omega)^2 LC + j\omega CR + 1} \quad 12.50$$

A forma padronizada para o fator quadrático é

$$(j\omega\tau)^2 + 2\zeta j\omega\tau + 1$$

em que $\tau = 1/\omega_0$, e, assim, em geral, o fator quadrático pode ser escrito como

$$\frac{(j\omega)^2}{\omega_0^2} + \frac{2\zeta\omega}{\omega_0} j + 1 \quad 12.51$$

Comparando-se, agora, essa forma do fator quadrático com o denominador de $Y(j\omega)$, obtém-se

$$\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$$

$$\frac{2\zeta}{\omega_0} = CR$$

e, portanto,

$$\zeta = \frac{R}{2} \sqrt{\frac{C}{L}}$$

Todavia, pela Eq. (12.13)

$$Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$$

e, assim,

$$Q = \frac{1}{2\zeta} \quad 12.52$$

Para ilustrar a importância dessa equação, considere o diagrama de Bode da função $Y(j\omega)$. O diagrama possui uma inclinação inicial de +20 dB/década devido ao zero na origem. Se $\zeta > 1$, os polos representados pelo fator quadrático no denominador simplesmente desviarão a resposta em frequência, conforme ilustrado na Fig. 12.12a, e para altas frequências, a inclinação referente às características combinadas será de -20 dB/década. Se $0 < \zeta < 1$, a resposta em frequência apresentará um pico, conforme mostrado na Fig. 12.12a, e a melhor caracterização desse pico será controlada pela fração de amortecimento ζ . Se ζ for muito pequeno, o pico da resposta em frequência será muito estreito, o fator Q da rede será muito alto e o circuito será

muito seletivo na filtragem do sinal de entrada. A Eq (12.52) e a Fig 12.23 ilustram a conexão entre a resposta em frequência, o fator Q e a fração de amortecimento ζ de uma rede.

12.4 Escalonamento

Ao longo deste livro, foram empregados diversos exemplos para ilustrar os conceitos discutidos. Em muitos casos, os valores reais dos parâmetros não foram realísticos no sentido prático das aplicações; muitas das vezes eles foram utilizados para simplificar a apresentação dos resultados. Nesta seção ilustra-se como alterar a *escala* dos circuitos para torná-los mais realísticos.

Existem duas maneiras de se alterar a escala de um circuito: *alterando a escala da magnitude ou da impedância e alterando a escala da frequência*. Para realizar o escalonamento de um circuito por meio da impedância, simplesmente se multiplica a impedância de cada componente por um fator de escala K_M . Portanto, um resistor R passa a valer K_MR . A multiplicação da impedância de um indutor $j\omega L$ por K_M fornece um novo indutor $K_M L$, e a multiplicação da impedância de um capacitor $1/j\omega C$ por K_M fornece um novo capacitor C/K_M . Portanto, o escalonamento da magnitude, resulta em

$$\begin{aligned} R' &\rightarrow K_M R \\ L' &\rightarrow K_M L \\ C &\rightarrow \frac{C}{K_M} \end{aligned} \quad 12.53$$

uma vez que

$$\omega_0' = \frac{1}{\sqrt{L'C'}} = \frac{1}{\sqrt{K_M LC/K_M}} = \omega_0$$

e Q' é

$$Q' = \frac{\omega_0 L'}{R'} = \frac{\omega_0 K_M L}{K_M R} = Q$$

[atenção]

Escala da magnitude ou impedância.

A frequência de ressonância, o fator de qualidade e, portanto, a banda passante não são afetados pelo escalonamento da magnitude.

EXEMPLO 12.17

Os valores dos parâmetros do circuito mostrado na Fig. 12.37 são $R = 2 \Omega$, $L = 1 \text{ H}$ e $C = 1/2 \text{ F}$. Determine os novos valores desses parâmetros caso o circuito seja alterado pelo escalonamento da magnitude com um fator $K_M = 10^2$ e pelo escalonamento da frequência com um fator $K_F = 10^2$.

SOLUÇÃO

O escalonamento da magnitude fornece

$$R' = 2K_M = 200 \Omega$$

No escalonamento da frequência, o fator de escala é representado por K_F . O resistor é independente da frequência e, portanto, fica inalterado por essa escala. O novo indutor L' , que possui a mesma impedância na frequência em escala deve satisfazer à equação

$$j\omega_1 L = j\omega_1' L'$$

em que $\omega_1' = K_F \omega_1$. Portanto,

$$j\omega_1 L = jK_F \omega_1 L'$$

Assim, o valor do novo indutor é

$$L' = \frac{L}{K_F}$$

Utilizando um argumento similar, obtém-se

$$C' = \frac{C}{K_F}$$

Portanto, para se alterar a escala de frequência por fator K_F ,

$$\begin{aligned} R' &\rightarrow R \\ L' &\rightarrow \frac{L}{K_F} \\ C' &\rightarrow \frac{C}{K_F} \end{aligned} \quad 12.54$$

[atenção]

Escala da frequência.

Note que

$$\omega_0' = \frac{1}{\sqrt{(L/K_F)(C/K_F)}} = K_F \omega_0$$

e

$$Q = \frac{K_F \omega_0 L}{R K_F} = Q$$

e, portanto,

$$BP' = K_F (BP)$$

Logo, a frequência de ressonância e a banda passante do circuito são afetadas pelo escalonamento da frequência.

$$L' = (1)K_M = 100 \text{ H}$$

$$C' = \frac{1}{2} \frac{1}{K_M} = \frac{1}{200} \text{ F}$$

A aplicação do escalonamento da frequência a esses valores fornece os resultados finais:

$$R'' = 200 \Omega$$

$$L'' = \frac{100}{K_F} = 100 \mu\text{H}$$

$$C'' = \frac{1}{200} \frac{1}{K_F} = 0,005 \mu\text{F}$$

Avaliação do Aprendizado

E12.20 Uma rede RLC possui os seguintes valores para seus parâmetros $R = 10 \, \Omega$, $L = 1 \, \text{H}$ e $C = 2 \, \text{F}$. Determine os valores dos componentes se o circuito for escalonado pela magnitude por um fator de 100 e escalonado pela frequência por um fator de 10.000.

RESPOSTAS: $R = 1 \, \text{k}\Omega$,
 $L = 10 \, \text{mH}$ e $C = 2 \, \mu\text{F}$

12.5 Filtros

FILTROS PASSIVOS A rede de um filtro geralmente é projetada de modo a permitir a passagem de um sinal com uma faixa específica de frequência e rejeitar ou atenuar sinais cujo espectro de frequência esteja fora dessa faixa. Os filtros mais comuns são os filtros *passa-baixa*, que permitem a passagem das baixas frequências e rejeitam as altas frequências; os filtros *passa-alta*, que permitem a passagem das altas frequências e bloqueiam as baixas frequências; os filtros *passa-banda*, que permitem a passagem de uma banda específica de frequências e rejeitam todas as frequências fora dessa faixa; e os filtros *rejeita-banda*, que são projetados com a finalidade específica de rejeitar uma banda particular de frequências e permitem a passagem de todas as demais frequências.

A característica ideal de comportamento no domínio da frequência para um filtro passa-baixa é mostrada na Fig. 12.40a. Também está mostrada uma característica típica ou fisicamente realizável. Do ponto de vista ideal, seria desejável que um filtro passa-baixa permitisse a passagem de todas as frequências até um valor específico ω_0 e que não deixasse passar qualquer componente do sinal com frequência acima daquele valor; entretanto, não é possível projetar um filtro com essa característica utilizando componentes lineares para a rede. Assim, a que se contentar com o emprego de filtros que possam ser realisticamente construídos em laboratório, e esses filtros possuem características de frequência que simplesmente não são as ideais.

A rede de um filtro passa-baixa é mostrada na Fig. 12.40b. O ganho em tensão dessa rede é

$$G_v(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega RC} \quad 12.55$$

que pode ser escrito como

$$G_v(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega\tau} \quad 12.56$$

em que $\tau = RC$ é a constante de tempo do filtro. A magnitude é expressa por

$$M(\omega) = \frac{1}{[1 + (\omega\tau)^2]^{1/2}} \quad 12.57$$

e a fase é

$$\phi(\omega) = -\tan^{-1} \omega\tau \quad 12.58$$

Note que na frequência de corte, $\omega = \frac{1}{\tau}$, a magnitude vale

$$M\left(\omega = \frac{1}{\tau}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad 12.59$$

A frequência de corte é também chamada de *frequência de meia potência*. Esse nome se deve ao fato de que se a tensão ou a cor-

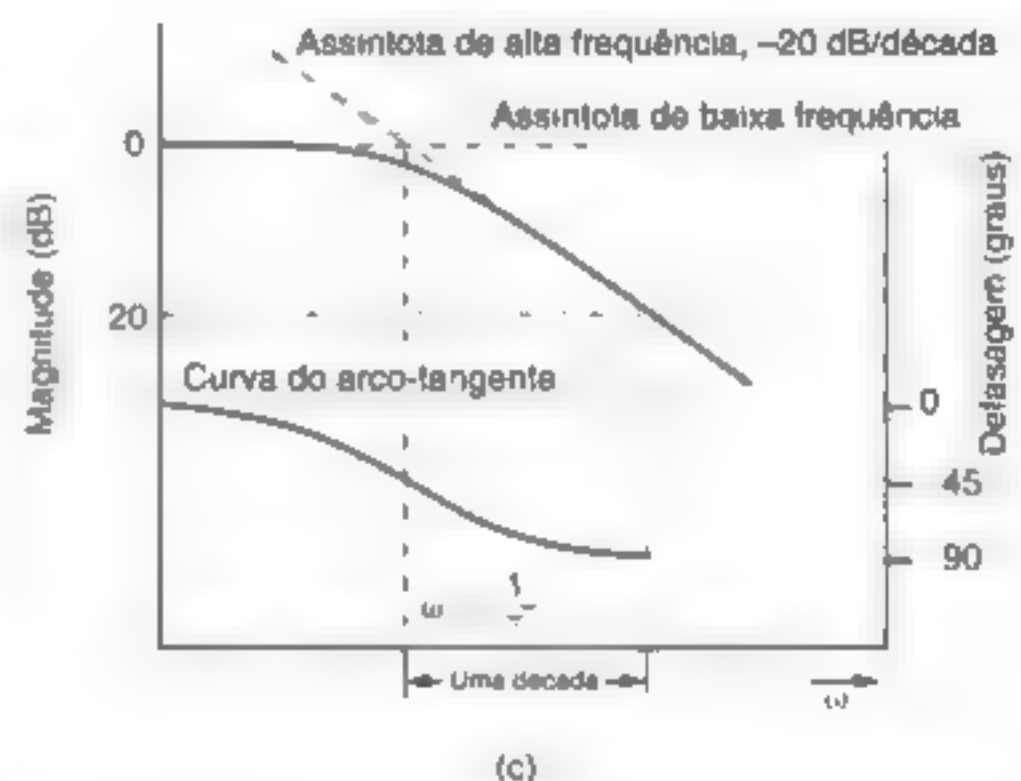
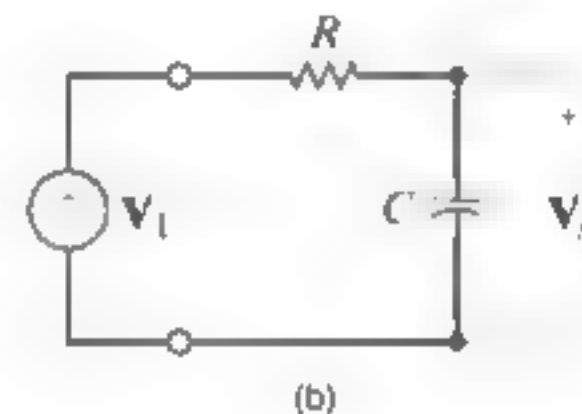
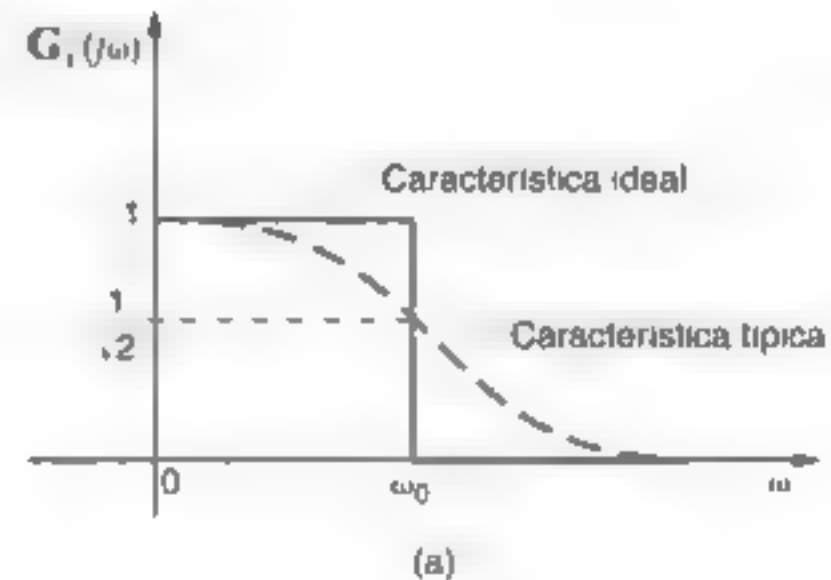


Figura 12.40 Circuito do filtro passa-baixa e sua resposta no domínio da frequência.

rente for igual a $1/\sqrt{2}$ de seu valor máximo, então a potência, que é proporcional ao quadrado da tensão ou da corrente, será igual à metade de seu valor máximo.

As curvas da magnitude, em decibéis, e da fase para esse circuito passa-baixa simples são mostradas na Fig. 12.40c. Note que a curva de magnitude é plana para baixas frequências e decresce para altas frequências. O ângulo de fase varia de 0° para baixas frequências até -90° para altas frequências.

A característica ideal do comportamento no domínio da frequência de um filtro passa-alta é mostrada na Fig. 12.41a, jun-

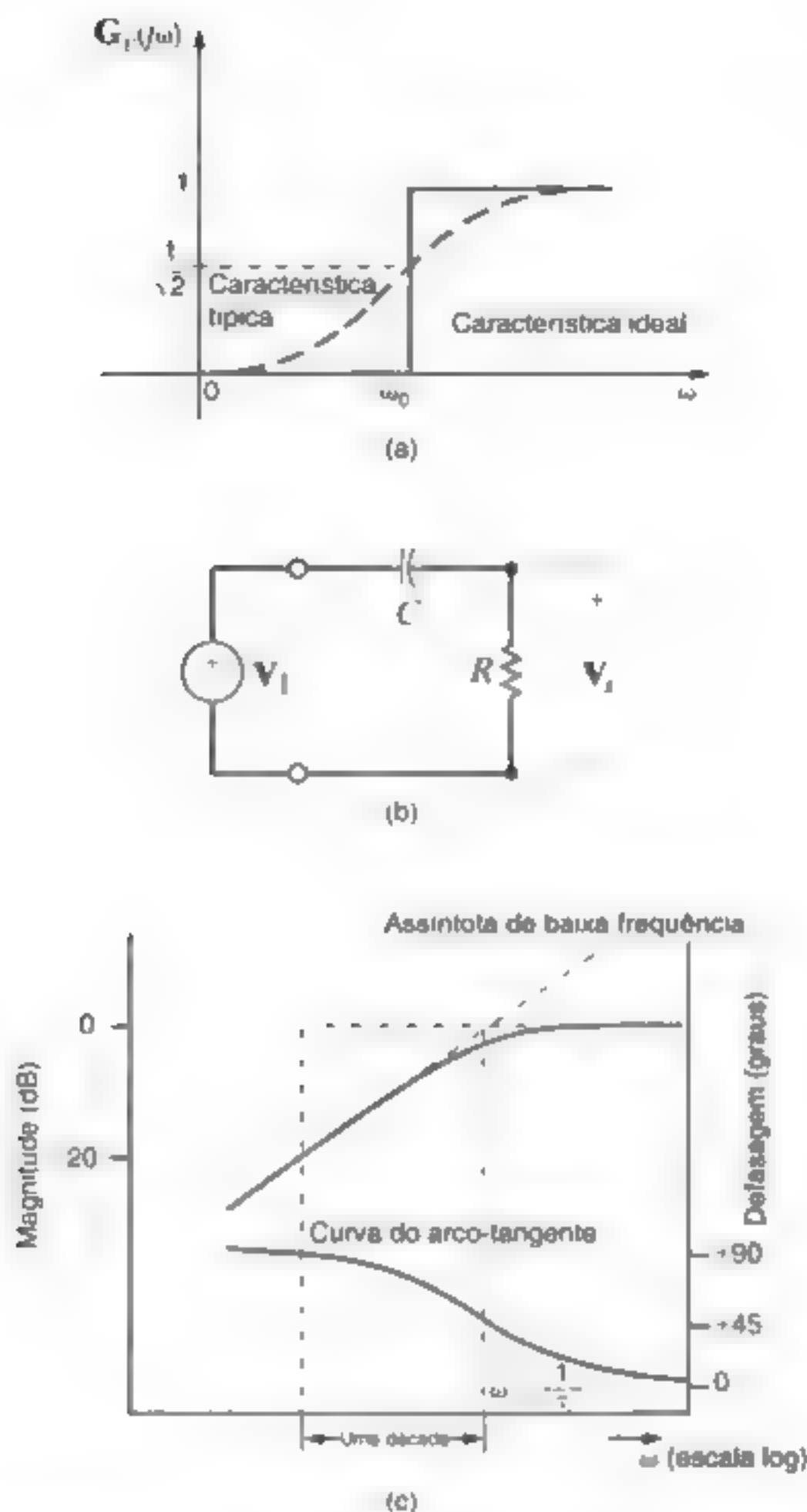


Figura 12.41 Circuito do filtro passa-alta e sua resposta no domínio da frequência.

tamente com uma característica típica que poderia ser obtida utilizando-se componentes lineares no circuito. Idealmente, o filtro passa-alta permite a passagem das componentes do sinal com todas as frequências acima de um determinado valor ω_0 e filtra as componentes com frequências abaixo desse valor.

A rede de um filtro passa-alta simples é mostrada na Fig. 12.41b. Essa é a mesma rede mostrada na Fig. 12.40b, exceto pelo fato de que a tensão de saída é medida entre os terminais do resistor. O ganho em tensão dessa rede é

$$G_v(j\omega) = \frac{j\omega\tau}{1 + j\omega\tau} \quad 12.60$$

em que, mais uma vez, $\tau = RC$. A magnitude dessa função é

$$M(\omega) = \frac{\omega\tau}{[1 + (\omega\tau)^2]^{1/2}} \quad 12.61$$

e o ângulo de fase é

$$\phi(\omega) = \frac{\pi}{2} - \tan^{-1} \omega\tau \quad 12.62$$

A frequência de meia potência é $\omega = 1/\tau$, e o ângulo de fase nessa frequência é de 45° .

As curvas de magnitude e fase desse filtro passa-alta são mostradas na Fig. 12.41c. Para baixas frequências, a curva de magnitude apresenta uma inclinação de +20 dB/década devido ao termo $\omega\tau$ no numerador da Eq. (12.61). Assim, nas proximidades da frequência de corte a curva começa a deixar de ser plana. A curva do ângulo de fase é deduzida com base na Eq. (12.62).

As respostas típica e ideal dos filtros passa-bandas e rejeita-bandas simples são mostradas nas Figs. 12.42a e b, respectivamente. As redes simples capazes de viabilizar os comportamentos típicos de cada um desses filtros são mostradas nas Figs. 12.42c e d, abaixo das curvas de resposta. ω_0 é a frequência de centro dos filtros passa-bandas ou rejeita-bandas e a frequência para a qual ocorre a magnitude máxima ou mínima. ω_{BAIXA} e ω_{ALTA} são as frequências de corte inferior e superior, ou *frequências de corte*, em que a amplitude é igual a do valor máximo. A largura da banda de passagem ou de rejeição é chamada de *largura de banda* ou *banda passante*, e assim,

$$BP = \omega_{\text{ALTA}} - \omega_{\text{BAIXA}} \quad 12.63$$

Para ilustrar esses pontos, considere o filtro passa-banda. A função de transferência da tensão é

$$G_v(j\omega) = \frac{R}{R + j(\omega L - 1/\omega C)}$$

e, portanto, a característica de magnitude é expressa por

$$M(\omega) = \frac{RC\omega}{\sqrt{(RC\omega)^2 + (\omega^2 LC - 1)^2}}$$

Para baixas frequências,

$$M(\omega) \approx \frac{RC\omega}{1} \approx 0$$

Para altas frequências,

$$M(\omega) \approx \frac{RC\omega}{\omega^2 LC} \approx \frac{R}{\omega L} \approx 0$$

No meio da faixa de frequências $(RC\omega)^2 \gg (\omega^2 LC - 1)^2$, e assim, $M(\omega) \approx 1$. Portanto, o comportamento desse filtro no domínio da frequência é o mostrado na Fig. 12.42e. A frequência de centro é $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$. Na frequência de corte mais baixa,

$$\omega^2 LC - 1 = -RC\omega$$

ou

$$\omega^2 + \frac{R\omega}{L} - \omega_0^2 = 0$$

Resolvendo essa expressão para ω_{BAIXA} , obtém-se

$$\omega_{\text{BAIXA}} = \frac{(R/L) + \sqrt{(R/L)^2 + 4\omega_0^2}}{2}$$

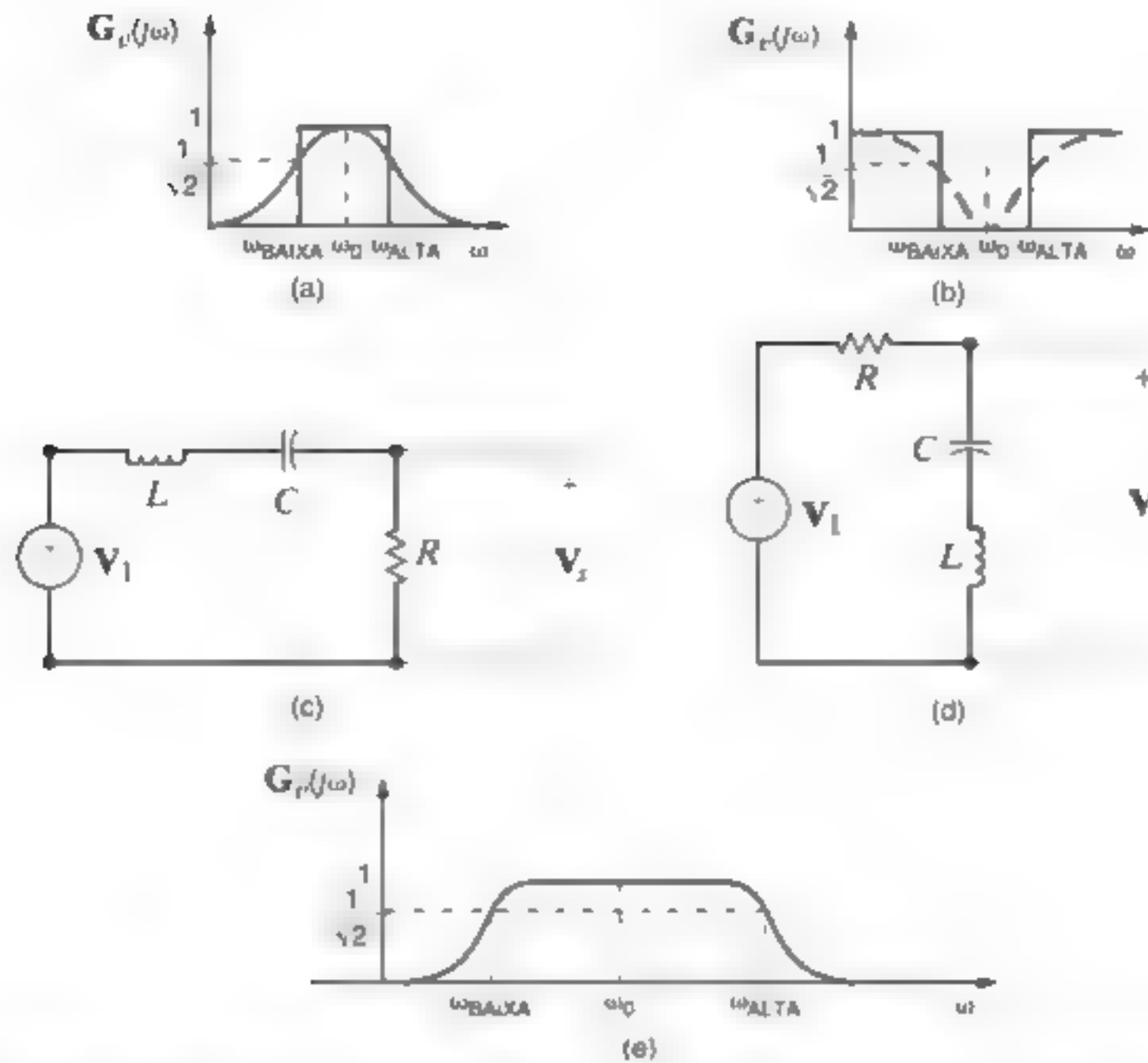


Figura 12.42 Filtros passa-banda e rejeita-banda e suas respostas no domínio da frequência.

Na frequência de corte superior,

$$\omega^2 LC - 1 = +RC\omega$$

ou

$$\omega^2 - \frac{R}{L}\omega - \omega_0^2 = 0$$

Resolvendo essa expressão para ω_{ALTA} , obtém-se

$$\omega_{ALTA} = \frac{1}{2} \left(\frac{R}{L} + \sqrt{\left(\frac{R}{L} \right)^2 + 4\omega_0^2} \right)$$

Portanto, a banda passante do filtro é

$$BP = \omega_{ALTA} - \omega_{BAIXA} = \frac{R}{L}$$

EXEMPLO 12.18

Considere a rede mostrada na Fig. 12.43 cujo comportamento depende da frequência do sinal de entrada. Dados os seguintes valores para os parâmetros: $L = 159 \mu\text{H}$, $C = 159 \mu\text{F}$ e $R = 10 \Omega$, demonstre que essa rede pode ser utilizada para produzir um filtro passa-baixa, um passa-alta ou um passa-banda.

SOLUÇÃO

O ganho em tensão V_R/V_F é obtido pela divisão de tensão como

$$\begin{aligned} \frac{V_R}{V_F} &= \frac{R}{j\omega L + R + 1/(j\omega C)} = \frac{j\omega \left(\frac{R}{L} \right)}{(j\omega)^2 + j\omega \left(\frac{R}{L} \right) + \frac{1}{LC}} \\ &= \frac{(62,9 \times 10^3)j\omega}{-\omega^2 + (62,9 \times 10^3)j\omega + 39,6 \times 10^6} \end{aligned}$$

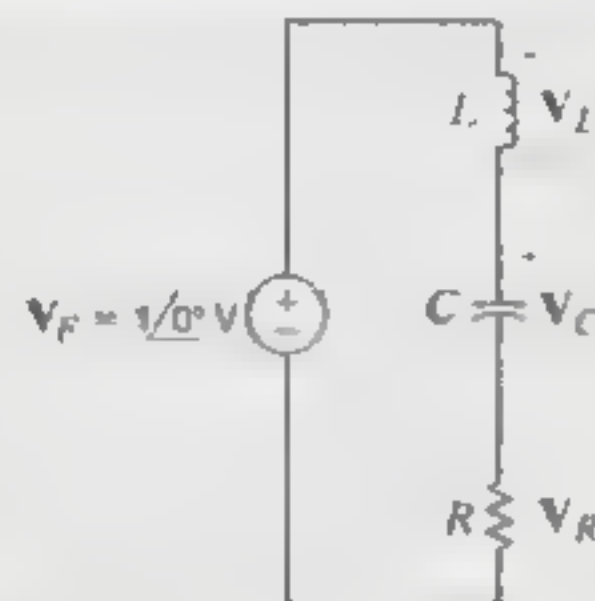


Figura 12.43 Circuito utilizado no Exemplo 12.18.

que é a função de transferência para um filtro passa-banda. Na ressonância, $\omega^2 = 1/LC$ e, assim,

$$\frac{V_R}{V_F} = 1$$

Considere agora o ganho V_L/V_F :

$$\frac{V_L}{V_F} = \frac{j\omega L}{j\omega L + R + 1/(j\omega C)} = \frac{\omega^2}{(j\omega)^2 + j\omega\left(\frac{R}{L}\right) + \frac{1}{LC}}$$

$$= \frac{\omega^2}{-\omega^2 + (62,9 \times 10^3)j\omega + 39,6 \times 10^6}$$

que é a função de transferência de um filtro passa-alta de segunda ordem. Novamente, na ressonância,

$$\frac{V_L}{V_F} = \frac{j\omega L}{R} = jQ = j0,1$$

Analogamente, o ganho V_C/V_F é

$$\frac{V_C}{V_F} = \frac{1/(j\omega C)}{j\omega L + R + 1/(j\omega C)} = \frac{1/LC}{(j\omega)^2 + j\omega\left(\frac{R}{L}\right) + \frac{1}{LC}}$$

$$= \frac{39,6 \times 10^6}{-\omega^2 + (62,9 \times 10^3)j\omega + 39,6 \times 10^6}$$

que é a função de transferência de um filtro passa-baixa de segunda ordem. Na frequência de ressonância,

$$\frac{V_C}{V_F} = \frac{1}{j\omega CR} = -jQ = -j0,1$$

Assim, um mesmo circuito produz três diferentes filtros, dependendo de onde a saída é medida. Isso pode ser visto no diagrama de Bode da Fig. 12.44 para cada uma das três tensões, em que V_F é considerada igual a $1/0^+ \text{ V}$.

Sabe-se que a lei de Kirchhoff deve ser satisfeita durante todo o tempo. Note, pelo diagrama de Bode, que $V_R + V_C + V_L$ é também igual a V_F para todas as frequências! Finalmente, demonstra-se a LKT somando V_R , V_L e V_C .

$$V_L + V_R + V_C = \frac{\left\{ (j\omega)^2 + j\omega\left(\frac{R}{L}\right) + \frac{1}{LC} \right\} V_F}{(j\omega)^2 + j\omega\left(\frac{R}{L}\right) + \frac{1}{LC}} V_F$$

Assim, mesmo que as parcelas de V_F distribuídas entre o resistor, o capacitor e o indutor dependam da frequência, a soma das três tensões reproduz completamente a tensão V_F .

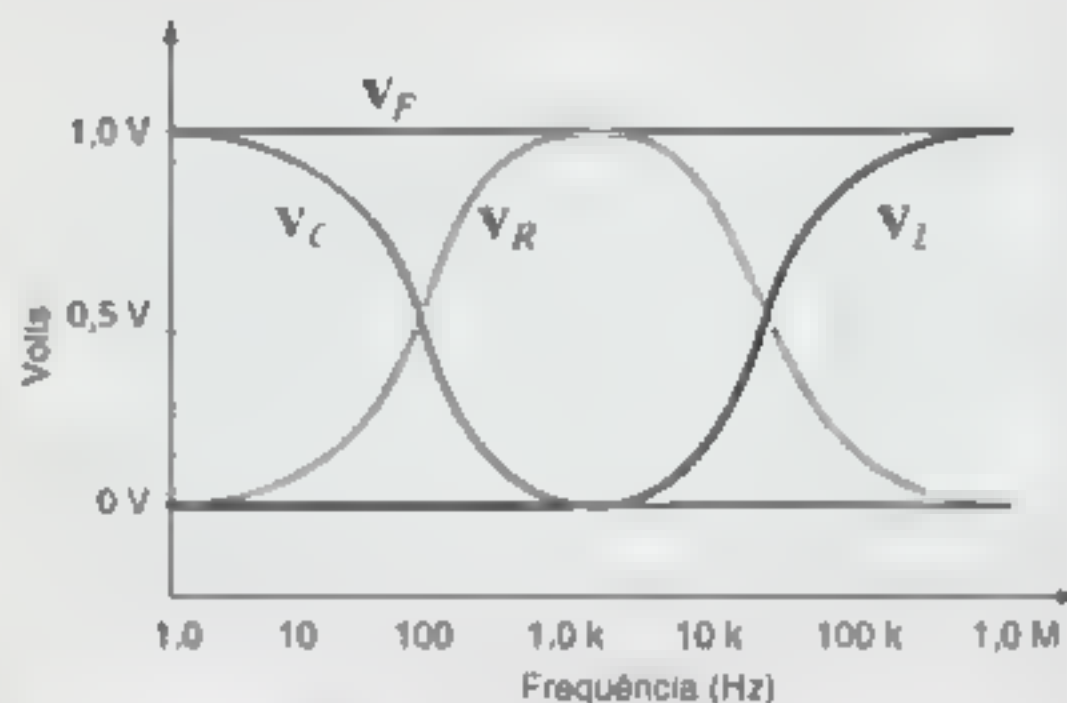


Figura 12.44 Diagramas de Bode para a rede mostrada na Fig. 12.43.

EXEMPLO 12.19

Um sistema telefônico de transmissão sofre a interferência de uma frequência de 60 Hz causada por uma linha de transmissão de energia em suas proximidades. Utilize a rede mostrada na Fig. 12.45 para projetar um filtro de rejeição simples para eliminar a interferência de 60 Hz.

SOLUÇÃO

O resistor R_{eq} representa a resistência equivalente do sistema telefônico à direita da combinação LC . A combinação LC em paralelo possui uma impedância equivalente de

$$Z = (j\omega L) // (1/j\omega C) = \frac{(L/C)}{j\omega L + 1/(j\omega C)}$$

Assim, a função de transferência em tensão é

$$\frac{V_o}{V_i} = \frac{R_{eq}}{R_{eq} + Z} = \frac{R_{eq}}{R_{eq} + \frac{(L/C)}{j\omega L + 1/(j\omega C)}}$$

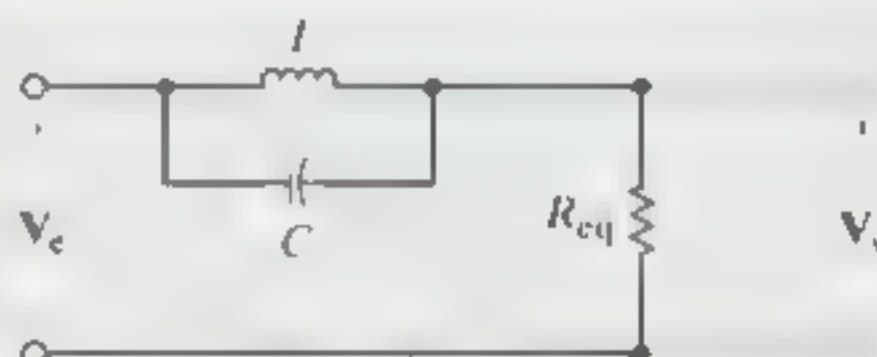


Figura 12.45 Circuito utilizado no Exemplo 12.19.

que pode ser escrita como

$$\frac{V_o}{V_i} = \frac{(j\omega)^2 + \frac{1}{LC}}{(j\omega)^2 + \left[\frac{j\omega}{R_{eq}C} \right] + \frac{1}{LC}}$$

Note que, na ressonância, o numerador é, portanto, V_o , tende a zero. Deseja-se que a ressonância ocorra na frequência de 60 Hz. Assim,

$$\omega_c = \frac{1}{\sqrt{LC}} = 2\pi(60) \approx 120\pi$$

Selecioneando $C = 100 \mu\text{F}$, o valor necessário para L será de $70,3 \text{ mH}$ – ambos são valores razoáveis. Para demonstrar a efetividade do filtro, considera-se uma tensão de entrada senoidal com frequência de 60 Hz e outra também senoidal com frequência de 1.000 Hz , gerando um sinal resultante expresso por

$$v_e(t) = 1 \sin[(2\pi)60t] + 0,2 \sin[(2\pi)1000t]$$

As formas de onda na entrada e na saída do filtro são mostradas na Fig. 12.46. Note que a tensão de saída não apresenta a interferência do sinal de 60 Hz , conforme desejado.

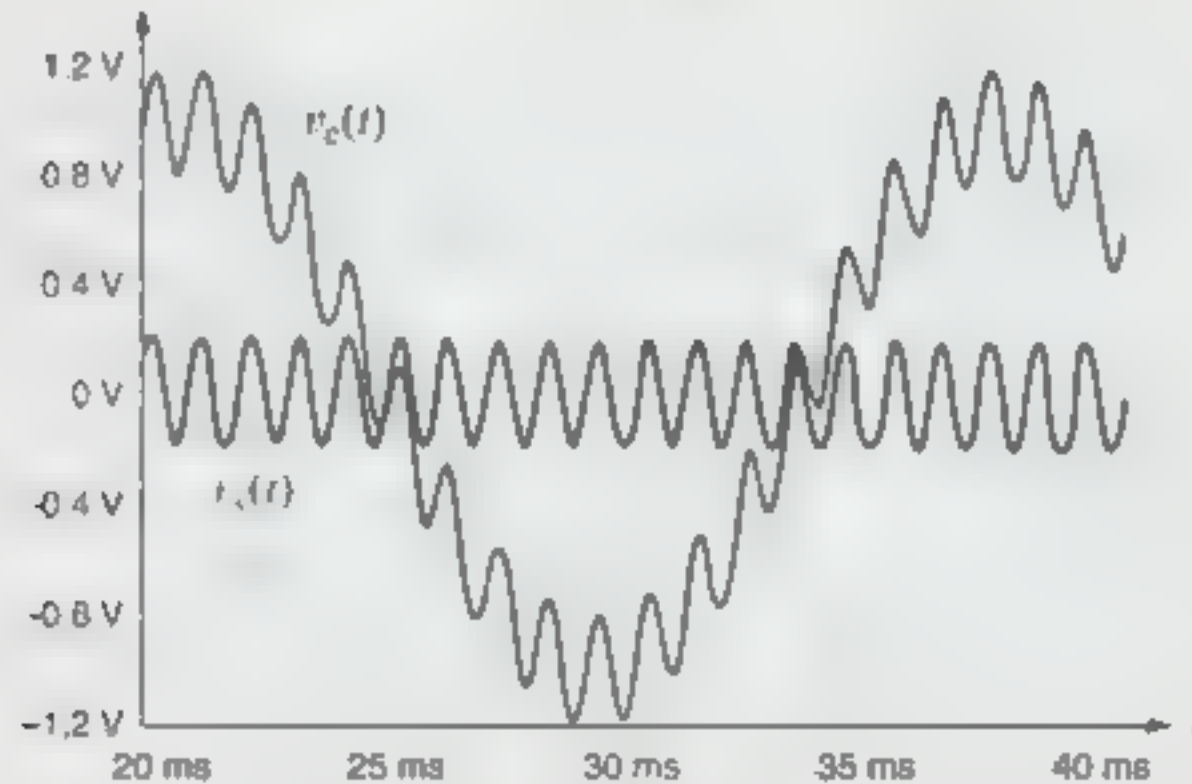


Figura 12.46 Análise transiente da rede mostrada na Fig. 12.45.

Avaliação do Aprendizado

E12.21 Dada a rede de filtro mostrada na Fig. E12.21, esboce sua resposta em magnitude por meio do diagrama de Bode de sua função de transferência $G(j\omega)$.

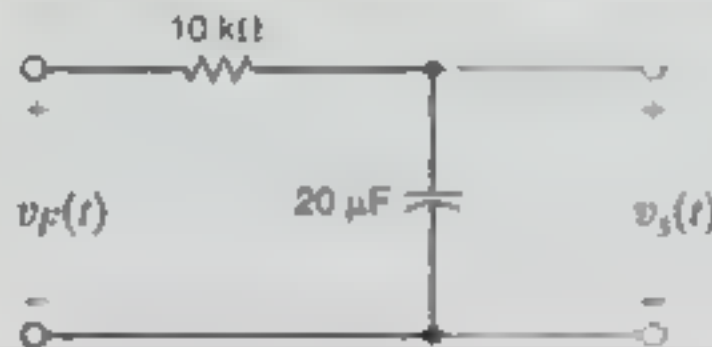
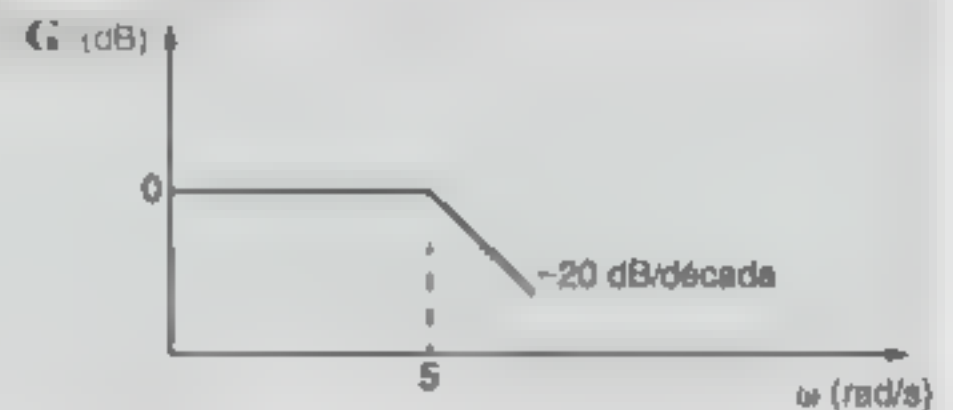


Figura E12.21

RESPOSTA:



E12.22 Dada a rede de filtro mostrada na Fig. E12.22, esboce sua resposta em magnitude por meio do diagrama de Bode de sua função de transferência $G_r(j\omega)$.

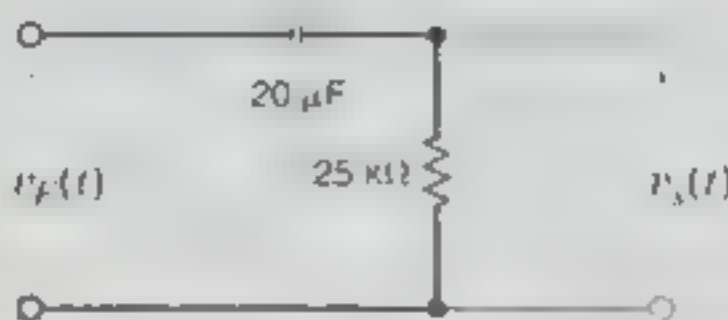
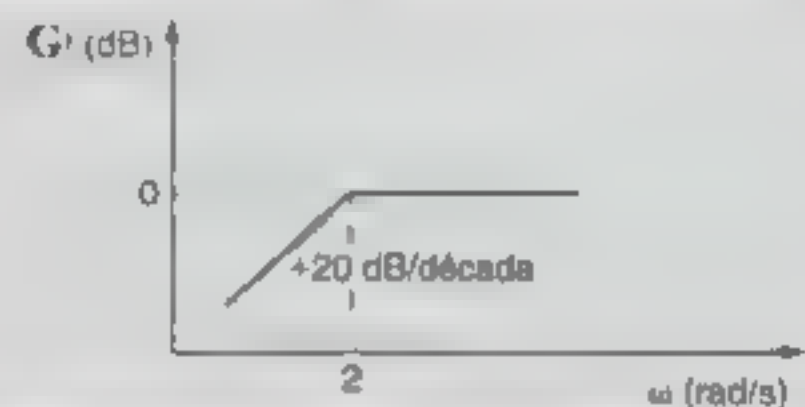


Figura E12.22

RESPOSTA:



E12.23 A rede de um filtro passa-banda é mostrada na Fig. E12.23. Esboce sua resposta em magnitude por meio do diagrama de Bode de sua função de transferência $G_r(j\omega)$.

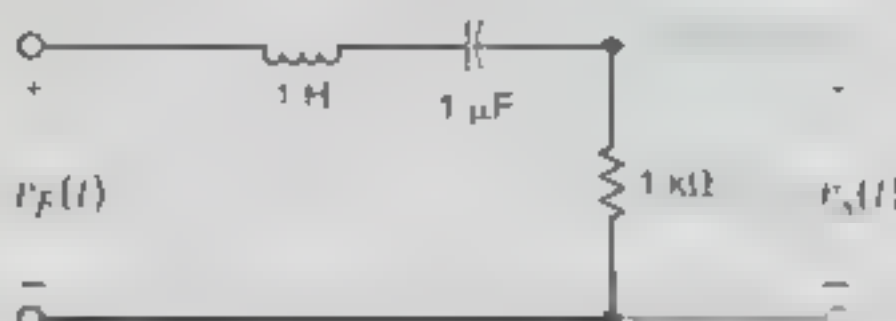
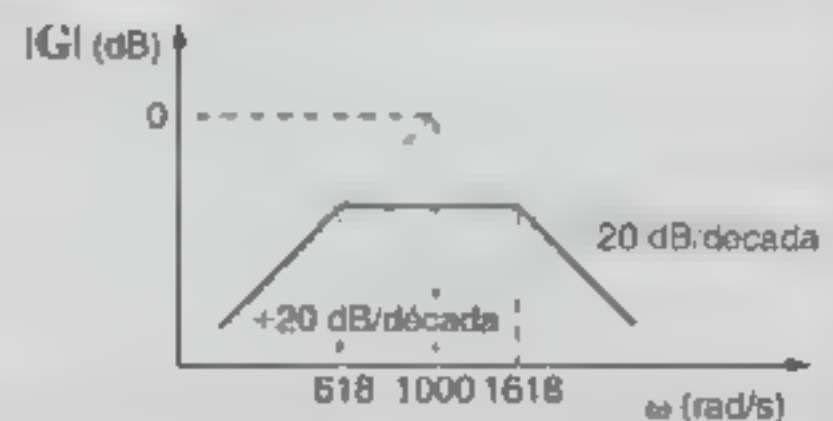


Figura E12.23

RESPOSTA:



E12.24 Determine o tipo de filtro representado pela rede mostrada na Fig. E12.24 por meio da obtenção de sua função de transferência em tensão.

RESPOSTA:

$$\frac{s \left(\frac{L}{R_1} \right)}{s \left[\frac{(R_1 + R_2)L}{R_1 R_2} \right]} + 1; \text{ este é um filtro passa-alta}$$

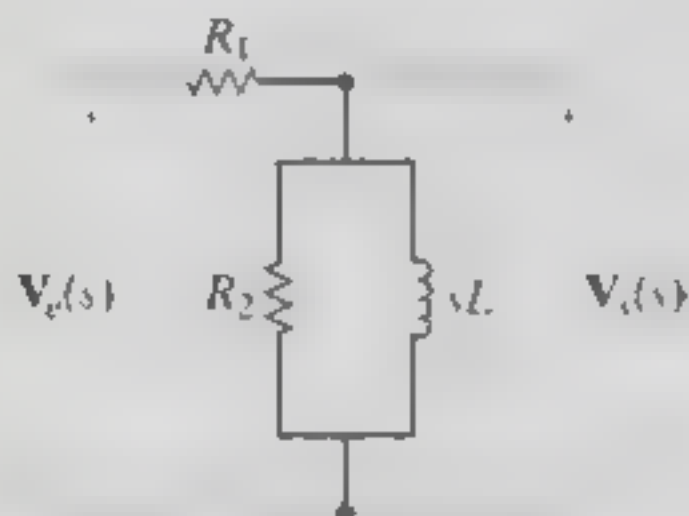


Figura E12.24

FILTROS ATIVOS Na seção anterior mostrou-se que as quatro principais classes de filtros (*passa-baixa*, *passa-alta*, *passa-banda* e *rejeita-banda*) são realizáveis por meio de circuitos simples com componentes passivos. Entretanto, os filtros passivos apresentam sérias desvantagens. Um problema óbvio é a impossibilidade de se produzir uma rede com ganho superior a 1, uma vez que uma rede puramente passiva não pode aumentar a energia do sinal. Outra séria desvantagem dos filtros passivos é a necessidade de componentes indutivos em muitas de suas configurações. Os indutores geralmente são caros e não estão disponíveis em valores precisos. Além disso, os indutores, em geral, se apresentam em formatos não uniformes (toroides, bobinas, núcleos em E etc.) e não são de fácil manuseio pelas

máquinas automáticas de montagem de circuitos impressos. Ao serem utilizados amplificadores operacionais nos circuitos lineares de realimentação, é possível gerar todos os tipos de filtros primários usando apenas resistores, capacitores e os próprios circuitos integrados dos op-amps.

Os circuitos equivalentes dos amplificadores operacionais apresentados no Capítulo 4 são também válidos nos casos de regime estacionário com entradas senoidais, quando os resistores são substituídos pelas impedâncias. Os circuitos equivalentes dos circuitos de op-amp inversor e não inversor são mostrados nas Figs. 12.47a e b, respectivamente. As características particulares de um determinado filtro são obtidas selecionando-se criteriosamente as impedâncias Z_1 e Z_2 .

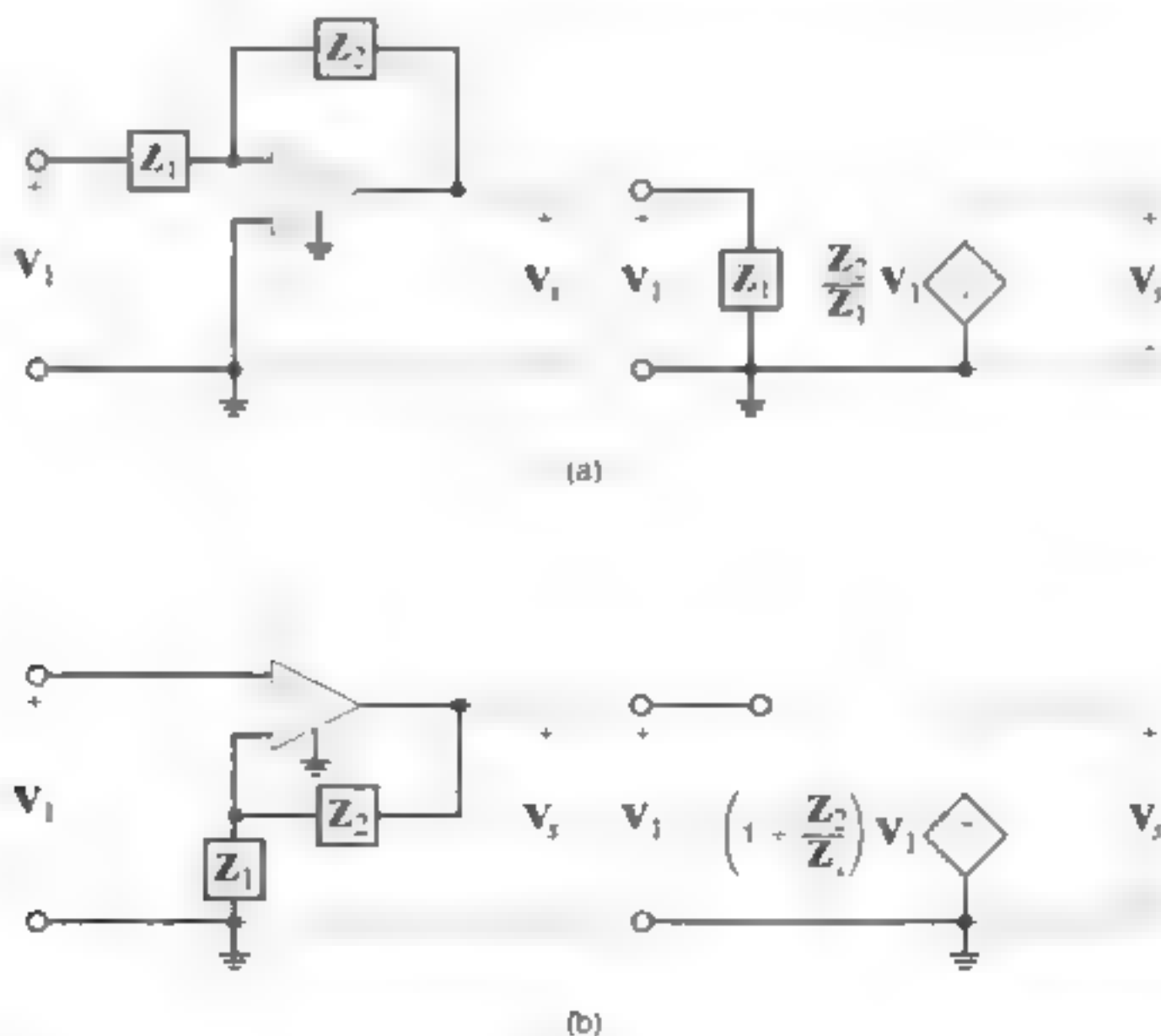


Figura 12.47 Circuitos equivalentes para os circuitos dos amplificadores operacionais (a) inversor e (b) não inversor.

EXEMPLO 12.20

Seja a determinação das características do filtro representado pela rede mostrada na Fig. 12.48.

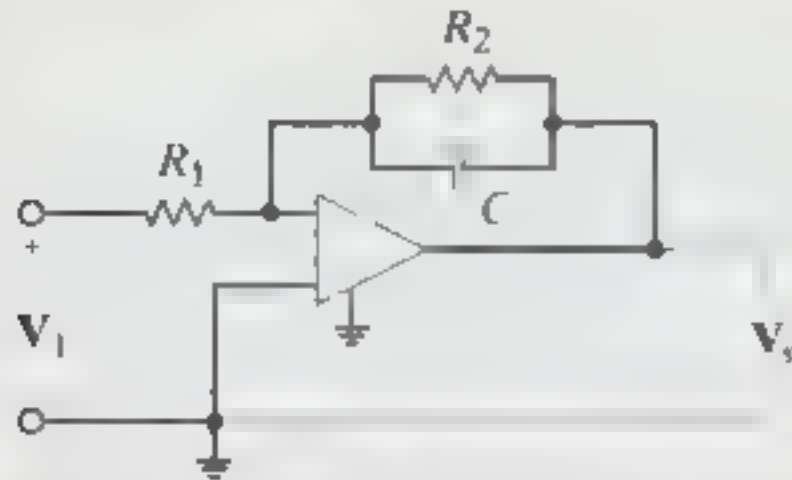


Figura 12.48 Circuito de um filtro com amplificador operacional.

SOLUÇÃO

As impedâncias, conforme ilustrado na Fig. 12.47a são

$$Z_1 = R_1$$

e

$$Z_2 = \frac{R_2 / j\omega C}{R_2 + 1/j\omega C} = \frac{R_2}{j\omega R_2 C + 1}$$

Portanto, o ganho em tensão da rede é

$$G(j\omega) = \frac{V_2(j\omega)}{V_1(j\omega)} = \frac{R_2}{j\omega R_2 C + 1}$$

Note que a função de transferência é a do filtro passa-baixa.

EXEMPLO 12.21

Mostra-se agora que a característica de amplitude do filtro da rede mostrada na Fig. 12.49a é a ilustrada na Fig. 12.49b.

SOLUÇÃO

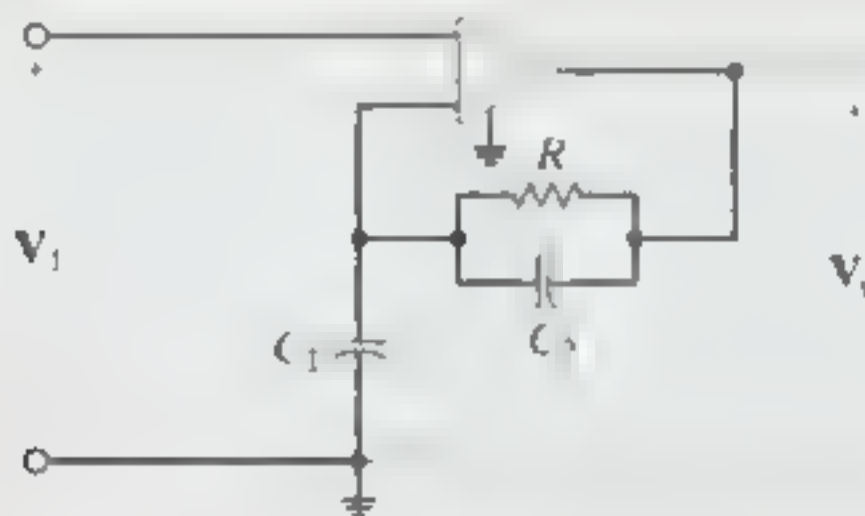
Comparando essa rede com a da Fig. 12.47b, percebe-se que

$$Z_1 = \frac{1}{j\omega C_1}$$

e

$$Z_2 = \frac{R}{j\omega R C_2 + 1}$$

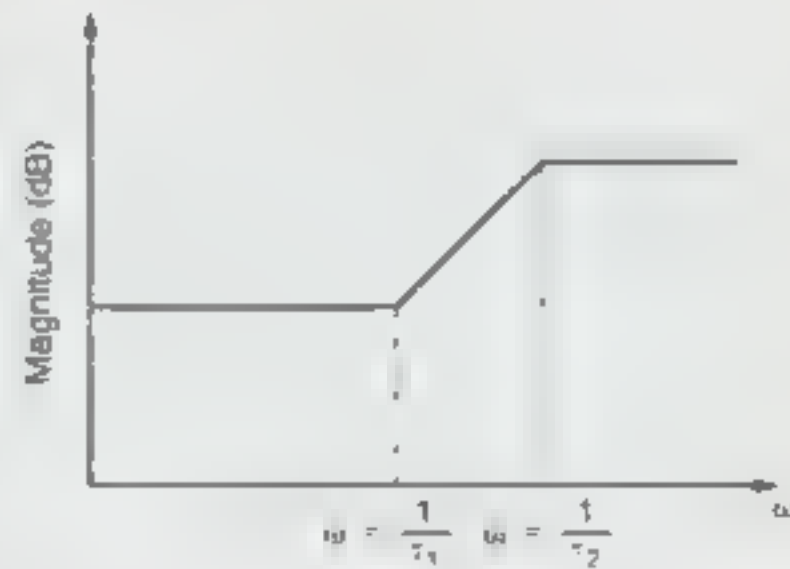
Portanto, o ganho em tensão da rede em função da frequência é



(a)

$$\begin{aligned} G_v(j\omega) &= \frac{V_2(j\omega)}{V_1(j\omega)} = 1 + \frac{R/(j\omega R C_2 + 1)}{1/j\omega C_1} \\ &= \frac{j\omega R C_1 + R C_1 + 1}{j\omega R C_1 + 1} \\ &= \frac{j\omega \tau_1 + 1}{j\omega \tau_2 + 1} \end{aligned}$$

em que $\tau_1 = R(C_1 + C_2)$ e $\tau_2 = R C_2$. Como $\tau_1 > \tau_2$, a característica de amplitude possui a forma mostrada na Fig. 12.49b. Note que as baixas frequências apresentam ganho de 1, enquanto as altas frequências são amplificadas. O valor exato da amplificação é determinado por meio da seleção dos parâmetros do circuito.



(b)

Figura 12.49 Circuito com amplificador operacional e sua característica de amplitude.

EXEMPLO 12.22

A Fig. 12.50 mostra um filtro passa-baixa juntamente com um subcircuito com op-amp. Deseja-se representar graficamente a resposta em frequência do filtro para uma faixa de 1 a 10.000 Hz.

SOLUÇÃO

A representação da resposta em frequência, que pode ser determinada por qualquer procedimento conveniente, é mostrada na Fig. 12.51

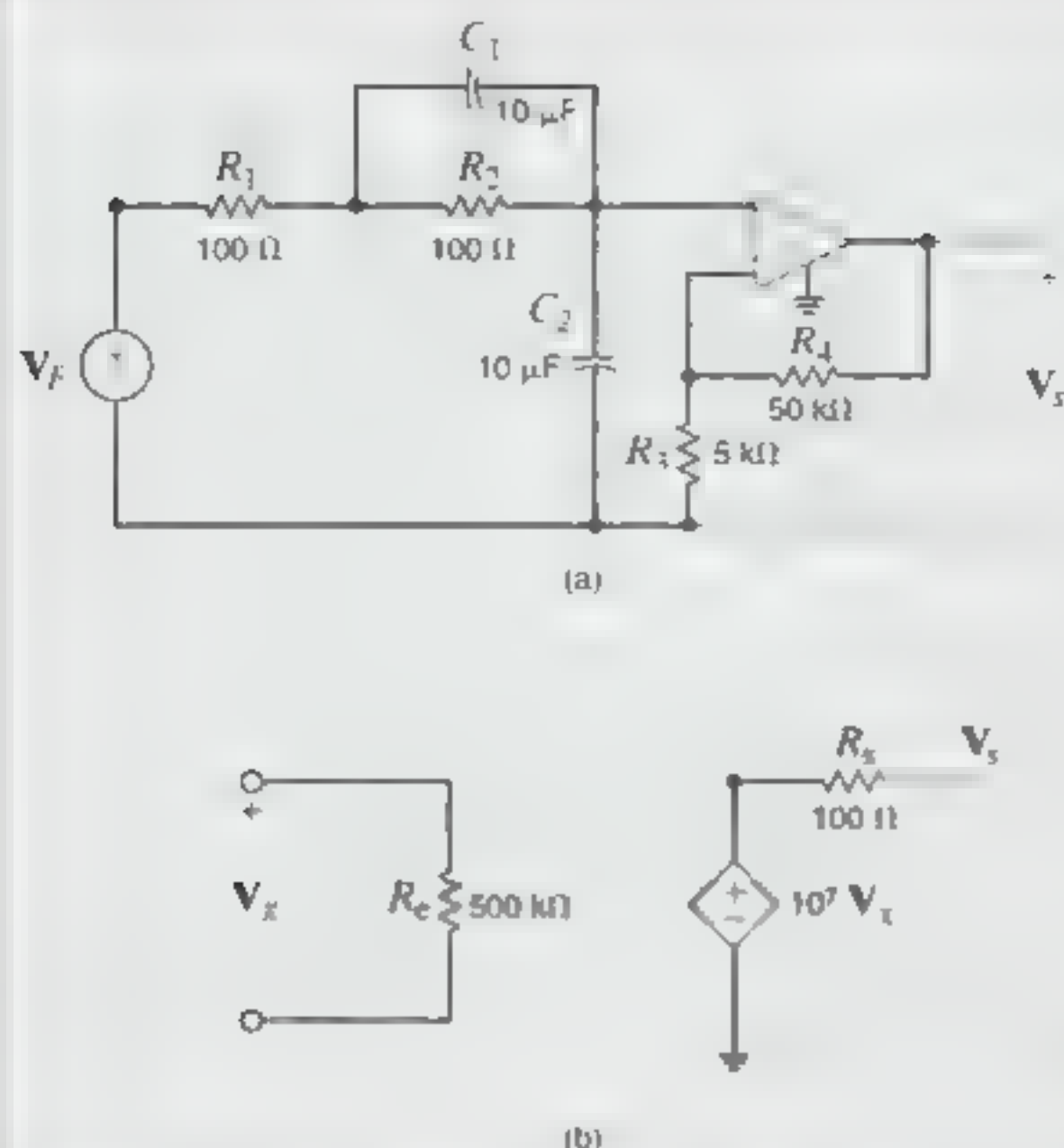


Figura 12.50 Circuito utilizado no Exemplo 12.22: (a) filtro passa-baixa e (b) subcircuito com op-amp.

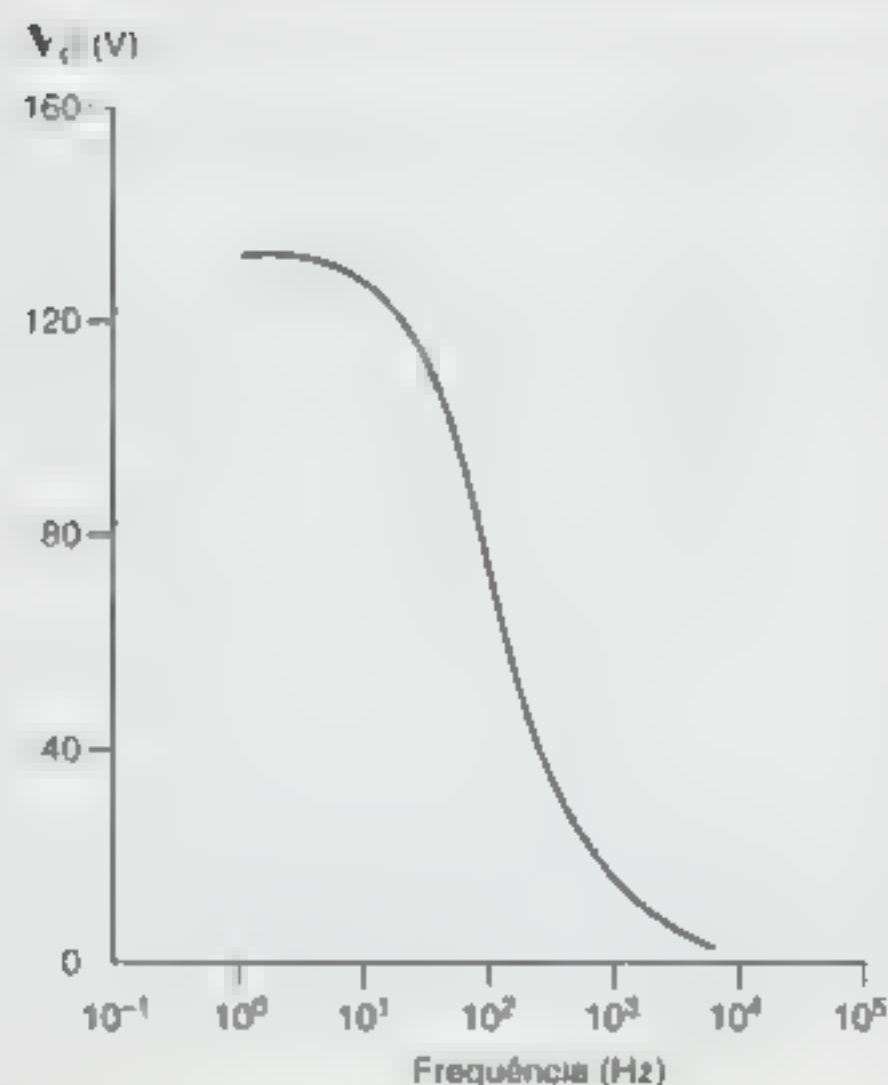


Figura 12.51 Representação gráfica da resposta em frequência da rede do Exemplo 12.22.

EXEMPLO 12.23

A Fig. 12.52 mostra a rede de um filtro passa-alta juntamente de um subcircuito com op-amp. Deseja-se representar graficamente a resposta em frequência do filtro para uma faixa de 1 a 100 kHz.

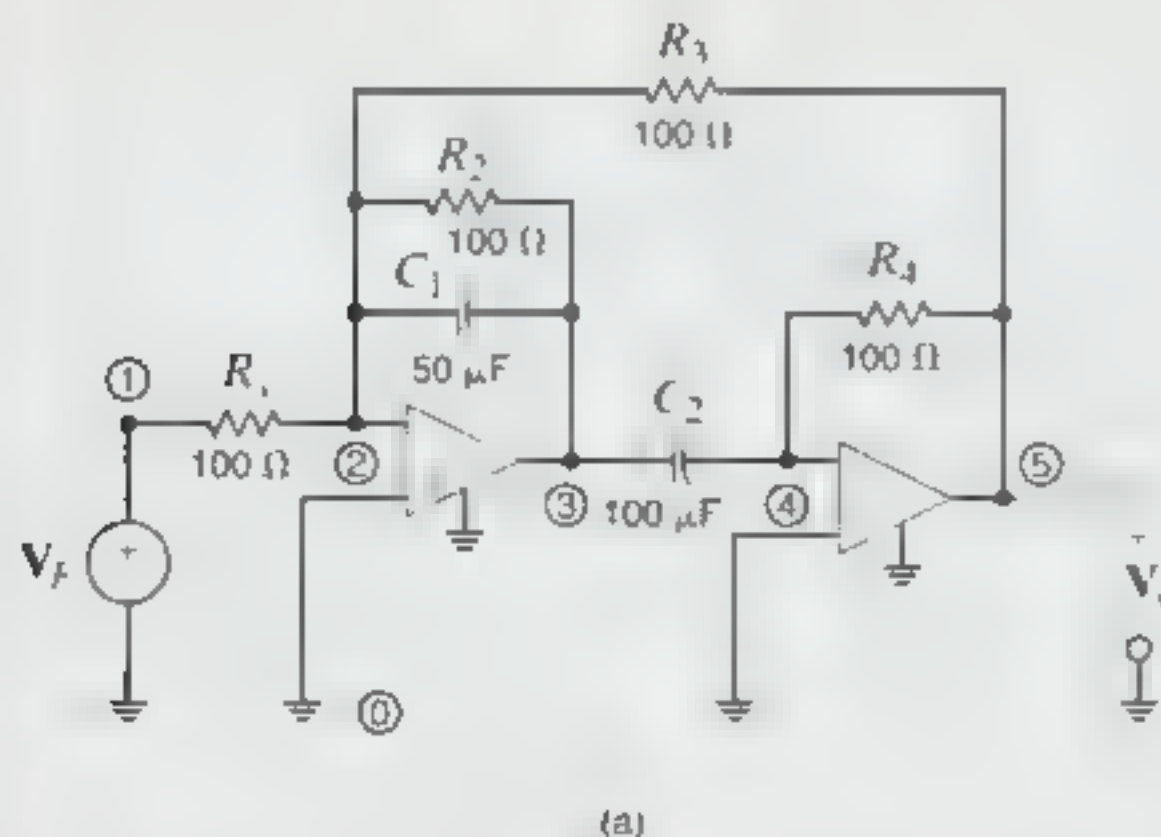


Figura 12.52 Circuitos utilizados no Exemplo 12.23: (a) filtro passa-alta e (b) subcircuito com op-amp.

SOLUÇÃO

A representação gráfica da resposta em frequência desse filtro passa-alta é mostrada na Fig. 12.53.

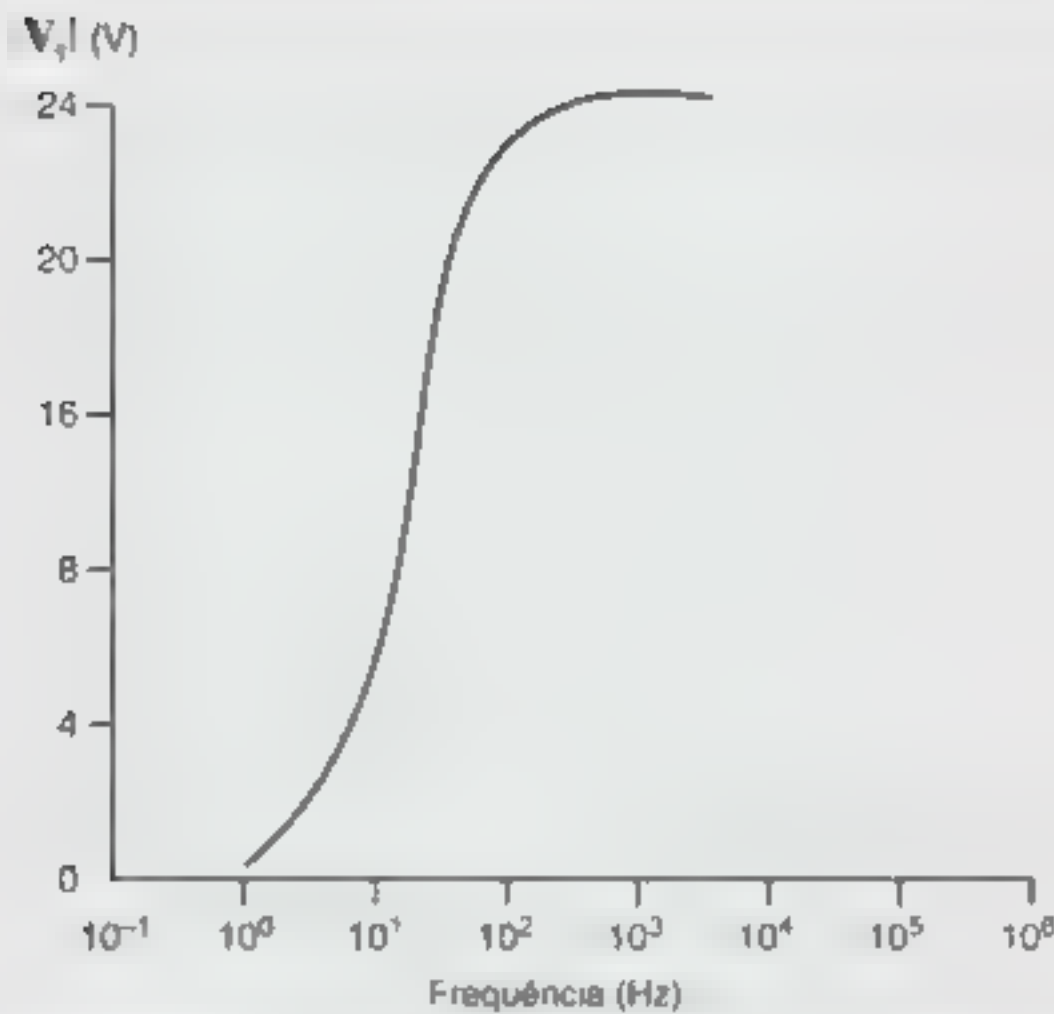


Figura 12.53 Representação gráfica da resposta em frequência da rede do Exemplo 12.23.

Avaliação do Aprendizado

E12.25 Dada a rede de filtro mostrada na Fig. E12.25, determine a função de transferência $G(j\omega)$, esquematize o diagrama de Bode da magnitude para $G(j\omega)$ e identifique as características do filtro da rede.

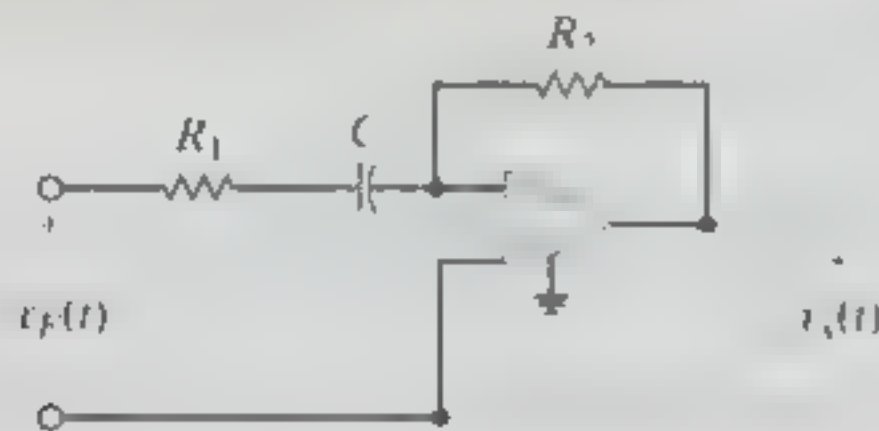
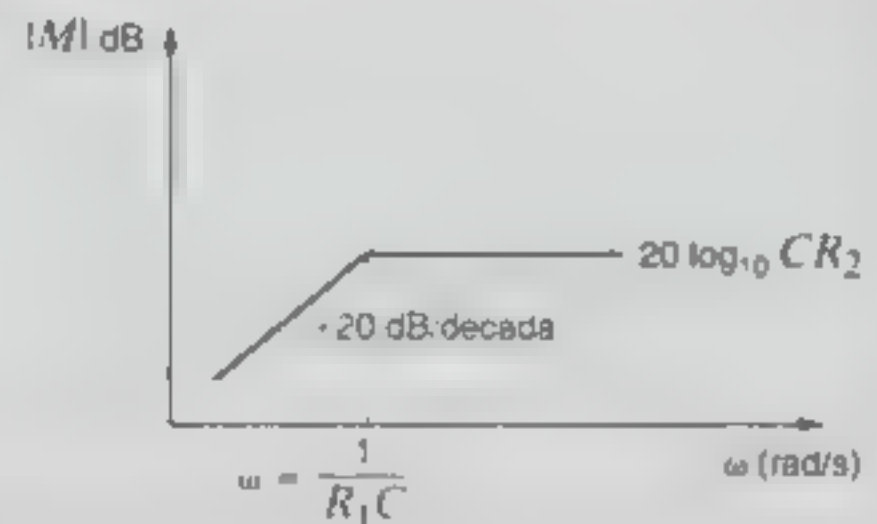


Figura E12.25

RESPOSTA: $G_s(j\omega) = \frac{j\omega R_2}{1 + j\omega CR_1}$; este é um filtro passa-alta.



Todos os circuitos considerados até agora nesta seção foram filtros de primeira ordem. Em outras palavras, todos eles apresentam não mais de um polo e/ou um zero. Em muitas aplicações, é desejada a geração de um circuito com seletividade de frequências superior àquela proporcionada pelos circuitos de primeira ordem. A próxima etapa lógica é considerar a classe de filtros de segunda ordem. Para a maioria das aplicações de filtros ativos, se for desejada uma ordem superior a dois, serão utilizados dois ou mais circuitos de filtro ativo, os quais serão colocados em série de modo que a resposta total seja a resposta de ordem superior desejada. Isto é feito porque os filtros de primeira e de segunda ordem são bem conhecidos e facilmente obtidos através de circuitos simples com op-amps.

Em geral, os filtros de segunda ordem possuirão uma função de transferência com um denominador que contém polos qua-

dráticos da forma $s^2 + As + B$. Para os circuitos passa-alta e passa-baixa, $B = \omega_c^2$ e $A = 2\zeta\omega_c$. Para esses circuitos, ω_c é a frequência de corte e ζ é a fração de amortecimento discutida anteriormente.

Para os circuitos passa-bandas, $B = \omega_c^2$ e $A = \omega_c/Q$, em que ω_0 é a frequência de centro e Q é o fator de qualidade do circuito. Note que $Q = 1/2\zeta$. O fator Q é uma medida da seletividade desses circuitos. A banda passante é ω_c/Q , conforme discutido anteriormente.

A função de transferência do filtro ativo passa-baixa de segunda ordem pode, de forma genérica, ser escrita como

$$H(s) = \frac{H_0 \omega_c^2}{s^2 + 2\zeta \omega_c s + \omega_c^2} \quad 12.64$$

em que H_0 é o ganho CC. A Fig. 12.54 mostra um circuito que apresenta essa função de transferência e possui a seguinte função de transferência:

$$H(s) = \frac{V_s(s)}{V_e(s)} = \frac{-\left(\frac{R_3}{R_1}\right)\left(\frac{1}{R_3 R_2 C_1 C_2}\right)}{s^2 + s\left(\frac{1}{R_1 C_1} + \frac{1}{R_2 C_1} + \frac{1}{R_3 C_1}\right) + \frac{1}{R_1 R_2 C_1 C_2}} \quad 12.65$$

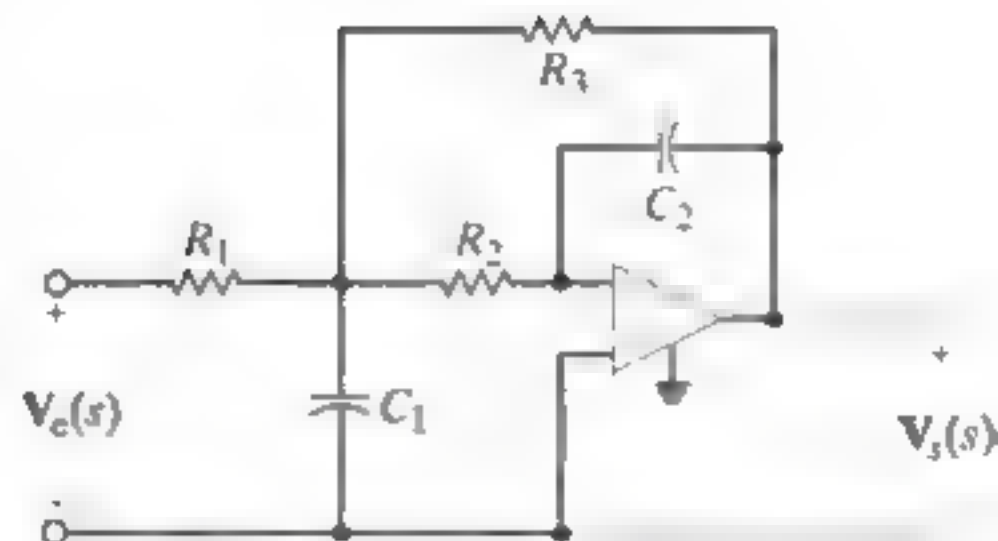


Figura 12.54 Filtro passa-baixa de segunda ordem.

EXEMPLO 12.24

Deseja-se determinar a fração de amortecimento, a frequência de corte e o ganho CC H_0 da rede mostrada na Fig. 12.54, se $R_1 = R_2 = R_3 = 5 \text{ k}\Omega$ e $C_1 = C_2 = 0,1 \text{ }\mu\text{F}$.

SOLUÇÃO

Comparando as Eqs. (12.64) e (12.65), obtém-se que

$$\omega_c = \frac{1}{\sqrt{R_1 R_2 C_1 C_2}}$$

$$2\zeta\omega_c = \frac{1}{C_1} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right)$$

e, portanto,

$$\zeta = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{C_2}{C_1}} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right) \sqrt{R_2 R_1}$$

Além disso, note que

$$H_0 = \frac{R_3}{R_1}$$

A substituição dos valores dos parâmetros na equação precedente fornece:

$$\omega_c = 2000 \text{ rad/s}$$

$$\zeta = 1,5$$

e

$$H_0 = 1$$

EXEMPLO 12.25

Deseja-se variar os valores dos capacitores C_1 e C_2 do Exemplo 12.24 de modo a se obter uma fração de amortecimento de 1,0, 0,75, 0,50 e 0,25 mantendo-se ω_c constante em 2.000 rad/s.

SOLUÇÃO

Conforme mostrado na equação da frequência de corte do Exemplo 12.24, se ω_c deve permanecer constante em 2.000 rad/s, o produto de C_1 e C_2 deve permanecer constante. Utilizando os valores das capacitâncias do Exemplo 12.24, tem-se

$$C_1 C_2 = (10)^{-4}$$

ou

$$C_2 = \frac{(10)^{-4}}{C_1}$$

A substituição dessa expressão na equação da fração de amortecimento fornece

$$\zeta = \frac{\sqrt{10^{-14}}}{\sqrt{C_1} \sqrt{C_1}} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right) \right] \sqrt{R_2 R_1}$$

$$(0,15)(10^{-6})$$

$$C_1$$

ou

$$C_1 = \frac{(0,15)(10^{-6})}{\zeta}$$

Portanto, para $\zeta = 1,0, 0,75, 0,50$ e $0,25$, os correspondentes valores de C_1 são 0,15, 0,20, 0,30 e 0,6 μF , respectivamente. Os valores de C_2 que correspondente a esses valores de C_1 são 67, 50, 33 e 17 nF, respectivamente.

Esse exemplo ilustra a possibilidade de ajuste dos parâmetros da rede de modo a se obter uma resposta transiente específica mantendo-se constante a frequência de corte do filtro.

Na realidade, como regra geral, os filtros são projetados com características específicas mediante a manipulação apropriada dos parâmetros da rede.

EXEMPLO 12.26

Demonstra-se agora que a resposta transiente gerada para os circuitos do Exemplo 12.25 apresentará um aumento de sobrevalor e de oscilações na medida em que a fração de amortecimento ζ diminui. Será aplicada uma função degrau de -1 V à entrada da rede e empregado o modelo de op-amp com $R_f \rightarrow \infty\ \Omega$, $R_s = 0\ \Omega$ e $A = 10^5$.

SOLUÇÃO

A resposta transiente para os quatro casos de amortecimento, incluindo os valores associados aos capacitores, pode ser calculada utilizando qualquer procedimento conveniente.

Os resultados são mostrados na Fig. 12.55. As curvas indicam que uma fração de amortecimento $\zeta = 0,75$ pode apresentar um bom compromisso de projeto entre resposta rápida ao degrau e sobrevalor mínimo.

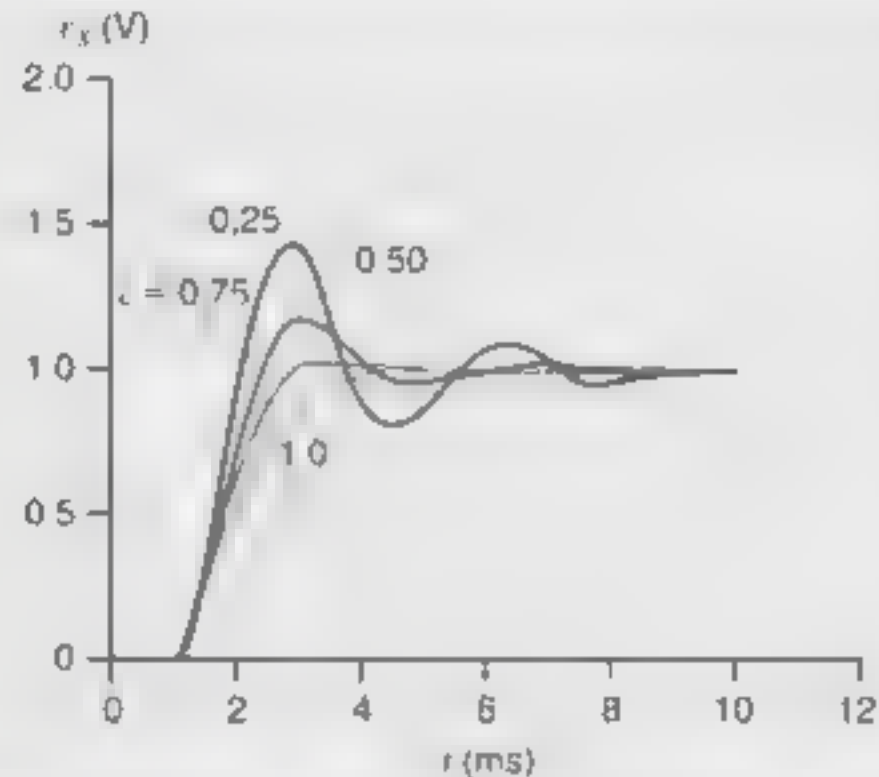


Figura 12.55 Análise transiente da rede do Exemplo 12.25.

Avaliação do Aprendizado

E12.26 Constate que a Eq. (12.65) é a função de transferência da rede mostrada na Fig. 12.54.

A função de transferência geral para o filtro passa-banda de segunda ordem é

$$\frac{V_o(s)}{V_i(s)} = \frac{sH_o}{s^2 + \frac{\omega_o}{Q}s + \omega_o^2} \quad 12.66$$

Conforme discutido anteriormente, ω_o é a frequência de centro do filtro passa-banda e Q é o fator de qualidade. Lembre-se de que para os filtros passa-baixa, H_o era a banda passante ou o ganho CC. Para um filtro passa-banda, o ganho é máximo na frequência de centro, ω_o . Para se determinar esse ganho máximo substitui-se $s = j\omega_o$ na expressão precedente para se obter

$$\begin{aligned} \frac{V_o(j\omega_o)}{V_i(j\omega_o)} &= \frac{j\omega_o H_o}{-\omega_o^2 + j\omega_o(\omega_o/Q) + \omega_o^2} \\ &= \frac{QH_o}{\omega_o} \end{aligned} \quad 12.67$$

Além disso, a diferença entre as frequências alta e baixa referentes à meia potência (isto é, $\omega_{\text{ALTA}} - \omega_{\text{BAIXA}}$) é, naturalmente, a banda passante, ou seja

$$\omega_{\text{ALTA}} - \omega_{\text{BAIXA}} = \text{BP} = \frac{\omega_o}{Q} \quad 12.68$$

O fator de qualidade Q é uma medida da seletividade do filtro passa-banda e, conforme indica a equação, quando Q aumenta, a banda passante diminui.

A implementação de um filtro passa-banda utilizando op-amp é mostrada na Fig. 12.56. A função de transferência dessa rede é

$$\frac{V_o(s)}{V_i(s)} = \frac{\left(\frac{1}{R_1 C_1}\right)s}{s^2 + \left(\frac{1}{R_2 C_1} + \frac{1}{R_3 C_2}\right)s + \frac{1 + R/R_1}{R R_2 C_1 C_2}} \quad 12.69$$

Comparando essa expressão com a expressão mais geral de um filtro passa-banda, obtêm-se as seguintes definições:

$$\begin{aligned} \omega_o &= \left(\frac{1 + R/R_1}{R R_2 C_1 C_2}\right)^{1/2} \\ \frac{Q}{\omega_o} &= \frac{R R_2 C_1 C_2}{C_1 + C_2} \\ \frac{Q}{\omega_o} \omega_o &= \frac{R R_2 C_2}{C_1 + C_2} \left(\frac{1 + R/R_1}{R R_2 C_1 C_2}\right)^{1/2} \end{aligned} \quad 12.70$$

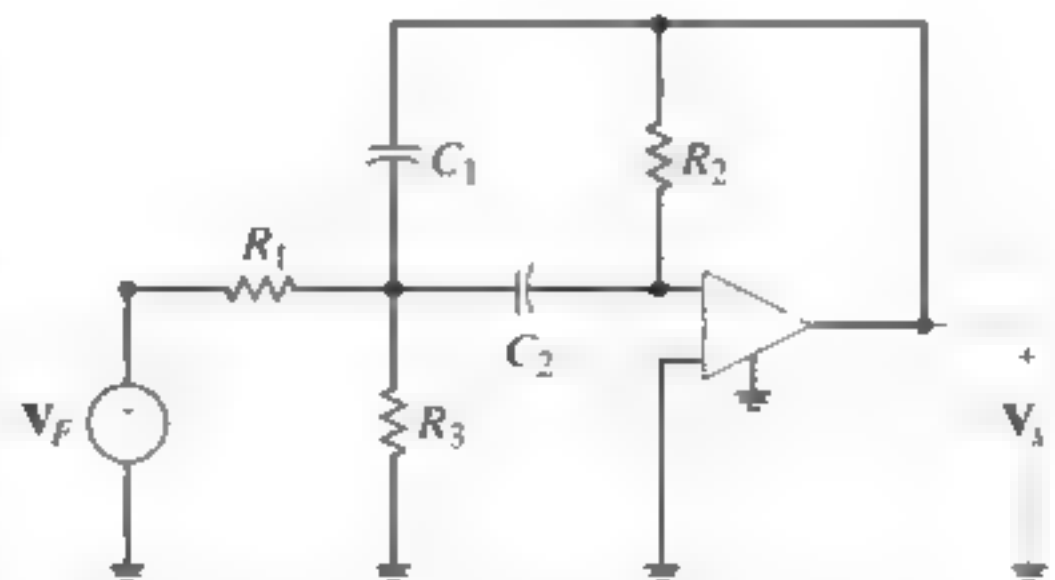


Figura 12.56 Filtro passa-banda de segunda ordem.

Essas expressões podem ser simplificadas fornecendo

$$Q = \frac{(1 + R_1/R_3)^{1/2}}{1 + C_1/C_2} \left(\frac{R_2 C_1}{R_1 C_2} \right)^{1/2} \quad 12.71$$

$$BP = \frac{\omega_0}{Q} = \frac{1}{R_2} \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \right) \quad 12.72$$

EXEMPLO 12.27

Deseja-se obter novas expressões para as Eqs. (12.70) e (12.73) para a condição em que $C_1 = C_2 = C$.

SOLUÇÃO

Utilizando a condição fornecida no enunciado, verifica-se que as equações ficam reduzidas a

$$\omega_0 = \frac{1}{C} \sqrt{\frac{1 + R_1/R_3}{R_1 R_2}}$$

e

$$\left. \frac{V}{V_F} \right|_{\omega = \omega_0} = \frac{QH_{\omega_0}}{\omega_0} = \frac{R}{R} \left(\frac{1}{1 + C_1/C_2} \right) \quad 12.73$$

$$Q = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{R_2}{R_1}} \sqrt{1 + \frac{R_1}{R_3}}$$

$$BP = \frac{2}{R_2 C}$$

e

$$\left. \frac{V_i}{V_F} \right|_{\omega = \omega_0} = -\frac{R_2}{2R_1}$$

EXEMPLO 12.28

As equações obtidas no Exemplo 12.27 são utilizadas no projeto de um filtro passa-banda com a configuração mostrada na Fig. 12.56. Os seguintes parâmetros são utilizados: $BP = 2.000 \text{ rad/s}$, $(V_i/V_F)(\omega_0) = -5$ e $Q = 3$. Utilize $C = 0,1 \mu\text{F}$ e determine a frequência de centro do filtro.

SOLUÇÃO

Utilizando as equações do filtro, obtêm-se

$$\begin{aligned} BP &= \frac{2}{R_2 C} \\ 2.000 &= \frac{2}{R_2 (10)^{-7}} \\ R_2 &= 10 \text{ k}\Omega \\ \left. \frac{V_i}{V_F} \right|_{(\omega_0)} &= -\frac{R_2}{2R_1} \\ -5 &= -\frac{10.000}{2R_1} \\ R_1 &= 1 \text{ k}\Omega \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} Q &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{R_2}{R_1}} \sqrt{1 + \frac{R_1}{R_3}} \\ 3 &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{10.000}{1.000}} \sqrt{1 + \frac{1.000}{R_3}} \end{aligned}$$

ou

$$R_3 = 385 \Omega$$

Portanto, os parâmetros $R = 1 \text{ k}\Omega$, $R_2 = 10 \text{ k}\Omega$, $R_3 = 385 \Omega$ e $C = 0,1 \mu\text{F}$ definem completamente o filtro passa-banda mostrado na Fig. 12.56. A frequência de centro do filtro é

$$\begin{aligned} \omega_0 &= \frac{1}{C} \sqrt{\frac{1 + R_1/R_3}{R_1 R_2}} \\ &= \frac{1}{10^{-7}} \sqrt{\frac{1 + (1.000/385)}{(1.000)(10.000)}} \\ &= 6.000 \text{ rad/s} \end{aligned}$$

EXEMPLO 12.29

Deseja-se obter o diagrama de Bode do filtro projetado no Exemplo 12.28. Emprega-se o modelo com op-amp, no qual $R_e \rightarrow \infty$, $R_s = 0$ e $A = 10^5$, e representa-se graficamente a curva de resposta para uma faixa de frequências entre 600 e 60 kHz.

SOLUÇÃO

O circuito equivalente do filtro é mostrado na Fig. 12.57a. O diagrama de Bode é mostrado na Fig. 12.57b. Conforme pode ser verificado com base no diagrama, a frequência de centro é de 6 krad/s e a $BP = 2 \text{ krad/s}$.

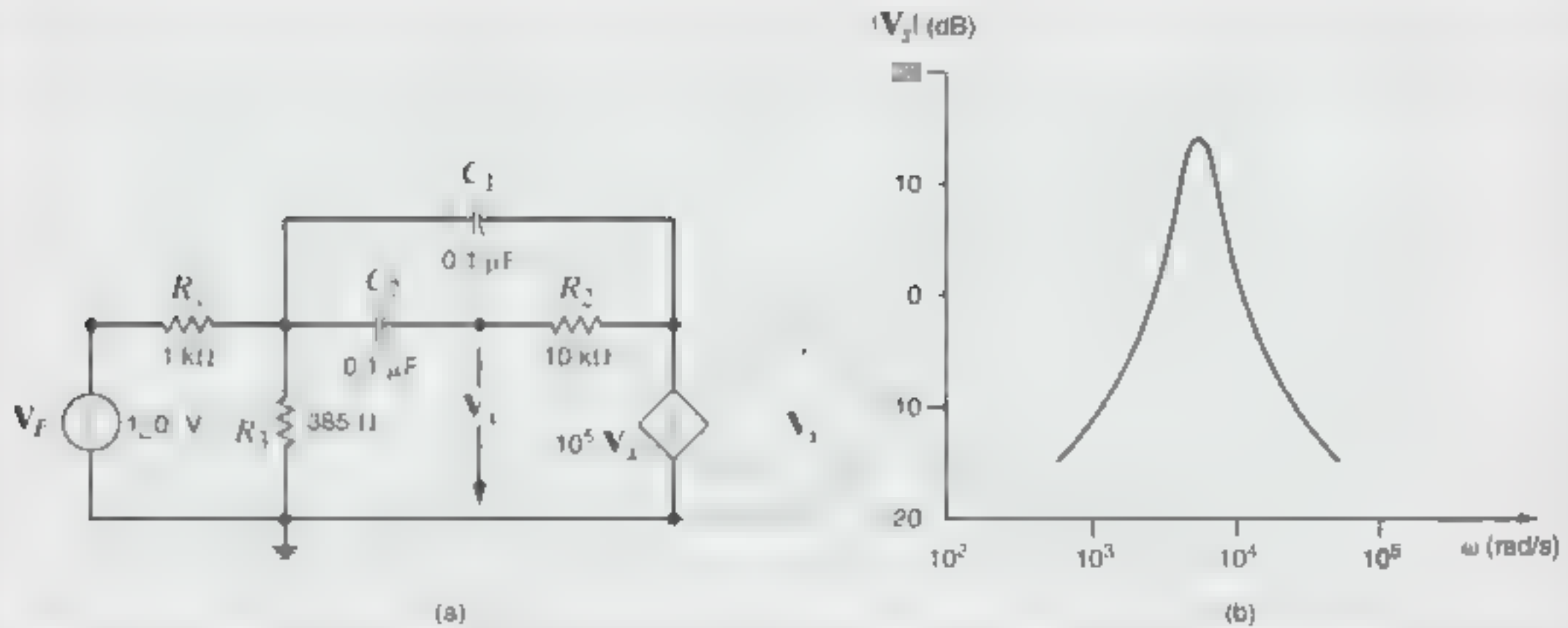


Figura 12.57 Figuras empregadas no Exemplo 12.29: (a) circuito equivalente do filtro passa-banda e (b) diagrama de Bode.

Avaliação do Aprendizado

E12.27 Constate que a Eq. (12.69) é a função de transferência do filtro passa-banda mostrado na Fig. 12.56.

Embora os op-amps sejam muito populares e extremamente úteis em uma ampla variedade de aplicações de filtros, eles nem sempre representam a melhor escolha devido às limitações associadas a seus circuitos internos. Dois exemplos são os circuitos dos filtros ativos de alta frequência e baixa tensão (< 3 V). Com a evolução do mercado dos equipamentos sem fio (telefones celulares, pagers etc.) essas aplicações tendem a crescer pela sua notoriedade. Existe, entretanto, um op-amp diferenciado chamado de *amplificador operacional com transcondutância* (OTA — *operational transconductance amplifier*), que oferece excelentes resultados nesse cenário, permitindo, por exemplo, que filtros bastante avançados sejam implementados em um único chip. Nesse texto são introduzidos os fundamentos e as aplicações do OTA, incluindo os multiplicadores análogos, os amplificadores de controle com ganho automático e os filtros anteriormente mencionados.

As vantagens do OTA em relação ao op-amp podem ser explicadas a partir dos diagramas mostrados na Fig. 12.58. No modelo de op-amp com três estágios, o estágio da entrada propicia uma alta resistência de entrada, converte a tensão diferencial de entrada $v_e(t)$ em uma tensão terminal única (relativa ao terra) e produz algum ganho em tensão. O estágio do ganho fornece a dimensão do ganho em tensão do op-amp. Finalmente, o estágio de saída possui um pequeno ou até nenhum ganho em tensão, porém, produz uma baixa resistência de saída. Esse modelo de três estágios representa precisamente o projeto físico de muitos dos op-amps.

Considere agora o modelo OTA com dois estágios. Como no op-amp, o estágio de entrada fornece uma alta resistência de entrada, porém, seu ganho em tensão é mínimo. Diferentemente do op-amp, o estágio do ganho produz uma corrente de saída, e

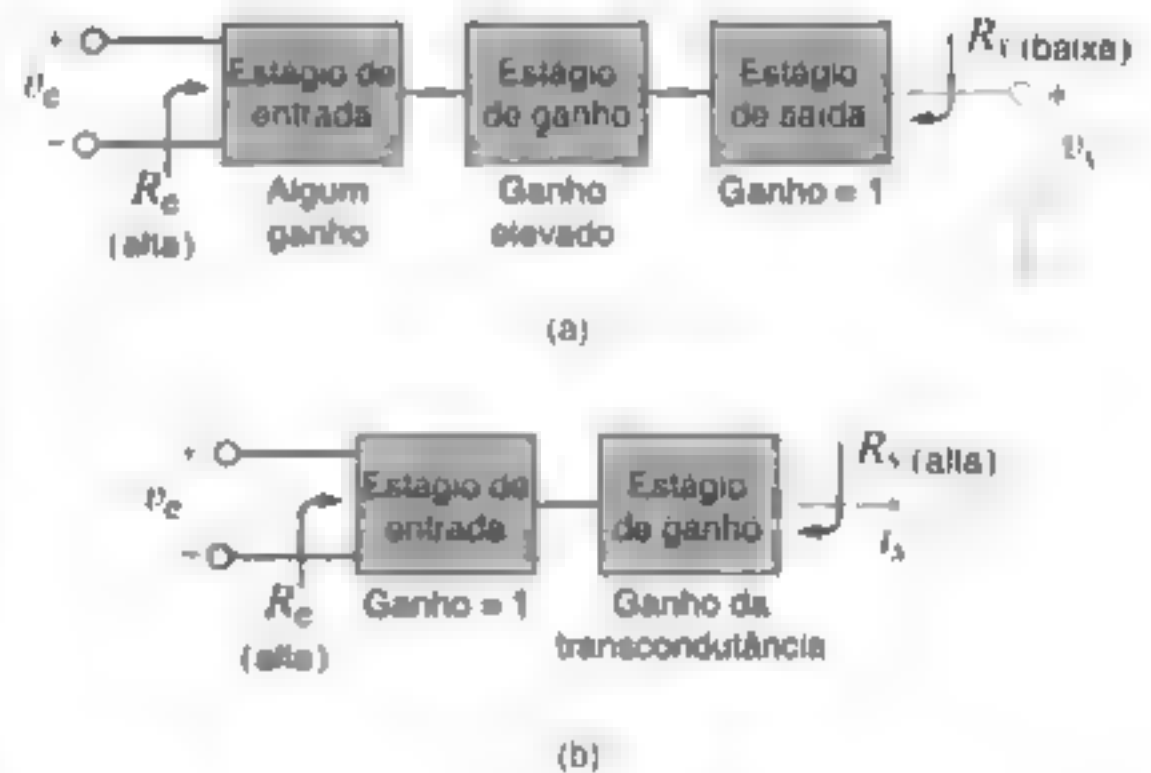


Figura 12.58 Diagramas de blocos ilustrando o arranjo físico do (a) op-amp e (b) do OTA.

não uma tensão. Como o sinal de saída é uma corrente, o ganho é expresso em ampères por volt, ou transcondutância, em A/V ou siemens. Sem estágio de saída, o OTA é mais compacto e consome menos energia do que o op-amp e possui uma resistência global de saída R_1 — um valor alto. Tendo todos os ganhos em um único estágio, o OTA além de ter simplificado seu projeto interno, resulta em um amplificador simples, rápido e compacto que pode ser eficientemente reproduzido muitas vezes em um único chip de silício. O símbolo esquemático do OTA e seu modelo mais simples são mostrados nas Figs. 12.59a e b, respectivamente.



Figura 12.59 (a) Símbolo esquemático do OTA e (b) modelo s mples do OTA.

Para comparar o desempenho do op-amp e do OTA, considere os circuitos mostrados na Fig. 12.60. Para o op-amp, o ganho global em tensão é

$$A = \frac{v_o}{v_e} = \left[\frac{R_o}{R_f + R_o} \right] A_v \left[\frac{R_L}{R_L + R} \right] \quad 12.74$$

Idealmente, $R_o \rightarrow \infty$, $R_f \rightarrow 0$, e a tensão de saída é independente das componentes externas R_f e R_L . O ganho global do OTA é

$$G_m = \frac{i_o}{v_e} = \left[\frac{R_o}{R_f + R_o} \right] g_m \left[\frac{R_L}{R_L + R} \right] \quad 12.75$$

Para um OTA ideal, tanto R_o quanto R_f tendem a infinito, fornecendo uma transcondutância independente de R_f e R_L . As semelhanças e as diferenças entre os OTAs ideais e os op-amps ideais são listadas na Tabela 12.2.

Do mesmo modo que os op-amps, os OTAs podem ser utilizados para gerar circuitos matemáticos. A seguir são apresentados três circuitos de OTA utilizados extensivamente nos filtros ativos: o integrador, o resistor simulado e o somador. Para simplificar essa análise, admite-se que o OTA seja ideal com resistências de entrada e de saída infinitas. O integrador mostrado na Fig. 12.61, que representa o coração dos filtros ativos com OTA, pode ser analisado conforme descrito a seguir:

$$i_s = g_m v_i \quad v_i = \frac{1}{C} \int i_s dt \quad v_o = \frac{g_m}{C} \int v_i dt \quad 12.76$$

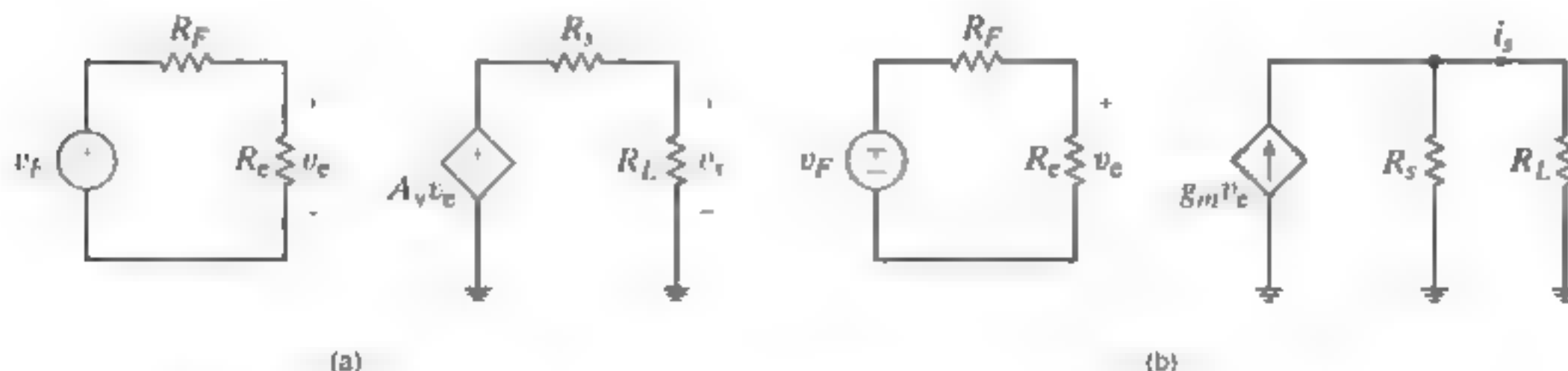


Figura 12.60 Circuitos simples que mostram as resistências relativas (a) do op-amp e (b) do OTA.

TABELA 12.2 Comparação entre as características dos op-amps ideais e dos OTAs

TIPO DE AMPLIFICADOR	IMPEDÂNCIA DE ENTRADA	IMPEDÂNCIA DE SAÍDA	IMPEDÂNCIA DE SAÍDA	CORRENTES DE ENTRADA	TENSÃO DE ENTRADA
Op-amp	∞	0	∞	0	0
OTA	∞	∞	∞	g_m	0

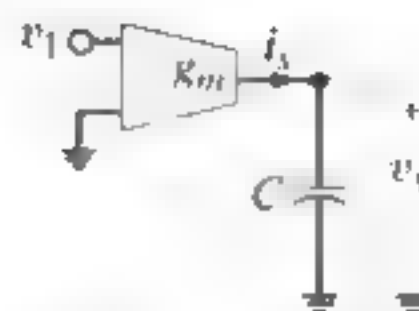


Figura 12.61 O OTA integrador.

Ou, no domínio da frequência,

$$I_s = g_m V_i \quad V_s = \frac{I_s}{j\omega C} \quad V_o = \frac{g_m}{j\omega C} V_i \quad 12.77$$

Um aspecto interessante da fabricação dos circuitos integrados (CI) é que os resistores (especialmente os que possuem alto valor, isto é, $> 10 \text{ k}\Omega$) são fisicamente muito grandes se comparados a outros dispositivos, como os transistores. Além disso, a produção de valores precisos é muito difícil. Essas condições têm motivado os projetistas a utilizar os OTAs para simular os resistores. Um desses circuitos é o resistor aterrado, mostrado na Fig. 12.62. Aplicando-se as condições ideais apresentadas na Tabela 12.2 para o OTA, tem-se

$$i_c = g_m(0 - v_c) = -g_m v_c \quad i_c = -I \quad R_{eq} = \frac{v_c}{i_c} = \frac{1}{g_m} \quad 12.78$$

Um circuito somador simples é mostrado na Fig. 12.63a, em que o OTA 3 é um resistor simulado. Com base na Eq. (12.78),

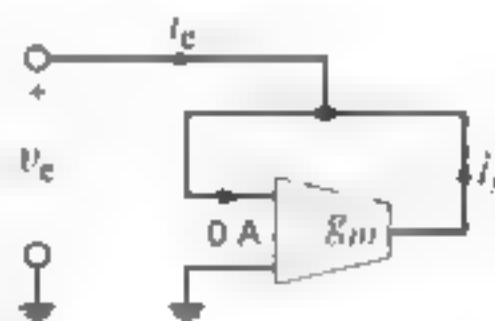


Figura 12.62 O resistor simulado através de um OTA.

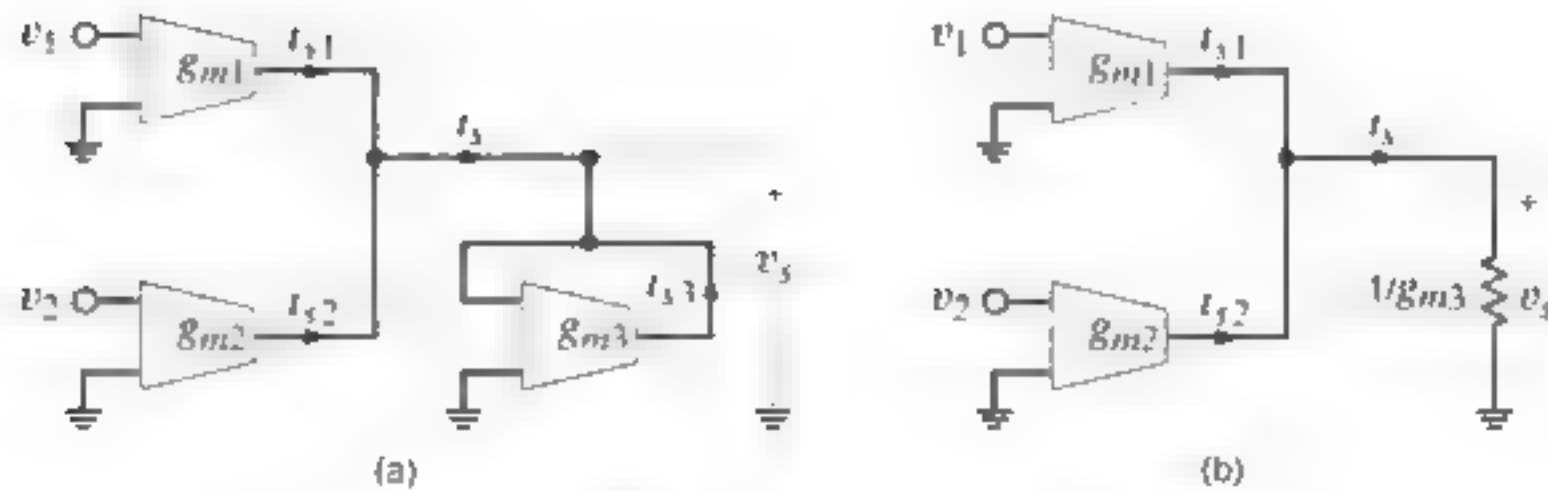


Figura 12.63 O OTA somador de tensão.

pode-se obter o circuito equivalente mostrado na Fig. 12.63b. A análise desse circuito é direta, isto é,

$$i_1 = g_{m1}v_1 \quad i_2 = g_{m2}v_2 \quad i_3 = i_1 + i_2$$

$$v_3 = \frac{i_3}{g_{m3}} = \frac{g_{m1}}{g_{m3}}v_1 + \frac{g_{m2}}{g_{m3}}v_2$$
12.79

Neste ponto, introduz-se a última importante característica do OTA: a programabilidade. A transcondutância, g_m , é linearmente controlada por uma corrente chamada de corrente de polarização do amplificador, ou I_{ABC} , conforme pode ser observado na Fig. 12.64a. Infelizmente, a corrente de entrada I_{ABC} não é parte do símbolo esquemático. A sensibilidade de g_m a I_{ABC} é tipicamente de 20 S/A, porém, a faixa de g_m e seu valor máximo dependem do projeto do OTA. Valores típicos são de 10 mS para o máximo g_m e uma potência de 10 entre 3 a 7, ou décadas, para a faixa da transcondutância. Por exemplo, se o valor máximo de g_m fosse de 10 mS e a faixa fosse de 4 décadas, então o g_m mínimo seria de 1 μ S e a faixa de utilização de I_{ABC} seria de 0,05 μ A a 0,5 mA.

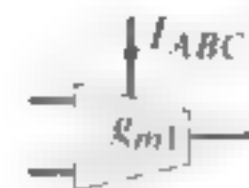
A Fig. 12.64b mostra um meio simples de ajuste da corrente I_{ABC} . O resistor de ajuste de ganho, R_G , limita I_{ABC} de acordo com a expressão

$$I_{ABC} = \frac{V_{CC} - V_G}{R_G}$$
12.80

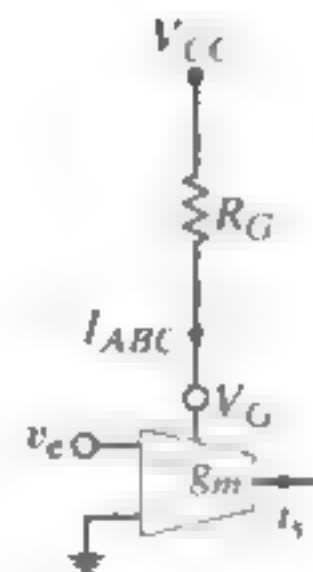
em que V_{CC} é a fonte de potência positiva. Se a tensão no pino designado por V_G é conhecida, então a corrente I_{ABC} pode ser ajustada por R_G . Infelizmente, diferentes fabricantes projetam seus OTAs com diferentes valores de V_G , os quais são listados nos catálogos de amplificadores. Para efeito dos trabalhos aqui

desenvolvidos, será admitido que V_G é igual a zero volts e, portanto,

$$I_{ABC} = \frac{V_{CC}}{R_G}$$
12.81



(a)



(b)

Figura 12.64 Símbolo esquemático modificado do OTA mostrando (a) a corrente polarizadora de entrada do amplificador e (b) o ajuste de I_{ABC} por meio de um único resistor.

EXEMPLO 12.30

Um OTA ideal possui uma sensibilidade $g_m - I_{ABC}$ de 20, um g_m máximo de 4 mS e uma faixa de g_m de 4 décadas. Utilizando o circuito mostrado na Fig. 12.62, produza uma resistência equivalente de 25 k Ω , fornecendo o valor de g_m e de I_{ABC} .

SOLUÇÃO

Com base na Eq. (12.78), a resistência equivalente é $R_{eq} = 1/g_m = 25$ k Ω , fornecendo $g_m = 40$ μ S. Uma vez que $g_m = 20I_{ABC}$, a corrente de polarização do amplificador necessária será $I_{ABC} = 2$ μ A.

EXEMPLO 12.31

O circuito mostrado na Fig. 12.65 é um resistor simulado flutuante. Para um OTA ideal, determine uma expressão para $R_{eq} = v_1/i_1$. Utilizando o OTA descrito no Exemplo 12.30, produza uma resistência de 80 k Ω . Repita para um resistor de 10 M Ω .

SOLUÇÃO

Para o OTA 1, tem-se $i_{s1} = g_{m1}(-v_1)$ e $i_1 = -i_{s1}$. Assim, $R_{eq} = v_1/i_1 = 1/g_{m1}$. Deve-se também considerar a corrente de retorno do OTA2, em que $i_{s2} = g_{m2}(v_1)$ e $i_{s2} = i_1$. Agora, $R_{eq} = v_1/i_1 = 1/g_{m2}$. Para uma operação adequada, há necessidade de se assegurar que $g_{m1} = g_{m2}$.

Para $R_{eq} = 1/g_m = 80$ k Ω , tem-se $g_{m1} = g_{m2} = g_m = 12,5$ μ S. Uma vez que $g_m = 20I_{ABC}$, a corrente de polarização necessária para ambos os OTAs é $I_{ABC} = 0,625$ μ A.

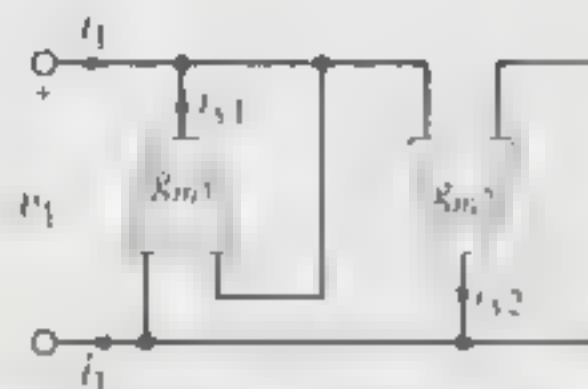


Figura 12.65 O resistor simulado flutuante.

EXEMPLO 12.32

Utilizando o somador da Fig. 12.63 e os OTAs especificados no Exemplo 12.30, produza as seguintes funções:

$$v_4 = 10v_1 + 2v_2$$

Repita o problema para a função

$$v_4 = 10v_1 - 2v_2$$

SOLUÇÃO

Comparando a Eq. (12.79) com a função desejada, percebe-se que $g_{m1}/g_{m3} = 10$ e $g_{m2}/g_{m3} = 2$. Com apenas duas equações e três incógnitas, deve-se escolher um dos valores de g_m . A seleção arbitrária de $g_{m3} = 0,1$ mS fornece $g_{m1} = 1$ mS e $g_{m2} = 0,2$ mS. As correspondentes correntes de polarização são $I_{ABC1} = 50$ μ A, $I_{ABC2} = 10$ μ A e $I_{ABC3} = 5$ μ A.

Como o ganho do OTA é controlado pela corrente I_{ABC} , seria possível projetar um multiplicador analógico cuja saída é o produto de duas tensões? Esta situação é mostrada na Fig. 12.67, em que a corrente de saída pode ser escrita como

$$i_s = v_1 g_m = v_1 (20I_{ABC}) = 20v_1 \left[\frac{v_2}{R_L} \right] \quad 12.82$$

e a tensão de saída como

$$v_s = i_s R_L = 20 \left[\frac{R_L}{R_G} \right] v_1 v_2 \quad 12.83$$

A razão de resistores é utilizada para se estabelecer o fator de escala da tensão de saída. Utilizando fontes de tensão $\pm V_{CC}$ e V_{EE} , nota-se que o multiplicador pode suportar tensões positivas e negativas em v_1 e v_2 . Entretanto, v_2 deve fornecer uma corrente I_{ABC} positiva no pino de corrente polarizadora. Assim, v_2 deve ser positiva. Esse tipo de multiplicador, quando apenas uma entrada pode ser positiva ou negativa, é chamado de

Alterando-se $R_{eq} = 1/g_m = 10$ M Ω , a transcondutância fica $g_m = 0,1$ μ S. Entretanto, o valor mínimo de g_m para esses OTAs é especificado como 0,4 μ S. Deve-se, assim, procurar por OTAs mais adequados ou optar por um circuito melhor.

Para o segundo caso, simplesmente inverte-se o sinal de v_2 , conforme mostrado na Fig. 12.66. Esta é outra vantagem do OTA em relação aos op-amps. Novamente a escolha de $g_{m3} = 0,1$ mS fornece as mesmas correntes de polarização do primeiro caso.

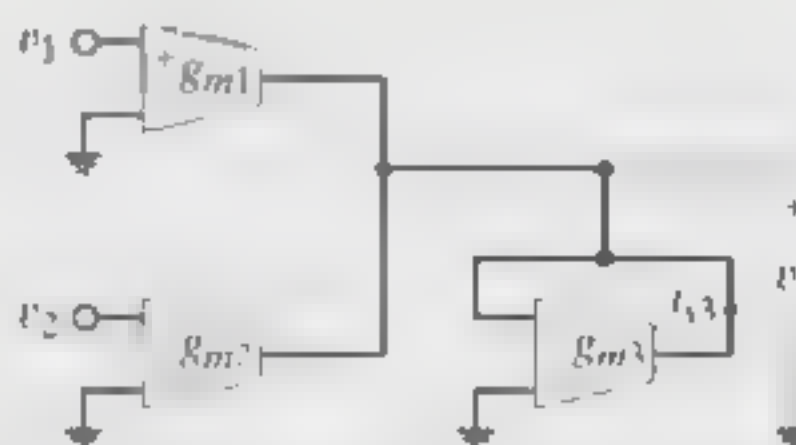


Figura 12.66 Uma pequena modificação no somador mostrado na Fig. 12.63 fornece esse circuito que subtrai tensões.

multiplicador de dois quadrantes. Quando ambas as entradas puderem ser de mesmo sinal, o multiplicador é dito de quatro quadrantes.

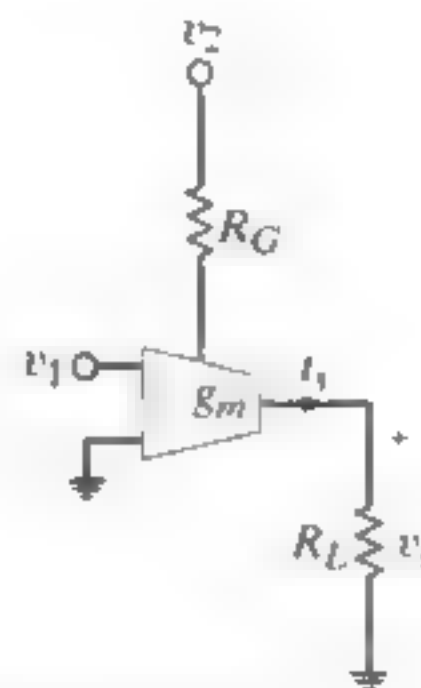


Figura 12.67 Multiplicador analógico de dois quadrantes.

Considere um passeio de carro no domingo pela cidade indo para a periferia e depois retornando. De repente você passa pela antena da mesma estação de rádio que você está ouvindo no rádio de seu carro. Você sabe que a antena do carro recebe um sinal mais forte quando está próximo da antena da estação de rádio, porém, o volume do rádio é o mesmo se você estiver próximo ou longe dela. Como é que o rádio do carro identifica essa proximidade?

Naturalmente, o carro não tem ideia de onde a antena da estação de rádio está instalada. Ao contrário, a amplificação entre a antena do carro e seus alto-falantes é controlada com base na resistência do sinal recebido – uma técnica denominada controle automático de ganho, ou AGC (*automatic gain control*). O circuito mostrado na Fig. 12.68 mostra como isso pode ser implementado com OTAs. Existem duas características críticas nesse caso. Primeiro, o ganho do OTA1 é dependente de sua própria tensão de saída, de modo que um aumento em v_s causa uma diminuição no ganho. Esse ajuste é chamado de controle automático de ganho. Segundo, o ganho g_m deve ser uma função da amplitude de v_s , e não de seu valor instantâneo. Um subcircuito denominado detector de pico realiza essa função. Embora sua operação interna esteja além do escopo dessa discussão, deve-se compreender sua importância nesta análise.

Enquanto o OTA1 fornece um ganho variável, o OTA2 ajusta o ganho de modo a fornecer uma tensão de saída dependente de si mesma, isto é,

$$\begin{aligned} i &= I_{ABC1} = v_s g_{m1} R_L = v_s R_L (20 I_{ABC1}) \\ &= 20 v_s R_L g_{m2} (V_{CC} - |v_s|) = A v_s - B v_s |v_s| \end{aligned} \quad 12.84$$

Nota-se que a tensão de saída possui dois termos, ambos proporcionais a v_s . É no segundo termo, em que a constante de proporcionalidade depende de v_s , que ocorre o controle automático de ganho. A solução da Eq. (12.84) para v_s mostra o impacto do AGC mais claramente. (Para facilitar a compreensão, retira-se, nesse momento, o símbolo de valor absoluto de v_s . O detector de pico, naturalmente, continua a ser necessário.)

$$v_s = \frac{A v_c}{1 + B v_s} \quad 12.85$$

Quando o sinal v_c recebido é baixo (o caso em que se está longe da antena da estação), o denominador tende à unidade e

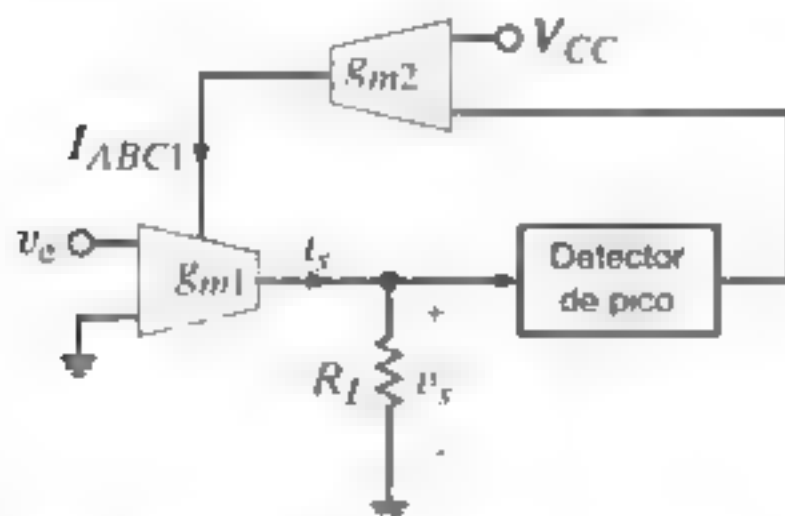


Figura 12.68 Amplificador com controle automático de ganho implementado utilizando dois OTAs. Um terceiro OTA poderia ser utilizado para implementar o resistor carga, se desejado.

a saída é aproximadamente igual a $A v_c$. Entretanto, quando se está próximo da antena, v_c aumenta e o denominador cresce até $B v_s \gg 1$. Neste caso v_s tende à razão A/B , essencialmente independente do sinal recebido, e o volume do rádio é menos sensível à distância em relação à antena!

Utilizando os subcircuitos mostrados nas Figs. 12.61 e 12.62, podem ser criados os filtros ativos chamados de filtros OTA-C, que contêm apenas OTAs e capacitores. A ausência de resistores torna os filtros OTA-C ideais para implementação em chips, ou monolíticos. Como introdução, considere o circuito mostrado na Fig. 12.69. Para OTAs ideais, a função de transferência pode ser determinada como se segue.

$$\begin{aligned} I_{s1} &= g_{m1} V_{i1} & I_{s2} &= -g_{m2} V_i & I_C &= V_i(j\omega C) = I_{s1} + I_{s2} \\ V_i &= \frac{I_{s1} + I_{s2}}{j\omega C} = \frac{g_{m1}}{j\omega C} V_{i1} - \frac{g_{m2}}{j\omega C} V_i \end{aligned}$$

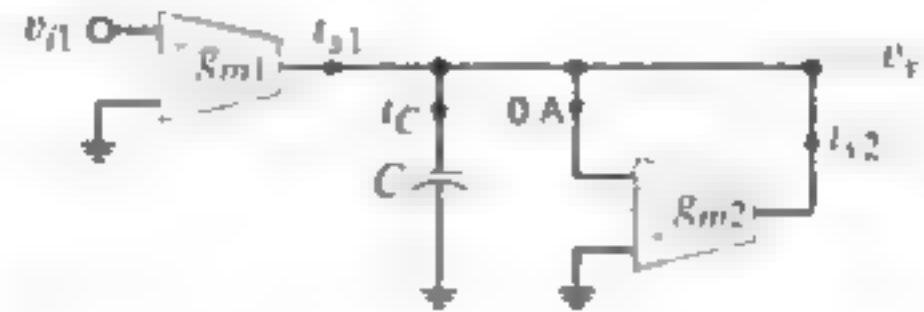


Figura 12.69 Filtro OTA-C passa-baixa de primeira ordem.

A solução da função de transferência fornece a função passa-baixa

$$\frac{V_i}{V_{i1}} = \frac{g_{m1} + g_{m2}}{j\omega C + g_{m2}} \quad 12.86$$

Pela Eq. (12.86), o circuito é um filtro passa-baixa de primeira ordem com a curva assintótica mostrada no diagrama de Bode da Fig. 12.70. Tanto a frequência de quina, $f_c = g_{m2}/(2\pi C)$ quanto o ganho CC, $A_{CC} = g_{m1}/g_{m2}$, são programáveis.

Nos filtros OTA-C monolíticos, os capacitores e os OTAs são fabricados em um único chip. Os valores típicos do capacitor do OTA estão na faixa de aproximadamente 1 pF a 50 pF.

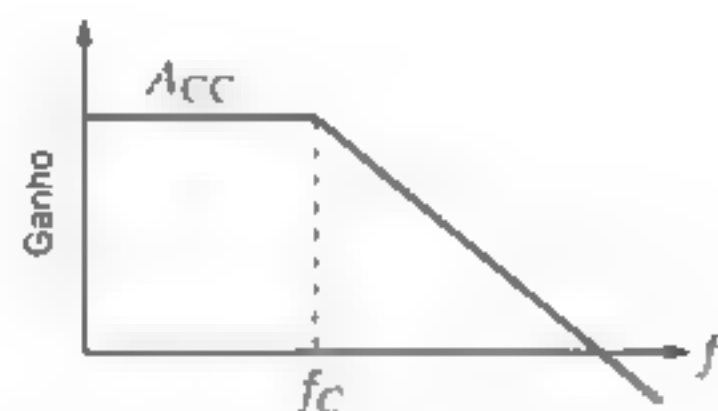


Figura 12.70 Curva assintótica do diagrama de Bode para um filtro passa-baixa de primeira ordem.

EXEMPLO 12.33

O filtro passa-baixa mostrado na Fig. 12.69 é implementado utilizando-se um capacitor de 25 pF e OTAs com sensibilidade de $g_m = I_{ABC}$ de 20, um g_m máximo de 1 mS e faixa de g_m de 3 décadas. Determine as correntes de polarização necessárias para a função de transferência de filtro:

$$\frac{V_o}{V_i} = \frac{4}{j\omega \cdot 2\pi(10^5)} + 1 \quad 12.87$$

Dentre as diversas topologias de filtros OTA, uma muito popular é a do filtro biquad com dois integradores. O termo *biquad* é uma abreviação para biquadrático que, na terminologia de filtros, significa que o ganho do filtro é uma razão entre duas funções quadráticas como, por exemplo,

$$\frac{V_o}{V_i} = \frac{A(j\omega)^2 + B(j\omega) + C}{(j\omega)^2 + \frac{\omega_0}{Q}(j\omega) + \omega_0^2} \quad 12.88$$

Selecionando valores apropriados para A , B e C , as funções passa-baixa, passa-banda e passa-alta podem ser criadas, conforme listado na Tabela 12.3. A Fig. 12.71 mostra o filtro biquad, com dois integradores, mais popular utilizado na prática – o filtro Tow-Thomas. Admitindo-se OTAs ideais, pode-se deduzir a função de transferência do filtro. Para o OTA 1, um integrador, tem-se

$$\frac{V_{o1}}{V_{i1}} = \frac{g_{m1}}{j\omega C_1}$$

TABELA 12.3 Diversas possibilidades para o filtro biquad Tow-Thomas

TIPO DO FILTRO			
Passa-baixa	o	o	não nulo
Passa-banda	o	não nulo	o
Passa-alta	não nulo	o	o

SOLUÇÃO

Comparando a Eq. (12.86) com a função desejada, $g_{m2}/C = (2\pi)10^5$. Para $C = 25$ pF, $g_{m2} = 15,7 \mu\text{S}$. Como $g_m = 20I_{ABC}$, a corrente de polarização para o OTA 2 é $I_{ABC2} = 0,785 \mu\text{A}$. Finalmente, $g_{m1}/g_{m2} = 4$ fornece $I_{ABC1} = 3,14 \mu\text{A}$.

A corrente de saída do OTA 2 é

$$I_{s2} = g_{m2}(V_{i2} - V_{o2})$$

Aplicando a LKC ao segundo nó de saída, obtém-se

$$I_{s3} + I_{s2} = (j\omega C_2)V_{i2}$$

em que

$$I_{s3} = (V_{i2} - V_{o2})g_{m1}$$

A solução para V_{s1} e V_{s2} fornece

$$V_{o1} = \frac{\left[\frac{j\omega C_2}{g_{m2}} + \frac{g_{m3}}{g_{m2}}\right]V_{i1} + V_{i2} - \left[\frac{g_{m1}}{g_{m2}}\right]V_{i2}}{\left[\frac{C_1 C_2}{g_{m1} g_{m2}}\right](j\omega)^2 + \left[\frac{g_{m3} C_1}{g_{m2} g_{m1}}\right](j\omega) + 1}$$

e

$$V_{i2} = \frac{V_{o1} \left[\frac{j\omega C}{g_{m1}}\right] + \left[\frac{j\omega C}{g_{m1} g_{m2}}\right]V_{i2}}{\left[\frac{C_1 C}{g_{m1} g_{m2}}\right](j\omega)^2 + \left[\frac{g_{m3} C}{g_{m1} g_{m2}}\right](j\omega) + 1} \quad 12.89$$

Observe que esse circuito simples pode implementar tanto os filtros passa-baixa quanto passa-banda, dependendo apenas de onde a entrada é aplicada! A Tabela 12.4 lista as possibilidades. Comparando as Eqs. (12.88) e (12.89), as equações de projeto para ω_0 , Q e banda passante podem ser escritas como

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g_m g_{m3}}{C_1 C_2}}, \quad \omega_0 \text{ BP} = \frac{g_{m3}}{C_1} \quad 12.90$$

$$Q = \sqrt{\frac{g_{m1} g_{m3}}{g_{m1}^2}} \sqrt{\frac{C_2}{C_1}}$$

Considere um filtro Tow-Thomas passa-banda. Pela Eq. (12.90), se $g_{m1} = g_{m2} = g_m$ e $C_1 = C_2 = C$, as seguintes relações podem ser facilmente deduzidas:

$$\omega_0 = \frac{g_m}{C} = \frac{k}{C} I_{ABC}, \quad \frac{\omega_0}{Q} = \text{BP} = \frac{g_{m3}}{C} = \frac{k}{C} I_{ABC3} \quad 12.91$$

$$Q = \frac{g_m}{g_{m3}} = \frac{I_{ABC}}{I_{ABC3}}$$

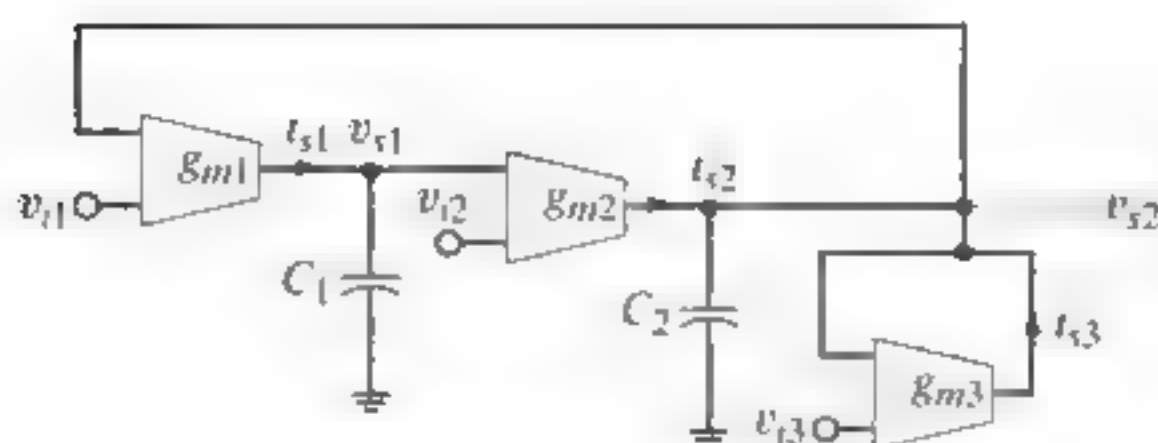


Figura 12.71 Filtro OTA-C biquad Tow-Thomas.

em que k é a sensibilidade $g_m - I_{ABC}$. Com base na Eq. (12.91) tem-se um controle eficiente sobre as características do filtro. Em particular, sintonizando I_{ABC} com I_{ABC3} fixa, tem-se uma escala, tanto para a frequência de centro quanto para Q diretamente, sem afetar a banda passante. A sintonia de I_{ABC3} apenas altera a banda passante e não a frequência de centro. Finalmente, sintonizando todas as três correntes de polarização tem-se definidas as escalas tanto para a frequência de centro quanto para a banda passante proporcionalmente, resultando em um fator Q constante.

TABELA 12.4 Combinações passa-baixa e passa-banda para o filtro biquad Tow-Thomas da Figura 12.72

TIPO DO FILTRO	ENTRADA	SÁIDA	TIPO
Passa-baixa	v_{e1}	v_{s1}	positivo
	v_{e2}	v_{s2}	negativo
	v_{e3}	v_{s3}	positivo
Passa-banda	v_{e1}	v_{s2}	positivo
	v_{e2}	v_{s1}	negativo
	v_{e3}	v_{s3}	positivo

EXEMPLO 12.34

Utilizando os OTAs especificados no Exemplo 12.30 e capacitores de 5 pF, projete um filtro passa-baixa de Tow-Thomas com uma frequência de quina de 6 MHz, $Q = 5$ e um ganho CC de 1.

SOLUÇÃO

Utilizando o par entrada-saída $v_{e1} - v_{s2}$, com $g_{m1} = g_{m2} = g_m$ e $C_1 = C_2$, pode-se utilizar a Eq. (12.91):

$$g_m = \omega_0 C = (2\pi)(6 \times 10^6)(5 \times 10^{-12}) = 188,5 \mu S$$

$$g_{m3} = \frac{g_m}{Q} = 37,7 \mu S$$

As correntes de polarização requeridas são

$$I_{ABC1} = I_{ABC2} = \frac{g_m}{20} = 9,425 \mu A \quad I_{ABC3} = \frac{g_{m3}}{20} = 1,885 \mu A$$

Com base no diagrama de Bode mostrado na Fig. 12.72, percebe-se que a frequência de quina é, de fato, 6 MHz.

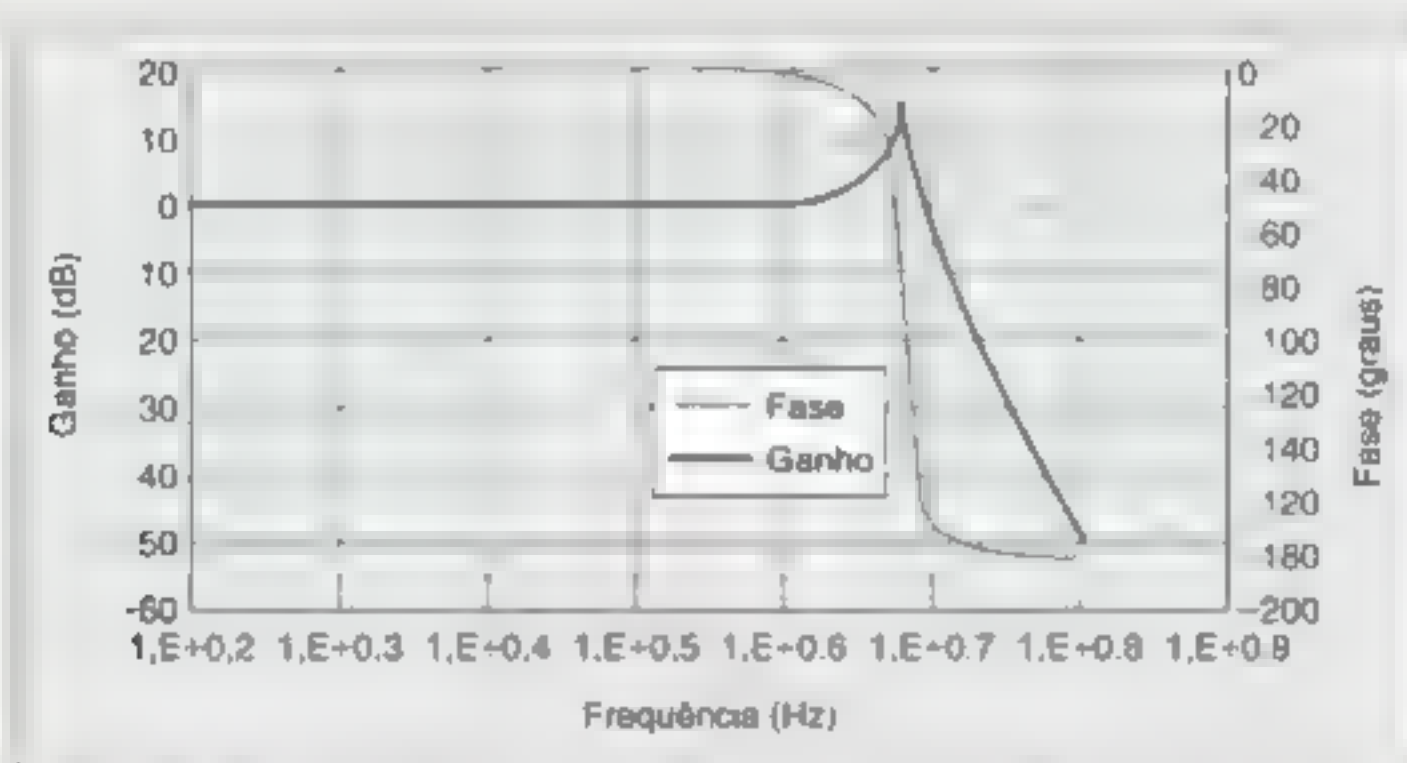


Figura 12.72 Diagrama de Bode para o filtro passa-baixa Tow-Thomas do Exemplo 12.34.

12.6 Exemplos de Aplicação

EXEMPLO DE APLICAÇÃO 12.35

O conversor CA-CC mostrado na Fig. 12.73a é projetado para ser utilizado em calculadoras manuais. Idealmente, o circuito deveria converter uma tensão senoidal de 120 V rms para uma tensão de saída de 9 V CC. Na realidade, a tensão de saída é

$$v_s(t) = 9 + 0,5 \sin 377t \text{ V}$$

Utilize um filtro passa-baixa para reduzir a componente de 60 Hz da tensão $v_s(t)$

SOLUÇÃO

O circuito equivalente de Thévenin para o conversor é mostrado na Fig. 12.73b. Colocando-se um capacitor entre os terminais de saída, conforme indicado na Fig. 12.73c, cria-se um filtro passa-baixa na saída. A função de transferência do conversor com o filtro é

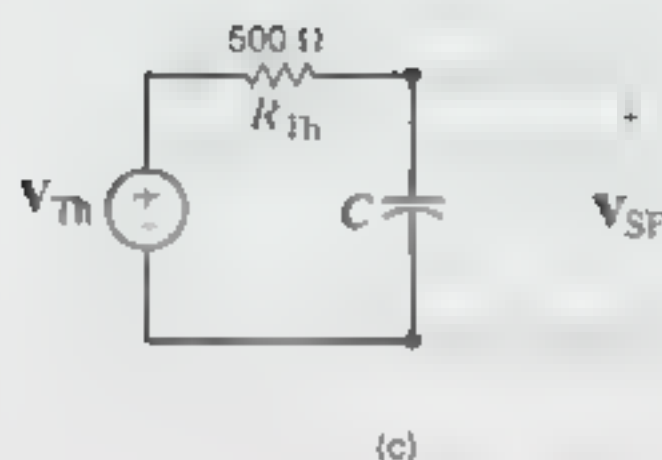
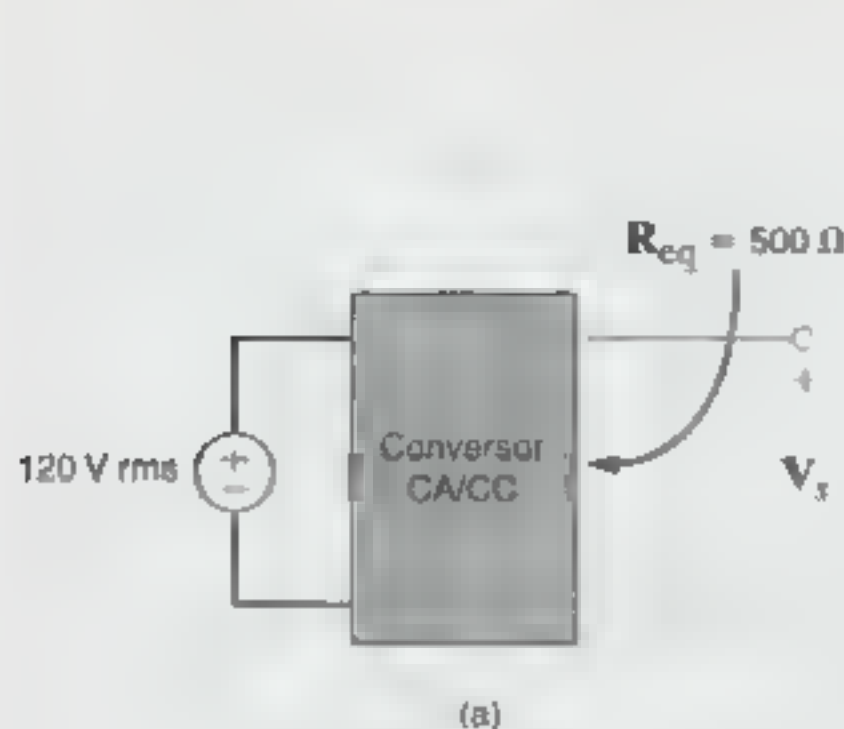
$$\frac{V_{SF}}{V_{TH}} = \frac{1}{1 + sR_{TH}C}$$

que possui um polo na frequência $f = 1/2\pi R_{Th}C$. Para se obter uma atenuação significativa do sinal de 60 Hz, decide-se colocar o polo a 60 Hz, o que fornece a equação

$$\frac{1}{2\pi R_{Th}C} = 60$$

ou

$$C = 53,05 \mu F$$



Uma simulação do regime transiente do conversor é utilizada para verificar seu desempenho.

A Fig. 12.73d mostra a saída $v_s(t)$ sem o filtro, e $v_{SF}(t)$ com a aplicação do filtro. O filtro reduziu, com sucesso, a componente de 60 Hz não desejada de um fator de aproximadamente seis.

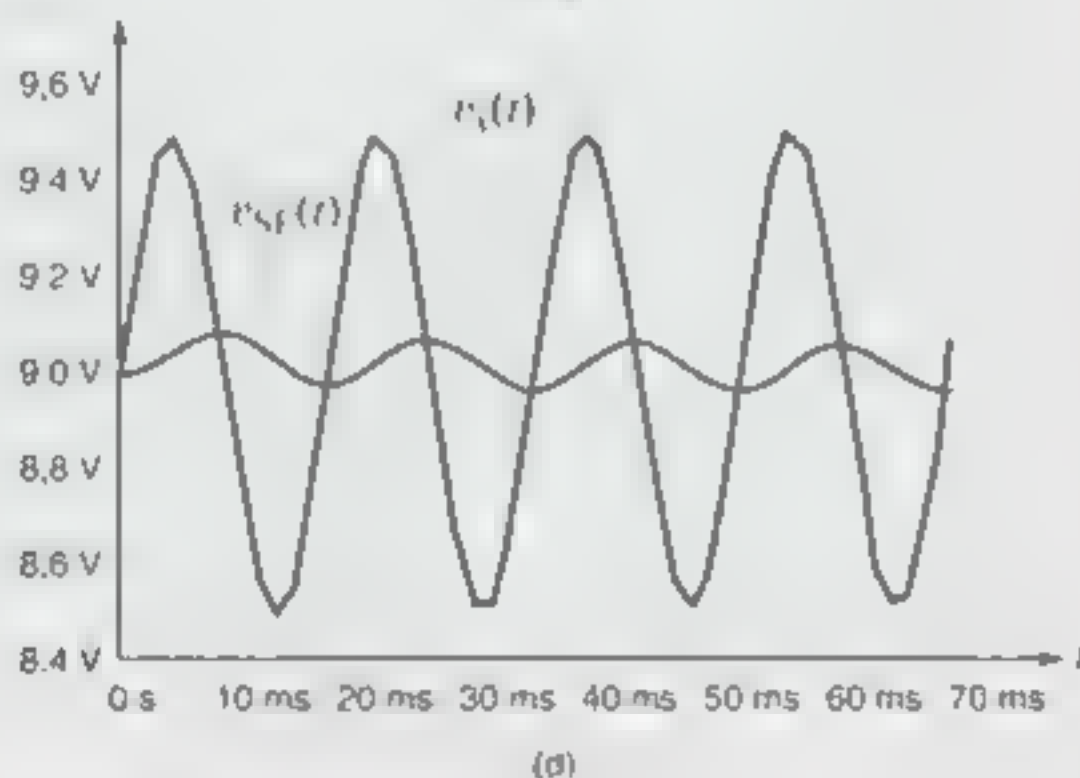
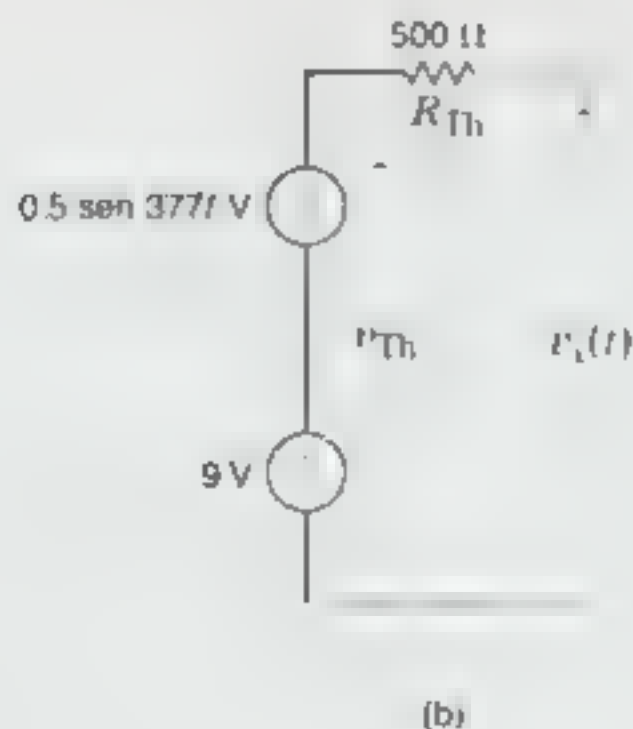


Figura 12.73 Circuitos e curvas de resposta do conversor CA-CC.

EXEMPLO DE APLICAÇÃO 12.36

A antena de um rádio FM consegue sintonizar as estações que transmitem em toda a faixa de frequência FM – aproximadamente de 87,5 MHz a 108 MHz. O circuito do rádio deve ter a capacidade de, inicialmente, rejeitar todas as estações, exceto aquela que o ouvinte deseja ouvir e, em seguida, intensificar o sinal da antena. Um amplificador sintonizado incorporando uma ressonância paralela pode atender simultaneamente a esses dois requisitos desejados.

A rede mostrada na Fig. 12.74a é o modelo de circuito de um amplificador transistor sintonizado de simples estágio em que o resistor, o capacitor e o indutor são elementos discretos. Pode-se obter a função de transferência $V_o(s)/V_A(s)$, em que

$V_A(s)$ é a tensão da antena e o valor de C para um ganho máximo na frequência de 91,1 MHz. Finalmente, os resultados são simulados.

SOLUÇÃO

Uma vez que $V(s) = V_A(s)$, a função de transferência é

$$\frac{V(s)}{V_A(s)} = \frac{4}{1000} \left[\frac{sL}{s^2 + \frac{s}{RC} + \frac{1}{LC}} \right]$$

A rede ressonante paralela é realmente um filtro passa-banda. O ganho máximo ocorre na frequência de centro, f_0 . Essa condição corresponde a um valor mínimo no denominador. Isolando o polinômio do denominador, $D(s)$, e fazendo-se $s = j\omega$, tem-se

$$D(j\omega) = \frac{R}{LC} - \omega^2 + \frac{j\omega}{C}$$

o qual apresenta um valor mínimo quando a parte real tende a zero, isto é,

$$\frac{1}{LC} - \omega_0^2 = 0$$

fornecendo uma frequência central de

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

Assim, para uma frequência de centro de 91,1 MHz, tem-se

$$2\pi(91,1 \times 10^6) = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

e o valor do capacitor necessário é

$$C = 3,05 \text{ pF}$$

O diagrama de Bode do amplificador sintonizado, conforme mostrado na Fig. 12.74b, confirma o projeto, uma vez que a frequência de centro é de 91,1 MHz, conforme especificado.

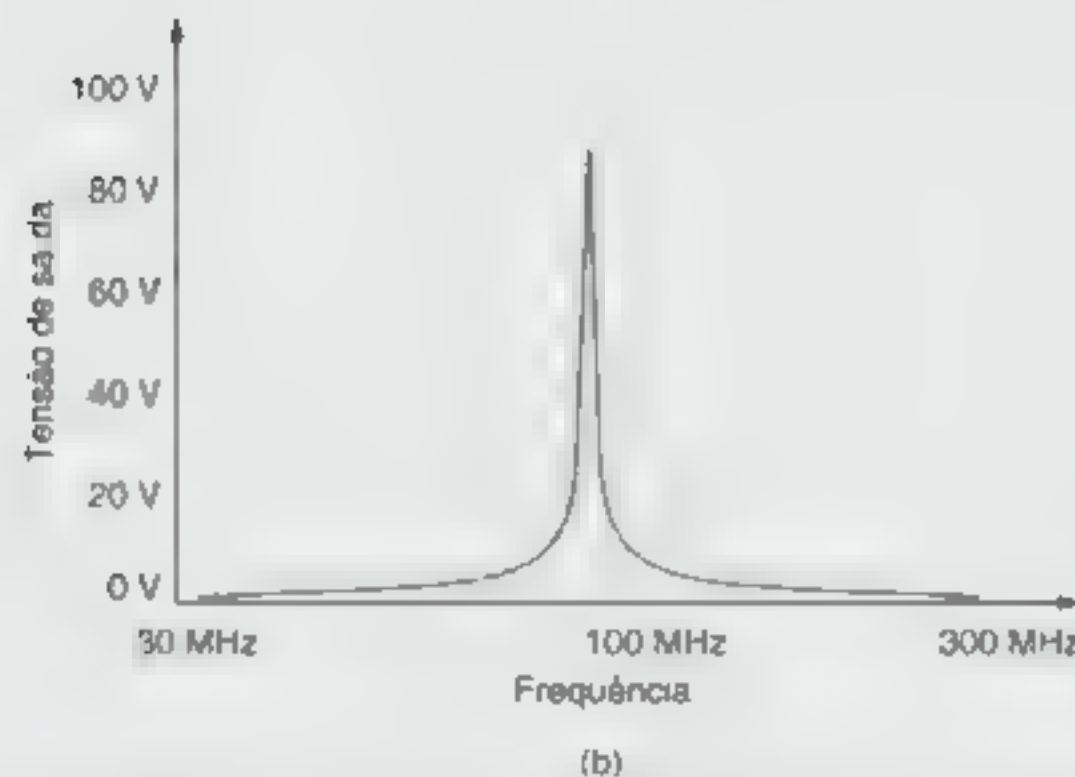
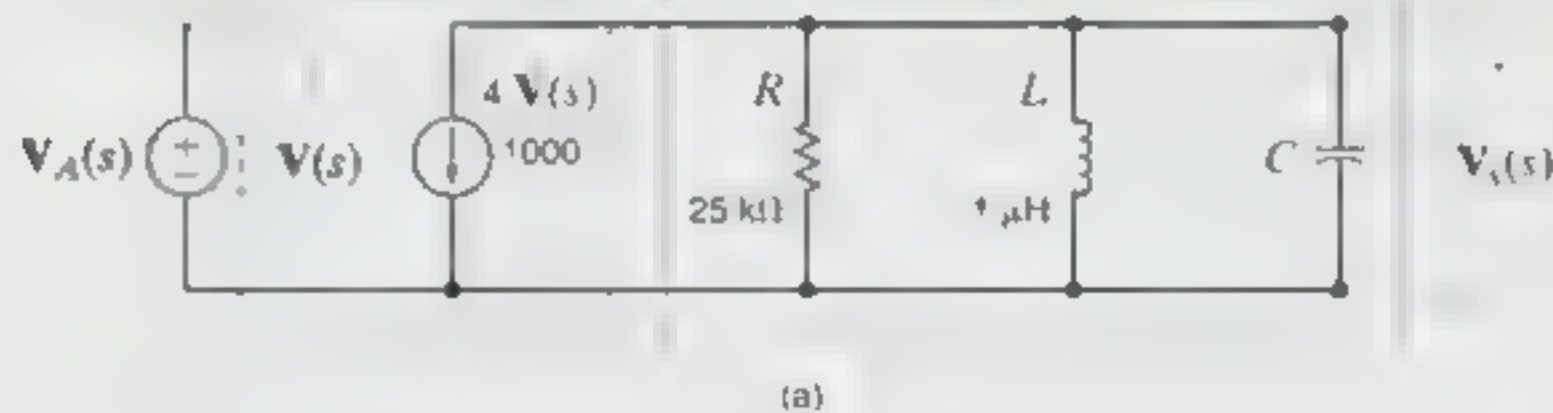


Figura 12.74 Circuito e diagrama de Bode do amplificador ressonante sintonizado em paralelo.

Como se viu até aqui nos estudos sobre filtros, os indutores têm papel essencial. Todavia, esses componentes normalmente são pesados e grandes, especialmente quando comparados com os chips CI. Assim, os projetistas de circuitos geralmente usam componentes eletrônicos, como os op-amps e os OTAs, para

simular o uso de indutores. Esse reprojeto pode realmente levar mais componentes, mas a troca geralmente vale a pena, porque os resistores, capacitores e esses componentes eletrônicos são facilmente implementados em circuitos integrados em larga escala.

EXEMPLO DE APLICAÇÃO 12.37

Considere a rede progressiva mostrada na Fig. 12.75. Este circuito é, na realidade, um protótipo de filtro passa-baixa de Chebyshev de quinta ordem com uma frequência de banda

passante $\omega_0 = 1 \text{ rad/s}$. A resposta em frequência do filtro é mostrada na Fig. 12.76.

Observe que esse filtro contém três indutores. Portanto, deseja-se apresentar uma implementação desse filtro que não

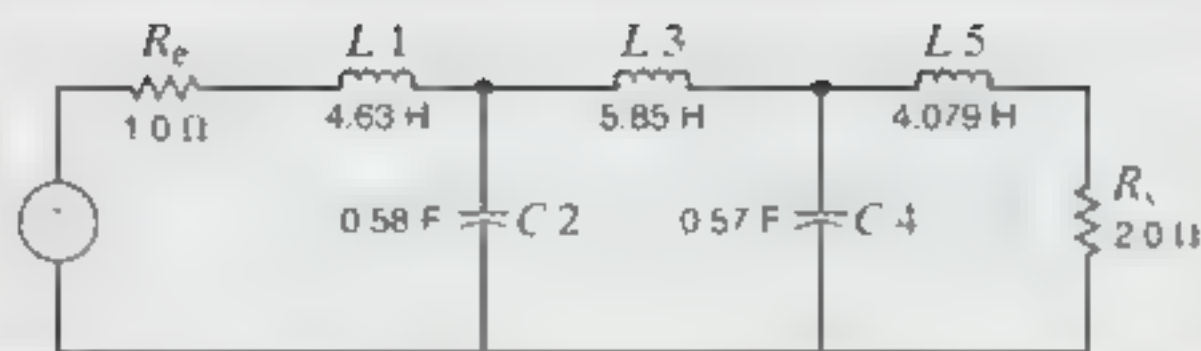


Figura 12.75 Protótipo do filtro passa-baixa de Chebyshev de quinta ordem.

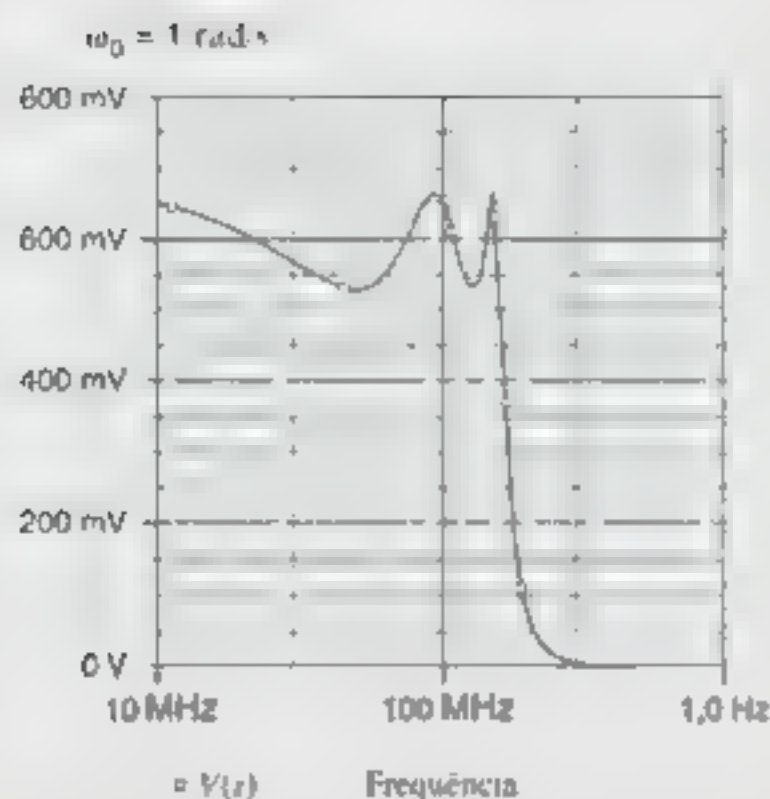


Figura 12.76 Resposta em frequência do filtro mostrado na Fig. 12.75.

contenha esses componentes. O filtro foi reprojeto utilizando os OTAs, e a implementação do circuito desse filtro equivalente é mostrada na Fig. 12.77.

Após o escalamento da frequência do filtro de $\omega_0 = 1$ rad/s para 1 M rad/s e o escalamento da magnitude das resistências de entrada e de saída de 1 Ω para 1 k Ω , os valores resultantes dos componentes são os mostrados na Tabela 12.5. Note que na implementação em OTA os indutores são substituídos por capacitores, e possuem os mesmos valores numéricos, porém, as unidades são Faradays, e não Henrys.

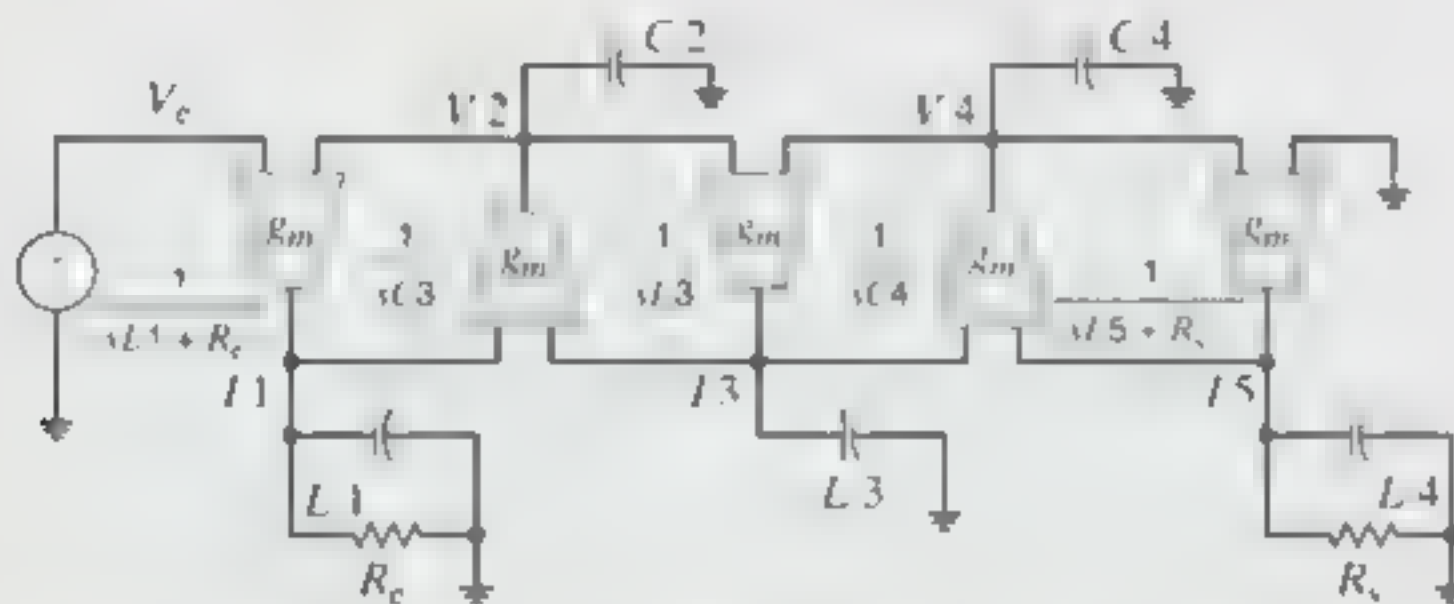


Figura 12.77 Implementação sem indutores do filtro passa-baixa de Chebyshev de quinta ordem mostrado na Fig. 12.75 utilizando OTAs.

TABELA 12.5 Conjunto de valores dos parâmetros do filtro do Exemplo 12.37

PROTÓTIPO L ₁	PROTÓTIPO COM OM	PROJETO FINAL
$R_e = 1 \Omega$	$R_e = 1 \Omega$	$R_e = 1 \text{ k}\Omega$
$L_1 = 4,626548 \text{ H}$	$L_1 = 4,626548 \text{ F}$	$L_1 = 4,626548 \text{ n F}$
$C_1 = 0,58354 \text{ F}$	$L_1 = 0,58354 \text{ F}$	$L_1 = 0,58354 \text{ n F}$
$L_3 = 5,850298 \text{ H}$	$L_3 = 5,850298 \text{ F}$	$L_3 = 5,850298 \text{ n F}$
$L_4 = 0,569797 \text{ F}$	$L_4 = 0,569797 \text{ F}$	$L_4 = 0,569797 \text{ n F}$
$L_5 = 4,078996 \text{ H}$	$L_5 = 4,078996 \text{ F}$	$L_5 = 4,078996 \text{ n F}$
$R_L = 2 \Omega$	$R_L = 2 \Omega$	$R_L = 2 \text{ k}\Omega$

12.7 Exemplos de Projeto

Ao longo deste capítulo, foram apresentados diversos exemplos de projeto. Nesta seção são considerados alguns exemplos adicionais que também possuem ramificações práticas.

EXEMPLO DE PROJETO 12.38

Os CDs (*compact disks*) tornaram-se um meio muito popular de gravação e audição de músicas. Os CDs armazenam informações de forma digital; isto é, o sinal da música é amostrado a uma taxa extremamente alta e as informações são gravadas em um disco. O segredo de seu funcionamento está na reprodução tão rápida das informações gravadas que o som parece ser contínuo. A taxa de amostragem padronizada pelas indústrias é de 44,1 kHz – uma amostra a cada 22,7 μ s.

Um aspecto interessante a ser observado na conversão analógica-digital que ocorre no interior da unidade de gravação de um CD é chamado de critério de Nyquist. Esse critério estabelece que, na conversão analógica, qualquer componente do sinal com frequência acima da metade da taxa de amostragem (22,05 kHz, nesse caso) não pode ser fielmente reproduzida. Portanto, as técnicas de gravação filtram essas frequências antes da ocorrência de qualquer amostragem, o que propicia um som de alta fidelidade ao ouvinte.

Use o projeto de uma série de filtros passa-baixa para desempenhar essa tarefa.

SOLUÇÃO

Suponha, por exemplo, que a especificação para o filtro seja de um ganho unitário para sinais CC e de um ganho de 20 dB de atenuação para sinais com frequência de 22,05 kHz. Considere, inicialmente, o filtro RC simples mostrado na Fig. 12.78.

Sua função de transferência é facilmente obtida e pode ser expressa como

$$G_{v1}(s) = \frac{V_{s1}}{V_e} = \frac{1}{1 + sRC}$$

Como uma função de transferência de um único polo atenua o sinal na taxa de 20 dB/década, pode-se colocar a frequência do polo uma década antes do ponto de -20 dB no qual a frequência é de 22,05 kHz.

Assim,

$$f_p = \frac{1}{2\pi RC} = 2,205 \text{ kHz}$$

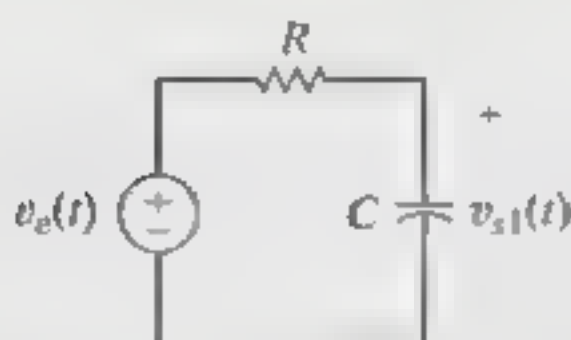


Figura 12.78 Filtro passa-baixa de um único polo.

Escolhendo arbitrariamente $C = 1 \text{ nF}$, o valor resultante para R será de 72,18 k Ω , o que é um valor razoável. O diagrama de Bode da magnitude de $G_{v1}(s)$ é mostrado na Fig. 12.79. Todas as especificações foram alcançadas, porém, ao custo de uma atenuação severa na faixa de frequência audível. Essa não é uma condição desejável.

Uma configuração aprimorada do filtro é mostrada na Fig. 12.80. Trata-se um filtro passa-baixa de dois estágios idênticos separados por um *buffer* de ganho unitário.

A presença do op-amp permite que os estágios sejam considerados independentemente. Assim, a função de transferência fica

$$G_{v2}(s) = \frac{V_{s2}}{V_e} = \frac{1}{[1 + sRC]^2}$$

Para que as frequências desejadas para os polos sejam obtidas, pode-se empregar a equação para $G_{v2}(s)$ em 22,05 kHz, uma vez que o ganho deve ser de 0,1 (atenuado em 20 dB) naquela frequência. Substituindo $s = j\omega$, expressa-se a magnitude de $G_{v2}(s)$ como

$$|G_{v2}| = \left\{ \frac{1}{1 + (22,050/f_p)^2} \right\} = 0,1$$

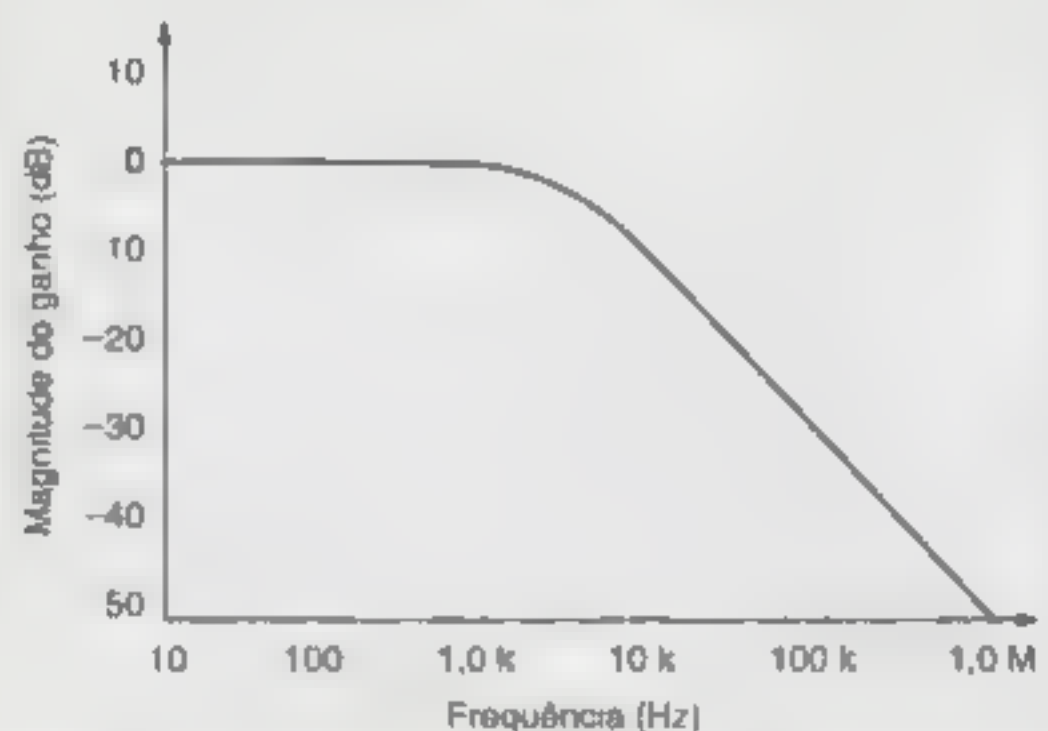


Figura 12.79 Diagrama de Bode para o filtro de um único polo.

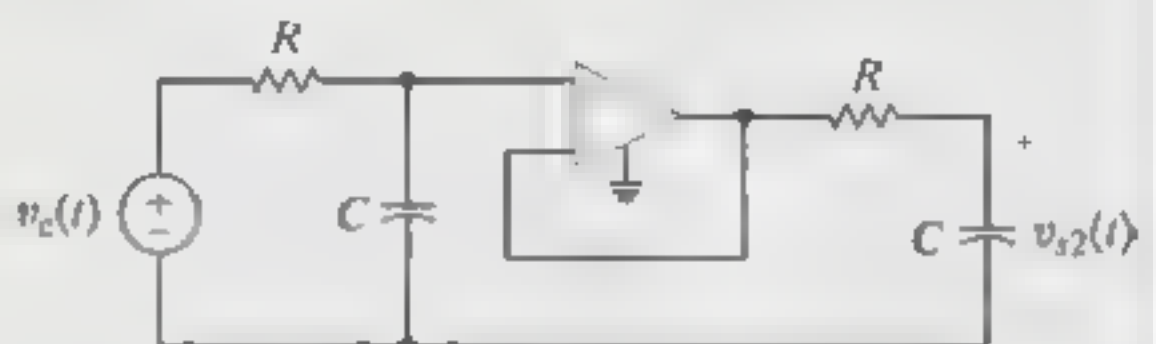


Figura 12.80 Filtro de dois estágios com buffer.

e a frequência do polo é obtida como 7,35 kHz. O valor correspondente do resistor é de 21,65 k Ω . Os diagramas de Bode para $G_{v1}(s)$ e $G_{v2}(s)$ são mostrados na Fig. 12.81. Note que o filtro de dois estágios possui uma banda passante maior, o que aumenta a fidelidade da gravação.

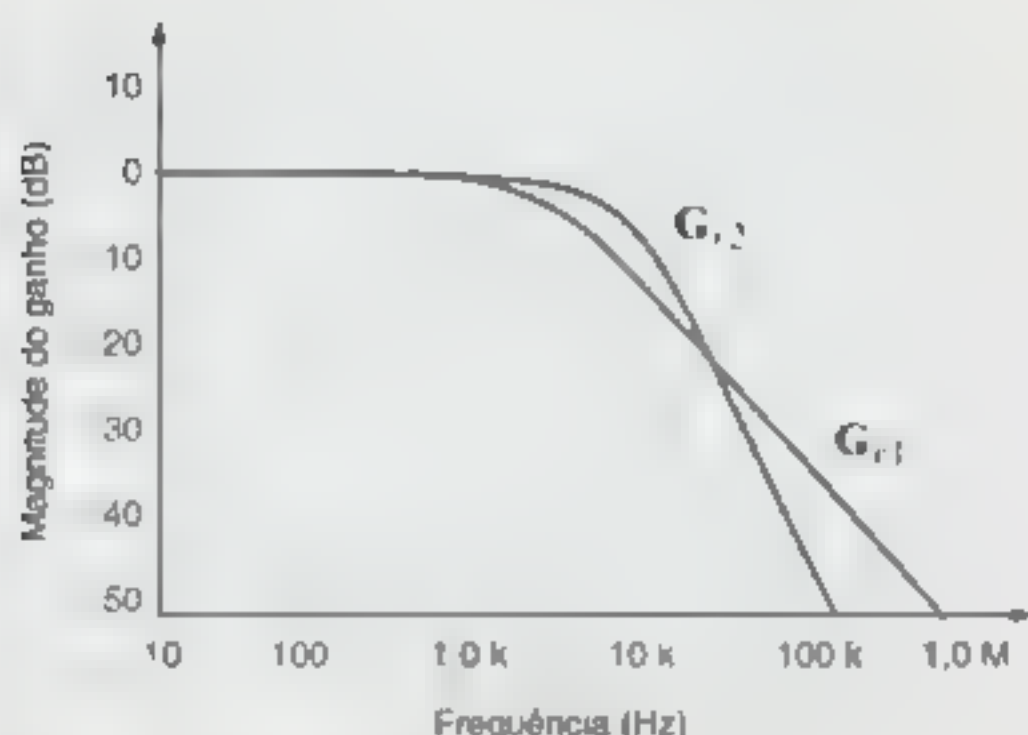


Figura 12.81 Diagrama de Bode para filtros de um único estágio e de dois estágios.

Pode-se, ainda, tentar mais uma melhoria – expandindo-se o filtro de dois estágios para um filtro de quatro estágios. Novamente, o ganho na magnitude é igual a 0,1 em 22,05 kHz e pode ser expresso por

$$|G_{v4}| = \left\{ \frac{1}{1 + (22,050/f_p)^2} \right\} = 0,1$$

As frequências resultantes para os polos são de 15 kHz, e o valor necessário para o resistor é de 10,61 k Ω . A Fig. 12.82 mostra os três diagramas de Bode. Obviamente, o filtro de quatro estágios, possuindo a maior banda passante, é a melhor opção (desconsiderando qualquer custo extra associado aos adicionais componentes ativos e passivos do circuito).

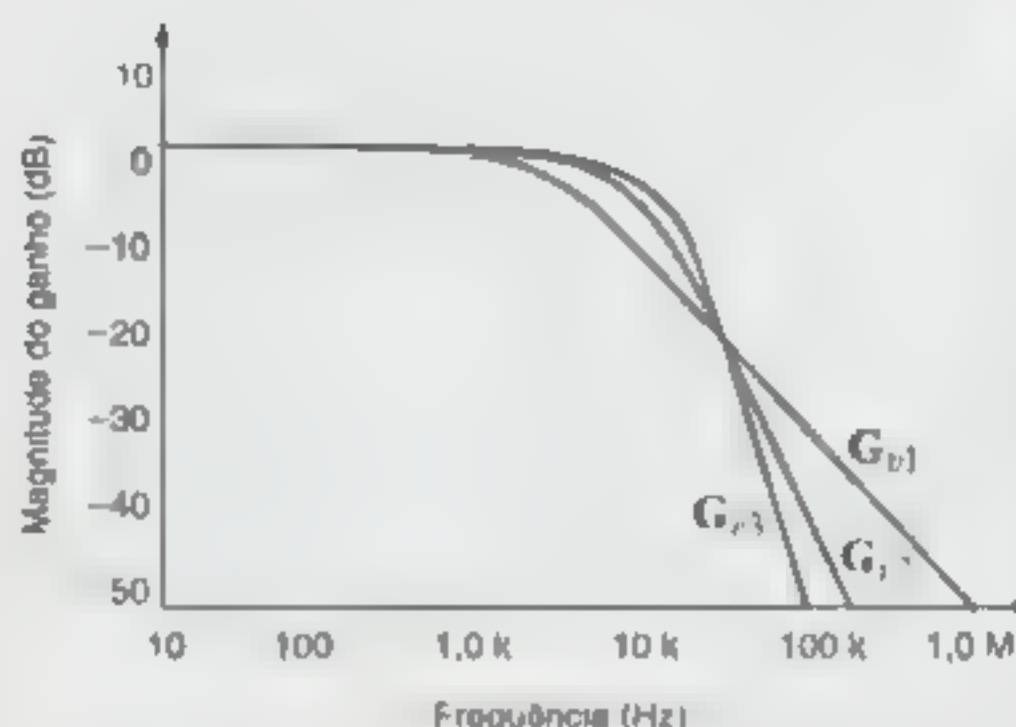


Figura 12.82 Diagrama de Bode para filtros de um único estágio, de dois estágios e de quatro estágios.

EXEMPLO DE PROJETO 12.39

O circuito mostrado na Fig. 12.83a é chamado de filtro de corte (ou filtro supressor). A partir do esboço de seu diagrama de Bode, apresentado na Fig. 12.83b, percebe-se que, na frequência de corte, f_c , o ganho da função de transferência é nulo, enquanto nas frequências acima ou abaixo de f_c o ganho é unitário. Projete um filtro de corte que remove um ruído perturbador de 60 Hz presente na tensão de saída de um toca-fitas cassette e a construa de seu diagrama de Bode.

SOLUÇÃO

A Fig. 12.83c mostra o diagrama de blocos para a implementação do filtro. O sinal de saída do toca-fitas contém tanto a música desejada quanto o ruído indesejado. Depois de filtrada, a tensão V_{amp} não terá mais a componente de 60 Hz e apresentará alguma atenuação nas frequências no entorno de 60 Hz. O circuito equivalente ao diagrama de blocos, incluindo uma equivalência de Thévenin para o toca-fitas e uma resistência equivalente para o amplificador de potência, é mostrado na Fig. 12.83d. Aplicando a divisão de tensão, a função de transferência é obtida como

$$\frac{V_{\text{amp}}}{V_{\text{toca-fitas}}} = \frac{R_{\text{amp}}}{R_{\text{amp}} + R_{\text{toca-fitas}} + \left(sL // \frac{1}{Cs} \right)}$$

Após alguma manipulação, a função de transferência pode ser escrita como

$$\frac{V_{\text{amp}}}{V_{\text{toca-fitas}}} = \frac{R_{\text{amp}}}{R_{\text{amp}} + R_{\text{toca-fitas}}} \left[\frac{s^2 LC + 1}{s^2 LC + s \left(\frac{L}{R_{\text{toca-fitas}} + R_{\text{amp}}} \right) + 1} \right]$$

Pode-se perceber que a função de transferência contém dois zeros e dois polos. Fazendo $s = j\omega$, as frequências referentes aos zeros, ω_z , são obtidas como

$$\omega_z = \pm \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

Naturalmente, é desejável que as frequências dos zeros ocorram em 60 Hz. Escolhendo arbitrariamente $C = 10 \mu\text{F}$, obtém-se $L = 0,704 \text{ mH}$.

O diagrama de Bode, mostrado na Fig. 12.83e, confirma que, de fato, não haverá transmissão a uma frequência de 60 Hz.

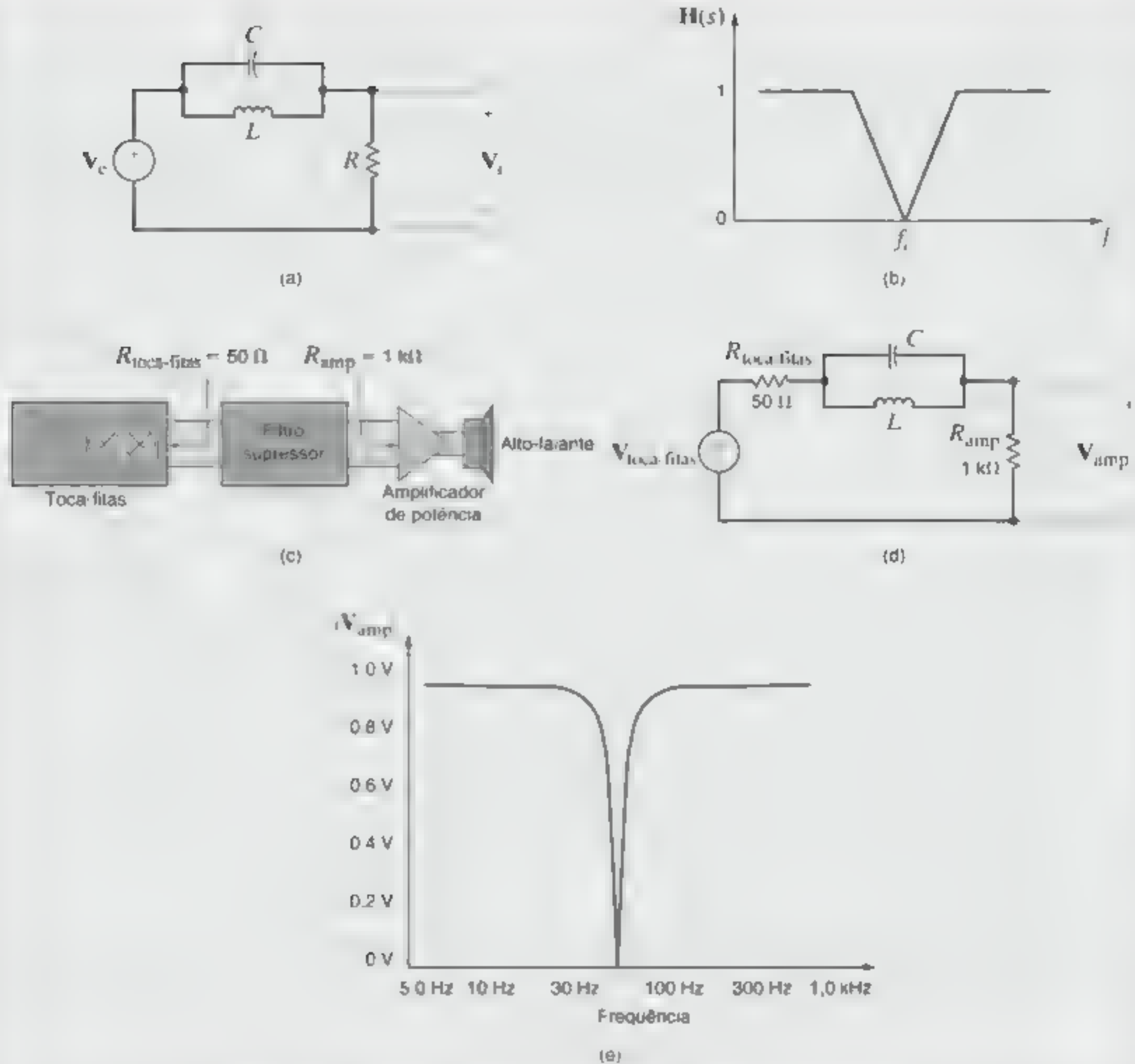


Figura 12.83 Circuitos e diagramas de Bode para o filtro de corte de 60 Hz.

EXEMPLO DE PROJETO 12.40

Um campo de rápido crescimento na engenharia elétrica é o de circuitos de modo misto, o qual combina redes digital e analógica para gerar sistemas de grandes proporções. Um componente-chave nesses sistemas é o conversor analógico-digital, ou CAD. Esse componente “mede” uma tensão analógica e a converte para uma representação digital. Se essa conversão for realizada rapidamente, o resultado será uma sequência de pontos, conforme mostrado na Fig. 12.84a. Ao se ligar os pontos tem-se o sinal analógico original, $v_A(t)$. Infelizmente, conforme visto na Fig. 12.84b, sinais indesejáveis como $v_B(t)$

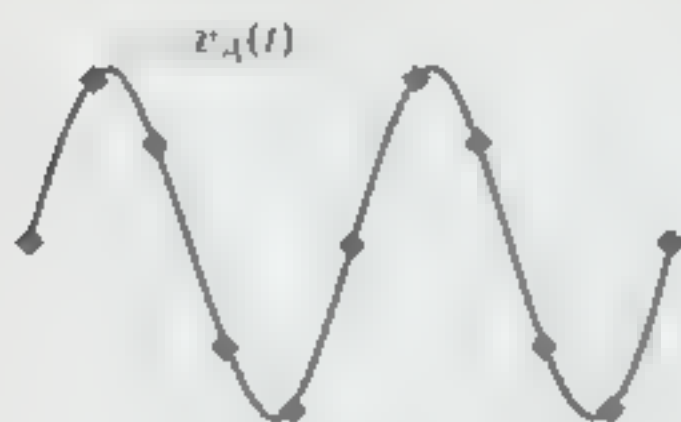
de frequências mais altas podem também apresentar o mesmo conjunto de pontos. Esse fenômeno é chamado de *aliasing* e pode ser evitado pelo emprego de um filtro passa-baixa, chamado de filtro antialiasing, antes do CAD, conforme mostrado na Fig. 12.84c. Em geral, a frequência de meia potência do filtro deveria ser superior à frequência do sinal que se deseja converter, porém, inferior àquela que se deseja rejeitar.

Deseja-se projetar um filtro antialiasing com frequência de meia potência em 100 Hz, que permita a aquisição de um sinal a 60 Hz. Nesse projeto admite-se que o CAD possua uma resistência de entrada infinita.

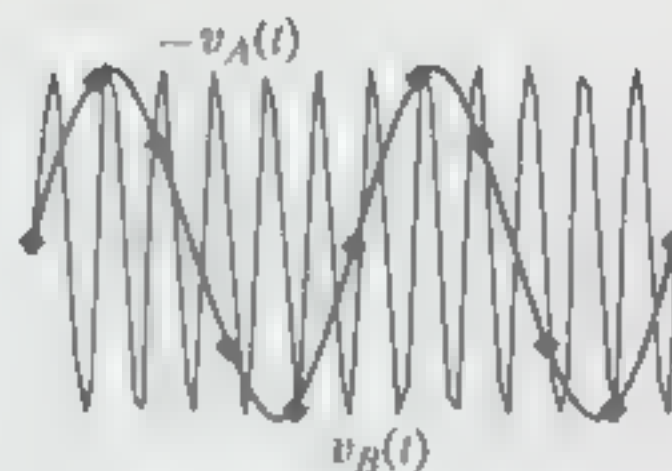
SOLUÇÃO

Admitindo que o CAD tenha uma resistência de entrada infinita, tem-se que a função de transferência do filtro se torna bastante simples.

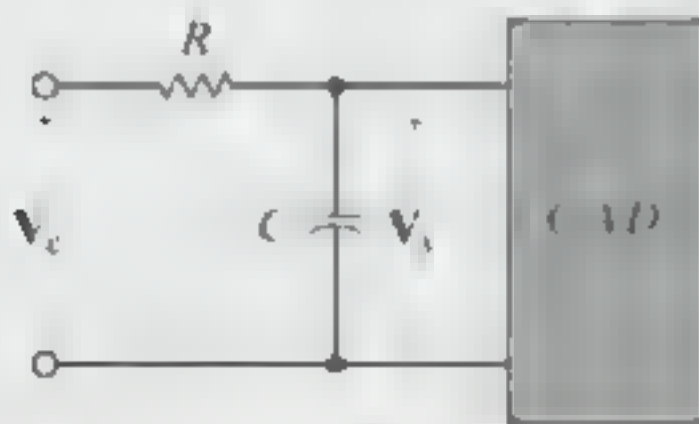
$$\frac{V_o}{V_e} = \frac{\frac{1}{j\omega C}}{R + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{1}{1 + j\omega RC}$$



(a)



(b)



(c)

Figura 12.84 Breve explicação do embasamento do CAD. (a) As amostragens do CAD são como pontos aquilistados de uma forma de onda. (b) Sinais com frequências mais altas podem ser representados pelos mesmos pontos. Depois da aquisição, parece que o sinal $v_B(t)$ foi deslocado para uma frequência mais baixa, um fenômeno chamado de aliasing. (c) A solução: um filtro passa-baixa antialiasing.

A frequência de meia potência é

$$f_p = \frac{1}{2\pi RC} = 100 \text{ Hz}$$

Ao se escolher arbitrariamente C igual a 100 nF, um componente um pouco maior que o resistor, porém menor em dimensão do que o circuito integrado CAD, o valor para o resistor resultante será de 15,9 kΩ.

EXEMPLO DE PROJETO 12.41

O circuito mostrado na Fig. 12.85a é um amplificador intensificador de graves ("bass boost"), de baixo custo, que amplifica apenas os sinais de áudio de baixa frequência, conforme ilustrado esquematicamente pelo diagrama de Bode da Fig. 12.85b. Deseja-se deduzir a função de transferência V_o/V_e para o caso em que a chave está aberta. Em seguida, com base nessa função de transferência e na Fig. 12.85b, são selecionados os valores apropriados para R_1 e R_2 . Qual é o valor resultante para f_p ?

SOLUÇÃO

Com a chave aberta, pode-se utilizar a expressão da configuração de op-amp não inversor para escrever a função de transferência como

$$\frac{V_o}{V_e} = 1 + \frac{Z_2}{Z_1}$$

em que $Z_1 = R_1$ e Z_2 é a combinação em paralelo de R_2 e $1/j\omega C$. A impedância Z_2 pode ser escrita como

$$Z_2 = R_2 \parallel \frac{1}{j\omega C} = \frac{R_2}{1 + j\omega R_2 C}$$

e a função de transferência como

$$\begin{aligned} \frac{V_o}{V_e} &= 1 + \frac{1}{\frac{R_1}{R_2 + \frac{1}{j\omega R_2 C}}} = \frac{R_1 + R_2 + j\omega R_1 R_2 C}{R_1(1 + j\omega R_2 C)} \\ &= \left[\frac{R_1 + R_2}{R_1} \right] \left[\frac{1 + j\omega R_2 C}{1 + j\omega R_1 C} \right] \end{aligned} \quad 12.92$$

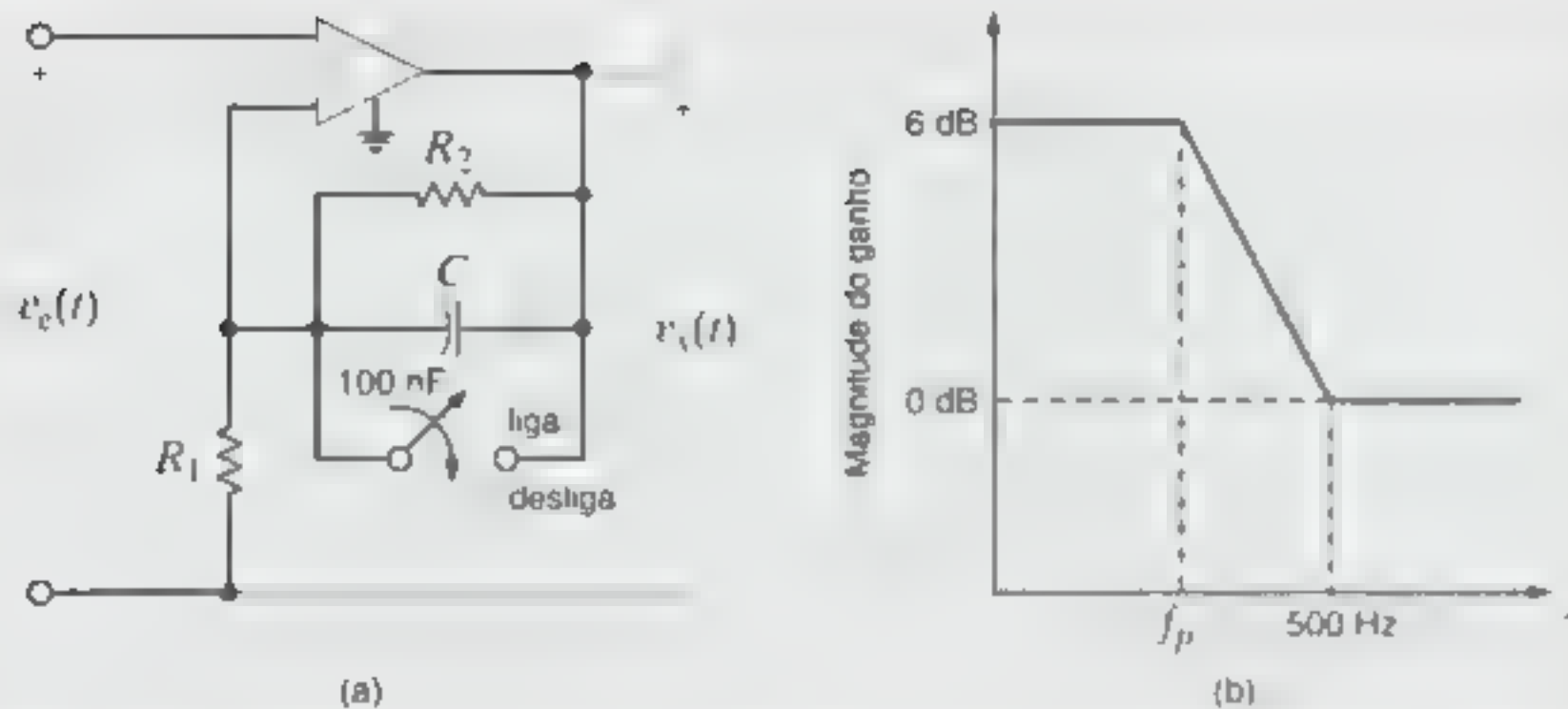


Figura 12.85 Circuito intensificador de graves (a) e diagrama de Bode esquemático da amplitude de sua resposta (b).

em que $R_p = R_1 // R_2$. A rede possui um zero em $1/R_p C$ e um polo em $1/R_2 C$. Como R_p deve ser menor que R_2 , a frequência em zero dB deve ser maior que a frequência do polo e o esquema mostrado na Fig. 12.85b é apropriado.

Os valores dos parâmetros dos componentes são agora determinados. Em $\omega = 0$ (sinal CC) o ganho deve ser de 6 dB ou um fator de 2. Pela Eq. (12.92),

$$\frac{V_s}{V_e}(j0) = \frac{R_1 + R_2}{R_1} = 2$$

Assim, $R_1 = R_2$ e $R_p = R_1/2$. Pela Fig. 12.85b, a frequência em zero dB é de 500 Hz e, dada essa informação, pode-se determinar R_p como

$$\frac{1}{R_p C} = 2\pi(500) \Rightarrow R_p = \frac{1}{1000\pi C} = 3,18 \text{ k}\Omega$$

Naturalmente, $R_1 = R_2 = 2R_p = 6,37 \text{ k}\Omega$. Finalmente, a frequência do polo é

$$\frac{1}{2\pi R_2 C} \approx 250 \text{ Hz}$$

EXEMPLO DE PROJETO 12.42

Um audiófilo descobriu que seu toca-fitas possui uma resposta em alta frequência limitada conforme mostrado na Fig. 12.86a. Preocupado com os dias em que tem insônia, ele decidiu inserir um circuito "amplificador tríplice" entre a unidade de acionamento da fita e o amplificador principal que possui a

função de transferência mostrada na Fig. 12.86b. Passando o áudio da fita através do amplificador, produz-se uma resposta "plana" a partir de aproximadamente 20 kHz. O circuito apresentado na Fig. 12.86c representa esse projeto. Mostre que a função de transferência do circuito possui a forma correta e selecione R_1 e R_2 para uma operação apropriada.

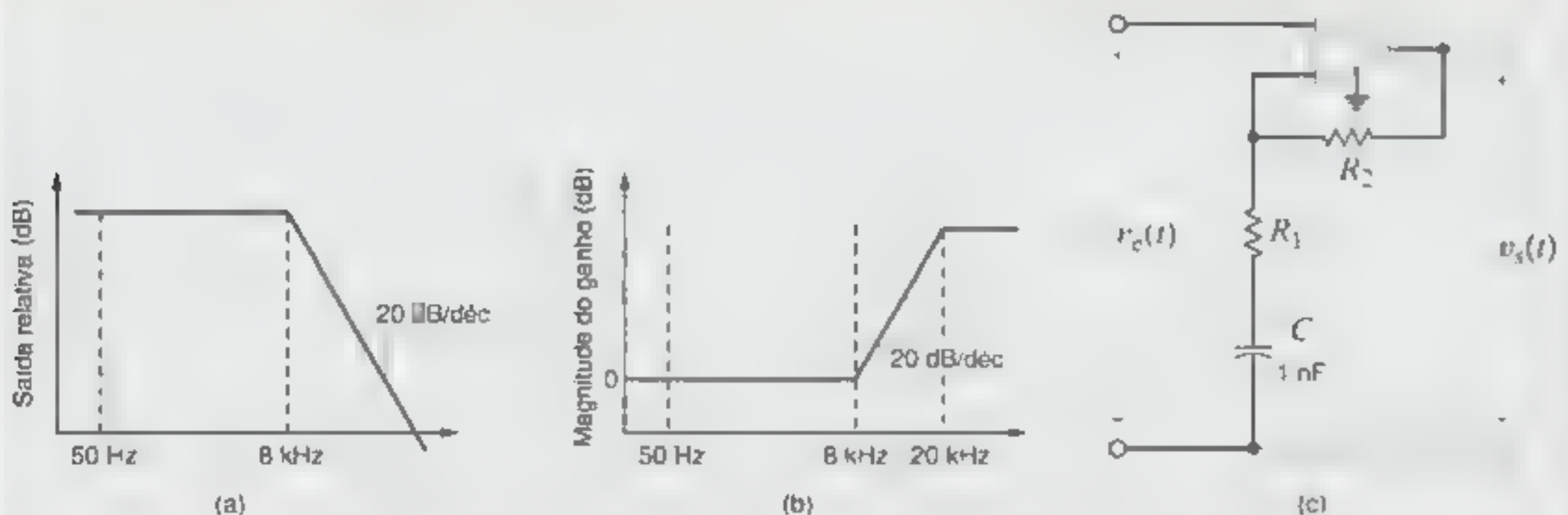


Figura 12.86 Correção de uma resposta deficiente de áudio. (a) Resposta original, (b) função de transferência corretiva e (c) implementação do circuito.

SOLUÇÃO

Reconhecendo o circuito como uma configuração de ganho não inversor, a função de transferência fica

$$\frac{V_s}{V_e} = 1 + \frac{Z_2}{Z_1} \quad 12.93$$

em que Z_2 é igual a R_2 e Z_1 é a combinação em série de R_1 e $1/j\omega C$. A substituição desses valores na Eq. (12.93) fornece

$$\frac{V_s}{V_e} = 1 + \frac{R_2}{R_1 + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{1 + j\omega C(R_1 + R_2)}{1 + j\omega CR_1}$$

Como a frequência do polo deve ser de 20 kHz,

$$f_p = 2 \times 10^4 = \frac{1}{2\pi C R_1} \Rightarrow R_1 = 7,96 \text{ k}\Omega$$

A frequência de zero dB é de 8 kHz e, assim,

$$f_z = 8 \times 10^3 = \frac{1}{2\pi C(R_1 + R_2)} \Rightarrow R_1 + R_2 = 19,9 \text{ k}\Omega$$

Portanto, R_2 deve ser de 12,0 kΩ.

RESUMO

- Existem quatro tipos de redes ou funções de transferência:
 - $Z(j\omega)$: razão entre a tensão de entrada e a corrente de entrada
 - $Y(j\omega)$: razão entre a corrente de saída e a tensão de entrada
 - $G_v(j\omega)$: razão entre a tensão de saída e a tensão de entrada
 - $G_i(j\omega)$: razão entre a corrente de saída e a corrente de entrada

- Funções pontuais diretores são impedâncias ou admitâncias definidas em um único par de terminais, como a impedância de entrada de uma rede.

- Quando a função de uma rede é expressa na forma

$$H(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$$

as raízes de $N(s)$ fazem com que $H(s)$ seja nula e são chamadas de zeros da função, e as raízes de $D(s)$ fazem com que $H(s)$ tenda para infinito e são chamadas de polos da função.

- Os diagramas de Bode são gráficos semilogarítmicos da intensidade e da fase de uma função de transferência em função da frequência. As aproximações por linhas retas podem ser utilizadas para um esboço rápido da magnitude. O erro entre os valores reais e os valores obtidos pela aproximação por linhas retas pode ser calculado quando necessário.

- A frequência de ressonância, dada pela expressão

$$\omega_r = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

é a frequência para a qual a impedância de um circuito RLC em série ou a admitância de um circuito RLC em paralelo é um número real puro.

- O fator de qualidade é uma medida da precisão do pico de ressonância. Quanto mais alto o valor de Q , mais agudo é o pico.

Para circuitos RLC em série, $Q = (1/R)\sqrt{L/C}$. Para circuitos RLC em paralelo, $Q = R\sqrt{C/L}$.

- As frequências de meia potência, de corte ou de quebra são aquelas nas quais a magnitude do diagrama de Bode é igual a $1/\sqrt{2}$ de seu valor máximo.

- Os valores dos parâmetros para os componentes passivos de um circuito podem ser escalados tanto na magnitude quanto na frequência.

- Os quatro tipos comuns de filtros são passa-baixa, passa-alta, passa-banda e rejeita-banda.

- A largura de banda (ou banda passante) de um filtro passa-banda ou de rejeição de banda é a diferença entre os pontos referentes à meia potência; isto é,

$$BP = \omega_{ALTA} - \omega_{BAIXA}$$

Para um circuito RLC em série, $BP = R/L$. Para um circuito RLC em paralelo, $BP = 1/RC$.

PROBLEMAS

- 12.1** Determine a impedância motriz pontual nos terminais de entrada da rede mostrada na Fig. P12.1 em função de s .

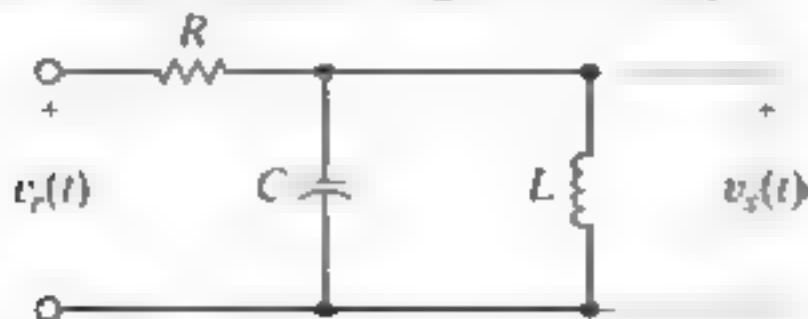


Figura P12.1

- 12.2** Determine a impedância motriz pontual nos terminais de entrada da rede mostrada na Fig. P12.2 em função de s .

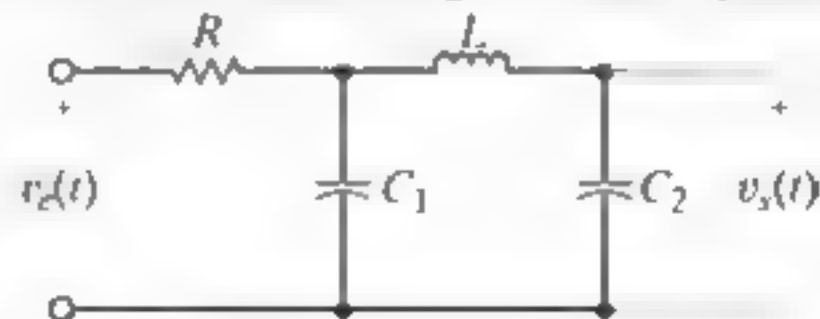


Figura P12.2

- 12.3** Determine a função de transferência em tensão $V_o(s)/V_e(s)$ em função de s para a rede mostrada na Fig. P12.3.

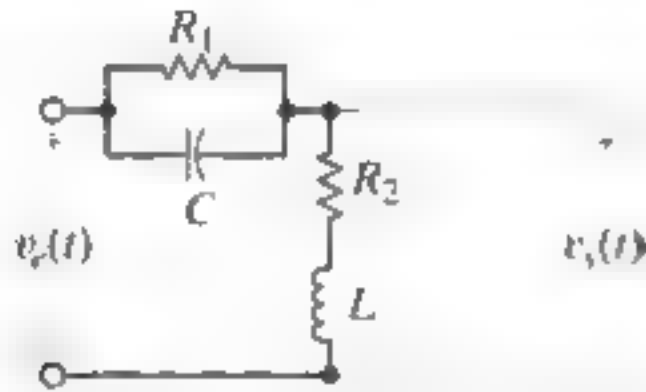


Figura P12.3

- 12.4** Obtenha a impedância motriz pontual nos terminais de entrada do circuito mostrado na Fig. P12.4 em função de s .

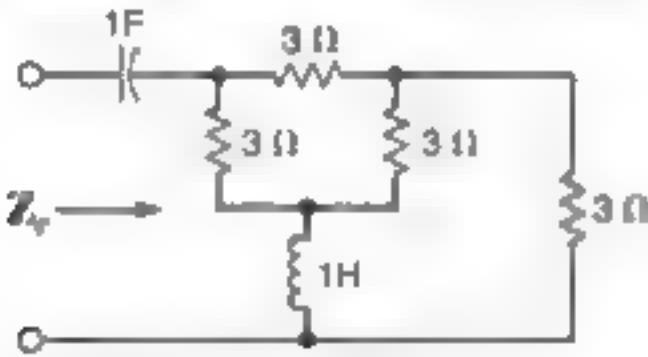


Figura P12.4

- 12.5** Determine a impedância motriz pontual nos terminais 1-2 da rede mostrada na Fig. P12.5 em função de s considerando que (a) os terminais 3-4 estejam abertos e (b) que os terminais 3-4 estejam em curto.

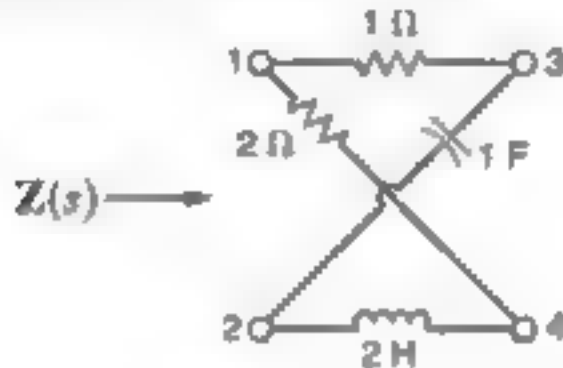


Figura P12.5

- 12.6** Repita o Problema P12.5 considerando que um resistor de 2Ω seja conectado entre os terminais 3 e 4, conforme mostrado na Fig. P12.6.

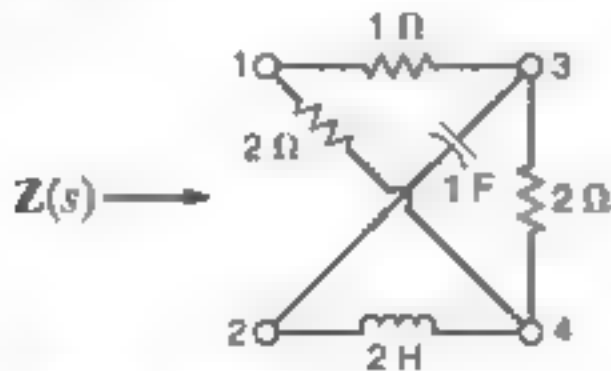


Figura P12.6

- 12.7** Determine a impedância motriz pontual nos terminais de entrada da rede mostrada na Fig. P12.7 em função de s .

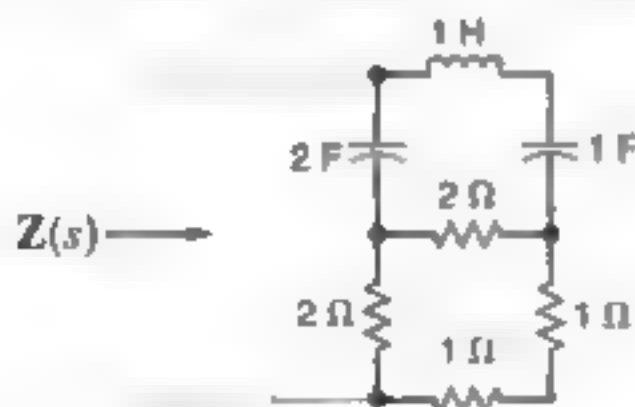


Figura P12.7

- 12.8** Obtenha a função de transferência $V_o(s)/I_e(s)$ da rede mostrada na Fig. P12.8.

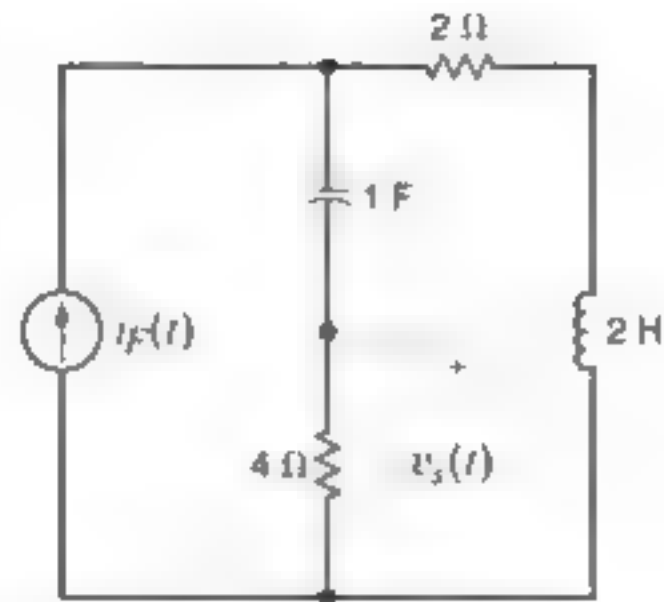


Figura P12.8

- 12.9** Construa o diagrama de Bode da função de rede

$$H(j\omega) = \frac{j\omega 4 + 1}{j\omega^2 0.1 + 1}$$

- 12.10** Construa o diagrama de Bode da função de rede

$$H(j\omega) = \frac{j\omega}{(j\omega + 1)(0.1j\omega + 1)}$$

- 12.11** Construa o diagrama de Bode para a magnitude da função de transferência

$$H(j\omega) = \frac{100(j\omega)}{(j\omega + 1)(j\omega + 10)(j\omega + 50)}$$

- 12.12** Construa o diagrama de Bode da função de rede

$$H(j\omega) = \frac{10j\omega + 1}{j\omega(0.01j\omega + 1)}$$

- 12.13** Construa o diagrama de Bode para a magnitude da função de transferência

$$H(j\omega) = \frac{20(0.1j\omega + 1)}{j\omega(j\omega + 1)(0.01j\omega + 1)}$$

- 12.14** Construa o diagrama de Bode da função de rede

$$H(j\omega) = \frac{100}{(j\omega)^2(j\omega 2 + 1)}$$

- 12.15** Construa o diagrama de Bode para a magnitude da função de transferência

$$G(j\omega) = \frac{400(j\omega + 2)(j\omega + 40)}{\omega^2(j\omega + 100)^2}$$

- 12.16** Construa o diagrama de Bode para a magnitude da função de transferência

$$G(j\omega) = \frac{10j\omega}{(j\omega + 1)(j\omega + 10)^2}$$

- 12.17** Construa o diagrama de Bode para a magnitude da função de transferência

$$G(j\omega) = \frac{-\omega^2 10^4}{(j\omega + 1)^2(j\omega + 10)(j\omega + 100)^2}$$

- 12.18** Construa o diagrama de Bode para a magnitude da função de transferência

$$G(j\omega) = \frac{\omega^2}{(j\omega + 1)^3}$$

- 12.19** Construa o diagrama de Bode para a magnitude da função de transferência

$$H(j\omega) = \frac{+6,4}{(j\omega + 1)(-\omega^2 + 8j\omega + 16)}$$

- 12.20** Construa o diagrama de Bode para a magnitude da função de transferência

$$H(j\omega) = \frac{10j\omega - 1}{(j\omega + 1)(0,1j\omega + 1)}$$

- 12.21** Construa o diagrama de Bode para a magnitude da função de transferência

$$H(j\omega) = \frac{10(5j\omega + 1)}{(100j\omega + 1)(0,02j\omega + 1)}$$

- 12.22** Construa o diagrama de Bode para a magnitude da função de transferência

$$H(j\omega) = \frac{0,1(2j\omega + 1)}{j\omega(0,1j\omega + 1)(0,01j\omega + 1)}$$

- 12.23** Construa o diagrama de Bode para a magnitude da função de transferência

$$H(j\omega) = \frac{0,5(10j\omega + 1)(j\omega + 1)}{j\omega(0,1j\omega + 1)(0,01j\omega + 1)}$$

- 12.24** Construa o diagrama de Bode para a magnitude da função de transferência

$$H(j\omega) = \frac{250(j\omega + 10)}{(j\omega)^2(j\omega + 100)^2}$$

- 12.25** Construa o diagrama de Bode para a magnitude da função de transferência

$$G(j\omega) = \frac{10(j\omega + 2)(j\omega + 100)}{j\omega(-\omega^2 + 4j\omega + 100)}$$

- 12.26** Construa o diagrama de Bode para a magnitude da função de transferência

$$H(j\omega) = \frac{+6,4(j\omega)}{(j\omega + 1)(-\omega^2 + 8j\omega + 64)}$$

- 12.27** Obtenha $H(j\omega)$ considerando que sua característica de magnitude seja a mostrada na Fig. P12.27.

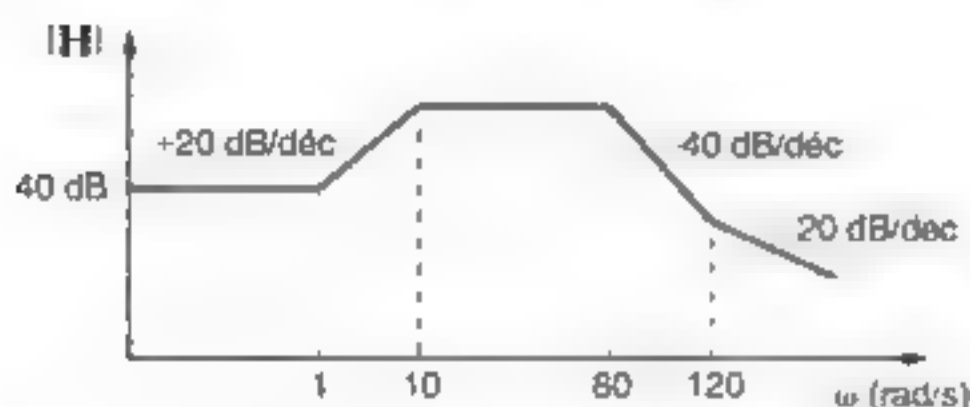


Figura P12.27

- 12.28** Determine a função $H(j\omega)$ a partir de sua característica de magnitude mostrada na Fig. P12.28.

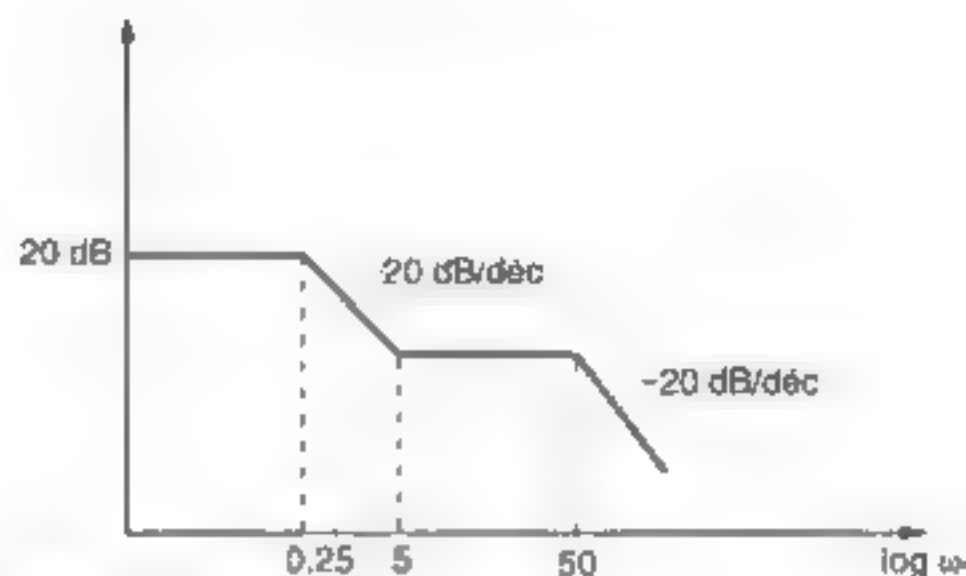


Figura P12.28

- 12.29** Determine a função $H(j\omega)$ a partir do diagrama de Bode de sua magnitude mostrado na Fig. P12.29.

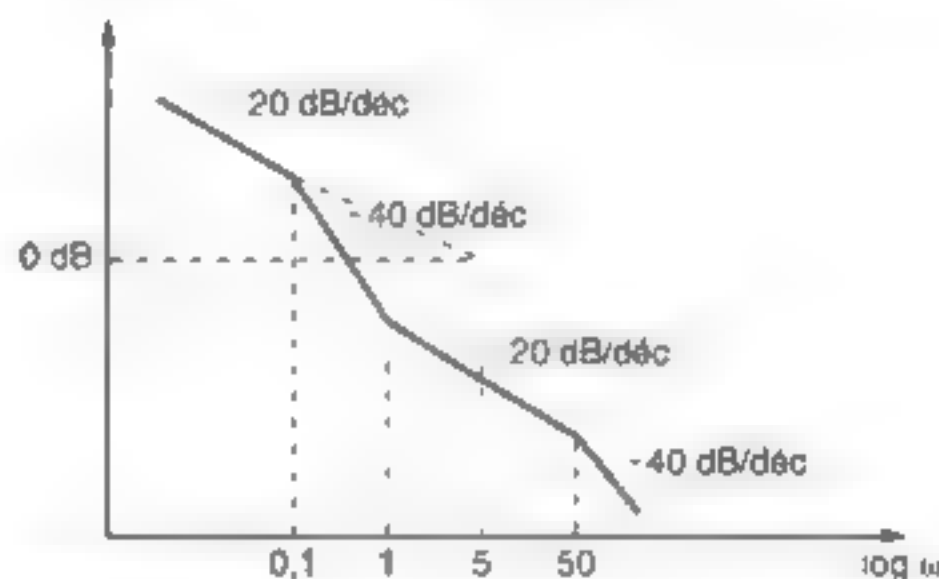


Figura P12.29

- 12.30** Determine a função $H(j\omega)$ a partir do diagrama de Bode de sua magnitude mostrado na Fig. P12.30.

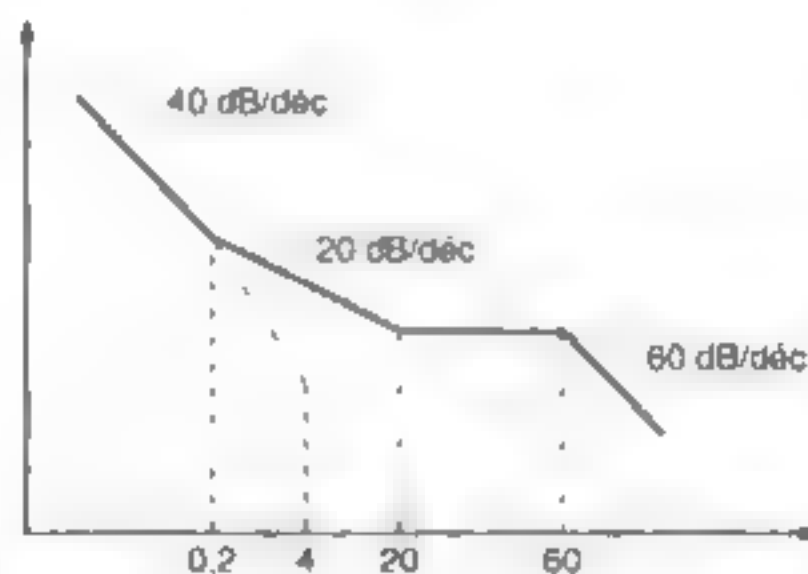


Figura P12.30

- 12.31** A característica de magnitude de um filtro de rejeição de banda é a mostrada na Fig. P12.31. Determine $H(j\omega)$.

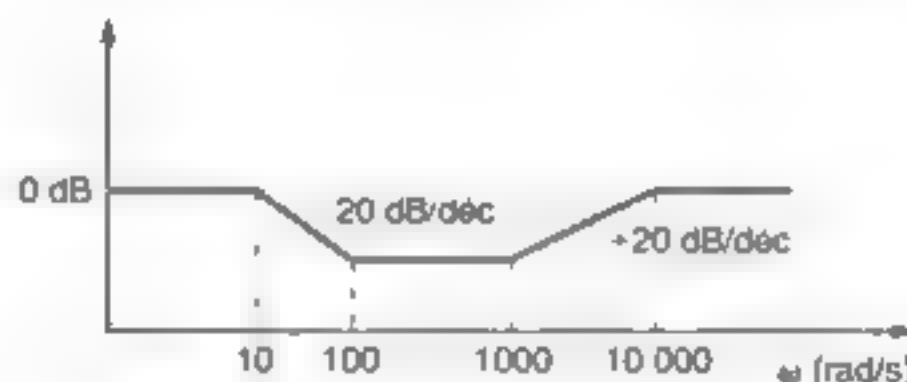


Figura P12.31

- 12.32** Dada a característica de magnitude mostrada na Fig. P12.32, obtenha $H(j\omega)$.

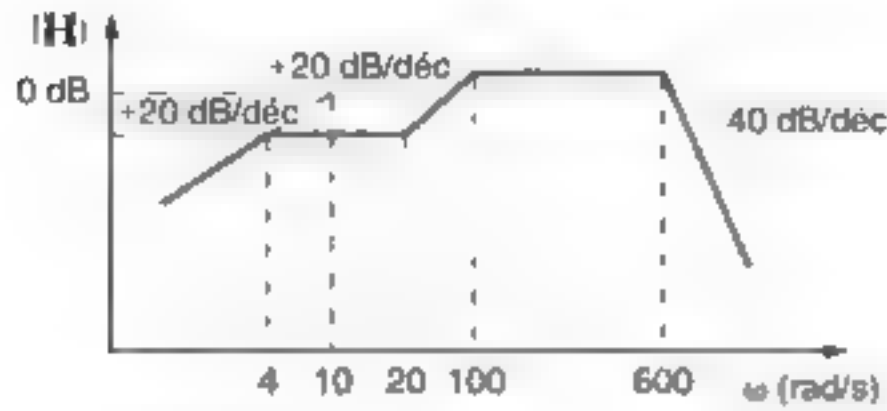


Figura P12.32

- 12.33** Obtenha a função $H(j\omega)$ considerando que sua característica de magnitude seja a mostrada na Fig. P12.33.

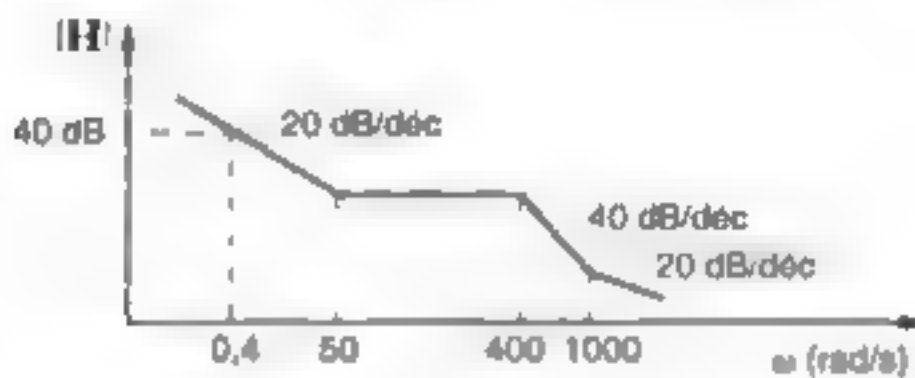


Figura P12.33

- 12.34** Obtenha a função $H(j\omega)$ considerando que sua característica de amplitude seja a mostrada na Fig. P12.34.

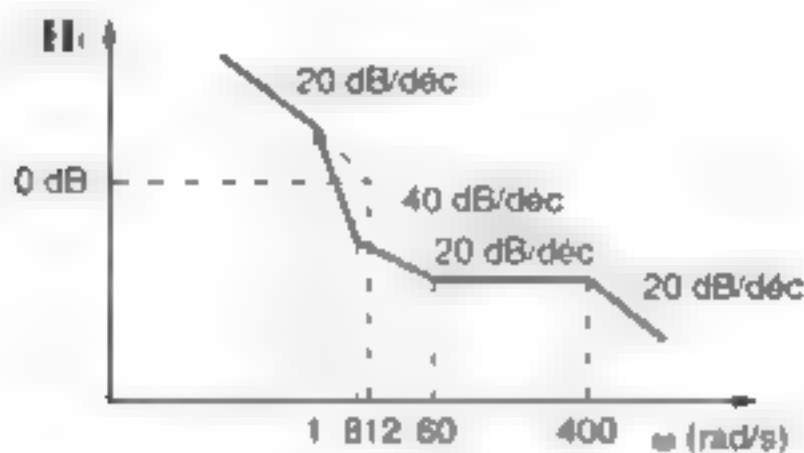


Figura P12.34

- 12.35** Obtenha a função $H(j\omega)$ considerando que sua característica de magnitude seja a mostrada na Fig. P12.35.

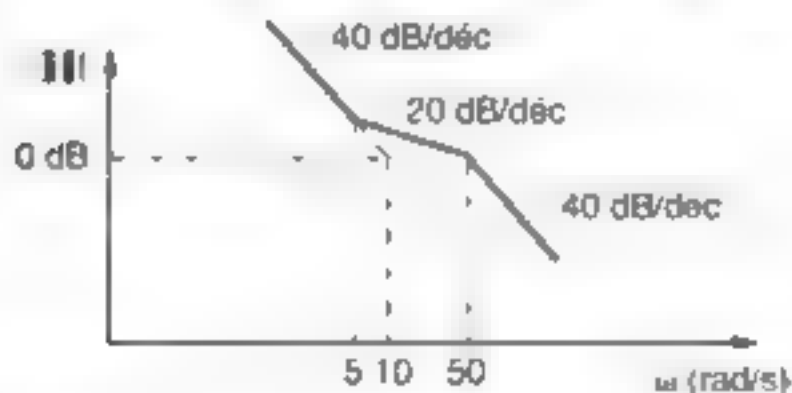


Figura P12.35

- 12.36** Obtenha a função $G(j\omega)$ considerando que sua característica de magnitude seja a mostrada na Fig. P12.36.

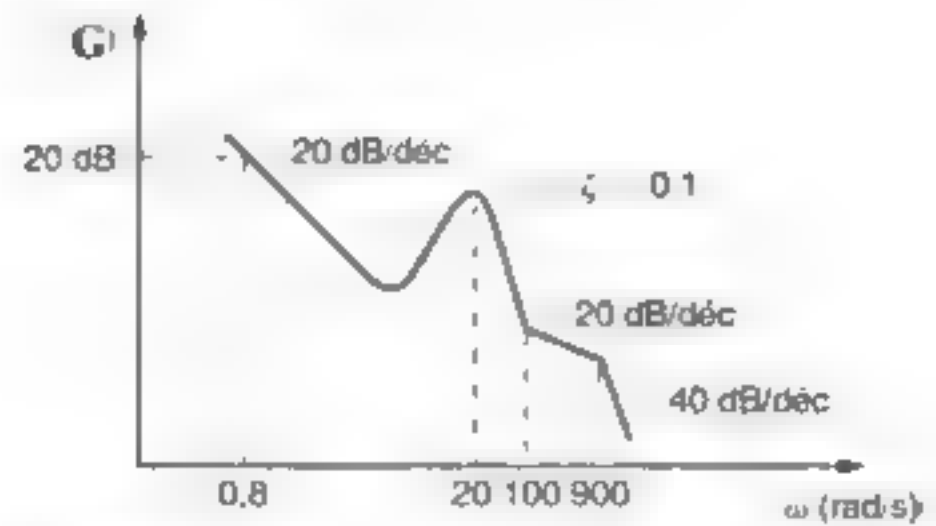


Figura P12.36

- 12.37** O circuito RLC em série mostrado na Fig. P12.37 é alimentado por uma fonte de frequência variável. Se a frequência ressonante da rede é selecionada em $\omega_0 = 1600$ rad/s, determine o valor do capacitor C . Além disso, calcule a corrente na condição de ressonância e em $\omega_0/4$ e $4\omega_0$.

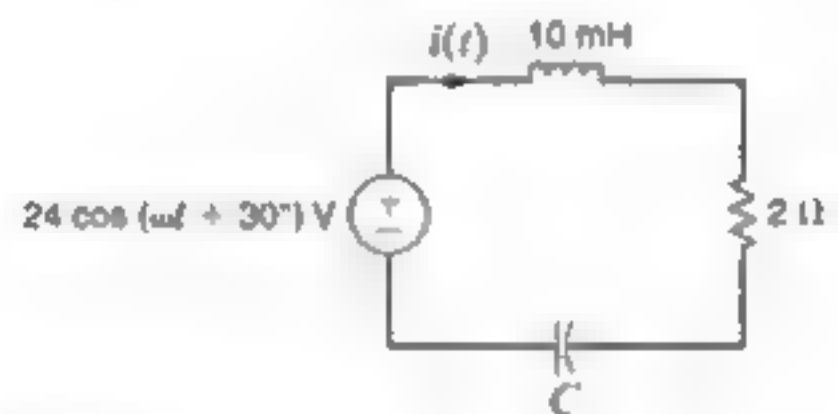


Figura P12.37

- 12.38** Dada a rede mostrada na Fig. P12.38, determine a alteração necessária no resistor variável para reduzir a banda passante do circuito à metade. Qual é o valor da nova banda passante.

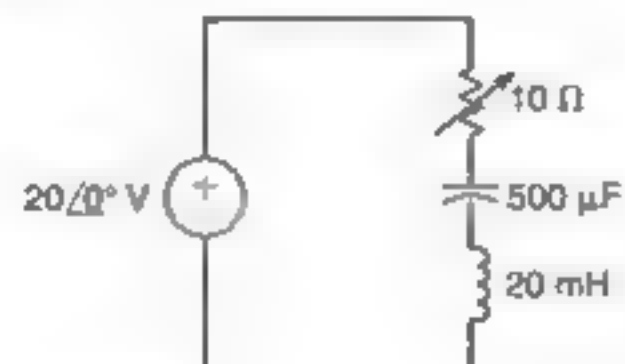


Figura P12.38

- 12.39** Um circuito RLC em série apresenta ressonância a 1 000 rad/s. Sendo o capacitor $C = 20 \mu\text{F}$ e sabendo que a impedância na ressonância é de $2,4 \Omega$, calcule o valor da indutância L , o fator de qualidade Q do circuito e a banda passante.

- 12.40** Dado o circuito RLC em série mostrado na Fig. P12.40, (a) deduza a expressão para as frequências de meia potência, a frequência ressonante, a banda passante e o fator de qualidade para a característica de transferência I/V_s em termos de R , L e C ; (b) calcule as grandezas do item (a) considerando $R = 10 \Omega$, $L = 50 \text{ mH}$ e $C = 10 \mu\text{F}$

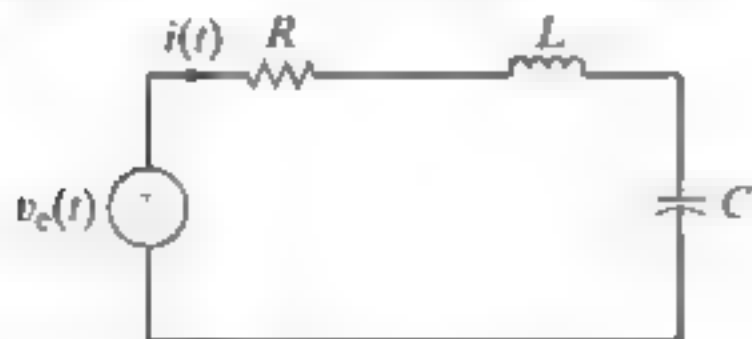


Figura P12.40

- 12.41** Um circuito ressonante em série possui um fator de qualidade Q de 120 e uma frequência de ressonância de 10.000 rad/s . Determine as frequências de meia potência e a banda passante do circuito.
- 12.42** Dada a rede mostrada na Fig. P12.42, determine ω_0 , Q , ω_{mda} e $V_x|_{\text{mda}}$.

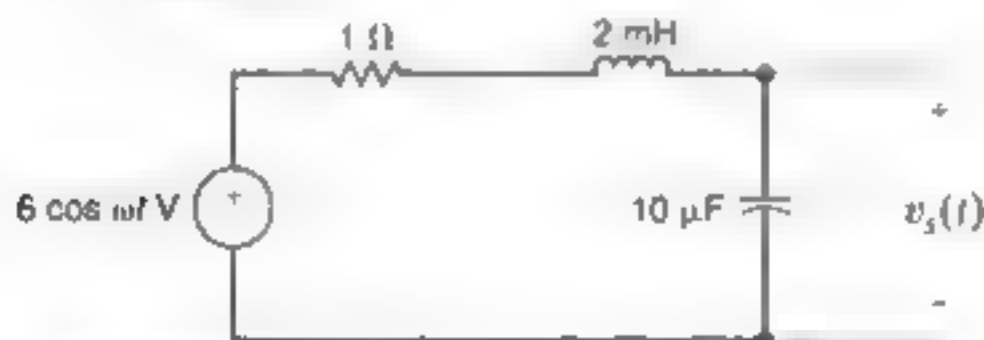


Figura P12.42

- 12.45** A rede mostrada na Fig. P12.45 opera a 200 c/s . Estabeleça a maneira pela qual o banco de resistores poderia ser conectado para maximizar a tensão V_s e determine o valor da tensão máxima ($R_1 = 12 \Omega$, $R_2 = 6 \Omega$ e $R_3 = 4 \Omega$).

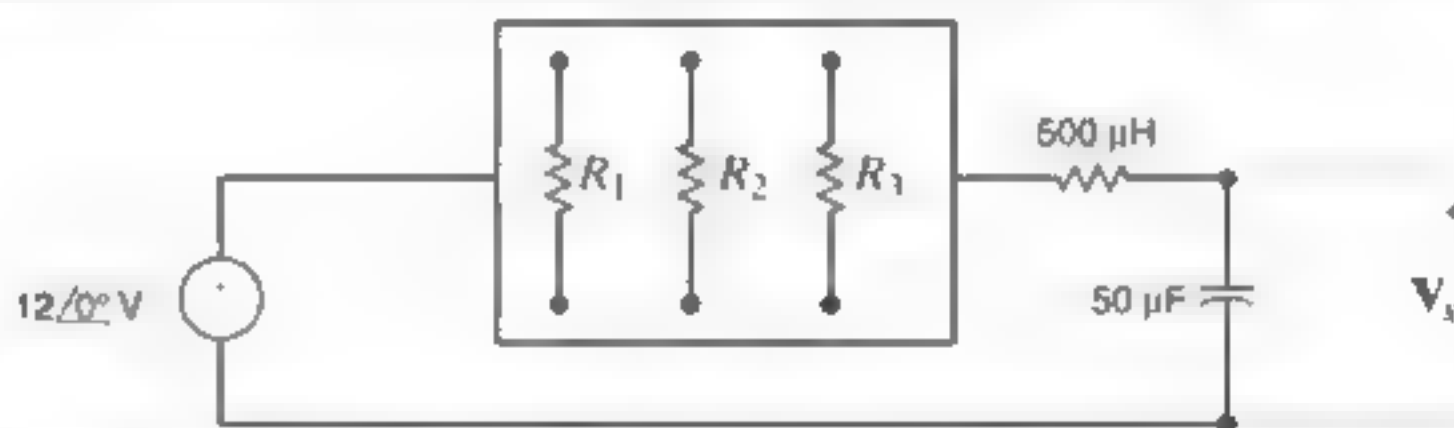


Figura P12.45

- 12.46** Um circuito RLC em série é alimentado por um gerador de sinal. A frequência de ressonância da rede é conhecida e vale 1.600 rad/s e, nessa frequência, a impedância percebida pelo gerador de sinal é de 5Ω . Se $C = 20 \mu\text{F}$, determine L , Q e a banda passante.
- 12.47** Um circuito ressonante RLC em paralelo possui uma resistência de 200Ω . Sabendo-se que a banda passante é de 80 rad/s e que a frequência mais baixa de meia potência é de 800 rad/s , determine os valores dos parâmetros L e C .
- 12.48** Um circuito ressonante RLC em paralelo com uma frequência de ressonância de 20.000 rad/s possui uma admitância de 1 mS na condição de ressonância. Se a capacitância da rede é de $2 \mu\text{F}$, determine os valores de R e L .
- 12.49** Os parâmetros de um circuito RLC em paralelo, que é alimentado por uma fonte de corrente de 2 A com frequência

- 12.43** Uma fonte de tensão de frequência variável alimenta a rede mostrada na Fig. P12.43. Determine a frequência ressonante, Q , BP, e a potência média dissipada pela rede na ressonância.

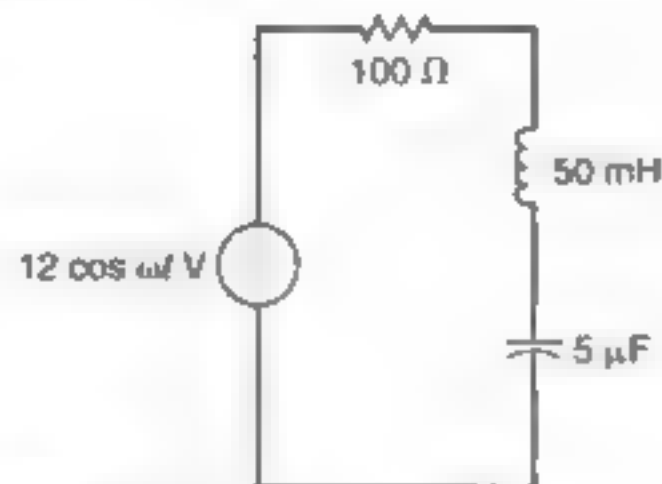


Figura P12.43

- 12.44** Na rede mostrada na Fig. P12.44, o valor do indutor é de 10 mH e o circuito é alimentado por uma fonte de frequência variável. Se a magnitude da corrente na condição de ressonância é de 12 A e $\omega_0 = 1.000 \text{ rad/s}$, determine C , Q e a banda passante do circuito.

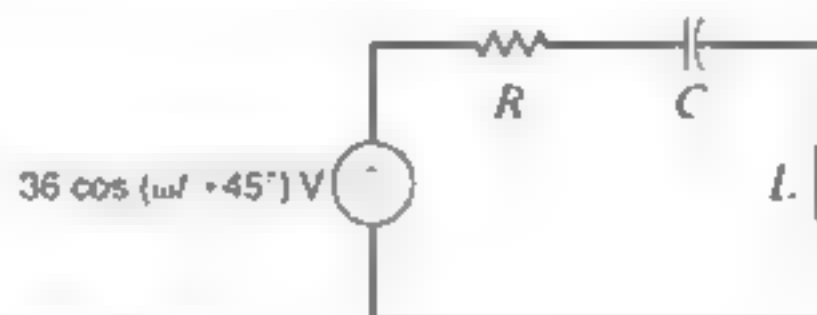


Figura P12.44

variável, possuem os seguintes valores: $R = 1 \text{ k}\Omega$, $L = 100 \text{ mH}$ e $C = 10 \mu\text{F}$. Determine a banda passante da rede, as frequências de meia potência e a tensão entre os terminais da rede nas frequências de meia potência.

- 12.50** Os parâmetros de um circuito RLC em paralelo, que é alimentado por uma fonte de corrente de 2 A com frequência variável, possuem os seguintes valores: $R = 1 \text{ k}\Omega$, $L = 400 \text{ mH}$ e $C = 10 \mu\text{F}$. Determine a banda passante da rede, as frequências de meia potência e a tensão entre os terminais da rede nas frequências de meia potência.
- 12.51** Determine os parâmetros de um circuito ressonante em paralelo que possua as seguintes propriedades: $\omega_0 = 2 \text{ Mrad/s}$, BP = 20 rad/s e uma impedância na ressonância de 2.000Ω .

- 12.52** A fonte da rede mostrada na Fig. P12.52 é expressa por $i_F(t) = \cos 1.000t + \cos 1.500t$ A. Considere $R = 200 \Omega$ e $C = 500 \mu\text{F}$. Se $\omega_0 = 1.000$ rad/s, determine L , Q e a BP. Calcule a tensão de saída $v_s(t)$ e discuta a magnitude da tensão de saída nas duas frequências de entrada.

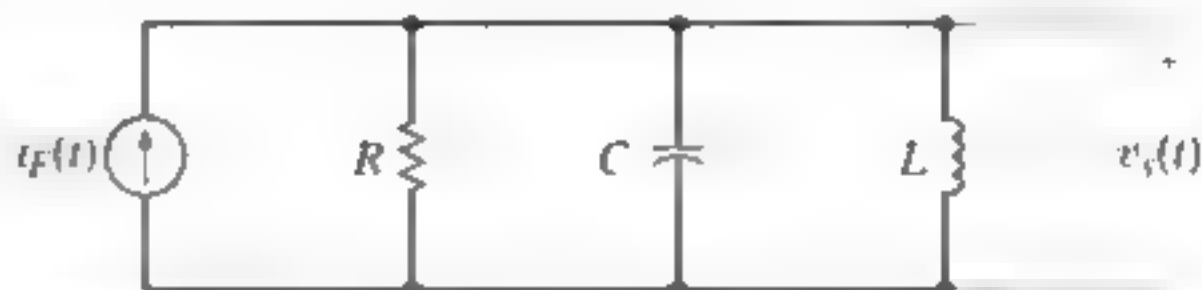


Figura P12.52

- 12.53** Considere a rede mostrada na Fig. P12.53. Se $R = 1 \text{ k}\Omega$, $L = 20 \text{ mH}$, $C = 50 \mu\text{F}$ e $R_F \rightarrow \infty$, determine a frequência de ressonância ω_0 , o fator de qualidade Q da rede e a banda passante da rede. Qual é o impacto de uma resistência $R_F = 10 \text{ k}\Omega$ nas grandezas determinadas?

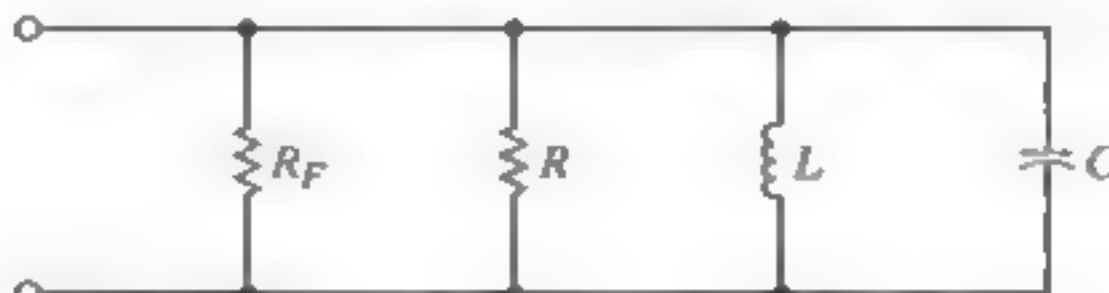


Figura P12.53

- 12.54** Determine o valor da capacitância C da rede mostrada a Fig. P12.54 de modo que o circuito fique na condição de ressonância.

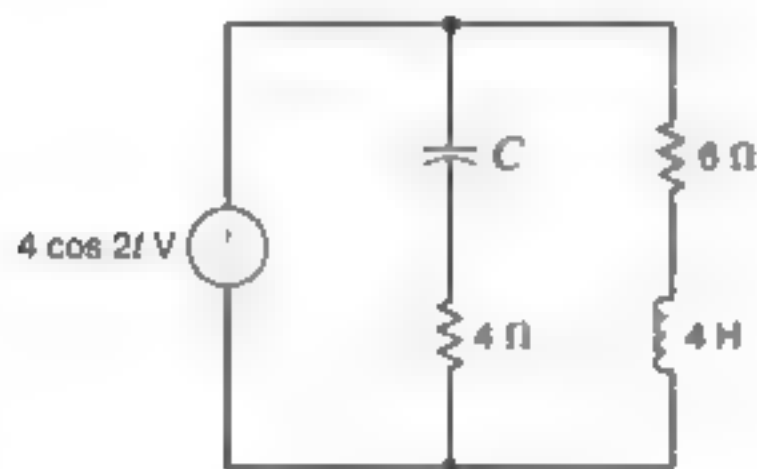


Figura P12.54

- 12.55** Determine a equação para a frequência de ressonância não nula da impedância mostrada na Fig. P12.55.

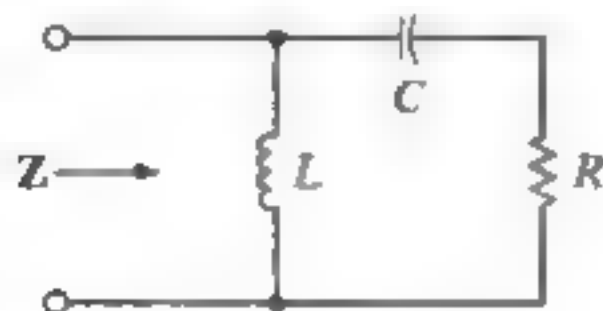


Figura P12.55

- 12.56** Determine os novos parâmetros da rede mostrada na Fig. P12.56 se $\omega_{\text{nova}} = 10^4 \omega_{\text{original}}$.

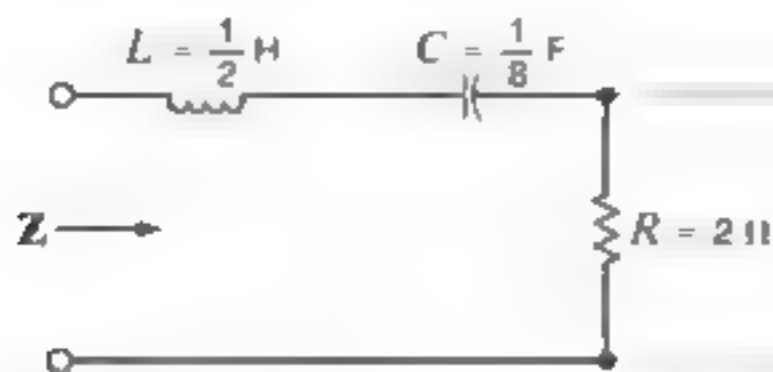


Figura P12.56

- 12.57** Determine os novos parâmetros da rede mostrada na Fig. P12.57 se $Z_{\text{nova}} = 10^4 Z_{\text{original}}$.

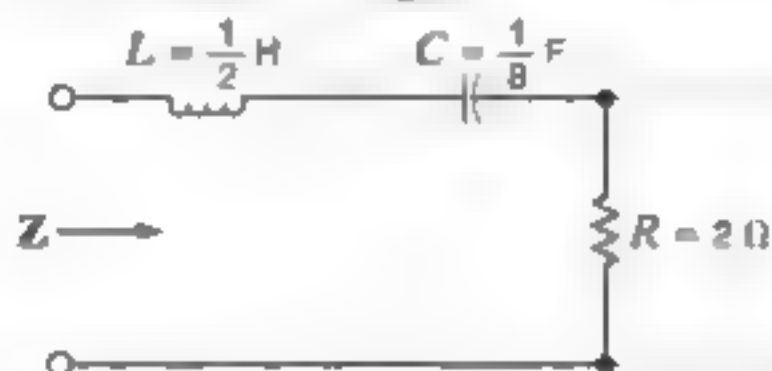


Figura P12.57

- 12.58** Construa o diagrama de Bode da função de transferência referente à magnitude da rede mostrada na Fig. P12.58. Qual é o tipo de filtro dessa rede?

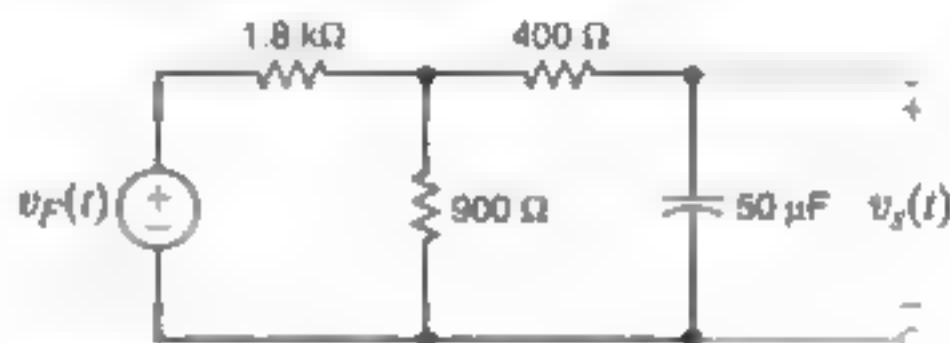


Figura P12.58

- 12.59** Dada a rede mostrada na Fig. P12.59, esboce a curva de magnitude da função de transferência

$$G_m(j\omega) = \frac{V_o(j\omega)}{V_i(j\omega)}$$

Identifique o tipo de filtro.

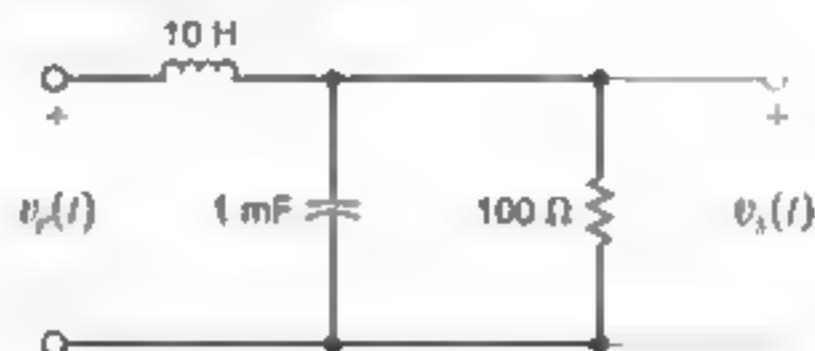


Figura P12.59

- 12.60** Determine, através da função de transferência em tensão, o tipo de filtro representado pela rede mostrada na Fig. P12.60.

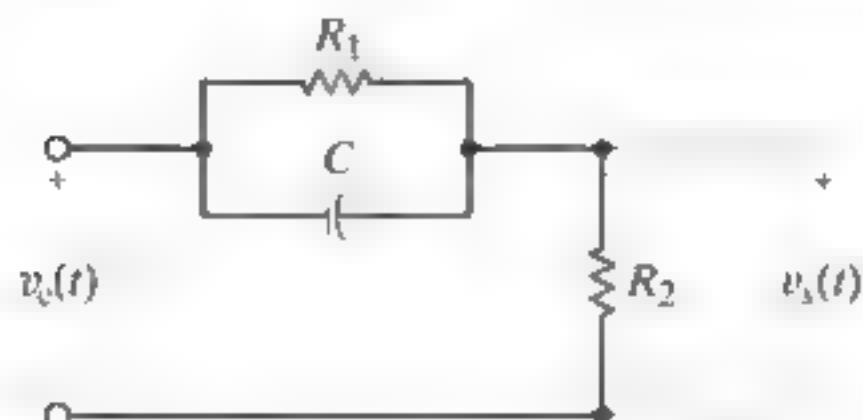


Figura P12.60

- 12.61** Determine, através da função de transferência em tensão, o tipo de filtro representado pela rede mostrada na Fig. P12.61.

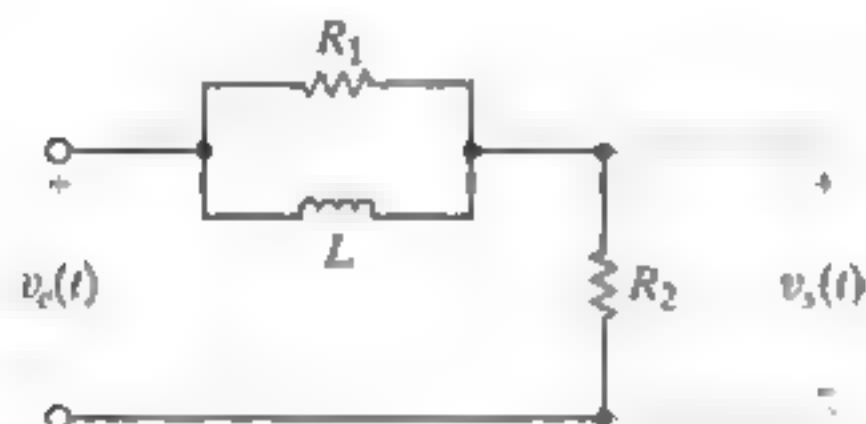


Figura P12.61

- 12.62** Dada a rede mostrada na Fig. P12.62, esboce a curva de magnitude da função de transferência

$$G_v(j\omega) = \frac{V_s(j\omega)}{V_i(j\omega)}$$

Identifique o tipo de filtro.

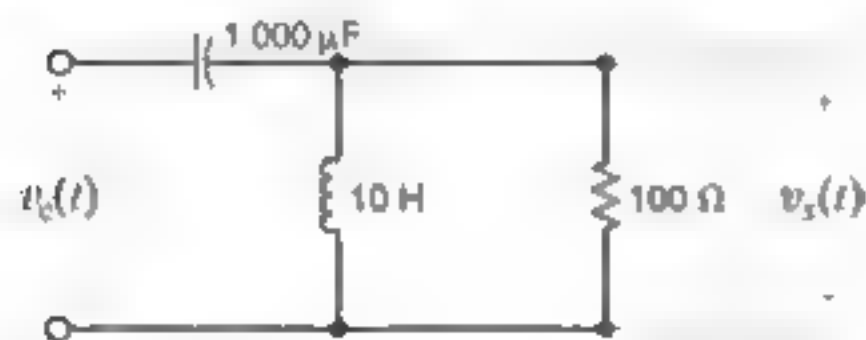


Figura P12.62

- 12.63** Dada a rede reticulada mostrada na Fig. P12.63, determine, através da função de transferência em tensão, o tipo de filtro representado pela rede.

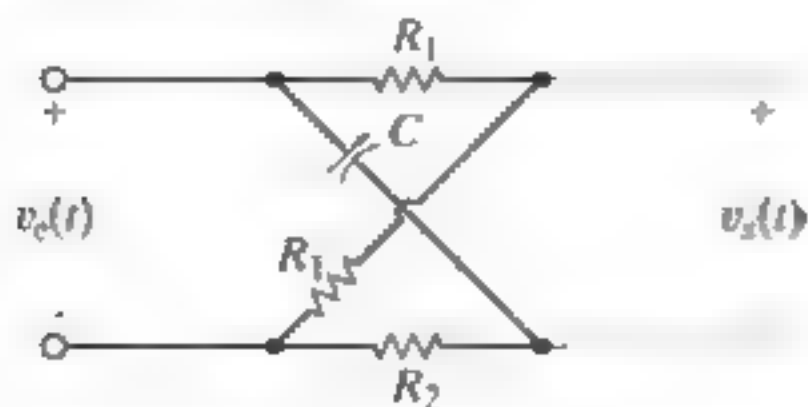


Figura P12.63

- 12.64** O circuito mostrado na Fig. P12.64 é um filtro supressor dual T. Ele possui uma vantagem sobre o filtro do Exemplo 12.36 por não possuir indutores, os quais tendem a tornar o circuito de grandes dimensões e pesado. Obtenha a função de transferência desse filtro e verifique seus resultados para os seguintes valores de parâmetros: $C = 100 \text{ nF}$ e $R = 1590 \Omega$.

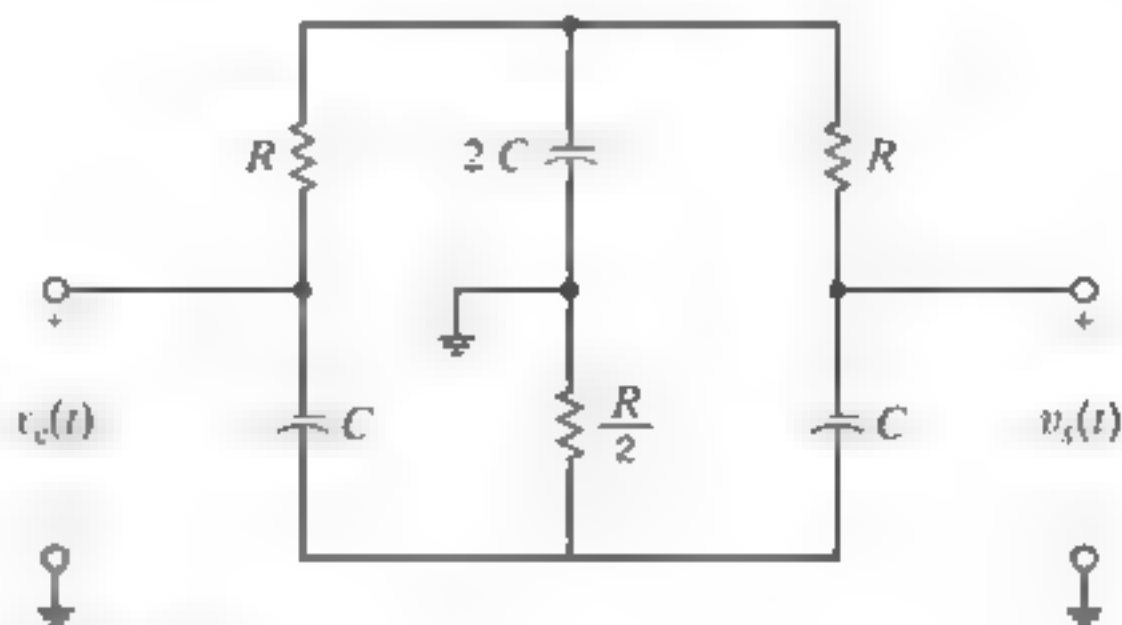


Figura P12.64

- 12.65** Dada a rede mostrada na Fig. P12.65, obtenha a função de transferência

$$\frac{V_s(j\omega)}{V_i(j\omega)}$$

e determine o tipo de filtro representado pela rede.

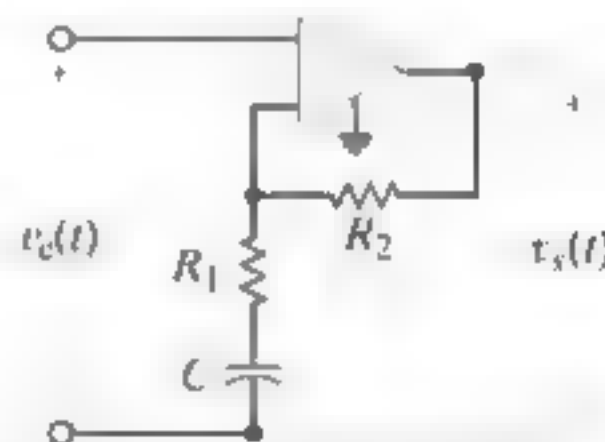


Figura P12.65

- 12.66** Determine o valor da indutância L do circuito mostrado na Fig. P12.66 que colocará a rede em ressonância.

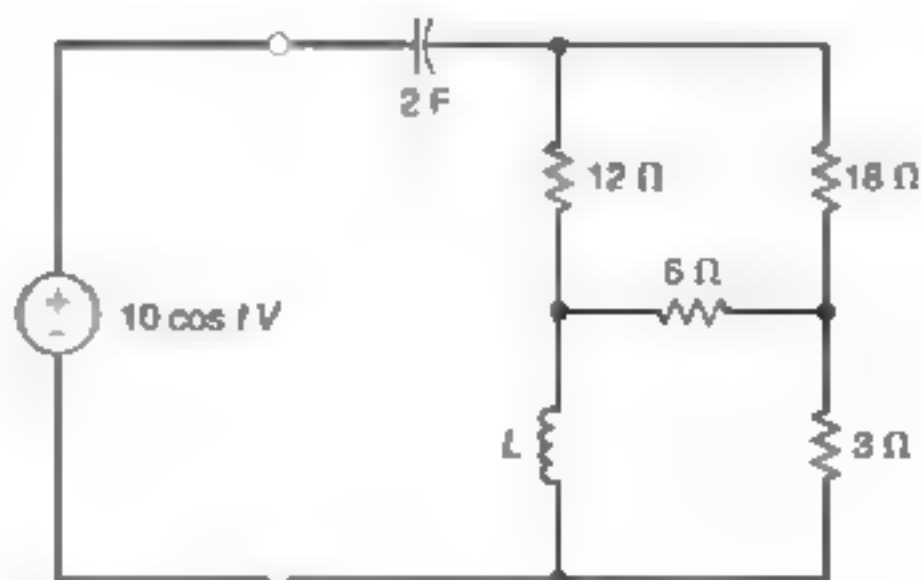


Figura P12.66

- 12.67** Determine a função de transferência em tensão e sua característica de magnitude para a rede mostrada na Fig. P12.67 e identifique as propriedades do filtro.

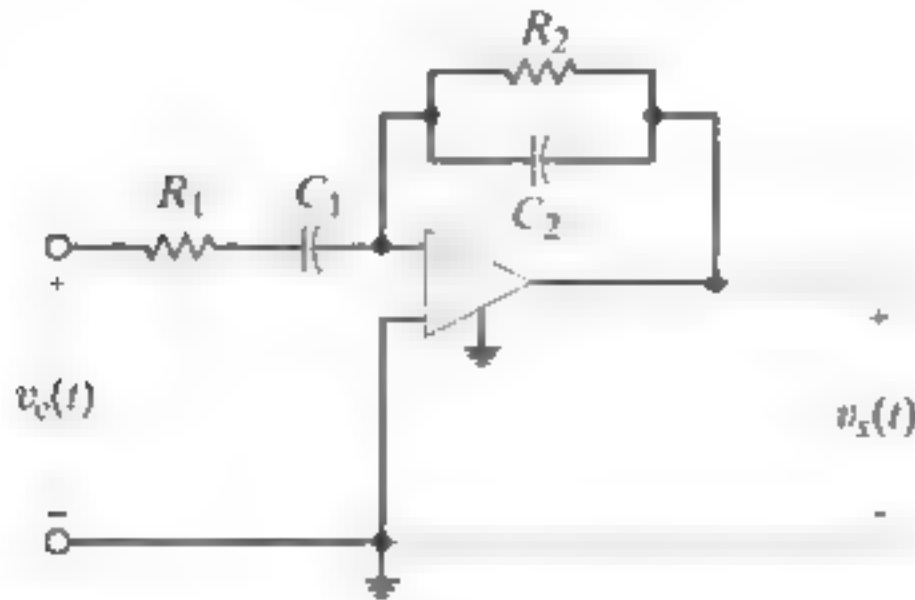


Figura P12.67

- 12.68** Repita o Problema 12.67 para a rede mostrada na Fig. P12.68.

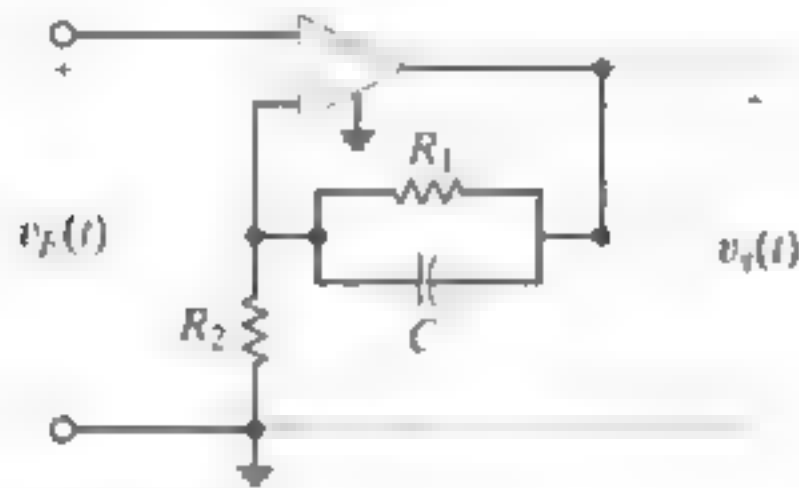


Figura P12.68

- 12.69** Deseja-se projetar um OTA com transcondutância de 1 mS. Uma fonte de 5 V está disponível, e a sensibilidade de g_m em relação a I_{ABC} é de 20.
- Quais são os valores de I_{ABC} e R_G que você recomenda?
 - Se R_G possui uma tolerância de +5%, qual é a possível faixa de g_m para o circuito final?
- 12.70** O OTA e a fonte de 5 V descritos no Problema 12.69 são utilizados para gerar uma transcondutância de 2,5 mS.
- Qual é o valor necessário para o resistor?
 - Se a tensão de entrada no amplificador for $v_e(t) = 1,5 \cos(\omega t)$ V, qual será a função corrente de saída?
- 12.71** Um OTA particular possui uma transcondutância máxima de 5 mS para uma faixa de 6 décadas.
- Qual é a transcondutância mínima possível?
 - Qual é a faixa de I_{ABC} ?
 - Utilizando uma fonte de potência de 5 V e um resistor para ajustar I_{ABC} , qual é a faixa de valores para o resistor e a potência por ele consumida?
- 12.72** Precisa-se de um circuito que possa dobrar a frequência de uma tensão senoidal.
- Se $v_e(t) = 1 \sin(\omega t)$, mostre que o circuito multiplicador mostrado na Fig. P12.72 pode produzir uma saída que contém uma senoide a uma frequência de 2ω .
 - Deseja-se que a magnitude da senoide de frequência dobrada seja de 1 V. Determine os valores de R_G e R_L considerando que a faixa da transcondutância é limitada entre 10 μ S e 10 mS.

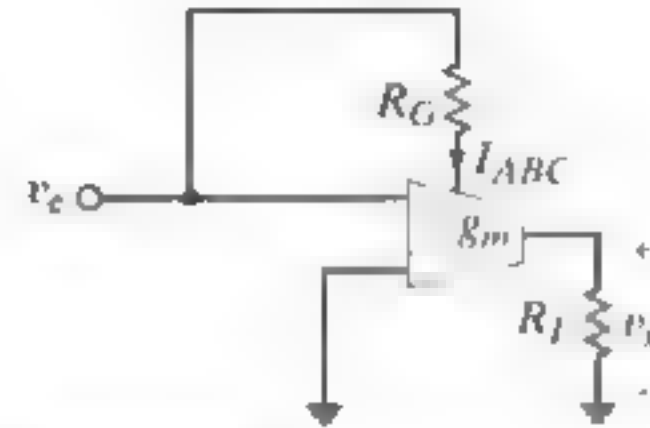


Figura P12.72

- 12.73** O circuito de controle automático de ganho mostrado na Fig. 12.73 é utilizado para limitar a transcondutância, i/v_e .

- Obtenha uma expressão para v_s em termos de v_e , R_G e R_L .
- Expresse a transcondutância assintótica, i/v_e , em termos de R_G e R_L para $v_e = 0$ e quando v_e tende a infinito. Dados os valores de R_G e R_L no diagrama do circuito, quais são os valores da transcondutância assintótica?
- Quais são as consequências de seus resultados para o item (b)?
- Se v_e não deve ser superior a V_{CC} para uma operação adequada, qual é a transcondutância mínima para o circuito funcional?

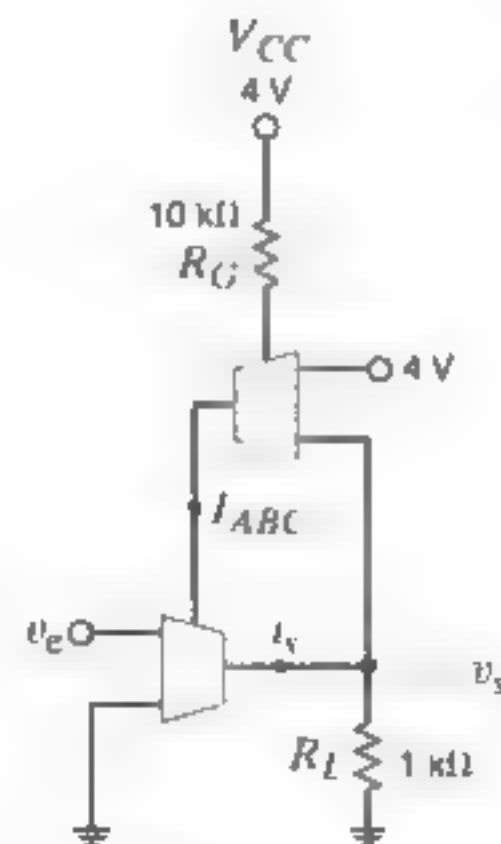


Figura P12.73

- 12.74** Na Fig. P12.74, V_s é uma tensão CC. O circuito é projetado para ser um wattímetro CC, em que o valor da tensão de saída expressa a potência consumida pelo resistor R_L em watts.

- (a) A sensibilidade $g_m = I_{ABC}$ é de 20 S/A. Determine R_G de modo que $I_2/I_1 = 10^4$.
- (b) Selecione R_L de modo que 1 V em V_s corresponda a 1 W de potência dissipada em R_L .

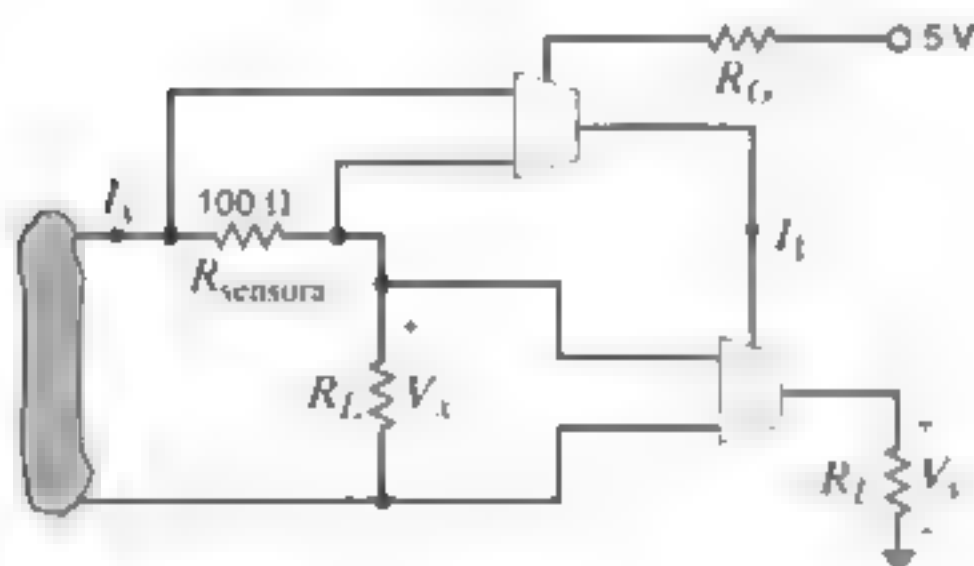


Figura P12.74

- 12.75** Projete um filtro passa-baixa com frequência de corte entre 15 e 16 kHz.
- 12.76** Projete um filtro passa-baixa utilizando um resistor e um capacitor que produza uma saída de 4,24 volts a 159 Hz quando uma tensão de 6 volts a 159 Hz é aplicada na entrada.
- 12.77** Projete um filtro passa-alta com frequência de meia potência entre 159 e 161 kHz.
- 12.78** Projete um filtro passa-banda com frequência de corte de baixa de aproximadamente 4,535 Hz e frequência de corte de alta de aproximadamente 5,535 Hz.
- 12.79** Dado o circuito mostrado na Fig. 12.67, projete um filtro passa-banda de segunda ordem com ganho na frequência de centro de -5 , $\omega_0 = 50$ krad/s e uma BP ≈ 10 krad/s. Considere $C_1 = C_2 = C$ e $R_1 = 1$ k Ω . Qual é o valor do fator de qualidade Q desse filtro? Esboce o diagrama de Bode do filtro. Utilize o modelo ideal de op-amp.

- 12.80** Em referência ao Exemplo 12.39, projete um filtro supressor para um toca-fitas a ser utilizado na Europa, onde a energia elétrica é gerada a 50 Hz pelas concessionárias.

- 12.81** Um engenheiro propôs o circuito mostrado na Fig. P12.81 para filtrar ruídos de alta frequência. Determine os valores do capacitor e do resistor de modo a se obter uma queda de 3 dB na tensão a 23,16 kHz.

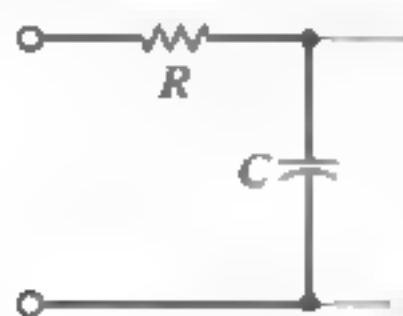


Figura P12.81

- 12.82** Para o filtro ativo passa-alta mostrado na Fig. P12.82, selecione os valores de C , R_1 e R_2 de modo que $H_s = 5$ e $f_c = 3$ kHz.

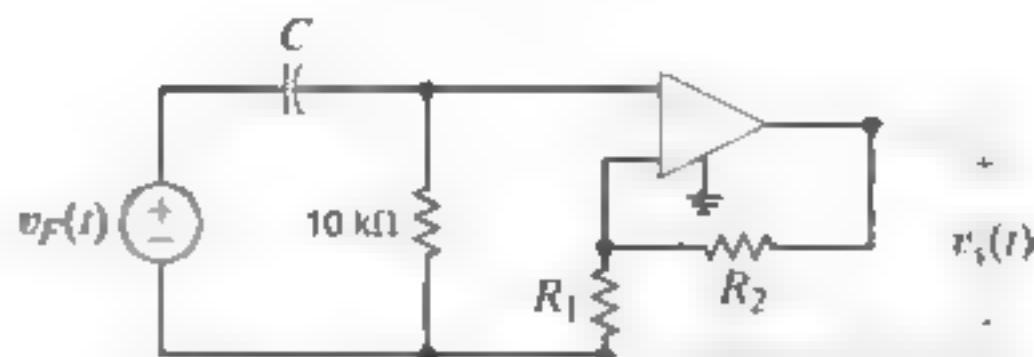


Figura P12.82

- 12.83** Para o filtro ativo passa-baixa mostrado na Fig. P12.83, selecione os valores de R_2 e C de modo que $H_s = 7$ e $f_c = 10$ kHz.

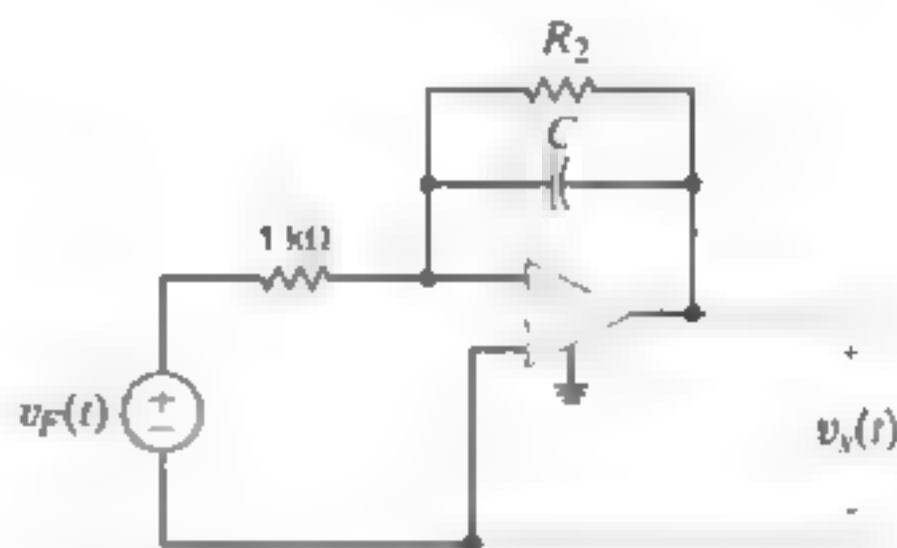


Figura P12.83

- 12.84** O filtro passa-baixa de segunda ordem mostrado na Fig. P12.84 possui a função de transferência

$$\frac{V_s(s)}{V_i(s)} = \frac{R \left(\frac{1}{R R_1 C C_2} \right)}{s^2 + \frac{1}{C} \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_1} \right) + \frac{1}{R R_1 C C_2}}$$

Projete um filtro com $H_s = -10$ e $f_c = 500$ Hz, admitindo que $C_1 = C_2 = 10$ nF e $R_1 = 1$ k Ω .

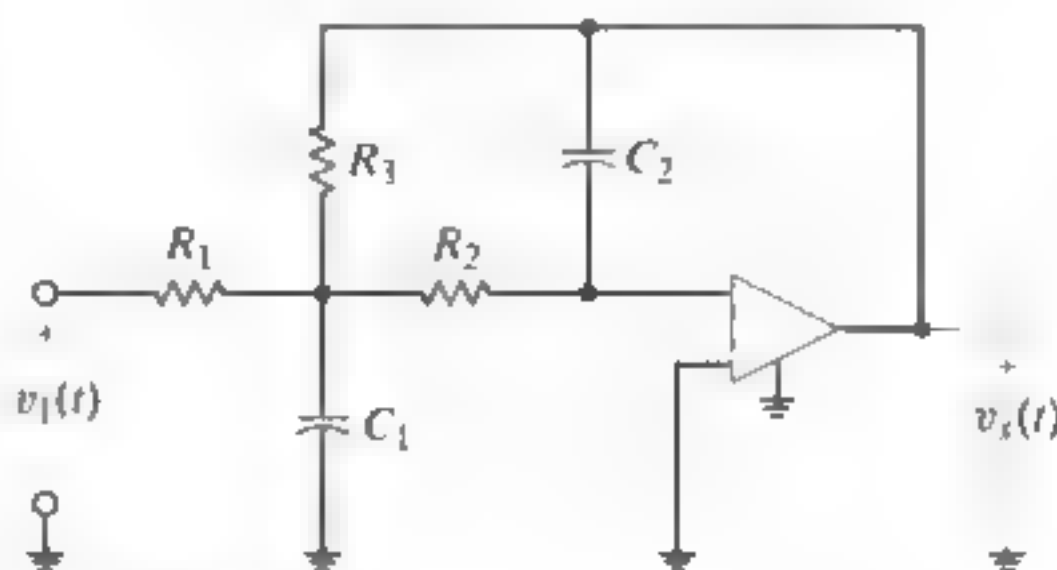


Figura P12.84

- 12.85** Dado o filtro passa-baixa de segunda ordem mostrado na Fig. P12.85, projete um filtro que tenha $H_s = 100$ e $f_c = 5$ kHz. Adote $R_1 = R_3 = 1$ k Ω e considere $R_2 = R_4$ e $C_1 = C_2$. Utilize um modelo de op-amp com $R_c \rightarrow \infty$, $R_i = 0$ e $A = (2)10^5$.

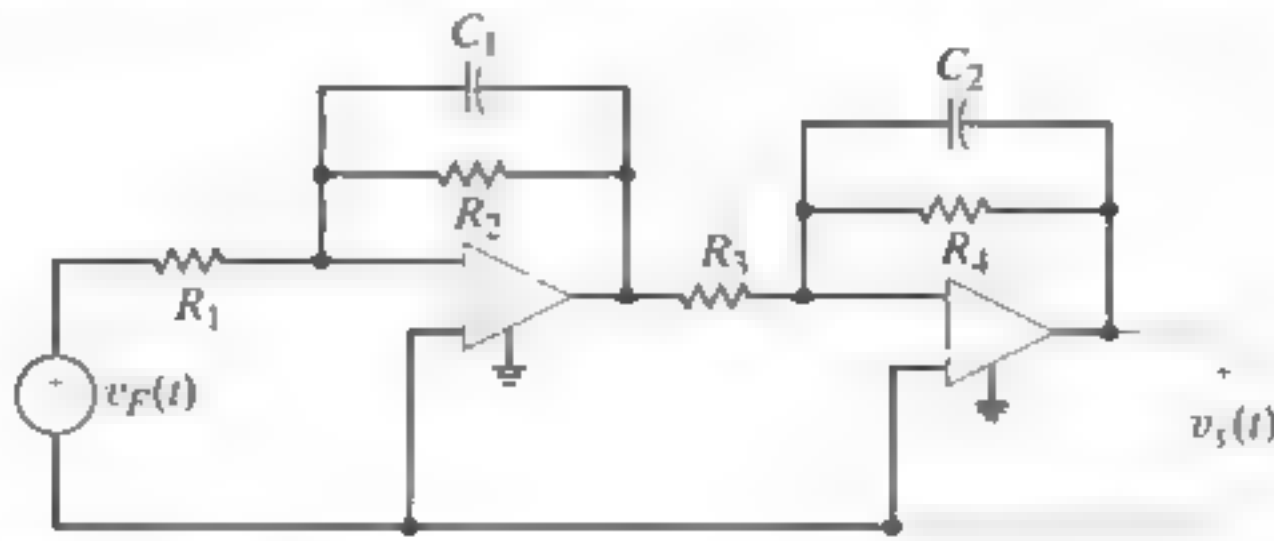


Figura P12.85

PROBLEMAS TÍPICOS DE EXAMES PROFISSIONAIS DE ENGENHARIA

- 12PEP-1** Determine a tensão V , na condição de ressonância do circuito mostrado na Fig. 12PEP-1.

- $60 \angle -90^\circ$ V
- $35 \angle 60^\circ$ V
- $40 \angle 60^\circ$ V
- $30 \angle 45^\circ$ V

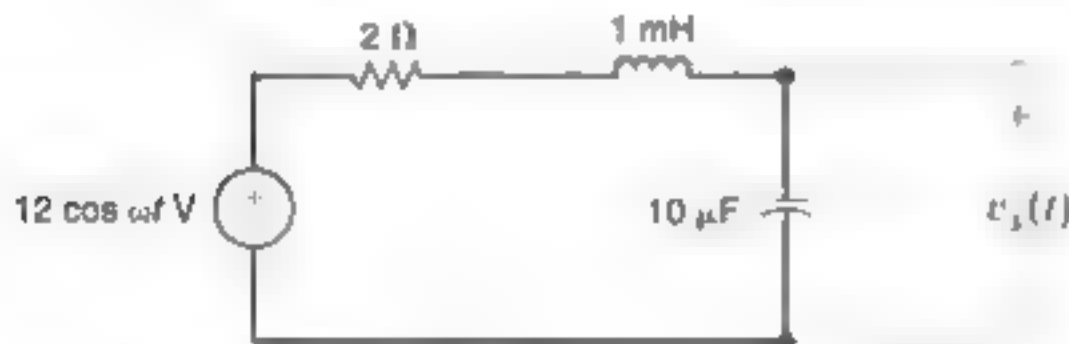


Figura 12PEP-1

- 12PEP-2** Dado o circuito em série mostrado na Fig. 12PEP-2, determine o valor de R de modo que a BP da rede em relação à frequência de ressonância seja de 200 rad/s.

- 8 k Ω
- 2 k Ω
- 4 k Ω
- 6 k Ω

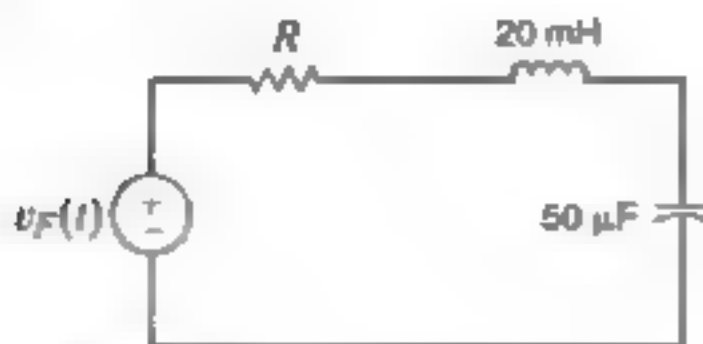


Figura 12PEP-2

- 12PEP-3** Dado o circuito do filtro passa-baixa mostrado na Fig. 12PEP-3, obtenha a frequência em Hz para a qual a saída seja atenuada em 3 dB em relação ao sinal CC de saída, ou aos sinais de frequência muito baixa.

- 26 Hz
- 60 Hz
- 47 Hz
- 32 Hz

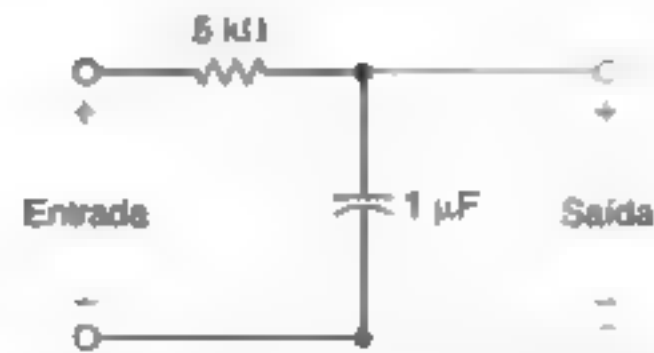


Figura 12PEP-3

- 12PEP-4** Dado o filtro passa-baixa mostrado na Fig. 12PEP-4, obtenha o valor de R necessário para que a frequência de ressonância ocorra a 1.000 rad/s e a banda passante, BP, seja de 100 rad/s.

- 2 Ω
- 10 Ω
- 6 Ω
- 5 Ω

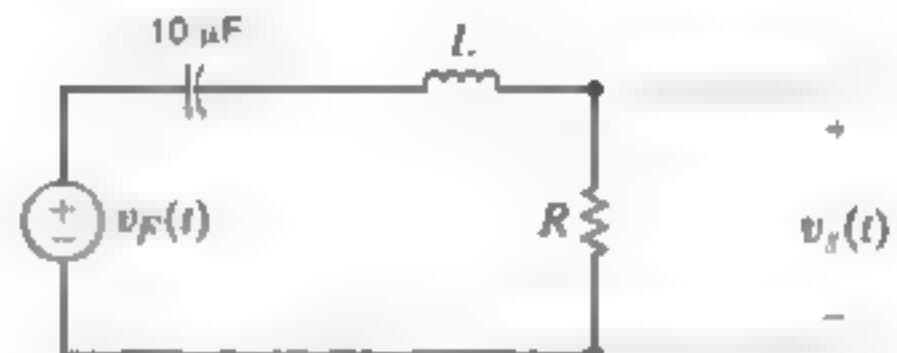


Figura 12PEP-4

- 12PEP-5** Dado o filtro passa-baixa mostrado na Fig. 12PEP-5, obtenha a frequência de meia potência desse circuito sabendo que a frequência da fonte é de 8 Hz.

- 8 Hz
- 2 Hz
- 12 Hz
- 4 Hz

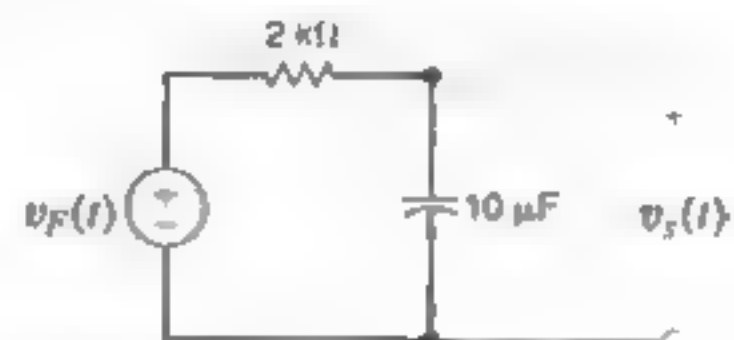
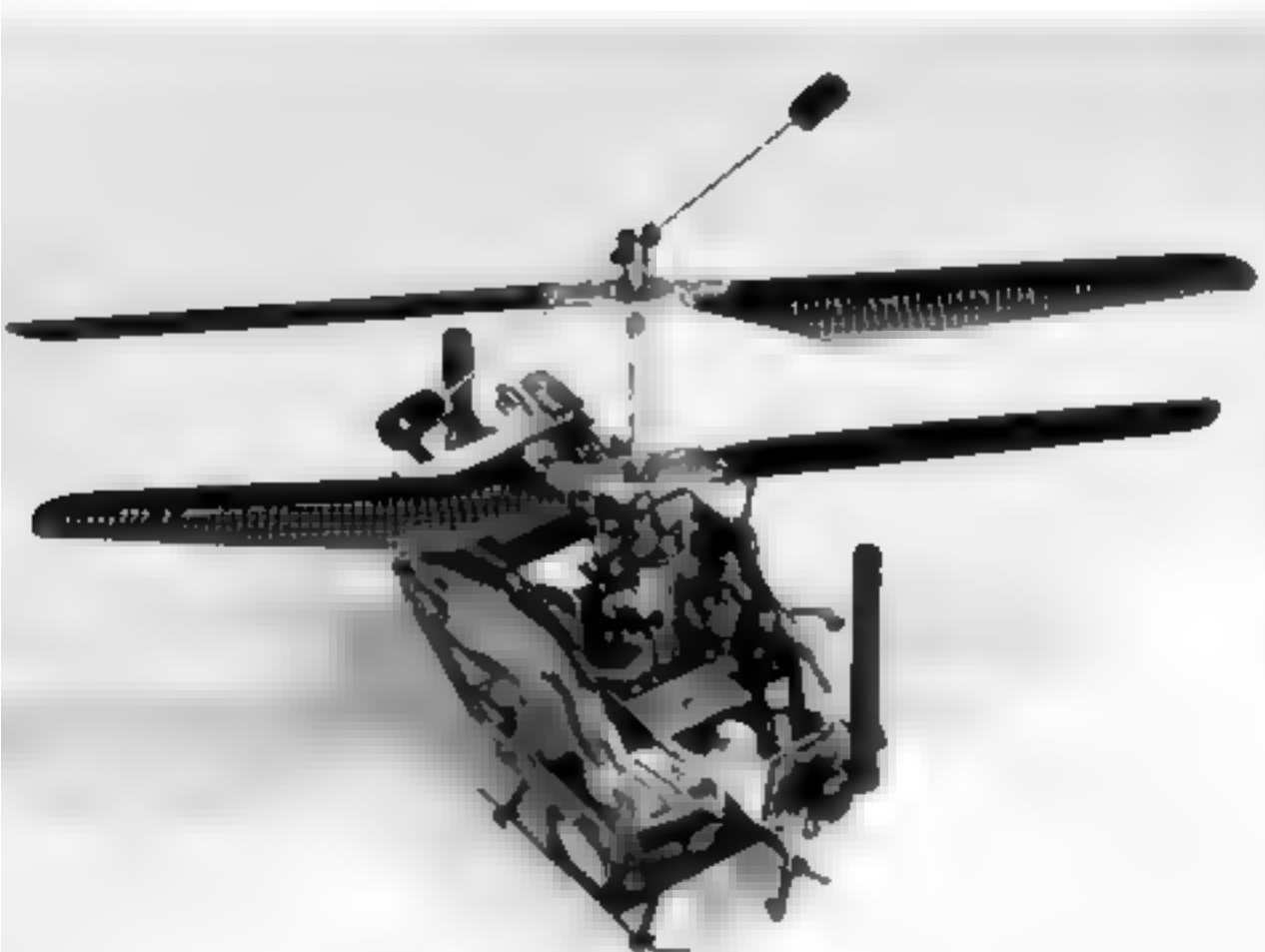


Figura 12PEP-5

A TRANSFORMADA DE LAPLACE



Cortesia de Lin Chi Mak e UNSW MAVSTAR equipe 2009

Microrrobôs Aéreos ou Micro UAVs Da dimensão de um brinquedo, porém muito mais que um brinquedo, o poderoso UAV (*unmanned aerial vehicle*) ou microrrobô aéreo encontra seu nicho em atividades como missões militares avançadas, batalha contra o fogo em florestas e prevenção contra ataques terroristas. O UAV é apresentado de diversas formas: pode ser um helicóptero em miniatura, um poderoso pássaro robô ou um microveículo aéreo similar a uma vespa. Alguns conduzem um GPS para efeito de localização, um microprocessador para manter o voo estável e uma câmara de vídeo colorido. Com mais de 5000 unidades atualmente em operação, os zangões Raven são os pequenos UAVs mais populares na frota militar dos Estados Unidos. Durante algum tempo esses zangões eram pesados; atualmente suas unidades de controle de dimensões reduzidas podem ser controladas por meio de um iPhone.

Algumas vezes identificado como um pássaro, uma abelha ou um mosquito gigante, o Microrrobô Voador desenvolvido no

AS METAS DE APRENDIZAGEM
DESTE CAPÍTULO SÃO:

- Ser capaz de determinar a transformada de Laplace dos sinais comuns em circuitos elétricos
- Saber como calcular a inversa da transformada de Laplace utilizando uma expansão em frações parciais
- Ser introduzido ao conceito de convolução
- Ser capaz de aplicar os teoremas do valor inicial e do valor final
- Saber como utilizar a transformada de Laplace na análise de circuitos elétricos

Japão pesando apenas 8 gramas é acionado por quatro microatuadores que controlam duas unidades de rotores e de estabilização. Diversos pequenos UAVs podem se unir formando uma rede de monitoração para uma operação que seria perigosa aos seres humanos, como seguir a trilha de um ciclone ou realizar o mapeamento de nuvens químicas tóxicas.

Os modelos matemáticos desses microrrobôs aéreos requerem técnicas de transformação ou no domínio do tempo para descrever seus comportamentos dinâmicos. Neste capítulo, são apresentadas as operações básicas da transformada de Laplace – seus pares e propriedades e sua relação com a convolução no domínio do tempo. Você trabalhou com essas transformadas em seu curso de equações diferenciais e, agora, aprenderá como aplicar seus resultados na análise de circuitos. Essas ferramentas são essenciais para a determinação das tensões e das correntes nos circuitos e na análise de robôs bem mais complicados – de qualquer dimensão – os quais representam um desafio de projeto e de operação.

13.1 Definição

A transformada de Laplace de uma função $f(t)$ é definida pela equação

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt \quad 13.1$$

em que s é a frequência complexa

$$s = \sigma + j\omega \quad 13.2$$

e admite-se que a função $f(t)$ possua a propriedade

$$f(t) = 0 \quad \text{para } t < 0$$

Note que a transformada de Laplace é unilateral ($0 \leq t < \infty$), ao contrário da transformada de Fourier (veja o Capítulo 15), que é bilateral ($-\infty < t < \infty$). Na análise de circuitos utilizando a transformada de Laplace, concentra-se a atenção no intervalo de tempo $t \geq 0$. É a condição inicial que estabelece a operação inicial do circuito, em $t = 0$, e, portanto, as análises descreverão a operação do circuito para $t \geq 0$.

Para uma função $f(t)$ possuir uma transformada de Laplace, ela deve satisfazer a condição

$$\int_0^{\infty} e^{-\sigma t} |f(t)| dt < \infty \quad 13.3$$

para algum valor real de σ . Devido ao fator de convergência $e^{-\sigma t}$, um grande número de importantes funções possuem a transformada de Laplace, mesmo nos casos em que as transformadas de Fourier para essas funções não existam. Todas as entradas que serão impostas aos circuitos possuem transformadas de Laplace. As funções que não possuem a transformada de Laplace (por exemplo, e^{t^2}) não são de interesse para a análise de circuitos.

A transformada inversa de Laplace, que é análoga à transformada inversa de Fourier, é definida pela relação

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma_1 - j\infty}^{\sigma_1 + j\infty} F(s)e^{st} ds \quad 13.4$$

em que σ_1 é um número real e $\sigma_1 > \sigma$ na Eq. (13.3).

Como o cálculo dessa integral é baseado na teoria das variáveis complexas, seu uso será evitado. Assim, como será possível converter a solução do domínio da frequência complexa para o domínio do tempo? A transformada de Laplace possui uma propriedade de unicidade: para uma dada função $f(t)$, existe uma única função $F(s)$. Em outras palavras, duas funções distintas $f_1(t)$ e $f_2(t)$ não podem corresponder à mesma função $F(s)$. O procedimento, então, será utilizar a Eq. (13.1) para determinar a transformada de Laplace de uma certa quantidade de funções comuns aos circuitos elétricos e, em seguida, relacioná-las em uma tabela de pares de transformadas. Será utilizada uma expansão por frações parciais para desmembrar a solução no domínio da frequência complexa em um grupo de termos para os quais se pode utilizar a tabela de pares transformados para identificar uma função do tempo correspondente a cada termo.

13.2 Duas Importantes Funções Singulares

Existem duas funções singulares muito importantes na análise de circuitos: (1) a função degrau unitário, $u(t)$, discutida no Capítulo 7, e (2) a função delta ou impulso unitário, $\delta(t)$. Elas são chamadas de *funções singulares* porque não são finitas ou porque não possuem derivadas finitas em todo o domínio. Elas são modelos matemáticos para sinais empregados na análise de circuitos.

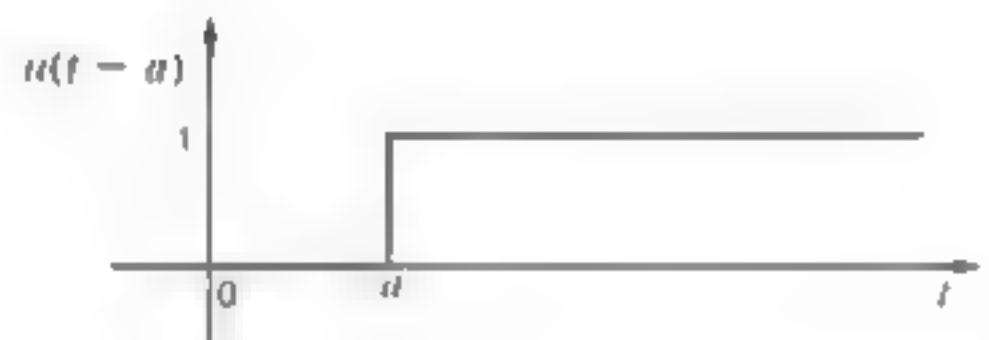
A função degrau unitário $u(t)$ mostrada na Fig. 13.1a foi definida na Seção 7.2 como

$$u(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t > 0 \end{cases}$$

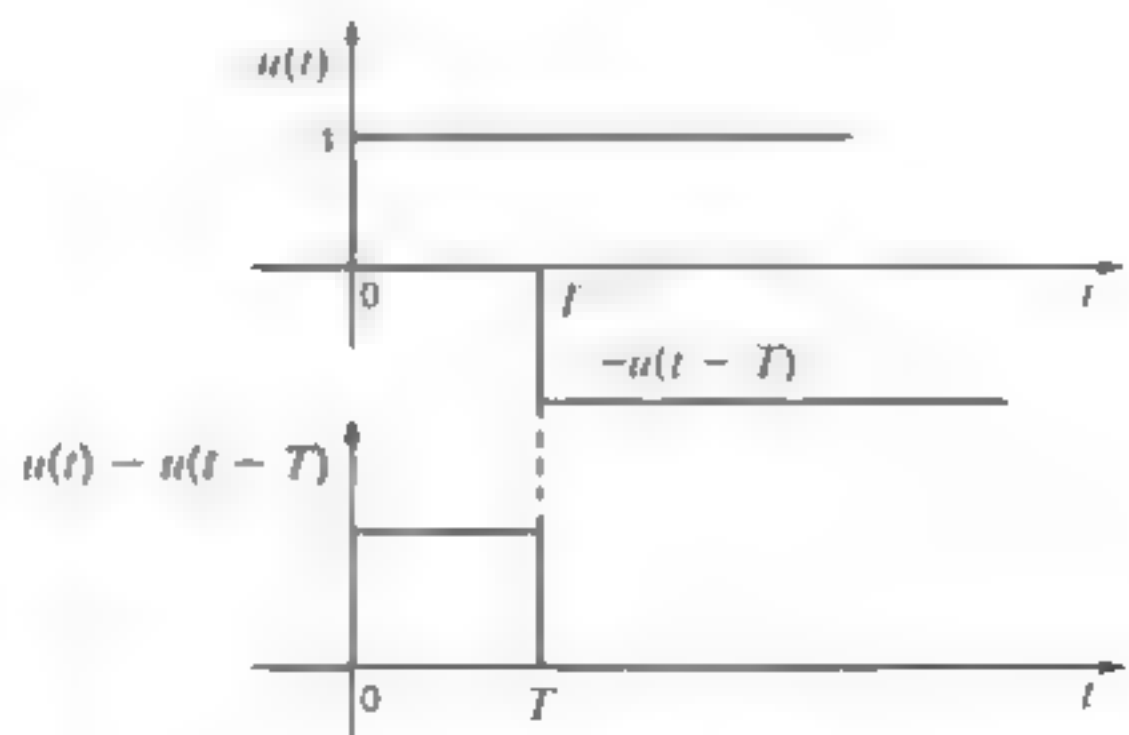
Lembre-se de que a analogia física dessa função, conforme ilustrado anteriormente, corresponde ao fechamento de uma chave em $t = 0$ conectando uma fonte de tensão de 1 V ou uma fonte de corrente de 1 A a um determinado circuito. O exemplo a seguir ilustra o cálculo da transformada de Laplace para a função degrau unitário.



(a)



(b)



(c)

Figura 13.1 Representação da função degrau unitário.

EXEMPLO 13.1

Determine a transformada de Laplace para as formas de onda mostradas na Fig. 13.1.

SOLUÇÃO

A transformada de Laplace da função degrau unitário mostrada na Fig. 13.1a é

$$\begin{aligned} F(s) &= \int_0^{\infty} u(t) e^{-st} dt \\ &= \int_0^{\infty} 1 e^{-st} dt \\ &= \left[-\frac{1}{s} e^{-st} \right]_0^{\infty} \\ &= \frac{1}{s} \quad \sigma > 0 \end{aligned}$$

Portanto,

$$\mathcal{L}[u(t)] = F(s) = \frac{1}{s}$$

A transformada de Laplace da função degrau unitário defasada no tempo, mostrada na Fig. 13.1b, é

$$F(s) = \int_0^{\infty} u(t-a) e^{-st} dt$$

Note que,

$$u(t-a) = \begin{cases} 1 & a < t < \infty \\ 0 & t < a \end{cases}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} F(s) &= \int_a^{\infty} e^{-st} dt \\ &= e^{-as} \frac{1}{s} \quad \sigma > 0 \end{aligned}$$

Finalmente, a transformada de Laplace do pulso mostrado na Fig. 13.1c é

$$\begin{aligned} F(s) &= \int_0^{\infty} [u(t) - u(t-T)] e^{-st} dt \\ &= \frac{1 - e^{-sT}}{s} \quad \sigma > 0 \end{aligned}$$

A função impulso unitário pode ser representada no limite pelo pulso retangular mostrado na Fig. 13.2a quando $a \rightarrow 0$. Essa função é definida por:

$$\begin{aligned} \delta(t - t_0) &= 0 \quad t \neq t_0 \\ \int_{t_0-a}^{t_0+b} \delta(t - t_0) dt &= 1 \quad a > 0 \end{aligned}$$

O impulso unitário é nulo exceto em $t = t_0$, em que é indefinido, porém, possui área unitária (algumas vezes denominada *área resistente*). Representa-se a função impulso unitário pelo gráfico mostrado na Fig. 13.2b.

Uma importante propriedade da função impulso unitário é a frequentemente chamada *propriedade de amostragem*, que é representada pela seguinte integral:

$$\int_{t_1}^{t_2} f(t) \delta(t - t_0) dt = \begin{cases} f(t_0) & t_1 < t_0 < t_2 \\ 0 & t_0 = t_1, t_0 = t_2 \end{cases}$$

para um tempo finito t_0 e qualquer função $f(t)$ contínua em t_0 . Note que a função impulso unitário simplesmente mostra o valor de $f(t)$ em $t = t_0$.

Uma vez definida a função impulso unitário, considere a seguinte questão: por que introduzir a função impulso unitário? Naturalmente, não se pode produzir um sinal de tensão ou de corrente com largura zero e altura infinita em um sistema físico. Para os engenheiros, a função impulso unitário é uma função matemática conveniente que pode ser utilizada para modelar um processo físico. Por exemplo, um relâmpago é um evento de curta duração. Caso se desejasse analisar um sistema que fosse atingido por um relâmpago, seria possível considerar o modelo deste como uma função impulso unitário. Outro exemplo é o

processo de amostragem na qual um conversor analógico-digital (CAD) é utilizado para converter um sinal no domínio do tempo em valores que possam ser utilizados em um computador. O CAD captura o valor do sinal no domínio do tempo em determinados instantes de tempo. A propriedade de amostragem da função impulso unitário descrita anteriormente é muito útil na modelagem dos processos amostrados.

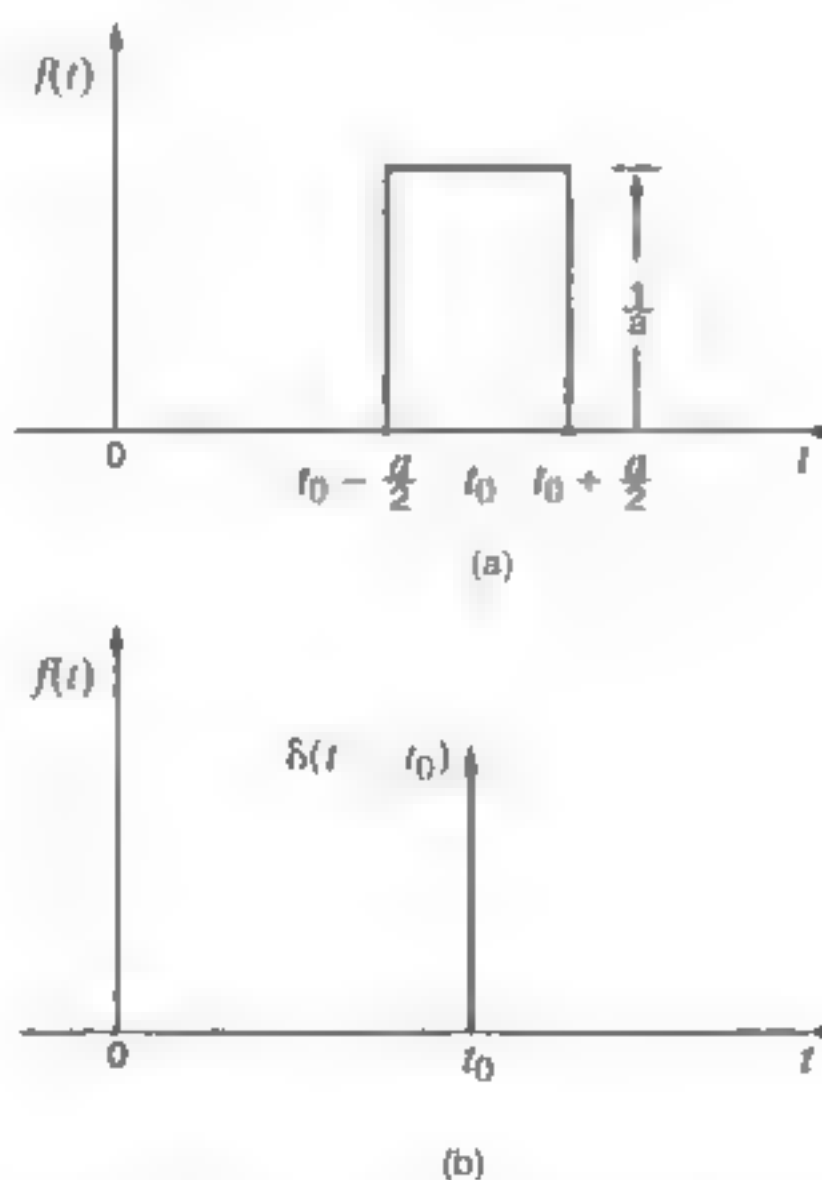


Figura 13.2 Representação da função impulso unitário.

EXEMPLO 13.2

Determine a transformada de Laplace de uma função impulso.

SOLUÇÃO

A transformada de Laplace de uma função impulso é

$$F(s) = \int_0^{\infty} \delta(t - t_0) e^{-st} dt$$

Utilizando a propriedade de amostragem da função delta, obtém-se

$$\int \delta(t - t_0) e^{-st} dt = e^{-st_0}$$

No limite, quando $t_0 \rightarrow 0$, $e^{-st_0} \rightarrow 1$ e, portanto,

$$\mathcal{L}[\delta(t)] = F(s) = 1$$

13.3 Pares da Transformada

Apresenta-se agora o desenvolvimento de alguns pares transformados muito úteis na análise de circuitos.

EXEMPLO 13.3

Determine a transformada de Laplace da função $f(t) = t$.

SOLUÇÃO

A transformada de Laplace da função $f(t) = t$ é

$$F(s) = \int_0^{\infty} t e^{-st} dt$$

A integração da função por partes fornece

$$u = t \quad e \quad dv = e^{-st} dt$$

Assim,

$$du = dt \quad e \quad v = \int e^{-st} dt = -\frac{1}{s} e^{-st}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} F(s) &= \left[t \left(-\frac{1}{s} e^{-st} \right) \right]_0^{\infty} + \int_0^{\infty} \frac{1}{s} e^{-st} dt \\ &= \frac{1}{s^2} \quad \sigma > 0 \end{aligned}$$

[atenção]

$$t \leftrightarrow \frac{1}{s^2}$$

EXEMPLO 13.4

Determine a transformada de Laplace da função cosseno.

SOLUÇÃO

A transformada de Laplace da função cosseno é

$$\begin{aligned} F(s) &= \int_0^{\infty} \cos \omega t e^{-st} dt \\ &= \int_0^{\infty} \frac{e^{+j\omega t} + e^{-j\omega t}}{2} e^{-st} dt \\ &= \int_0^{\infty} \frac{e^{-(s-j\omega)t} + e^{-(s+j\omega)t}}{2} dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{s-j\omega} + \frac{1}{s+j\omega} \right) \quad \sigma > 0 \\ &= \frac{s}{s^2 + \omega^2} \end{aligned}$$

[atenção]

$$\cos \omega t \leftrightarrow \frac{s}{s^2 + \omega^2}$$

Uma relação resumida dos pares mais úteis da transformada de Laplace é mostrada na Tabela 13.1.

Uma vez conhecidos os pares da transformada, pode-se fa-

cilmente alternar entre os domínios do tempo e da frequência complexa sem a necessidade de se utilizar as Eqs. (13.1) e (13.4).

TABELA 13.1 Tabela resumida com alguns dos pares da transformada de Laplace

$\delta(t)$	1	$t^n e^{-at}$	$\frac{n!}{(s+a)^{n+1}}$
$u(t)$	$\frac{1}{s}$	$\text{sen } bt$	$\frac{b}{s^2 + b^2}$
e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$	$\cos bt$	$\frac{s}{s^2 + b^2}$
t	$\frac{1}{s^2}$	$e^{-at} \text{sen } bt$	$\frac{b}{(s+a)^2 + b^2}$
t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	$e^{-at} \cos bt$	$\frac{s+a}{(s+a)^2 + b^2}$
te^{-at}	$\frac{1}{(s+a)^2}$		

Avaliação do Aprendizado

E13.1 Se $f(t) = e^{-at}$, mostre que $F(s) = 1/(s+a)$.

E13.2 Se $f(t) = \text{sen } \omega t$, mostre que $F(s) = \omega/(s^2 + \omega^2)$.

13.4 Propriedades da Transformada

Diversos teoremas bastante úteis descrevem importantes propriedades da transformada de Laplace. Inicialmente é mostrado que, com alguns desses teoremas, obtém-se uma relação concisa de teoremas e, finalmente, são mostradas suas aplicações por meio de diversos exemplos.

O *teorema de escalonamento temporal* estabelece que

$$\mathcal{L}[f(at)] = \frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right) \quad a > 0 \quad 13.5$$

A transformada de Laplace de $f(at)$ é

$$\mathcal{L}[f(at)] = \int_0^{\infty} f(at) e^{-st} dt$$

Seja, agora, $\lambda = at$ e $d\lambda = a dt$. Assim,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[f(at)] &= \int_0^{\infty} f(\lambda) e^{-(s/a)\lambda} \frac{d\lambda}{a} \\ &= \frac{1}{a} \int_0^{\infty} f(\lambda) e^{-(s/a)\lambda} d\lambda \\ &= \frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right) \quad a > 0 \end{aligned}$$

O *teorema da defasagem no tempo* estabelece que

$$\mathcal{L}[f(t-t_0)u(t-t_0)] = e^{-st_0} F(s) \quad t_0 \geq 0 \quad 13.6$$

Esse teorema é ilustrado como se segue:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[f(t-t_0)u(t-t_0)] &= \int_0^{\infty} f(t-t_0)u(t-t_0)e^{-st} dt \\ &= \int_{t_0}^{\infty} f(t-t_0)e^{-st} dt \end{aligned}$$

Fazendo-se, agora, $\lambda = t - t_0$ e $d\lambda = dt$, tem-se

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[f(t-t_0)u(t-t_0)] &= \int_0^{\infty} f(\lambda) e^{-s(\lambda+t_0)} d\lambda \\ &= e^{-st_0} \int_0^{\infty} f(\lambda) e^{-s\lambda} d\lambda \\ &= e^{-st_0} F(s) \quad t_0 \geq 0 \end{aligned}$$

O *teorema da defasagem na frequência* ou *teorema da modulação* estabelece que

$$\mathcal{L}[e^{-at}f(t)] = F(s+a) \quad 13.7$$

Por definição,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[e^{-at}f(t)] &= \int_0^{\infty} e^{-at}f(t)e^{-st} dt \\ &= \int_0^{\infty} f(t)e^{-(s+a)t} dt \\ &= F(s+a) \end{aligned}$$

Os três teoremas demonstrados anteriormente, juntamente com algumas importantes propriedades, são listados de forma concisa na Tabela 13.2. Vários exemplos simples que ilustram o modo pelo qual essas propriedades podem ser utilizadas são apresentados a seguir.

TABELA 13.2 Algumas propriedades úteis da transformada de Laplace

NÚMERO DA PROPRIEDADE	$f(t)$	$F(s)$
1. Escalonamento da magnitude	$Af(t)$	$AF(s)$
2. Adição/subtração	$f_1(t) \pm f_2(t)$	$F_1(s) \pm F_2(s)$
3. Escalonamento do tempo	$f(at)$	$\frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right), a > 0$
4. Defasagem no tempo	$f(t - t_0)u(t - t_0), t_0 \geq 0$	$e^{-st_0} F(s)$
5. Defasagem na frequência	$f(t)u(t - t_0)$	$e^{-st_0} \pm f(t + t_0)$
6. Diferenciação	$e^{-at}f(t)$	$F(s + a)$
7. Multiplicação por t	$\frac{d^n f(t)}{dt^n}$	$s^n F(s) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - \dots - s^{n-1}f^{(n-1)}(0)$
	$tf(t)$	$-\frac{dF(s)}{ds}$
	$t^n f(t)$	$(-1)^n \frac{d^n F(s)}{ds^n}$
8. Divisão por t	$\frac{f(t)}{t}$	$\int_s^\infty F(\lambda) d\lambda$
9. Integração	$\int_0^t f(\lambda) d\lambda$	$\frac{1}{s} F(s)$
10. Convolução	$\int_0^t f_1(\lambda)f_2(t - \lambda) d\lambda$	$F_1(s)F_2(s)$

EXEMPLO 13.5

Utilize a transformada de Laplace da função $\cos \omega t$ para obter a transformada de Laplace de $e^{-at} \cos \omega t$.

SOLUÇÃO

Uma vez que a transformada de Laplace do $\cos \omega t$ é conhecida como

$$\mathcal{L}[\cos \omega t] = \frac{s}{s^2 + \omega^2}$$

então, utilizando a propriedade número 5, obtém-se

$$\mathcal{L}[e^{-at} \cos \omega t] = \frac{s + a}{(s + a)^2 + \omega^2}$$

EXEMPLO 13.6

Seja a demonstração da propriedade número 8.

SOLUÇÃO

Se $f(t) = te^{-at}$, então,

$$F(\lambda) = \frac{1}{(\lambda + a)^2}$$

Portanto,

$$\int_0^\infty F(\lambda) d\lambda = \int_0^\infty \frac{1}{(\lambda + a)^2} d\lambda = \left. -\frac{1}{\lambda + a} \right|_0^\infty = \frac{1}{s + a}$$

Assim,

$$f_1(t) = \frac{f(t)}{t} = \frac{te^{-at}}{t} = e^{-at} \quad \text{e} \quad F_1(s) = \frac{1}{s + a}$$

EXEMPLO 13.7

Utilize a transformada de Laplace na solução da equação

$$\frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) + \int_0^t y(\lambda)e^{-2(t-\lambda)}d\lambda = 10u(t) \quad y(0) = 0$$

SOLUÇÃO

A aplicação das propriedades de número 6 e 10, fornece

$$sY(s) + 2Y(s) + \frac{Y(s)}{s+2} = \frac{10}{s}$$

$$Y(s) \left(s + 2 + \frac{1}{s+2} \right) = \frac{10}{s}$$

$$Y(s) = \frac{10(s+2)}{s(s^2+4s+5)}$$

Essa é a solução da equação íntegro-diferencial linear de coeficientes constantes no domínio s . Todavia, deseja-se a solução para $y(t)$ no domínio do tempo. A função $y(t)$ é obtida realizando-se a transformada inversa, que é o tópico da próxima seção, e a solução $y(t)$ é deduzida no Exemplo 13.9.

Avaliação do Aprendizado

E13.3 Determine $F(s)$ se $f(t) = \frac{1}{2}(t - 4e^{-2t})$.

RESPOSTA:

$$F(s) = \frac{1}{2s^2} - \frac{2}{s+2}$$

E13.4 Se $f(t) = te^{-t}u(t-1) - e^{-t}u(t-1)$, determine $F(s)$ utilizando o teorema da defasagem temporal.

RESPOSTA:

$$F(s) = \frac{e^{-s}}{(s+1)^2}$$

E13.5 Determine $F(s)$ se $f(t) = e^{-t}(t - e^{-t})$. Utilize a propriedade número 2.

RESPOSTA:

$$F(s) = \frac{1}{(s+1)^2} - \frac{1}{s+1}$$

13.5 A Transformada Inversa

Conforme mencionado no início da apresentação desse tópico, apresenta-se agora o procedimento a ser utilizado na aplicação da transformada de Laplace à análise de circuitos. Inicialmente, o problema será transformado do domínio do tempo para o domínio da frequência complexa (isto é, o domínio da variável s). Em seguida, as equações do circuito serão resolvidas algebricamente no domínio da frequência complexa. Finalmente, a solução será transformada do domínio da variável s para o domínio do tempo. Essa última operação será agora discutida.

A solução algébrica das equações do circuito no domínio da frequência complexa resulta em uma função racional de s na forma

$$F(s) = \frac{P(s)}{Q(s)} = \frac{a_ms^m + a_{m-1}s^{m-1} + \dots + a_1s + a_0}{b_ns^n + b_{n-1}s^{n-1} + \dots + b_1s + b_0} \quad 13.8$$

As raízes do polinômio $P(s)$ (isto é, $-z_1, -z_2, \dots, -z_m$) são chamadas de *zeros* da função $F(s)$, pois, para esses valores de s , $F(s) = 0$. Analogamente, as raízes do polinômio $Q(s)$ (isto é, $-p_1, -p_2, \dots, -p_n$) são chamadas de *polos* da função $F(s)$, pois, para esses valores de s , $F(s)$ tende ao infinito.

Se $F(s)$ for uma função racional própria de s , então $n > m$. Entretanto, se esse não for o caso, simplesmente divide-se $P(s)$

por $Q(s)$ para obter um quociente e um resto, isto é,

$$\frac{P(s)}{Q(s)} = C_ms^{m-n} + \dots + C_2s^2 + C_1s + C_0 + \frac{P_1(s)}{Q(s)} \quad 13.9$$

Neste caso, $P_1(s)/Q(s)$ é uma função racional própria de s . As possíveis formas das raízes de $Q(s)$ são agora examinadas.

1. Se as raízes são simples, o quociente $P_1(s)/Q(s)$ pode ser expresso na forma de frações parciais como

$$\frac{P_1(s)}{Q(s)} = \frac{K_1}{s+p_1} + \frac{K_2}{s+p_2} + \dots + \frac{K_n}{s+p_n} \quad 13.10$$

2. Se $Q(s)$ possui raízes complexas simples, elas serão pares complexos conjugados, e a expansão em frações parciais de $P_1(s)/Q(s)$ para cada par de raízes complexas conjugadas será da forma

$$\frac{P_1(s)}{Q_1(s)(s+\alpha-j\beta)(s+\alpha+j\beta)} = \frac{K_1}{s+\alpha-j\beta} + \frac{K_1^*}{s+\alpha+j\beta} \quad 13.11$$

em que $Q(s) = Q_1(s)(s+\alpha-j\beta)(s+\alpha+j\beta)$ e K_1^* é o complexo conjugado de K_1 .

3. Se $Q(s)$ possui uma raiz com multiplicidade r , a expansão em frações parciais para cada uma das raízes será da forma

$$\frac{P_1(s)}{Q_1(s)(s + p_1)^r} = \frac{K_{11}}{(s + p_1)} + \frac{K_{12}}{(s + p_1)^2} + \dots + \frac{K_{1r}}{(s + p_1)^r} \quad 13.12$$

A importância dessas expansões em frações parciais está no fato de que, uma vez que a função $F(s)$ é expressa dessa forma, a transformada inversa de Laplace de cada termo pode ser obtida a partir dos pares transformados conhecidos e tabelados. A soma dessas transformadas inversas de Laplace fornece, assim, a função dependente do tempo desejada, $f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)]$.

POLOS SIMPLES Admitindo-se que todos os polos de $F(s)$ sejam simples, a expansão em frações parciais de $F(s)$ será da forma

$$F(s) = \frac{P(s)}{Q(s)} = \frac{K_1}{s + p_1} + \frac{K_2}{s + p_2} + \dots + \frac{K_n}{s + p_n} \quad 13.13$$

Assim, a constante K_i pode ser calculada multiplicando-se ambos os lados dessa equação por $(s + p_i)$ e determinando-se o valor da equação em $s = -p_i$; isto é,

$$\left. \frac{(s + p_i)P(s)}{Q(s)} \right|_{s = -p_i} = 0 + \dots + 0 + K_i + 0 + \dots + 0 \quad 13.14$$

$$i = 1, 2, \dots, n$$

Uma vez conhecidos todos os termos K_n , a função no domínio do tempo $f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)]$ pode ser obtida utilizando-se o par de transformada de Laplace.

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s + a}\right] = e^{-at} \quad 13.15$$

EXEMPLO 13.8

Dada a função no domínio de Laplace

$$F(s) = \frac{12(s + 1)(s + 3)}{s(s + 2)(s + 4)(s + 5)}$$

deseja-se obter a função $f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)]$.

SOLUÇÃO

Expandindo $F(s)$ em frações parciais, obtém-se

$$\frac{12(s + 1)(s + 3)}{s(s + 2)(s + 4)(s + 5)} = \frac{K_0}{s} + \frac{K_1}{s + 2} + \frac{K_2}{s + 4} + \frac{K_3}{s + 5}$$

Para determinar K_0 , ambos os lados da equação são multiplicados por s , o que resulta na seguinte equação

$$\frac{12(s + 1)(s + 3)}{(s + 2)(s + 4)(s + 5)} = K_0 + \frac{K_1 s}{s + 2} + \frac{K_2 s}{s + 4} + \frac{K_3 s}{s + 5}$$

O cálculo da equação para $s = 0$ fornece

$$\frac{(12)(1)(3)}{(2)(4)(5)} = K_0 + 0 + 0 + 0$$

ou

$$K_0 = \frac{36}{40}$$

Analogamente,

$$\left. (s + 2)F(s) \right|_{s = -2} = \frac{12(s + 1)(s + 3)}{s(s + 4)(s + 5)} \bigg|_{s = -2} = K_1$$

III

$$K_1 = 1$$

Utilizando o mesmo procedimento, obtém-se $K_2 = \frac{36}{8}$ e $K_3 = -\frac{32}{5}$. Assim, $F(s)$ pode ser escrita como

$$F(s) = \frac{36/40}{s} + \frac{1}{s + 2} + \frac{36/8}{s + 4} - \frac{32/5}{s + 5}$$

Logo, $f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)]$ fica

$$f(t) = \left(\frac{36}{40} + 1e^{-2t} + \frac{36}{8}e^{-4t} - \frac{32}{5}e^{-5t} \right) u(t)$$

Avaliação do Aprendizado

E13.6 Obtenha $f(t)$ considerando que $F(s) = 10(s + 6)/(s + 1)(s + 3)$.

RESPOSTA:

$$f(t) = (25e^{-t} - 15e^{-3t})u(t)$$

E13.7 Considerando que $F(s) = 12(s + 2)/s(s + 1)$, obtenha $f(t)$.

RESPOSTA:

$$f(t) = (24 - 12e^{-t})u(t)$$

E13.8 Dado $F(s) = \frac{s^2 + 5s + 1}{s(s + 1)(s + 4)}$, obtenha $f(t)$

RESPOSTA:

$$f(t) = (0,25 + e^{-t} - 0,25e^{-4t})u(t)$$

POLOS COMPLEXOS CONJUGADOS Pode-se, agora, admitir que $F(s)$ tenha um par de polos complexos conjugados. A expansão de $F(s)$ em frações parciais pode, assim, ser escrita como

$$F(s) = \frac{P_1(s)}{Q(s)} = \frac{P_1(s)}{(s + \alpha - j\beta)(s + \alpha + j\beta)} \quad 13.16$$

$$= \frac{K_1}{s + \alpha - j\beta} + \frac{K_1^*}{s + \alpha + j\beta} + \dots$$

A constante K_1 pode ser determinada utilizando o procedimento empregado no caso de polos simples; isto é,

$$(s + \alpha - j\beta)F(s) \Big|_{s = -\alpha + j\beta} = K_1 \quad 13.17$$

Nesse caso, K_1 é, em geral, um número complexo que pode ser expresso como $|K_1|e^{j\theta}$. Logo, $K_1^* = |K_1|e^{-j\theta}$. Assim, a expansão em frações parciais pode ser expressa na forma

$$F(s) = \frac{K_1 e^{j\theta}}{s + \alpha - j\beta} + \frac{K_1^* e^{-j\theta}}{s + \alpha + j\beta} + \dots \quad 13.18$$

$$= \frac{|K_1|e^{j\theta}}{s + \alpha - j\beta} + \frac{|K_1|e^{-j\theta}}{s + \alpha + j\beta} + \dots$$

A função no domínio do tempo correspondente pode, então, ser apresentada na forma

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)] = |K_1|e^{\alpha t}e^{j(\omega t - \theta)} + |K_1|e^{\alpha t}e^{-j(\omega t - \theta)} + \dots$$

$$= |K_1|e^{\alpha t} \left[e^{j(\omega t - \theta)} + e^{-j(\omega t - \theta)} \right]$$

$$= 2|K_1|e^{\alpha t} \cos(\omega t - \theta) + \dots \quad 13.19$$

[atenção]

Lembre-se de que

$$\cos x = \frac{e^{jx} + e^{-jx}}{2}$$

EXEMPLO 13.9

Determine a função $y(t)$, no domínio do tempo, para a função

$$Y(s) = \frac{10(s + 2)}{s(s^2 + 4s + 5)}$$

SOLUÇÃO

Expressando a função na forma da expansão em frações parciais, obtém-se

$$\frac{10(s + 2)}{s(s + 2 - j1)(s + 2 + j1)} = \frac{K_0}{s} + \frac{K_1}{s + 2 - j1} + \frac{K_1^*}{s + 2 + j1}$$

$$\frac{10(s + 2)}{s^2 + 4s + 5} \Big|_{s=0} = K_0$$

$$4 = K_0$$

De modo análogo,

$$\frac{10(s + 2)}{(s + 2 - j1)(s + 2 + j1)} \Big|_{s = -2 + j1} = K_1$$

$$2,236 \angle -153,43^\circ = K_1$$

Portanto,

$$2,236 \angle -153,43^\circ = K_1$$

Assim, a expansão em frações parciais de $Y(s)$ fica

$$Y(s) = \frac{4}{s} + \frac{2,236 \angle -153,43^\circ}{s + 2 - j1} + \frac{2,236 \angle 153,43^\circ}{s + 2 + j1}$$

e, portanto,

$$y(t) = [4 + 4,472e^{-2t} \cos(t - 153,43^\circ)]u(t)$$

Avaliação do Aprendizado

E13.9 Determine a função $f(t)$ considerando $F(s) = s/(s^2 + 4s + 8)$.

RESPOSTA:

$$f(t) = 1,41e^{-2t} \cos(2t + 45^\circ)u(t).$$

E13.10 Dada a função $F(s) = \frac{4(s + 3)}{(s + 1)(s^2 + 2s + 5)}$, obtenha $f(t)$.

RESPOSTA:

$$f(t) = (2e^{-t} + 2\sqrt{2}e^{-t} \cos(2t - 135^\circ))u(t)$$

POLOS MÚLTIPLOS Supondo que $F(s)$ possua um polo com multiplicidade r , pode-se escrever essa função como uma expansão em frações parciais da forma

$$F(s) = \frac{P_1(s)}{Q_1(s)(s + p_1)^r} = \frac{K_{11}}{s + p_1} + \frac{K_{12}}{(s + p_1)^2} + \dots + \frac{K_{1r}}{(s + p_1)^r} + \dots \quad 13.20$$

Empregando-se o procedimento utilizado para um polo simples, pode-se calcular K_{1r} como

$$\left. (s + p_1)^r F(s) \right|_{s = -p_1} = K_{1r} \quad 13.21$$

Para se obter K_{1r-1} , multiplica-se $F(s)$ por $(s + p_1)^r$ conforme foi feito para determinar K_{1r} ; entretanto, antes de calcular o valor da equação em $s = -p_1$, deve-se derivá-la em relação a s .

A prova de que essa derivada fornece K_{1r-1} pode ser obtida multiplicando ambos os lados da Eq. (13.20) por $(s + p_1)^r$ e, em seguida, derivando-a em relação a s . Agora, ao se calcular o valor da equação em $s = -p_1$, o único termo que aparece do lado direito da equação é K_{1r-1} e, portanto,

$$\left. \frac{d}{ds} [(s + p_1)^r F(s)] \right|_{s = -p_1} = K_{1r-1} \quad 13.22$$

O termo K_{1r-2} pode ser calculado de modo similar e, nesse caso, a equação fica

$$\left. \frac{d^2}{ds^2} [(s + p_1)^r F(s)] \right|_{s = -p_1} = (2!) K_{1r-2} \quad 13.23$$

A expressão geral para esse caso é

$$K_{1j} = \frac{1}{(r-j)!} \left. \frac{d^{r-j}}{ds^{r-j}} [(s + p_1)^r F(s)] \right|_{s = -p_1} \quad 13.24$$

Esse procedimento é ilustrado agora com um exemplo.

EXEMPLO 13.10

Dada a função $F(s)$ a seguir, determine a correspondente função do tempo $f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$.

$$F(s) = \frac{10(s + 3)}{(s + 1)^2(s + 2)}$$

SOLUÇÃO

Expandindo-se $F(s)$ em frações parciais, obtém-se

$$F(s) = \frac{10(s + 3)}{(s + 1)^2(s + 2)} = \frac{K_{11}}{s + 1} + \frac{K_{12}}{(s + 1)^2} + \frac{K_{21}}{s + 1} + \frac{K_{22}}{s + 2}$$

Assim,

$$\left. (s + 1)^2 F(s) \right|_{s = -1} = K_{11}$$

$$20 = K_{11}$$

O termo K_{12} é, agora, determinado pela equação

$$\left. \frac{d}{ds} [(s + 1)^2 F(s)] \right|_{s = -1} = K_{12}$$

$$\left. \frac{10}{(s + 2)^2} \right|_{s = -1} = -10 = K_{12}$$

De modo similar, K_{21} é calculado a partir da equação

$$\left. \frac{d^2}{ds^2} [(s + 1)^3 F(s)] \right|_{s = -1} = 2K_{21}$$

$$\left. \frac{20}{(s + 2)^3} \right|_{s = -1} = 20 = 2K_{21}$$

Portanto,

$$10 = K_{21}$$

Além disso,

$$\left. (s + 2) F(s) \right|_{s = -2} = K_{22}$$

$$10 = K_{22}$$

Logo, $F(s)$ pode ser expressa como

$$F(s) = \frac{10}{s + 1} - \frac{10}{(s + 1)^2} + \frac{20}{(s + 1)^3} - \frac{10}{s + 2}$$

Emprega-se agora o par da transformada

$$\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{(s + a)^{n+1}} \right] = \frac{t^n}{n!} e^{-at}$$

e, assim,

$$f(t) = (10e^{-t} - 10te^{-t} + 10t^2e^{-t} - 10e^{-2t})u(t)$$

Avaliação do Aprendizado

E13.11 Determine a função $f(t)$ considerando $F(s) = s/(s + 1)^2$.

RESPOSTA:

$$f(t) = (e^{-t} - te^{-t})u(t)$$

E13.12 Considerando $F(s) = (s + 2)/s^2(s + 1)$, obtenha $f(t)$.

RESPOSTA:

$$f(t) = (-1 + 2t + e^{-t})u(t)$$

E13.13 Dada a função $F(s) = \frac{100}{s^2(s + 5)}$, obtenha $f(t)$.

RESPOSTA:

$$f(t) = (0,8 - 4t + 10t^2 - 0,8e^{-5t})u(t).$$

No Capítulo 7, discutiu-se a equação característica de um circuito transiente de segunda ordem. O polinômio $Q(s) = 0$ é a equação característica do circuito. As raízes da equação característica, também chamadas de polos de $F(s)$, caracterizam o tipo de resposta do circuito no domínio do tempo. Se $Q(s) = 0$ possui raízes simples, então a resposta no domínio do tempo será caracterizada por funções com decaimento exponencial. Raízes múltiplas produzem uma resposta no tempo que contém termos de decaimento exponencial do tipo $e^{-\alpha t}$, $te^{-\alpha t}$ e $t^2e^{-\alpha t}$. A resposta no tempo para raízes conjugadas complexas simples é uma função senoidal cuja amplitude decai exponencialmente. Note que todas essas respostas no domínio do tempo decaem para zero com o tempo. Admita que a resposta do circuito possua um termo do tipo $3e^{2t}$. Um gráfico dessa função revela seu aumento sem limite para $t > 0$. Naturalmente, caso o circuito seja caracterizado por esse tipo de resposta, será necessária uma proteção para os olhos antes da destruição do circuito!

Anteriormente, na Eq. (13.8), definiu-se $F(s)$ como a razão de dois polinômios. Suponha que $m = n$ nessa equação. Neste caso, apenas C_0 será não nulo na Eq. (13.9). Lembre que foi realizada uma expansão por frações parciais em $P_1(s)/Q(s)$ e utilizou-se a tabela dos pares de transformada de Laplace para determinar a correspondente função no tempo para cada termo da expansão. O que será feito com essa constante C_0 ? Observando-se a tabela dos pares transformados na Tabela 13.1, nota-se que a transformada de Laplace da função impulso unitário é uma constante. Como resultado, a resposta do circuito poderia conter uma função impulso unitário. Anteriormente, ressaltou-se que as funções impulso unitário não ocorrem nos sistemas físicos; portanto, para os sistemas físicos, $m < n$.

13.6 Integral de Convolução

A convolução é um conceito muito importante e possui larga aplicação na análise de circuitos e sistemas. Ilustra-se, inicialmente, a relação existente entre a integral de convolução e a transformada de Laplace. Em seguida, apresenta-se a forma pela qual a integral de convolução é aplicada na análise de circuitos.

A propriedade número 10 da Tabela 13.2 estabelece o seguinte.

Se

$$\begin{aligned} f(t) &= f_1(t) \otimes f_2(t) = \int_0^t f_1(t - \lambda) f_2(\lambda) d\lambda \\ &= \int_0^t f_1(\lambda) f_2(t - \lambda) d\lambda \end{aligned} \quad 13.25$$

e

$$\mathcal{L}[f(t)] = F(s), \mathcal{L}[f_1(t)] = F_1(s) \text{ e } \mathcal{L}[f_2(t)] = F_2(s)$$

então

$$F(s) = F_1(s)F_2(s) \quad 13.26$$

A demonstração começa com a definição

$$\mathcal{L}[f(t)] = \int_0^\infty \left[\int_0^t f_1(t - \lambda) f_2(\lambda) d\lambda \right] e^{-st} dt$$

Impõe-se, agora, um formato apropriado à função pela introdução na integral entre colchetes de uma função degrau unitário $u(t - \lambda)$. Isso pode ser feito porque

$$u(t - \lambda) = \begin{cases} 1 & \text{para } \lambda < t \\ 0 & \text{para } \lambda > t \end{cases} \quad 13.27$$

A primeira condição da Eq. (13.27) assegura que a inserção da função degrau unitário não produz nenhuma alteração no resultado entre os limites de integração. A segunda condição da Eq. (13.27) permite que o limite superior de integrador seja substituído de t para ∞ . Portanto,

$$\mathcal{L}[f(t)] = \int_0^\infty \left[\int_0^\infty f_1(t - \lambda) u(t - \lambda) f_2(\lambda) d\lambda \right] e^{-st} dt$$

que pode ser escrita como

$$\mathcal{L}[f(t)] = \int_0^\infty f_2(\lambda) \left[\int_0^\infty f_1(t - \lambda) u(t - \lambda) e^{-st} dt \right] d\lambda$$

Note que a integral entre colchetes é o teorema da defasagem no tempo ilustrado na Eq. (13.6). Assim, a equação pode ser escrita como

$$\mathcal{L}[f(t)] = \int_0^\infty f_2(\lambda) F_1(s) e^{-s\lambda} d\lambda$$

$$F(s) = \int_0^\infty f_2(\lambda) e^{-s\lambda} d\lambda$$

$$F(s)F_1(s)$$

Note que a convolução no domínio do tempo corresponde à multiplicação no domínio da frequência.

Ilustra-se, agora, o uso dessa propriedade no cálculo de uma transformada inversa de Laplace.

EXEMPLO 13.11

A função de transferência de uma rede é dada pela expressão

$$H(s) = \frac{V_s(s)}{V_e(s)} = \frac{10}{s + 5}$$

A entrada é uma função degrau unitário $V_e(s) = \frac{1}{s}$. Utilize a convolução para determinar a tensão de saída $v_s(t)$.

SOLUÇÃO

Uma vez que $H(s) = \frac{10}{(s + 5)}$, $h(t) = 10e^{-5t}u(t)$, portanto,

$$\begin{aligned} v_s(t) &= \int_0^t 10u(\lambda)e^{-5(t-\lambda)}d\lambda \\ &= 10e^{-5t} \int_0^t e^{5\lambda}d\lambda \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{10e^{-5t}}{5} [e^{5t} - 1] \\ &= 2[1 - e^{-5t}]u(t) \text{ V} \end{aligned}$$

Para efeito de comparação, determina-se $v_s(t)$ a partir de $H(s)$ e $V_e(s)$ utilizando o método da expansão por frações parciais. A tensão $V_s(s)$ pode ser escrita como

$$\begin{aligned} V_s(s) &= H(s)V_e(s) \\ \frac{10}{s(s + 5)} &= \frac{K_0}{s} + \frac{K_1}{s + 5} \end{aligned}$$

Calculando as constantes, obtém-se $K_0 = 2$ e $K_1 = -2$. Portanto,

$$V_s(s) = \frac{2}{s} - \frac{2}{s + 5}$$

e, assim,

$$v_s(t) = 2[1 - e^{-5t}]u(t) \text{ V}$$

Embora se possa empregar a convolução para obter uma inversa da transformada de Laplace, o exemplo, apesar de bastante simples, ilustra que esse é um procedimento bastante pobre. Se a função $F(s)$ for muito complexa, o desenvolvimento matemático pode se tornar muito trabalhoso. Entretanto, a convolução é uma ferramenta muito poderosa e de grande utilidade. Por exemplo, conhecendo-se a resposta impulsiva de uma rede, a convolução pode ser utilizada para determinar a resposta da

rede a uma entrada eventualmente disponível apenas como uma curva experimental obtida em laboratório. Assim, a convolução permite se obter a resposta de uma rede para entradas que, embora não estejam escritas como funções analíticas, podem ser simuladas em um computador digital. Além disso, pode-se utilizar a convolução para modelar um circuito que seja completamente desconhecido e utilizar esse modelo para determinar a resposta do circuito para um sinal de entrada fornecido.

EXEMPLO 13.12

Para demonstrar a potencialidade da convolução, será criado um modelo para um filtro passa-banda linear cujos componentes sejam totalmente desconhecidos. A Fig. 13.3 mostra esse filtro na forma de uma “caixa preta”. Além dos componentes, são também desconhecidos o circuito do filtro como um todo, o diagrama de seu circuito e os valores dos parâmetros de seus componentes. Como resultado, o modelo do filtro deve ser baseado apenas em medições. Utilizando o conhecimento da convolução e da transformada de Laplace, são discutidas as técnicas de medições mais apropriadas, o modelo resultante e como empregar esse modelo em simulações posteriores.

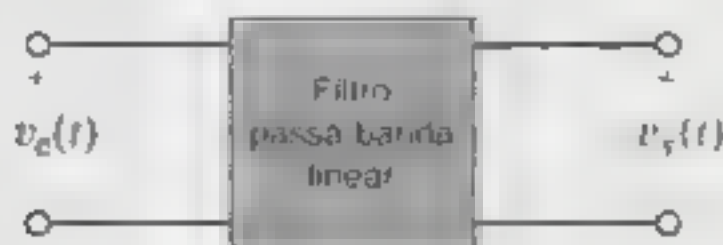


Figura 13.3 Diagrama conceitual de um filtro passa-banda.

SOLUÇÃO

Uma vez que o filtro é linear, a tensão $v_s(t)$ pode ser escrita como

$$v_s(t) = h(t) \otimes v_e(t) \quad 13.28$$

Assim, a função $h(t)$ representará o modelo do filtro. Para se determinar $h(t)$, deve-se impor alguma entrada $v_e(t)$, medir a resposta, $v_s(t)$, e desenvolver os modelos matemáticos apropriados. Uma opção natural para $v_e(t)$ é a função impulso, $\delta(t)$. Nesse caso, $V_e(s)$ é igual a 1 e a saída será o modelo desejado, $h(t)$:

$$v_s(t) = h(t)$$

Infelizmente, a geração em laboratório de um impulso adequado com amplitude infinita e largura nula não é uma tarefa trivial. Todavia, é mais fácil e mais comum aplicar-se uma função degrau, como, por exemplo, $10u(t)$. Assim, $V_e(s)$ será igual a $10/s$, e a saída pode ser expressa no domínio s como

$$V_s(s) = H(s) \left[\frac{10}{s} \right]$$

ou

$$H(s) = \left[\frac{s}{10} \right] V_s(s)$$

Como a multiplicação por s é equivalente a uma derivação no domínio do tempo, tem-se para $h(t)$

$$h(t) = \left[\frac{1}{10} \right] \frac{dv_s(t)}{dt} \quad 13.29$$

Portanto, $h(t)$ pode ser obtida a partir da derivada da resposta do filtro a uma entrada em degrau!

A entrada $10 \mu(t)$ foi aplicada experimentalmente ao filtro e a tensão de saída foi medida utilizando um osciloscópio digital. A aquisição dos resultados para o tempo e para $v_s(t)$ foi feita a cada $50 \mu\text{s}$ em um intervalo de 0 a 50 ms, isto é, 1000 pontos de amostragem. O osciloscópio digital armazena os dados na forma de um arquivo-texto, que pode ser transferido a um computador pessoal no qual esses resultados possam ser processados. [Em outras palavras, pode-se obter a derivada expressa na Eq. (13.29), $dv_s(t)/dt$.] Os resultados são mostrados na Tabela 13.3. A segunda e a terceira colunas da tabela mostram o tempo corrido e a tensão de saída para os primeiros elementos da amostra. Para produzir $h(t)$, a derivada foi aproximada por meio de programação utilizando o algoritmo

$$\frac{dv_s(t)}{dt} \approx \frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{V_s[(n+1)T_s] - V[nT_s]}{T_s}$$

em que T_s é o tempo de amostragem, $50 \mu\text{s}$, e n é o número de amostras. Os resultados para $h(t)$ são mostrados na quarta coluna da tabela. Esta coluna mostra que $h(t)$ existe na forma de um conjunto de pontos, estando, agora, o filtro modelado.

TABELA 13.3 Os cinco primeiros dados de amostragem da resposta ao degrau e o cálculo de $h(t)$

	TEMPO (s)	RESPONSA AO DEGRAU (V)	$h(t)$
0	0,00E+00	0,00E+00	3,02E+02
1	5,00E-05	1,51E-01	8,98E+02
2	1,00E-04	6,00E-01	9,72E+02
3	1,50E-04	1,09E+00	9,56E+02
4	2,00E-04	1,56E+00	9,38E+02

Para testar o modelo, $h(t)$, suponha que a função $v_e(t)$ combine uma componente CC com duas componentes senoidais de forma que

$$v_e(t) = \begin{cases} 1 \sin[(2\pi)100t] + 1 \sin[(2\pi)1234t] + 4 & 0 \leq t < 25 \text{ ms} \\ 0 & t \geq 25 \text{ ms} \end{cases} \quad 13.30$$

Como será o desempenho do filtro? Qual será a forma da tensão de saída? Para responder a essas perguntas, deve-se aplicar a convolução entre $h(t)$ e $v_e(t)$. Um arquivo de dados para $v_e(t)$ pode ser criado simplesmente calculando-se a função expressa pela Eq. (13.30) a cada $50 \mu\text{s}$. Essa convolução pode ser realizada utilizando qualquer método computacional apropriado.

As curvas resultantes para $v_s(t)$ e $v_e(t)$ são mostradas no gráfico da Fig. 13.4. Uma análise da forma de onda da saída indica que a componente de 100 Hz de $v_e(t)$ é amplificada, enquanto as componentes CC e de 1234 Hz são atenuadas; isto é, $v_s(t)$ possui uma amplitude de aproximadamente 3 V e um valor médio próximo de zero. De fato, o circuito apresenta a característica de um filtro passa-banda. Lembre-se de que essas formas de onda não são medidas; elas foram obtidas por meio de resultados de simulação a partir do modelo representado por $h(t)$.

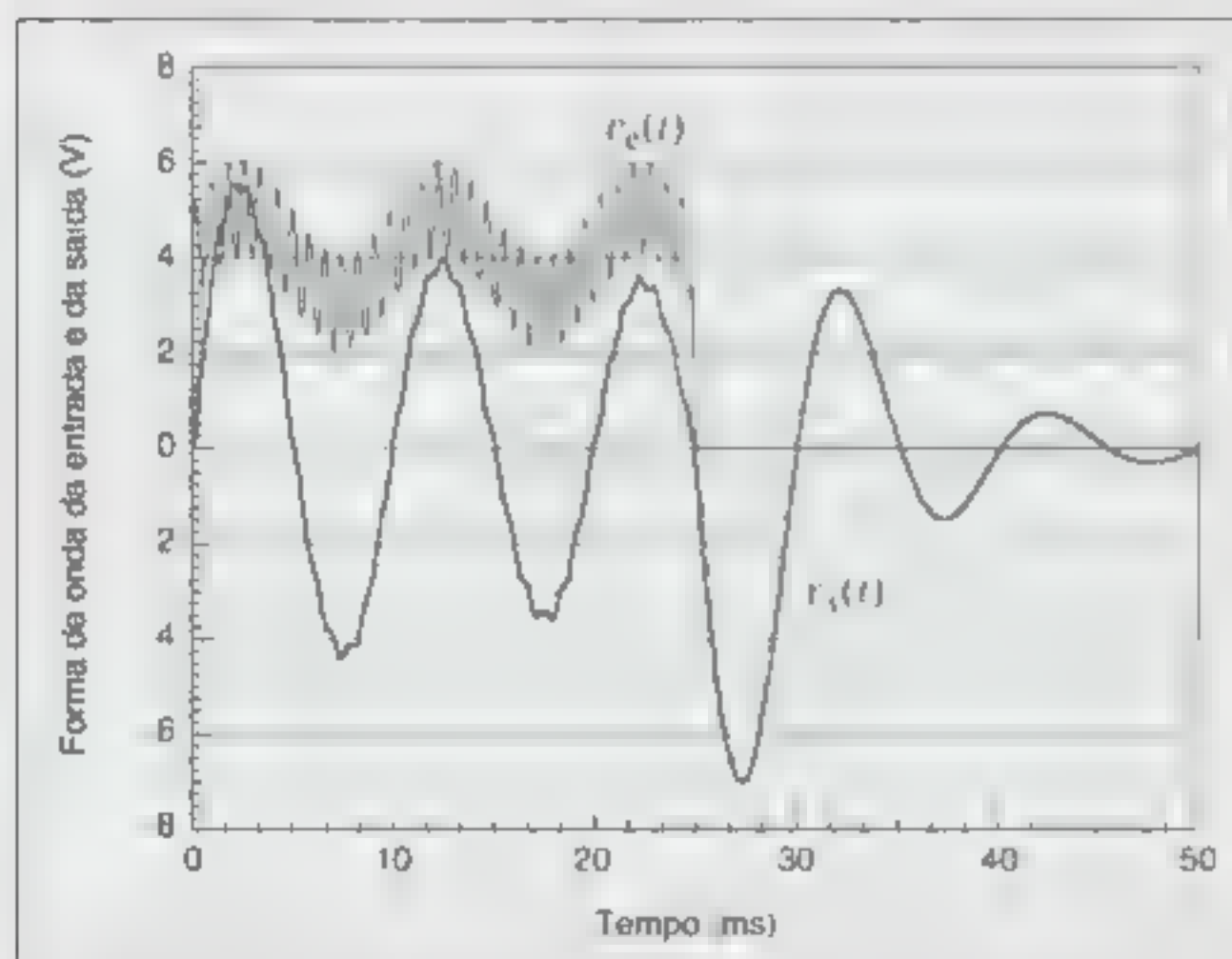


Figura 13.4 Os gráficos das formas de onda de entrada e de saída revelam a natureza do filtro passa-banda — particularmente a atenuação dos componentes CC e de frequências mais altas.

13.7 Teoremas do Valor Inicial e do Valor Final

Suponha que se deseje determinar o valor inicial ou o valor final da resposta de um circuito no domínio do tempo a partir da transformada de Laplace de uma função no domínio s sem ter que calcular a transformada inversa. Ao se determinar a função $f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$, pode-se obter seu valor inicial calculando $f(t)$ quando $t \rightarrow 0$ e o valor final calculando $f(t)$ quando $t \rightarrow \infty$. Entretanto, seria bastante conveniente se fosse possível determinar os valores inicial e final de $F(s)$ sem ter que calcular a transformada inversa. Os teoremas do valor final e do valor inicial permitem que se faça exatamente isto.

O **teorema do valor inicial** estabelece que

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} sF(s) \quad 13.31$$

desde que $f(t)$ e sua primeira derivada sejam transformáveis.

A prova desse teorema emprega a transformada de Laplace da função $df(t)/dt$, qual seja

$$\int_0^{\infty} \frac{df(t)}{dt} e^{-st} dt = sF(s) - f(0)$$

Aplicando-se o limite a ambos os lados quando $s \rightarrow \infty$, obtém-se

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} \frac{df(t)}{dt} e^{-st} dt = \lim_{s \rightarrow \infty} [sF(s) - f(0)]$$

e como

$$\int_0^{\infty} \frac{df(t)}{dt} \lim_{s \rightarrow \infty} e^{-st} dt = 0$$

então,

$$f(0) = \lim_{s \rightarrow \infty} sF(s)$$

que certamente, é

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} sF(s)$$

O **teorema do valor final** estabelece que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s) \quad 13.32$$

desde que $f(t)$ e sua primeira derivada sejam transformáveis e que $f(\infty)$ exista. Essa última condição significa que os polos de $F(s)$ devem possuir partes reais negativas com a exceção de um polo simples que pode existir em $s = 0$.

A prova desse teorema também envolve a transformada de Laplace da função $df(t)/dt$, isto é,

$$\int_0^{\infty} \frac{df(t)}{dt} e^{-st} dt = sF(s) - f(0)$$

A aplicação do limite a ambos os lados quando $s \rightarrow 0$, fornece

$$\lim_{s \rightarrow 0} \int_0^{\infty} \frac{df(t)}{dt} e^{-st} dt = \lim_{s \rightarrow 0} [sF(s) - f(0)]$$

Portanto,

$$\int_0^{\infty} \frac{df(t)}{dt} dt = \lim_{s \rightarrow 0} [sF(s) - f(0)]$$

e

$$f(\infty) - f(0) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s) - f(0)$$

e, assim,

$$f(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s)$$

EXEMPLO 13.13

Seja a determinação dos valores inicial e final da função

$$F(s) = \frac{10(s+1)}{s(s^2+2s+2)}$$

e da correspondente função no domínio do tempo

$$f(t) = 5 + 5\sqrt{2}e^{-t} \cos(t - 135^\circ)u(t)$$

SOLUÇÃO

A aplicação do teorema do valor inicial fornece

$$f(0) = \lim_{s \rightarrow \infty} sF(s)$$

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{10(s+1)}{s^2+2s+2} = 0$$

Os polos de $F(s)$ são $s = 0$ e $s = -1 \pm j1$, logo o teorema do valor final é aplicável. Assim,

$$\begin{aligned} f(\infty) &= \lim_{s \rightarrow 0} sF(s) \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{10(s+1)}{s^2+2s+2} \\ &= 5 \end{aligned}$$

Note que esses valores poderiam ser obtidos diretamente da função no domínio do tempo, $f(t)$

13.8 Exemplos de Aplicação

Como um prelúdio do Capítulo 14, em que serão empregadas a potencialidade e a versatilidade da transformada de Laplace

em uma grande variedade de problemas de análise de circuitos, será mostrado agora como as técnicas apresentadas neste capítulo podem ser utilizadas na solução de um problema de circuitos por meio da equação diferencial que o descreve.

EXEMPLO DE APLICAÇÃO 13.14

Considere a rede mostrada na Fig. 13.5a. Admita que a rede esteja em regime estacionário antes de $t = 0$. Deseja-se obter a corrente $i(t)$ para $t > 0$.

SOLUÇÃO

No regime estacionário, antes de $t = 0$, a rede se comporta conforme mostrado na Fig. 13.5b, uma vez que o indutor opera como um curto-circuito para um sinal de entrada CC e o capacitor opera como um circuito aberto para um sinal CC. Pela Fig. 13.5b nota-se que $i(0) = 4$ A e $v_C(0) = 4$ V. Para $t > 0$, a equação da LKT para a rede é

$$12u(t) = 2i(t) + L \frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{0.1} \int_0^t i(x) dx + v_C(0)$$

Utilizando os resultados do Exemplo 13.1 e as propriedades 7 e 10, a expressão transformada fica

$$\frac{12}{s} = 2I(s) + sI(s) - i(0) + \frac{10}{s} I(s) + \frac{v_C(0)}{s}$$

Utilizando as condições iniciais, essa equação fica expressa por

$$\frac{12}{s} = I(s) \left(2 + s + \frac{10}{s} \right) - 4 + \frac{4}{s}$$

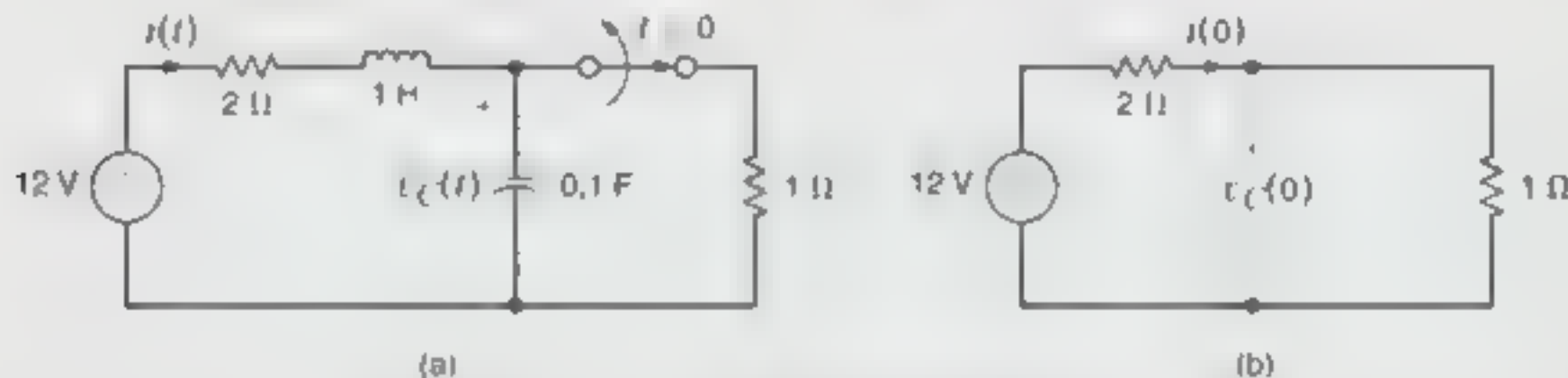


Figura 13.5 Circuitos utilizados no Exemplo 13.14.

$$I(s) = \frac{4(s+2)}{s^2 + 2s + 10} = \frac{4(s+2)}{(s+1-j3)(s+1+j3)}$$

e, então,

$$K = \left. \frac{4(s+2)}{s-1+j3} \right|_{s=1-j3} = \frac{2.11 \angle -18.4^\circ}{1}$$

Portanto,

$$i(t) = 2(2.11)e^{-t} \cos(3t - 18.4^\circ)u(t) \text{ A}$$

Note que essa expressão satisfaz a condição inicial $i(0) = 4$ A.

Na introdução deste capítulo, foi estabelecido que a transformada de Laplace pode fornecer as respostas natural e forçada de um circuito. A solução desse problema contém apenas um termo. Assim, seria esta a resposta forçada ou a natural? Lembre-se de que a resposta forçada possui sempre a mesma forma da função forçamento ou da fonte. A fonte desse problema é uma tensão CC, logo a resposta forçada deve ser uma constante. De fato, a resposta forçada é nula para o circuito, e a resposta natural é uma função cosseno amortecida. Neste caso, uma resposta forçada nula faz sentido? A resposta a essa questão é sim! Ao se observar o circuito, verifica-se que o capacitor está sendo carregado pela fonte de tensão. Uma vez que a tensão no capacitor atinge o valor da tensão da fonte, a corrente se tornará nula.

Avaliação do Aprendizado

E13.14 Determine os valores inicial e final da função $f(t)$ se $F(s) = \mathcal{F}[f(t)]$ é dada pela expressão

$$F(s) = \frac{(s+1)^2}{s(s^2 + 2s + 2)}$$

RESPOSTA:

$$f(0) = 0 \text{ e } f(\infty) = \frac{1}{4}$$

E13.15 Determine os valores inicial e final da função do tempo $f(t)$ se $F(s)$

$$F(s) = \frac{8s^2 - 20s + 50}{s(s^2 + 4s + 50)}$$

RESPOSTA:

$$f(0) = 8 \text{ e } f(\infty) = 10$$

E13.16 Utilize a transformada de Laplace para obter $y(t)$ se

$$\frac{dy}{dt} + 4y(t) + 4 \int_0^t y(x) dx = 10u(t), y(0) = 10$$

RESPOSTA:

$$y(t) = (10e^{-2t} - 10te^{-2t})u(t)$$

Estratégia para Solução de Problemas

A Transformada de Laplace e os Circuitos Transientes

Etapa 1. Admita que o circuito atinja seu regime estacionário antes de a chave ser movimentada. Desenhe o circuito válido para $t = 0^-$ substituindo os capacitores por circuitos abertos e os indutores por curtos-circuitos. Resolva para as condições iniciais, tensões entre os terminais dos capacitores e correntes fluindo por meio dos indutores. Lembre-se de que $v_C(0^-) = v_C(0^+) = v_C(0)$ e $i_L(0^-) = i_L(0^+) = i_L(0)$.

Etapa 2. Desenhe o circuito válido para $t > 0$. Utilize as técnicas de análise de circuitos para determinar a equação diferencial ou integro-diferencial que descreve o comportamento do circuito.

Etapa 3. Converta essa equação diferencial/integro-diferencial em uma equação algébrica utilizando a transformada de Laplace.

Etapa 4. Resolva essa equação algébrica para a variável de interesse. Seu resultado será uma razão de polinômios na variável complexa s .

Etapa 5. Calcule a transformada inversa de Laplace para obter a resposta do circuito no domínio do tempo.

Avaliação do Aprendizado

E13.17 Admitindo que a rede mostrada na Fig. E13.17 esteja no regime estacionário antes de $t = 0$, obtenha $i(t)$ para $t > 0$.

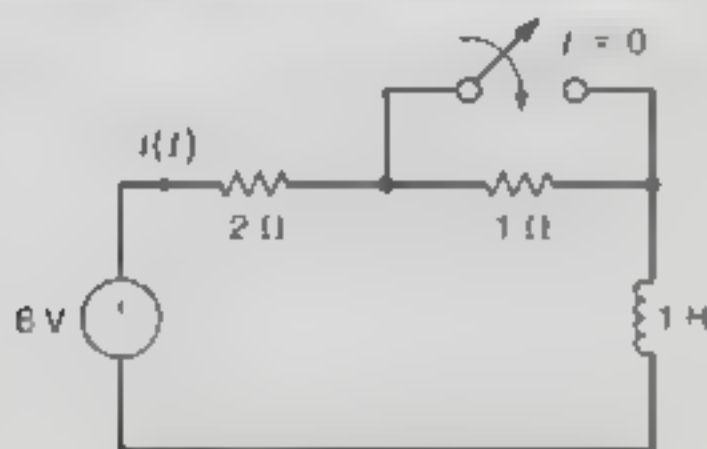


Figura E13.17

RESPOSTA:

$$i(t) = (3 - e^{-2t})u(t) \text{ A.}$$

E13.18 No circuito mostrado na Fig. E13.18, a chave é aberta no tempo $t = 0$. Utilize as transformadas de Laplace para obter a tensão $v_x(t)$ para $t > 0$.

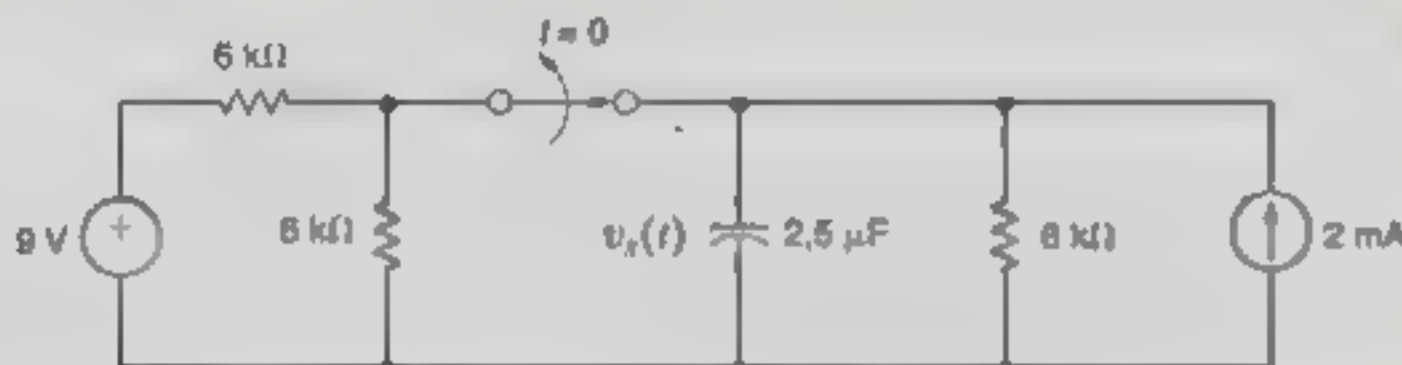


Figura E13.18

RESPOSTA:

$$v_x(t) = (12 - 5e^{-66,67t})u(t) \text{ V.}$$

E13.19 No circuito mostrado na Fig. E13.19, a chave é aberta no tempo $t = 0$. Utilize as transformadas de Laplace para obter a corrente $i(t)$ para $t > 0$.

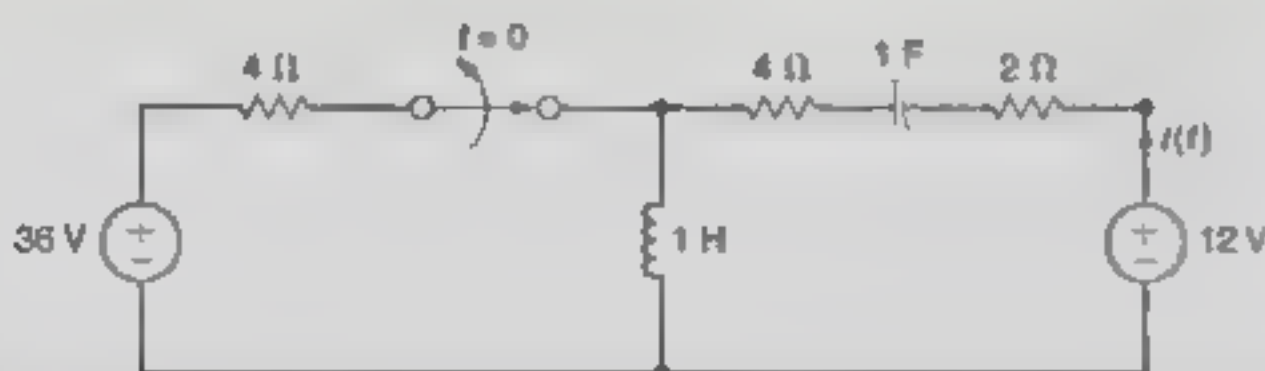


Figura E13.19

RESPOSTA:

$$i(t) = (-0,274e^{-0,72t} + 9,274e^{-5,828t})u(t) \text{ A.}$$

RESUMO

- A aplicação da transformada de Laplace converte uma equação íntegro-diferencial no domínio do tempo em uma equação algébrica, que inclui as condições iniciais, no domínio s . Resolve-se o problema para as incógnitas no domínio s e os resultados são convertidos de volta para o domínio do tempo.
- A transformada de Laplace é definida pela expressão

$$\mathcal{L}[f(t)] = F(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt$$

- Os pares de transformadas de Laplace, conforme listado na Tabela 13.1, podem ser utilizados para a conversão do domínio do tempo para o domínio da frequência e vice-versa.

- As propriedades da transformada de Laplace, conforme listadas na Tabela 13.2, são úteis na realização da transformada de Laplace e sua inversa.
- A expansão em frações parciais de uma função no domínio s permite a utilização dos pares transformados da Tabela 13.1 e as propriedades da Tabela 13.2 para converter a função para o domínio do tempo.
- A convolução de duas funções no domínio do tempo corresponde a uma simples multiplicação de duas funções no domínio s .
- Os valores inicial e final de uma função no domínio do tempo podem ser obtidos a partir de suas transformadas de Laplace no domínio da frequência.

PROBLEMAS

13.1 Demonstre as seguintes igualdades:

- (a) $\mathcal{L}[e^{-at}] = \frac{1}{s+a}$
 (b) $\mathcal{L}[\sin \omega t] = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$
 (c) $\mathcal{L}[t] = \frac{1}{s^2}$

13.2 Obtenha $\mathcal{L}[f(t)]$ considerando que $f(t)$ seja expressa por

$$f(t) = a + a^2 t + ae^{-at} + a^2 \cos at$$

13.3 Obtenha a função $F(s)$ considerando $f(t) = e^{-at} \sin \omega t u(t-1)$.

13.4 Obtenha a função $F(s)$ considerando $f(t) = te^{-at} u(t-4)$.

13.5 Utilize o teorema da defasagem no tempo para determinar $\mathcal{L}[f(t)]$ em que $f(t) = [t-1 + e^{-(t-1)}] u(t-1)$.

13.6 Se $f(t) = te^{-(t-a)} u(t-a) - e^{-t} u(t-a)$, obtenha $F(s)$.

13.7 Utilize o teorema da defasagem no tempo para determinar $\mathcal{L}[f(t)]$ em que $f(t) = [e^{-(t-2)} - e^{-2(t-2)}] u(t-2)$.

13.8 Utilize a propriedade número 7 para determinar $\mathcal{L}[f(t)]$ se $f(t) = te^{-at} u(t-1)$.

13.9 Utilize a propriedade número 5 para determinar $\mathcal{L}[f(t)]$ se $f(t) = te^{-at} u(t-1)$.

13.10 Se $f(t) = te^{-t} \cos(\omega t) (a^2 + 1)$, obtenha $F(s)$.

13.11 Obtenha a transformada de Laplace da função $f(t) = e^{-at} \delta(t-1)$.

13.12 Se $f(t) = t \cos(\omega t) u(t-1)$, obtenha $F(s)$.

13.13 Se $f(t) = t \sin(\omega t) u(t-1)$, obtenha $F(s)$.

13.14 Se $f(t) = d/dt(te^{-5t} \sin 5t)$, obtenha $F(s)$.

13.15 Se $f(t) = d/dt(e^{-5t} \cos 2t)$, obtenha $F(s)$.

13.16 Dadas as funções $F(s)$ a seguir, obtenha as funções $f(t)$ correspondentes.

- (a) $F(s) = \frac{s+1}{(s+2)(s+6)}$
 (b) $F(s) = \frac{24}{(s+2)(s+3)}$
 (c) $F(s) = \frac{4}{(s+2)(s+4)}$
 (d) $F(s) = \frac{10s}{(s+1)(s+6)}$

13.17 Dadas as funções $F(s)$ a seguir, obtenha as funções $f(t)$ correspondentes.

- (a) $F(s) = \frac{s+10}{(s+4)(s+6)}$
 (b) $F(s) = \frac{24}{(s+2)(s+8)}$

13.18 Dadas as funções $F(s)$ a seguir, obtenha as funções $f(t)$ correspondentes.

- (a) $F(s) = \frac{s+1}{s(s+2)(s+3)}$
 (b) $F(s) = \frac{s^2 + s + 1}{s(s+1)(s+2)}$

13.19 Dadas as funções $F(s)$ a seguir, obtenha as funções $f(t)$ correspondentes.

- (a) $F(s) = \frac{s^2 + 7s + 12}{(s+2)(s+4)(s+6)}$
 (b) $F(s) = \frac{(s+3)(s+6)}{s(s^2 + 10s + 24)}$
 (c) $F(s) = \frac{s^2 + 5s + 12}{(s+2)(s+4)(s+6)}$
 (d) $F(s) = \frac{(s+3)(s+6)}{s(s^2 + 8s + 12)}$

13.20 Dadas as funções $F(s)$ a seguir, obtenha as funções $f(t)$ correspondentes.

(a) $F(s) = \frac{s^2 + 4s + 8}{(s+1)(s+4)^2}$

(b) $F(s) = \frac{s+4}{s^2}$

13.21 Dadas as funções $F(s)$ a seguir, obtenha as funções $f(t)$ correspondentes.

(a) $F(s) = \frac{s+4}{(s+2)^2}$

(b) $F(s) = \frac{s+6}{s(s+1)^2}$

13.22 Dadas as funções $F(s)$ a seguir, obtenha as funções $f(t)$ correspondentes.

(a) $F(s) = \frac{s+3}{s(s+2)^2}$

(b) $F(s) = \frac{s+6}{s(s+2)^2}$

13.23 Dadas as funções $F(s)$ a seguir, obtenha a transformada inversa de Laplace de cada função.

(a) $F(s) = \frac{s+6}{s^2(s+2)}$

(b) $F(s) = \frac{s+3}{(s+1)^2(s+3)}$

13.24 Dadas as funções $F(s)$ a seguir, obtenha as funções $f(t)$ correspondentes.


(a) $F(s) = \frac{s+8}{s^2(s+4)}$

(b) $F(s) = \frac{1}{s^2(s+1)^2}$

13.25 Dadas as funções $F(s)$ a seguir, obtenha a transformada inversa de Laplace de cada função.

(a) $F(s) = \frac{10s+1}{s^2+2s+2}$

(b) $F(s) = \frac{s+1}{s(s^2+4s+5)}$

 **13.26** Dadas as funções $F(s)$ a seguir, obtenha as funções $f(t)$ correspondentes.

(a) $F(s) = \frac{s(s+6)}{(s+3)(s^2+6s+18)}$

(b) $F(s) = \frac{(s+4)(s+8)}{s(s^2+4s+8)}$

13.27 Dadas as funções $F(s)$ a seguir, obtenha as funções $f(t)$ correspondentes.

(a) $F(s) = \frac{10}{s^2+2s+2}$

(b) $F(s) = \frac{10(s+2)}{s^2+4s+5}$

13.28 Dadas as funções $F(s)$ a seguir, obtenha as funções $f(t)$ correspondentes.

(a) $F(s) = \frac{s(s+6)}{(s+3)(s^2+6s+18)}$

(b) $F(s) = \frac{(s+4)(s+8)}{s(s^2+8s+32)}$

13.29 Dadas as funções $F(s)$ a seguir, obtenha as funções $f(t)$ correspondentes.

(a) $F(s) = \frac{(s+1)(s+3)}{(s+2)(s^2+2s+2)}$

(b) $F(s) = \frac{(s+2)^2}{s^2+4s+5}$

13.30 Dadas as funções $F(s)$ a seguir, obtenha as funções $f(t)$ correspondentes.

(a) $F(s) = \frac{6s+12}{(s^2+4s+5)(s^2+4s+8)}$

(b) $F(s) = \frac{s(s+2)}{s^2+2s+2}$

13.31 Obtenha a transformada inversa de Laplace das seguintes funções.

(a) $F(s) = \frac{e^s}{s+1}$

(b) $F(s) = \frac{1-e^{-s}}{s}$

(c) $F(s) = \frac{1-e^{-s}}{s+1}$

13.32 Obtenha $f(t)$ considerando que $F(s)$ seja dada pelas expressões a seguir.

(a) $F(s) = \frac{2(s+1)e^{-s}}{(s+2)(s+4)}$

(b) $F(s) = \frac{10(s+2)e^{-2s}}{(s+1)(s+4)}$

(c) $F(s) = \frac{se^{-s}}{(s+4)(s+8)}$

13.33 Obtenha a transformada inversa de Laplace das seguintes funções.

(a) $F(s) = \frac{(s+2)e^s}{s(s+2)}$

(b) $F(s) = \frac{e^{-10s}}{(s+2)(s+3)}$

(c) $F(s) = \frac{(s^2+2s+1)e^{-2s}}{s(s+1)(s+2)}$

(d) $F(s) = \frac{(s+1)e^{-s}}{s^2(s+2)}$

- 13.34** Obtenha $f(t)$ considerando que $F(s)$ seja expressa pela função a seguir

$$F(s) = \frac{(s+1)e^{-1}}{s(s+2)(s^2+2s+2)}$$

- 13.35** Obtenha a transformada inversa de Laplace da função

$$F(s) = \frac{10s(s+2)e^{-4s}}{(s+1)^2(s^2-2s+2)}$$

- 13.36** Obtenha $f(t)$ considerando que $F(s)$ seja dada pela função

$$F(s) = \frac{s^2 e^{-2s}}{(s^2+1)(s+1)(s^2+2s+2)}$$

- 13.37** Resolva as seguintes equações diferenciais utilizando as transformadas de Laplace.

(a) $\frac{dx(t)}{dt} + 4x(t) = e^{-t}, \quad x(0) = 1$

(b) $\frac{dx(t)}{dt} + 6x(t) = 4u(t), \quad x(0) = 2$

- 13.38** Resolva as seguintes equações diferenciais utilizando as transformadas de Laplace.

(a) $\frac{d^2v(t)}{dt^2} + \frac{2dv(t)}{dt} + v(t) = e^{-t}, \quad v(0) = v'(0) = 0$

(b) $\frac{d^2y(t)}{dt^2} + \frac{4y(t)}{dt} + 4y(t) = u(t), \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$

- 13.39** Resolva a seguinte equação íntegro-diferencial utilizando as transformadas de Laplace.

$$\frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) + \int_0^t y(\lambda) d\lambda = 1 - e^{-2t}, \quad y(0) = 0, \quad t > 0$$

- 13.40** Utilize as transformadas de Laplace para determinar $y(t)$ se

$$\frac{dy(t)}{dt} + 3y(t) + 2 \int_0^t y(x) dx = u(t), \quad y(0) = 0, \quad t > 0.$$

- 13.41** Utilize as transformadas de Laplace para resolver a equação íntegro-diferencial a seguir.

$$\frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) + \int_0^t y(\lambda) e^{-2(t-\lambda)} d\lambda = 4u(t),$$

$$y(0) = 1, \quad t > 0$$

- 13.42** Obtenha a função $f(t)$ utilizando a convolução se $F(s)$ é expressa por

$$F(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)}$$

- 13.43** Utilize a convolução para obter a função $f(t)$ considerando que a função $F(s)$ é expressa por

$$F(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)}$$

- 13.44** Obtenha a função $f(t)$ utilizando a convolução se $F(s)$ é expressa por

(a) $F(s) = \frac{1}{(s+1)(s+4)}$

(b) $F(s) = \frac{10}{(s+1)(s+3)^2}$

- 13.45** Determine os valores inicial e final da função $f(t)$, considerando que $F(s)$ seja dada pela expressão

(a) $F(s) = \frac{2(s+2)}{s(s+1)}$

(b) $F(s) = \frac{2(s^2+2s+6)}{(s+1)(s+2)(s+3)}$

(c) $F(s) = \frac{2s^2}{(s+1)(s^2+2s+2)}$

- 13.46** Determine os valores inicial e final da função $f(t)$, no domínio do tempo, considerando que $F(s)$ seja expressa por

(a) $F(s) = \frac{10(s+2)}{(s+1)(s+3)}$

(b) $F(s) = \frac{s^2+2s+4}{(s+6)(s^2+4s^2+8s+10)}$

(c) $F(s) = \frac{2s}{s^2+2s+2}$

- 13.47** Determine os valores finais da função $f(t)$, no domínio do tempo, considerando que

(a) $F(s) = \frac{10(s+1)}{(s+2)(s-3)}$

(b) $F(s) = \frac{10}{s^2+4}$

- 13.48** Determine os valores finais da função $f(t)$, no domínio do tempo, considerando que

(a) $F(s) = \frac{10(s+6)}{(s-2)(s+3)}$

(b) $F(s) = \frac{2}{s^2+4s+8}$

- 13.49** Determine os valores inicial e final da função $f(t)$, no domínio do tempo, considerando que $F(s)$ seja expressa por

(a) $F(s) = \frac{10(s-2)}{(s+1)(s+4)}$

(b) $F(s) = \frac{s^2+2s+2}{(s+6)(s^2+4s^2+8s+4)}$

(c) $F(s) = \frac{2s}{s^2+2s+3}$

- 13.50** Determine os valores inicial e final da função $f(t)$, considerando que $F(s)$ seja dada pela expressão

(a) $F(s) = \frac{2(s+2)}{s(s+1)}$

(b) $F(s) = \frac{2(s^2+2s+6)}{(s+1)(s+2)(s+3)}$

(c) $F(s) = \frac{2s^2}{(s+1)(s^2+2s+2)}$

- 13.51** No circuito mostrado na Fig. P13.51, a chave se move da posição 1 para a posição 2 em $t = 0$. Utilize as transformadas de Laplace para obter a tensão $v(t)$ quando $t > 0$.

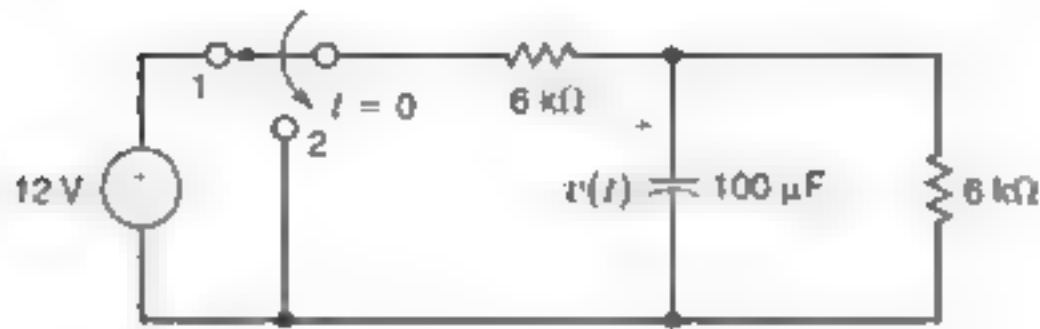


Figura P13.51

- 13.52** Na rede mostrada na Fig. P13.52, a chave abre em $t = 0$. Utilize as transformadas de Laplace para obter a corrente $i(t)$ quando $t > 0$.

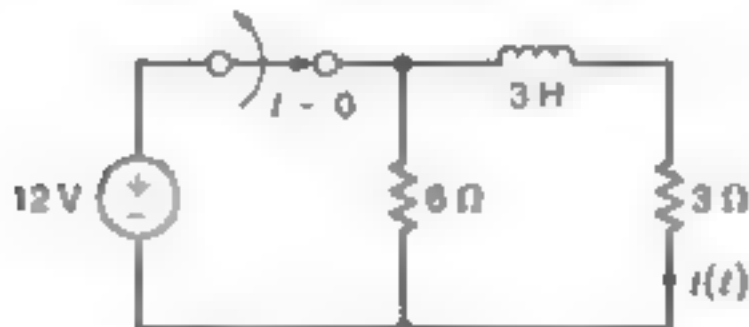


Figura P13.52

- 13.53** Na rede mostrada na Fig. P13.53, a chave abre em $t = 0$. Utilize as transformadas de Laplace para obter a tensão $v_L(t)$ quando $t > 0$.

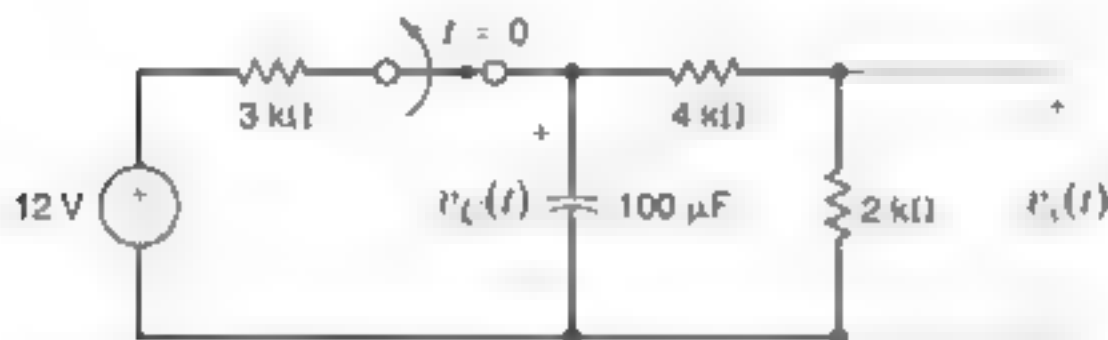


Figura P13.53

- 13.54** A chave do circuito mostrado na Fig. P13.54 abre em $t = 0$. Determine a corrente $i(t)$ quando $t > 0$ utilizando as transformadas de Laplace.

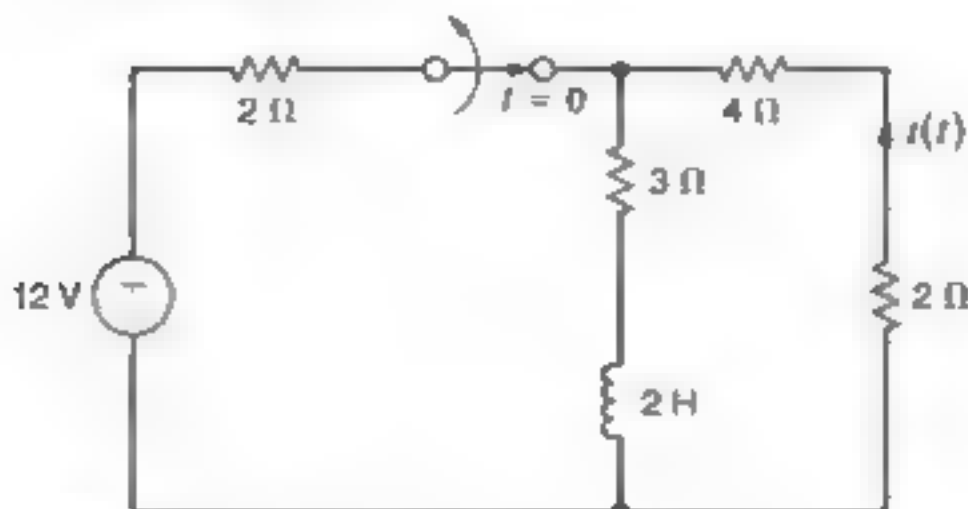


Figura P13.54

- 13.55** A chave do circuito mostrado na Fig. P13.55 ficou fechada por um longo tempo e foi aberta em $t = 0$. Determine a corrente $i(t)$, quando $t > 0$, utilizando as transformadas de Laplace.

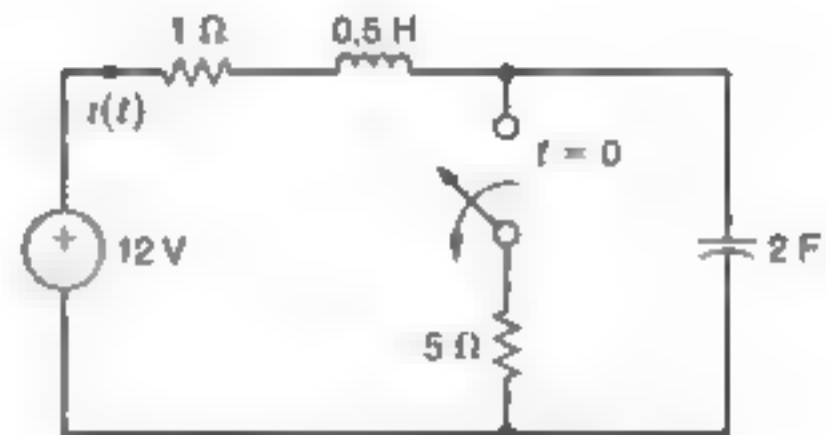


Figura P13.55

- 13.56** Na rede mostrada na Fig. P13.56, a chave abre em $t = 0$. Utilize as transformadas de Laplace para obter a corrente $i_L(t)$ quando $t > 0$.

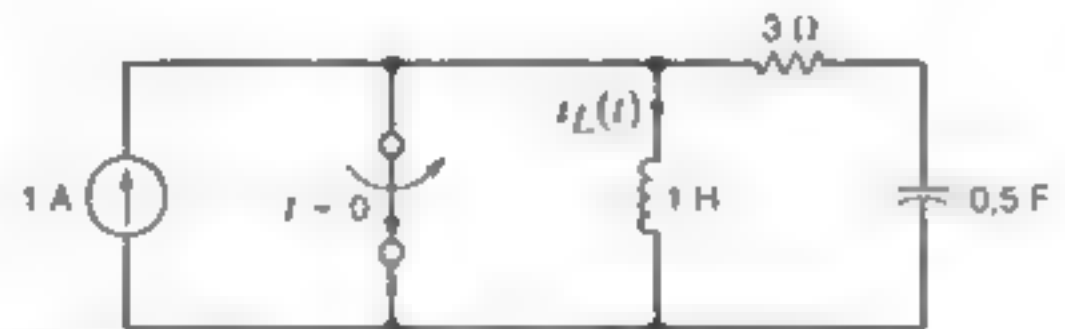


Figura P13.56

- 13.57** A chave do circuito mostrado na Fig. P13.57 ficou fechada por um longo tempo e foi aberta em $t = 0$. Determine a corrente $i(t)$, quando $t > 0$, utilizando as transformadas de Laplace.

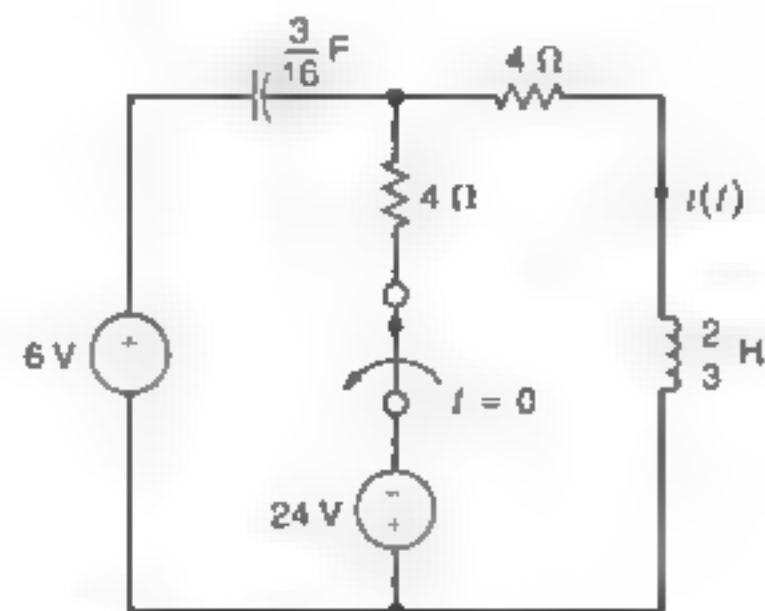


Figura P13.57

- 13.58** A chave do circuito mostrado na Fig. P13.58 ficou fechada por um longo tempo e foi aberta em $t = 0$. Determine a corrente $i(t)$, quando $t > 0$, utilizando as transformadas de Laplace.

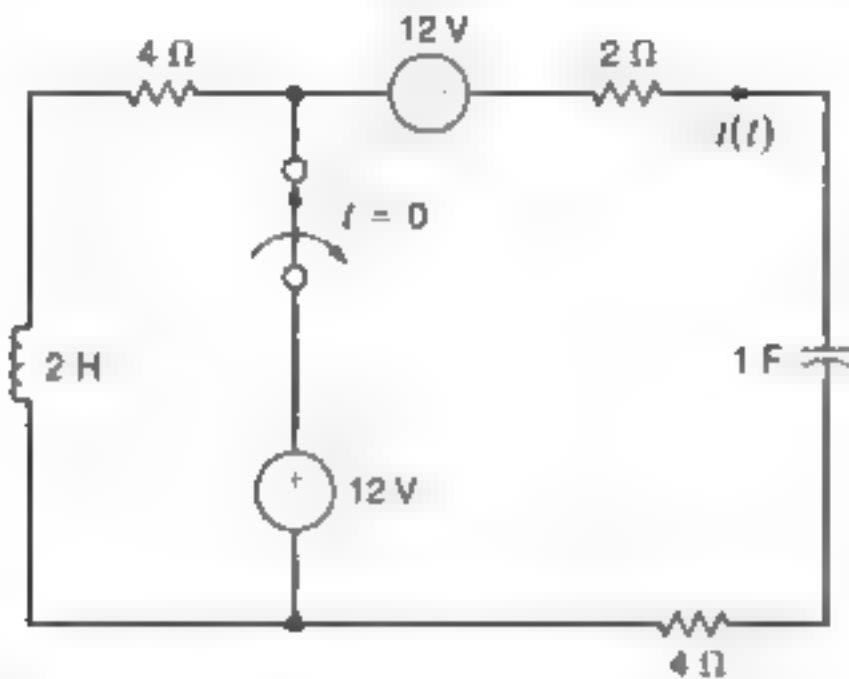


Figura P13.58

- 13.59** A chave do circuito mostrado na Fig. P13.59 ficou fechada por um longo tempo e foi aberta em $t = 0$. Determine a corrente $i(t)$, quando $t > 0$, utilizando as transformadas de Laplace.

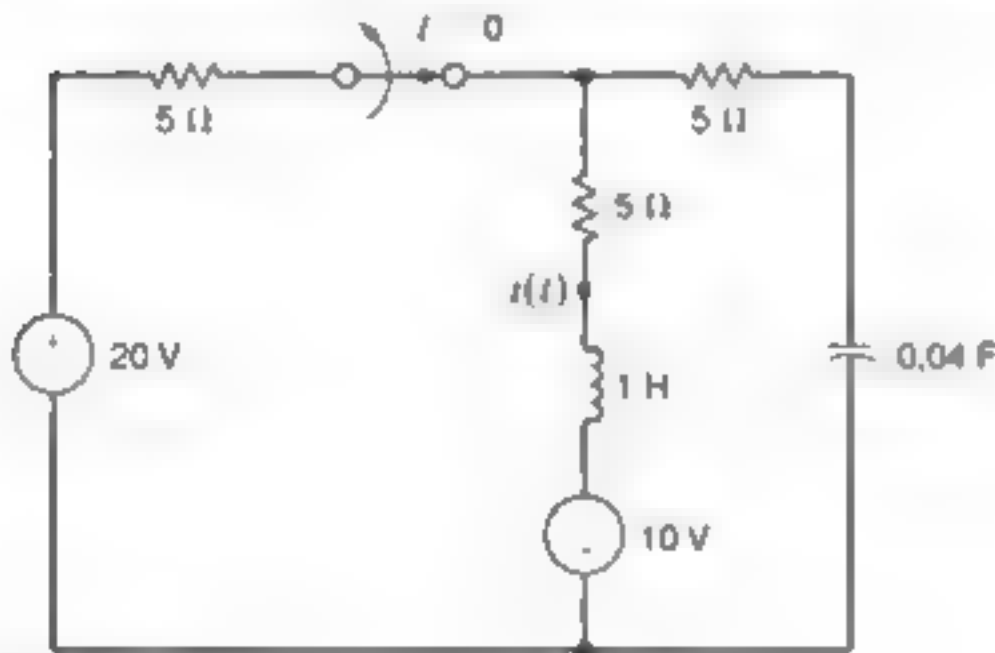


Figura P13.59

- 13.60** No circuito mostrado na Fig. P13.60, o acionamento da chave ocorre em $t = 0$. Determine a tensão $v_s(t)$, quando $t > 0$, utilizando as transformadas de Laplace.

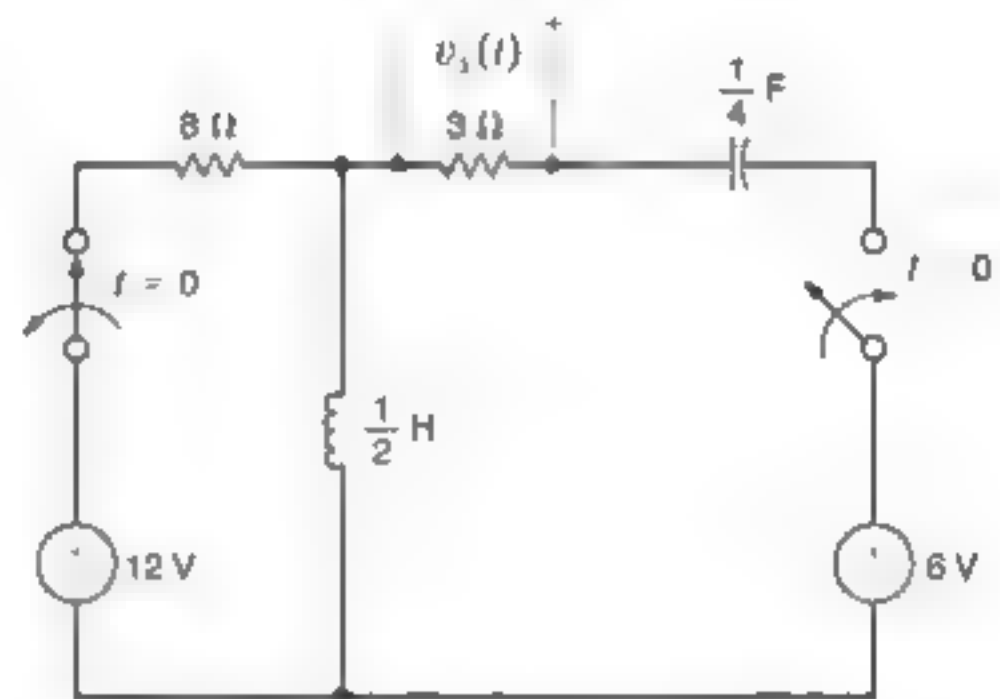


Figura P13.60

PROBLEMAS TÍPICOS DE EXAMES PROFISSIONAIS DE ENGENHARIA

- 13PEP-1** A função de saída de uma rede é expressa, por meio das transformadas de Laplace, da seguinte forma:

$$V_o(s) = \frac{12}{s(s^2 + 3s + 2)}$$

Obtenha a tensão de saída $v_o(t)$ em função do tempo.

- $[12 + 3e^{-2t} + 4e^{-t}]u(t)$ V
- $[2 + 4e^{2t} + 8e^t]u(t)$ V
- $[6 + 6e^{-2t} - 12e^{-t}]u(t)$ V
- $[3 + 2e^{2t} - 6e^t]u(t)$ V

- 13PEP-2** A função transformada de Laplace representativa da tensão de saída de uma rede é expressa como

$$V_o(s) = \frac{120}{s(s + 10)(s + 20)}$$

Determine o valor da tensão de saída $v_o(t)$ em $t = 100$ ms.

- 0,64 V
- 0,45 V
- 0,33 V
- 0,24 V

- 13PEP-3** A função transformada de Laplace da tensão de saída de uma rede é expressa como

$$V_o(s) = \frac{12(s + 2)}{s(s + 1)(s + 3)(s + 4)}$$

Determine o valor final dessa tensão, isto é, $v_x(t)$ quando $t \rightarrow \infty$

- a. 6 V
- b. 2 V
- c. 12 V
- d. 4 V

13PEP-4 A saída de uma rede é expressa como

$$V(s) = \frac{2s}{(s^2 + 1)(s + 4)}$$

Obtenha a expressão dessa saída em função do tempo.

- a. $\left[\frac{8}{9}e^{-4t} + \frac{8}{9}e^{-t} - \frac{2}{3}te^{-t} \right] u(t) \text{ V}$
- b. $\left[\frac{3}{4}e^{-t} - \frac{2}{3}te^{-t} + \frac{1}{3}te^{-t} \right] u(t) \text{ V}$
- c. $\left[\frac{2}{3}e^{-t} + \frac{1}{4}te^{-t} - \frac{1}{3}e^{-t} \right] u(t) \text{ V}$
- d. $\left[\frac{1}{2}e^{-t} - \frac{1}{3}e^{-t} + \frac{2}{3}te^{-t} \right] u(t) \text{ V}$

13PEP-5 Resolva a equação diferencial a seguir utilizando as transformadas de Laplace.

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + 6\frac{dx(t)}{dt} + 8x(t) = 2e^{-2t}$$

$$x(0) = 0 \quad \text{e} \quad \frac{dx(0)}{dt} = 0$$

- a. $\left[2e^{-2t} + e^{-4t} - 3e^{-3t} \right] u(t)$
- b. $\left[3e^{2t} + e^{-4t} + e^{3t} \right] u(t)$
- c. $\left[e^{-2t} + e^{-4t} - 2e^{-3t} \right] u(t)$
- d. $\left[4e^{2t} - e^{4t} - 2e^{3t} \right] u(t)$

APLICAÇÃO DA TRANSFORMADA DE LAPLACE NA ANÁLISE DE CIRCUITOS



Cortesia de P. Auster/OAR/National Undersea Research Program (NURP); University of Connecticut.

AS METAS DE APRENDIZAGEM DESTE CAPÍTULO SÃO:

- Compreender as representações no domínio s dos elementos básicos de um circuito, incluindo as condições iniciais
- Ser capaz de construir o circuito no domínio s de uma rede elétrica
- Ser capaz de aplicar as técnicas de análise de circuitos na determinação das tensões e/ou correntes de um circuito no domínio s e saber como utilizar a transformada de Laplace Inversa para determinar as tensões e/ou correntes no domínio do tempo
- Saber como determinar a função de transferência de um circuito no domínio s
- Ser capaz de calcular a resposta de um circuito às funções degrau unitário e impulso utilizando uma função de transferência
- Saber como calcular a resposta em regime estacionário de um circuito sujeito a uma fonte senoidal utilizando uma função de transferência

Veículos Robóticos Submarinos Os robôs exploram as fronteiras da Terra onde nenhum ser humano consegue atingir – as profundezas dos oceanos. Os veículos robóticos submarinos realizam reparos nos locais mais profundos de um oceano, coletam dados para os oceanógrafos e operam com eficientes sistemas de propulsão. Em ambientes não propícios às embarcações tripuladas, esses veículos submarinos podem estancar o esguicho de um derramamento de óleo, examinar a flora exótica do leito do oceano ou produzir o mapeamento geológico de um terreno vulcânico quente. Seja caminhando pelo convés submerso do Titanic, há aproximadamente 25 anos ou navegando atualmente no fundo do mar a mais de 4 km de profundidade na região noroeste do Pacífico, os veículos robóticos submarinos realizam pesquisas

oceanográficas com alta resolução, as quais dificilmente poderiam ser realizadas de outra forma.

Os avanços ocorrentes na tecnologia robótica submarina têm sido espantosos. Um robô submersível Solo-Trec de 183 libras (83 kg) opera com a energia decorrente das variações da temperatura da água entre diferentes profundidades do oceano. O Solo-Trec é o primeiro veículo robótico submarino a ser acionado totalmente pela energia térmica dos oceanos.

Neste capítulo continuamos a estudar os modelos dinâmicos dos circuitos utilizando as transformadas de Laplace – muito similar aos modelos dinâmicos utilizados no projeto dos veículos robóticos submarinos. As diferenças entre esses modelos estão no fato de as variáveis de um circuito serem tensões e correntes

elétricas, e as variáveis de um veículo robótico serem posições e velocidades mecânicas. A análise transiente é desenvolvida de modo eficiente para os modelos de circuitos utilizando uma carta de transformadas de Laplace que inclui diretamente as condições iniciais, tanto em termos das tensões nos capacitores quanto em termos das correntes nos indutores. A dinâmica dos veículos robóticos é expressa em diagramas de blocos por meio de blocos de

integração e ganhos. A análise transiente desse modelo aplica as condições iniciais das variáveis de posição e velocidade na forma de entradas de impulso aos blocos. As condições iniciais de operação são definidas diretamente pelo procedimento de análise da transformada de Laplace desde o início – uma clara vantagem da análise dos modelos dinâmicos de circuitos ou de sistemas robóticos.

14.1 Soluções de Circuitos por Laplace

Para se mostrar a utilidade da transformada de Laplace na análise de circuitos, considere o circuito RL em série mostrado na Fig. 14.1. Em particular, determine a corrente, $i(t)$.

Utilizando a lei de Kirchhoff das tensões, pode-se escrever a equação diferencial no domínio do tempo,

$$v_F(t) = L \left(\frac{di(t)}{dt} \right) + Ri(t)$$

A equação diferencial complementar é

$$L \left(\frac{di(t)}{dt} \right) + Ri(t) = 0 \quad 14.1$$

que possui a solução

$$i_C(t) = K_C e^{-\alpha t}$$

A substituição da corrente $i_C(t)$ na equação complementar fornece a relação

$$R - \alpha L = 0$$

ou

$$\alpha = \frac{R}{L} = 1000$$

A solução particular possui a mesma forma que a função forçamento, $v_F(t)$:

$$i_p(t) = K_p$$

A substituição da corrente $i_p(t)$ na equação diferencial original fornece a expressão

$$1 = RK_p$$

ou

$$K_p = 1/R = 1/100$$

A solução final é a soma das correntes $i_p(t)$ e $i_C(t)$, isto é,

$$i(t) = K_p + K_C e^{-\alpha t} = \frac{1}{100} + K_C e^{-1000t}$$

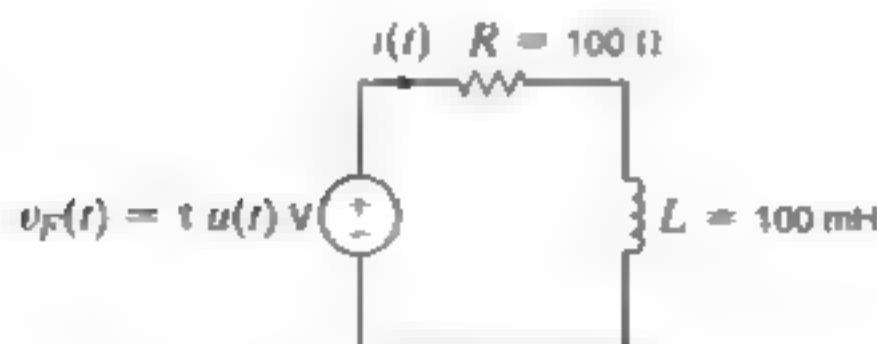


Figura 14.1 Rede RL em série.

Para se determinar a constante K_C , deve-se utilizar o valor da corrente em algum instante particular de tempo. Para $t < 0$, a função degrau unitário é nula, assim como a corrente. Em $t = 0$, o degrau unitário vale um; entretanto, o indutor força a corrente a permanecer nula instantaneamente. Portanto, em $t = 0$, pode-se escrever

$$i(0) = 0 = K_p + K_C$$

ou

$$K_C = -K_p = -\frac{1}{100}$$

Assim, a corrente é

$$i(t) = 10(1 - e^{-1000t})u(t) \text{ mA}$$

Apresenta-se, agora, um procedimento diferente para a solução do mesmo problema. Utilizando a Tabela 13.2, pode-se calcular a transformada de Laplace de ambos os lados da Eq. (14.1):

$$\mathcal{L}[v_F(t)] = V_F(s) = \mathcal{L}[sI(s) - i(0)] + RI(s)$$

Como o valor inicial da corrente no indutor é $i(0) = 0$, essa equação fica

$$\mathcal{L}[v_F(t)] = V_F(s) = \mathcal{L}[sI(s)] + RI(s)$$

O circuito fica, agora, representado por uma expressão algébrica no domínio s , e não por uma equação diferencial no domínio do tempo. Resolvendo para $I(s)$, tem-se

$$I(s) = \frac{V_F(s)}{sL + R} = \frac{1}{s[sL + R]}$$

Pode-se obter $i(t)$ utilizando a transformada inversa de Laplace. Inicialmente, expressa-se $I(s)$ como uma soma de produtos parciais

$$I(s) = \frac{1/L}{s[s + R/L]} = \frac{1}{sR} - \frac{1}{R[s + R/L]}$$

A transformada inversa é, simplesmente,

$$i(t) = \frac{1}{R}(1 - e^{-Rt/L})$$

Dados os valores dos componentes do circuito, mostrados na Fig. 14.1, a corrente pode ser expressa por

$$i(t) = 10(1 - e^{-1000t})u(t) \text{ mA}$$

que é exatamente a mesma obtida por meio do procedimento de equação diferencial. Observe, cuidadosamente, que a solução

através da transformada de Laplace fornece a solução completa em um único passo.

Foi mostrado que a transformada de Laplace pode ser utilizada para transformar uma equação diferencial em uma equação algébrica. Como as relações entre tensão e corrente para os resistores, os capacitores e os indutores envolvem apenas constantes, derivadas e integrais, pode-se representar e resolver qualquer circuito no domínio s .

14.2 Modelos dos Componentes de um Circuito

A técnica da transformada de Laplace empregada requer que as características terminais dos componentes de um circuito pos-

sam ser expressas através de expressões algébricas no domínio s . Essas características para o resistor, o capacitor e o indutor são agora examinadas.

A relação tensão-corrente para um resistor no domínio do tempo, utilizando a convenção passiva de sinais, é

$$v(t) = Ri(t) \quad 14.2$$

Utilizando a transformada de Laplace, essa relação no domínio s fica

$$V(s) = RI(s) \quad 14.3$$

Portanto, as representações desse componente no domínio do tempo e no domínio da frequência complexa ficam conforme mostrado na Fig. 14.2a.

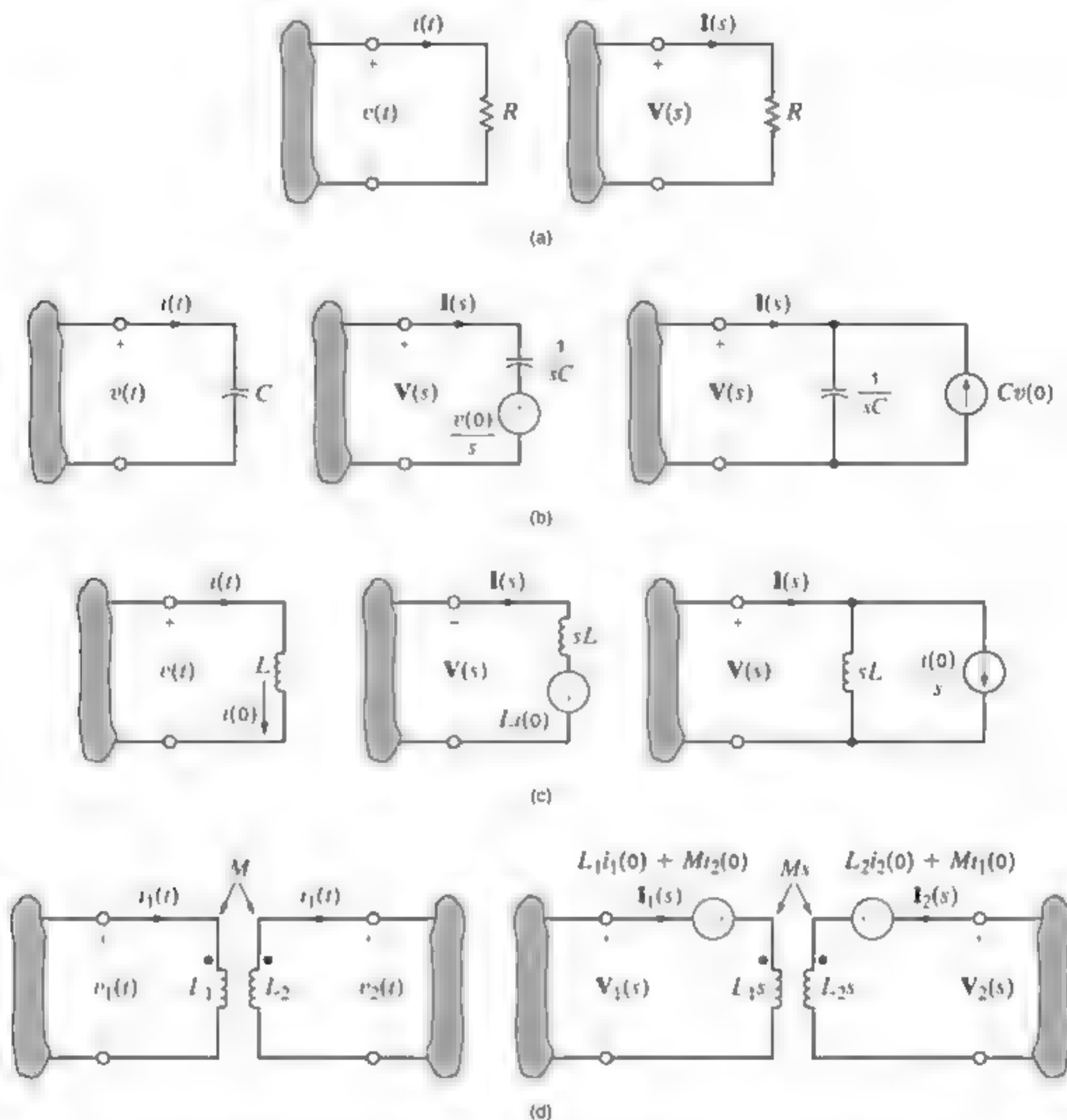


Figura 14.2 Representações dos componentes de circuito no domínio do tempo e no domínio s .

As relações no domínio do tempo para um capacitor utilizando a convenção passiva de sinais são

$$v(t) = \frac{1}{C} \int_0^t i(x) dx + v(0) \quad 14.4$$

$$i(t) = C \frac{dv(t)}{dt} \quad 14.5$$

Assim, as equações no domínio s para o capacitor são

$$V(s) = \frac{I(s)}{sC} + \frac{v(0)}{s} \quad 14.6$$

$$I(s) = sCV(s) - Cv(0) \quad 14.7$$

e, portanto, a representação no domínio s desse componente é a mostrada na Fig. 14.2b.

Para o indutor, as relações tensão-corrente utilizando a convenção passiva de sinais são

$$v(t) = L \frac{di(t)}{dt} \quad 14.8$$

$$i(t) = \frac{1}{L} \int_0^t v(x) dx + i(0) \quad 14.9$$

Portanto, as relações no domínio s são

$$V(s) = sLI(s) - Li(0) \quad 14.10$$

$$I(s) = \frac{V(s)}{sL} + \frac{i(0)}{s} \quad 14.11$$

A representação desse componente no domínio s é mostrada na Fig. 14.2c.

Utilizando a convenção passiva de sinais, pode-se verificar que as relações tensão-corrente dos indutores acoplados mostrados na Fig. 14.2d são

$$v_1(t) = L_1 \frac{di_1(t)}{dt} + M \frac{di_2(t)}{dt} \quad 14.12$$

$$v_2(t) = L_2 \frac{di_2(t)}{dt} + M \frac{di_1(t)}{dt}$$

Assim, as relações no domínio s são

$$V_1(s) = L_1 sI_1(s) - L_1 i_1(0) + M sI_2(s) - M i_2(0) \quad 14.13$$

$$V_2(s) = L_2 sI_2(s) - L_2 i_2(0) + M sI_1(s) - M i_1(0)$$

As fontes de tensão e de corrente independentes e dependentes também podem ser representadas por suas transformadas; isto é,

$$V_1(s) = \mathcal{L}[v_1(t)] \quad 14.14$$

$$I_2(s) = \mathcal{L}[i_2(t)]$$

e, se $v_1(t) = A i_2(t)$, que representa uma fonte de tensão controlada por corrente, então,

$$V_1(s) = A I_2(s) \quad 14.15$$

Observe, cuidadosamente, que o sentido das fontes de corrente e a polaridade das fontes de tensão na rede transformada dependem das condições iniciais. Se a polaridade da tensão inicial ou o sentido da corrente inicial for invertido, as fontes no circuito transformado, resultantes da condição inicial, também serão invertidas.

Estratégia para Solução de Problemas

Circuitos Representados no Domínio s

Etapa 1. Resolva o circuito para as tensões iniciais nos capacitores e correntes iniciais nos indutores. Essa etapa pode requerer a análise de um circuito desenhado com todos os capacitores substituídos por circuitos abertos e todos os indutores substituídos por curtos-circuitos. Essa análise é válida para $t < 0$.

Etapa 2. Desenhe o circuito no domínio s substituindo todos os elementos por uma representação no domínio s . Assegure-se de incluir as condições iniciais

dos capacitores e dos indutores, caso não sejam nulas.

Etapa 3. Utilize as técnicas de análise de circuitos apresentadas no texto para determinar as tensões e/ou correntes apropriadas. As tensões e/ou correntes serão descritas por uma razão de polinômios escritos na variável s .

Etapa 4. Calcule a transformada inversa de Laplace para converter as tensões e/ou correntes novamente para o domínio do tempo.

14.3 Técnicas de Análise

Uma vez definidas as representações dos componentes de um circuito no domínio s , pode-se analisar as redes utilizando um circuito transformado.

EXEMPLO 14.1

Dada a rede mostrada na Fig. 14.3a, construa o circuito equivalente no domínio s e determine a tensão de saída tanto no domínio s quanto no domínio do tempo.

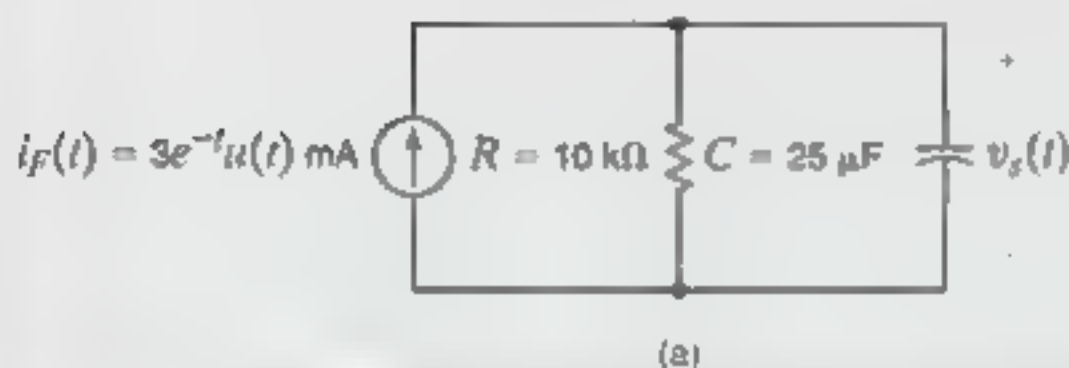
SOLUÇÃO

A rede no domínio s é mostrada na Fig. 14.3b. A tensão de saída pode ser escrita como

$$V_s(s) = \left[R // \frac{1}{sC} \right] I_F(s)$$

ou

$$V_s(s) = \left[\frac{1/C}{s + (1/RC)} \right] I_F(s)$$



Substituindo os valores dos componentes, a tensão $V_s(s)$ pode ser expressa por

$$V_s(s) = \left(\frac{40.000}{s + 4} \right) \left(\frac{0,003}{s + 1} \right) = \frac{120}{(s + 4)(s + 1)}$$

A expansão de $V_s(s)$ em frações parciais fornece

$$V_s(s) = \frac{120}{(s + 4)(s + 1)} = \frac{40}{s + 1} - \frac{40}{s + 4}$$

O cálculo da transformada inversa de Laplace fornece a representação no domínio do tempo, isto é,

$$v_s(t) = 40[e^{-t} - e^{-4t}]u(t) \text{ V}$$

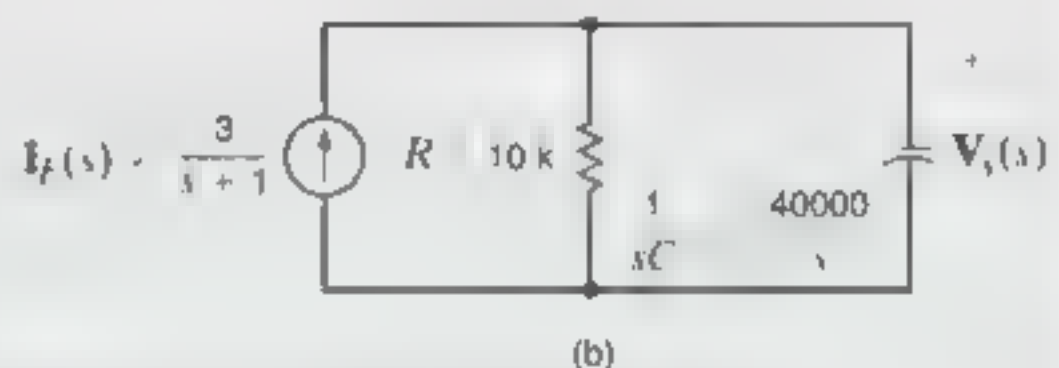


Figura 14.3 Representação de uma rede RC em paralelo no domínio do tempo e no domínio s .

Uma vez mostrado o uso da transformada de Laplace na solução de um circuito simples, pode-se considerar o caso mais geral. Note que na Fig. 14.2 foram apresentados dois modelos para o capacitor e para o indutor quando as condições iniciais

estão presentes. Considera-se, agora, um exemplo no qual é ilustrado o uso desses modelos na obtenção das equações dos nós e dos laços para o circuito.

EXEMPLO 14.2

Dados os circuitos mostrados nas Figs. 14.4a e b, deseja-se escrever as equações das malhas no domínio s para a rede da Fig. 14.4a e as equações dos nós no domínio s para a rede da Fig. 14.4b.

SOLUÇÃO

O circuito transformado para a rede da Fig. 14.4a é mostrado na Fig. 14.4c. As equações das malhas dessa rede são

$$\begin{aligned} \left(R_1 + \frac{1}{sC_1} + \frac{1}{sC_2} + sL_1 \right) I_1(s) - \left(\frac{1}{sC_2} + sL_1 \right) I_2(s) &= V_A(s) - \frac{v_1(0)}{s} + \frac{v_2(0)}{s} - L_1 i_1(0) \\ \left(\frac{1}{sC_2} + sL_1 \right) I_1(s) + \left(\frac{1}{sC_2} + sL_1 + sL_2 + R_2 \right) I_2(s) &= L_1 i_1(0) - \frac{v_2(0)}{s} - L_2 i_2(0) + V_B(s) \end{aligned}$$

O circuito transformado para a rede da Fig. 14.4b é mostrado na Fig. 14.4d. As equações dos nós dessa rede são

$$\begin{aligned} \left(G_1 + \frac{1}{sL_1} + sC_1 + \frac{1}{sL_2} \right) V_1(s) - \left(\frac{1}{sL_2} + sC_1 \right) V_2(s) &= I_1(s) - \frac{i_1(0)}{s} + \frac{i_2(0)}{s} - C_1 v_1(0) \\ - \left(\frac{1}{sL_2} + sC_1 \right) V_1(s) + \left(\frac{1}{sL_2} + sC_1 + G_2 + sC_2 \right) V_2(s) &= C_1 v_1(0) - \frac{i_2(0)}{s} - C_2 v_2(0) + I_B(s) \end{aligned}$$

[atenção]

Observe que as equações empregam a mesma convenção utilizada na análise CC.

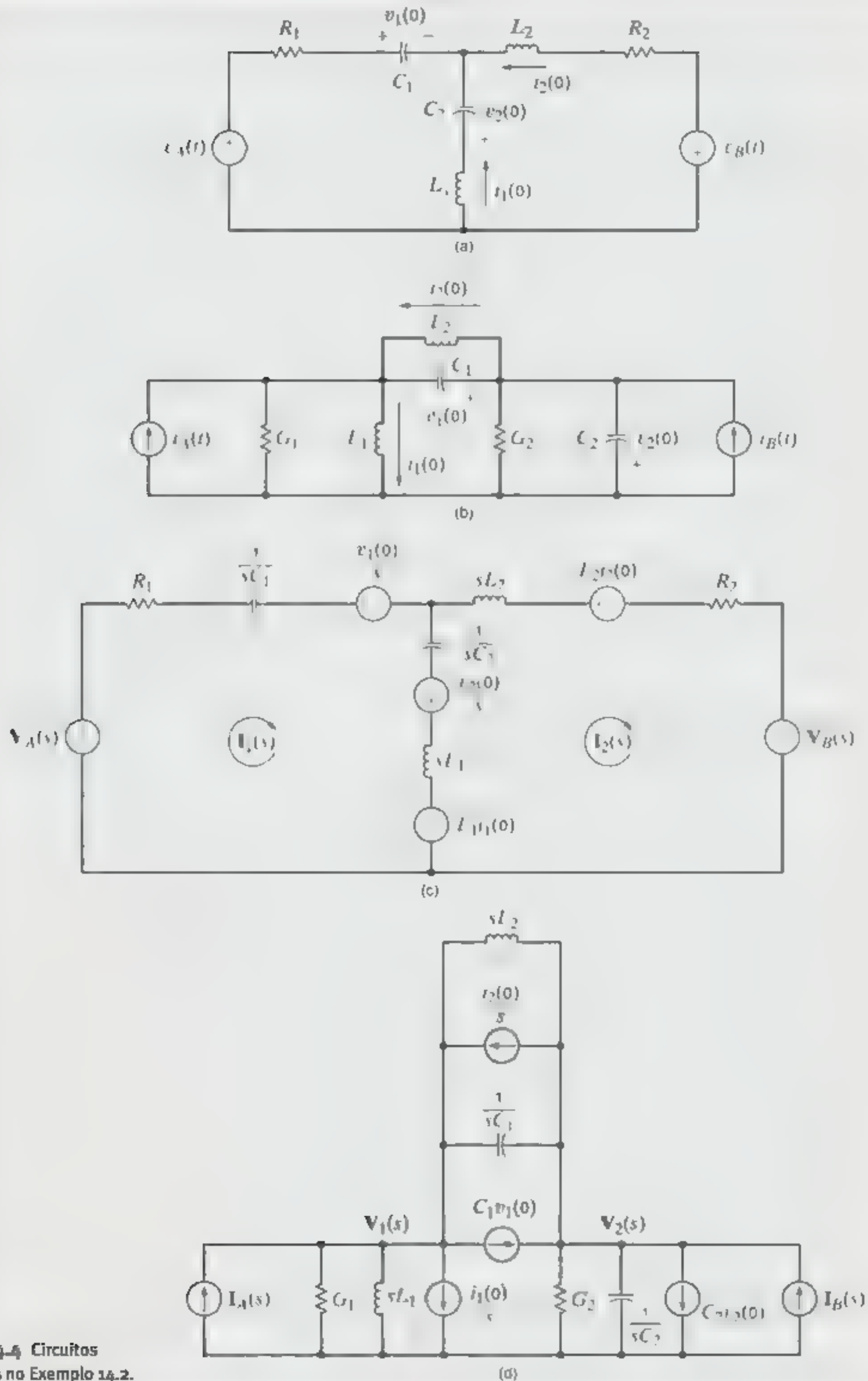


Figura 14-4 Circuitos utilizados no Exemplo 14.2.

O Exemplo 14.2 apresenta a maneira pela qual são empregadas duas representações dos componentes indutor e capacitor no domínio s quando as condições iniciais estão presentes. Nos exemplos a seguir, ilustra-se o uso de várias técnicas de análise

na obtenção da resposta completa de uma rede transformada. Os circuitos analisados foram especialmente escolhidos para demonstrar a aplicação da transformada de Laplace a circuitos com uma certa variedade de componentes passivos e ativos.

EXEMPLO 14.3

Analisa-se agora a rede mostrada na Fig. 14.5a. Deseja-se determinar a tensão de saída $v_s(t)$.

SOLUÇÃO

Para efeito de uma revisão das técnicas de análise apresentadas anteriormente neste texto, esse problema será resolvido utilizando a análise nodal, a análise das malhas, o método da superposição, a troca de fonte, o teorema de Thévenin e o teorema de Norton.

A rede transformada é mostrada na Fig. 14.5b. Ao se empregar a análise nodal, em vez de escrever as equações oriundas da aplicação da LKC nos nós cujas tensões são $V_1(s)$ e $V_2(s)$, será utilizado apenas o primeiro nó e o conceito de divisão de tensão para se obter a tensão de saída da rede.

A LKC para o nó cuja tensão é $V_1(s)$ é

$$\frac{4}{s} + \frac{V_1(s) - \frac{12}{s}}{s} + \frac{V_1(s)}{\frac{1}{s} + 2} = 0$$

A solução para $V_1(s)$ fornece

$$V_1(s) = \frac{4(s+3)(2s+1)}{s(s^2+2s+1)}$$

Empregando, agora, a divisão de tensão, tem-se

$$\begin{aligned} V_2(s) &= V_1(s) \left[\frac{2}{\frac{1}{s} + 2} \right] = V_1(s) \left(\frac{2s}{2s+1} \right) \\ &= \frac{8(s+3)}{(s+1)^2} \end{aligned}$$

Por meio da análise das malhas, observa-se que a corrente $I_1(s)$ passa pela fonte de corrente e, portanto, a LKT para o laço do lado direito fornece

$$\frac{12}{s} - [I_2(s) - I_1(s)]s - \frac{I_2(s)}{s} - 2I_2(s) = 0$$

Todavia, $I_1(s) = 4/s$ e, assim,

$$I_2(s) = \frac{4(s+3)}{(s+1)^2}$$

Portanto,

$$V(s) = \frac{8(s+3)}{(s+1)^2}$$

É interessante notar que as equações não dependem do resistor de $3\ \Omega$. Além disso, ele também não influencia as demais análises. Por quê?

Utilizando o princípio da superposição, considera-se, inicialmente, que a fonte de corrente atua sozinha conforme mostrado na Fig. 14.5c. A aplicação da divisão de corrente fornece

$$V'_1(s) = \left[\frac{\frac{4}{s}}{s + \frac{1}{s} + 2} \right] \quad (2)$$

$$= \frac{4s}{s^2 + 2s + 1}$$

Com a fonte de tensão atuando isoladamente, conforme mostrado na Fig. 14.5d, obtém-se

$$V''_1(s) = \left[\frac{\frac{12}{s}}{s + \frac{1}{s} + 2} \right] \quad (2)$$

$$= \frac{24}{s^2 + 2s + 1}$$

Logo,

$$\begin{aligned} V_1(s) &= V'_1(s) + V''_1(s) \\ &= \frac{8(s+3)}{(s+1)^2} \end{aligned}$$

Aplicando-se a troca da fonte, transforma-se a fonte de tensão e o indutor em série em uma fonte de corrente com o indutor em paralelo, conforme mostrado na Fig. 14.5e. A soma das fontes de corrente e a aplicação da divisão de corrente fornecem

$$\begin{aligned} V(s) &= \left(\frac{12}{s} + \frac{4}{s} \right) \left[\frac{s}{s + \frac{1}{s} + 2} \right] \quad (2) \\ &= \left(\frac{12}{s} + \frac{4}{s} \right) (2) \\ &= \frac{8(s+3)}{(s+1)^2} \\ V(s) &= \frac{8(s+3)}{(s+1)^2} \end{aligned}$$

Para aplicar o teorema de Thévenin, deve-se obter, inicialmente, a tensão do circuito aberto mostrado na Fig. 14.5f. A tensão $V_{ca}(s)$ pode, assim, ser expressa por

$$\begin{aligned} V_{ca}(s) &= \left(\frac{4}{s} \right) (s) + \frac{12}{s} \\ &= \frac{4s + 12}{s} \end{aligned}$$

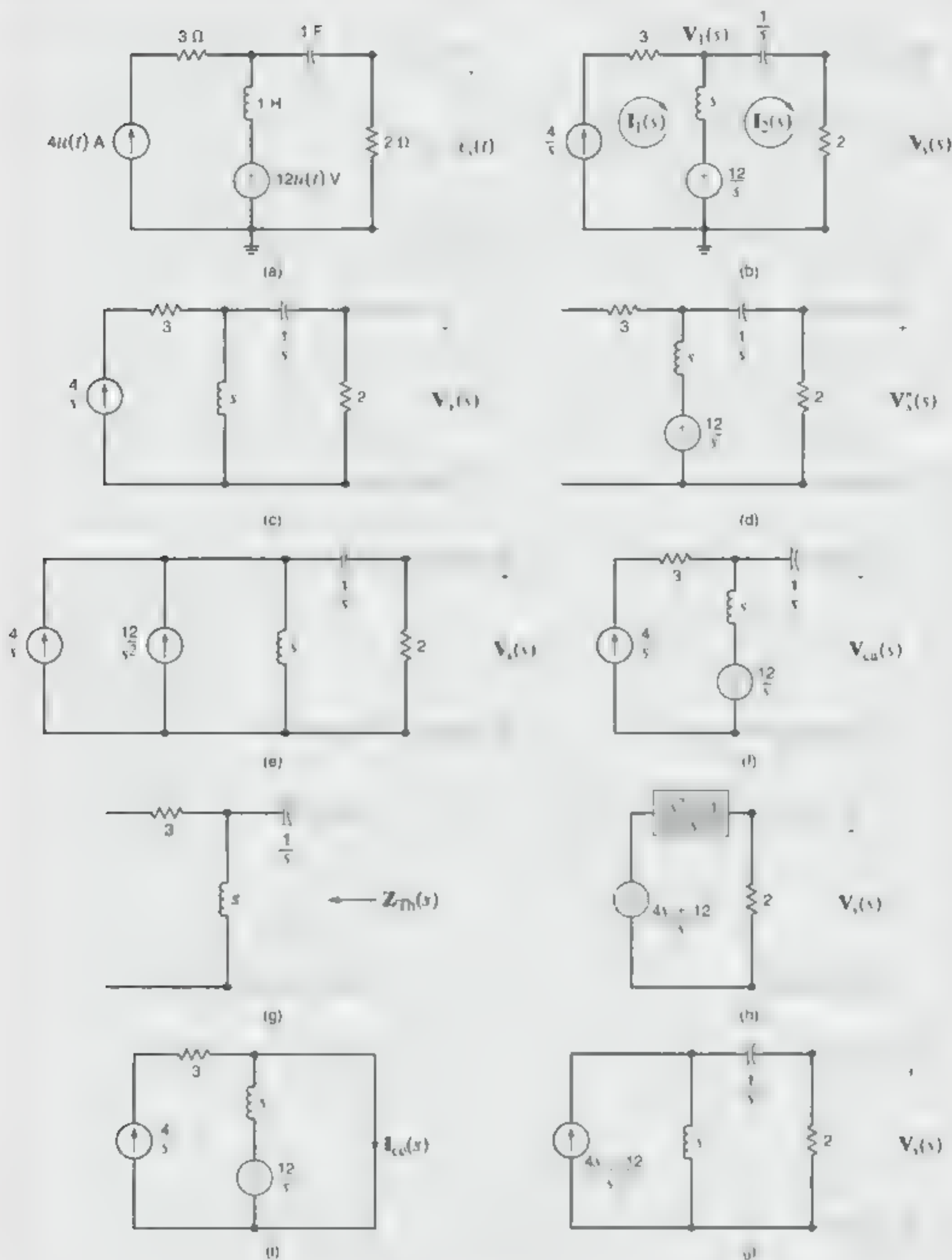


Figura 14.5 Circuitos utilizados no Exemplo 14.3.

A impedância equivalente de Thévenin, deduzida da Fig. 14.5g, é

$$Z_{Th}(s) = \frac{1}{s} + s$$

$$= \frac{s^2 + 1}{s}$$

Conectando-se, agora, o circuito equivalente de Thévenin à carga tem-se o circuito mostrado na Fig. 14.5h. Assim, a aplicação da divisão de tensão fornece

$$V(s) = \frac{4s + 12}{s} \left[\frac{2}{\frac{s^2 + 1}{s} + 2} \right]$$

$$= \frac{8(s + 3)}{(s + 1)^2}$$

Por simplicidade, ao se aplicar o teorema de Norton, quebra-se a rede à direita da primeira malha. Nesse caso, a corrente do curto-circuito é obtida a partir do circuito mostrado na Fig. 14.5i, isto é,

$$I_{cc}(s) = \frac{12}{s} + \frac{4}{s}$$

$$= \frac{4s + 12}{s^2}$$

A impedância equivalente de Thévenin nessa aplicação do teorema de Norton é $Z_{Th}(s) = s$. A conexão do circuito equivalente de Norton ao restante da rede original fornece o circuito mostrado na Fig. 14.5j. Assim,

$$V(s) = \frac{4s + 12}{s} \left[\frac{s}{s + \frac{1}{s} + 2} \right] \quad (2)$$

$$= \frac{8(s + 3)}{(s + 1)^2}$$

Finalmente, a tensão $V_A(s)$ pode, agora, ser transformada para $v_A(t)$. A tensão $V_A(s)$ pode ser escrita como

$$V_A(s) = \frac{8(s + 3)}{(s + 1)^2} = \frac{K_{11}}{(s + 1)^2} + \frac{K_{12}}{s + 1}$$

Calculando as constantes, obtém-se

$$8(s + 3)|_{s=-1} = K_{11}$$

$$16 = K_{11}$$

e

$$\left. \frac{d}{ds} [8(s + 3)] \right|_{s=-1} = K_{12}$$

$$8 = K_{12}$$

Portanto,

$$v_A(t) = (16te^{-t} + 8e^{-t})u(t) \text{ V}$$

EXEMPLO 14.4

Considere a rede mostrada na Fig. 14.6a. Deseja-se determinar a tensão de saída $v_1(t)$.

SOLUÇÃO

Ao se iniciar a solução do problema, são observados dois aspectos. Primeiro, devido ao fato de a fonte $12u(t)$ estar conectada entre $v_1(t)$ e $v_2(t)$, tem-se um supernó. Segundo, se a tensão $v_2(t)$ for conhecida, $v_1(t)$ pode ser facilmente obtida pela divisão de tensão. Logo, a análise nodal pode ser utilizada em combinação com a divisão de tensão para se obter a solução. Em seguida, para efeito de comparação, determina-se $v_1(t)$ utilizando o teorema de Thévenin.

[atenção]

Soma das correntes que saem do supernó.

A rede transformada é mostrada na Fig. 14.6b. LKC para o supernó é

$$\frac{V(s)}{2} + \frac{V_1(s)}{2} - 2I(s) + \frac{V_2(s)}{s + 1} = 0$$

Entretanto,

$$I(s) = \frac{V(s)}{2}$$

e

$$V_1(s) = V_2(s) - \frac{12}{s}$$

A substituição das duas últimas equações na primeira equação fornece

$$\left[\frac{V(s)}{2} - \frac{12}{2s} \right] + \frac{V_2(s)}{2} - \frac{V_2(s)}{s + 1} = 0$$

ou

$$V_2(s) = \frac{12(s + 1)(s + 3)}{s(s^2 + 3s + 5)}$$

Empregando o divisor de tensão, obtém-se

$$V_1(s) = V_2(s) \frac{1}{s + 1}$$

$$= \frac{12(s + 3)}{s(s^2 + 4s + 5)}$$

Para a aplicação do teorema de Thévenin, quebra-se a rede à direita da fonte de corrente dependente, conforme mostrado na Fig. 14.6c. A equação resultante da aplicação da LKC para o supernó fornece

$$\frac{V_{ca}(s) - \frac{12}{s}}{2} + \frac{V_{ca}(s) - \frac{12}{s}}{2} - 2I'(s) = 0$$

$$\frac{V_{ca}(s)}{2} + \frac{V_{ca}(s)}{2} - 2I'(s) = 0$$

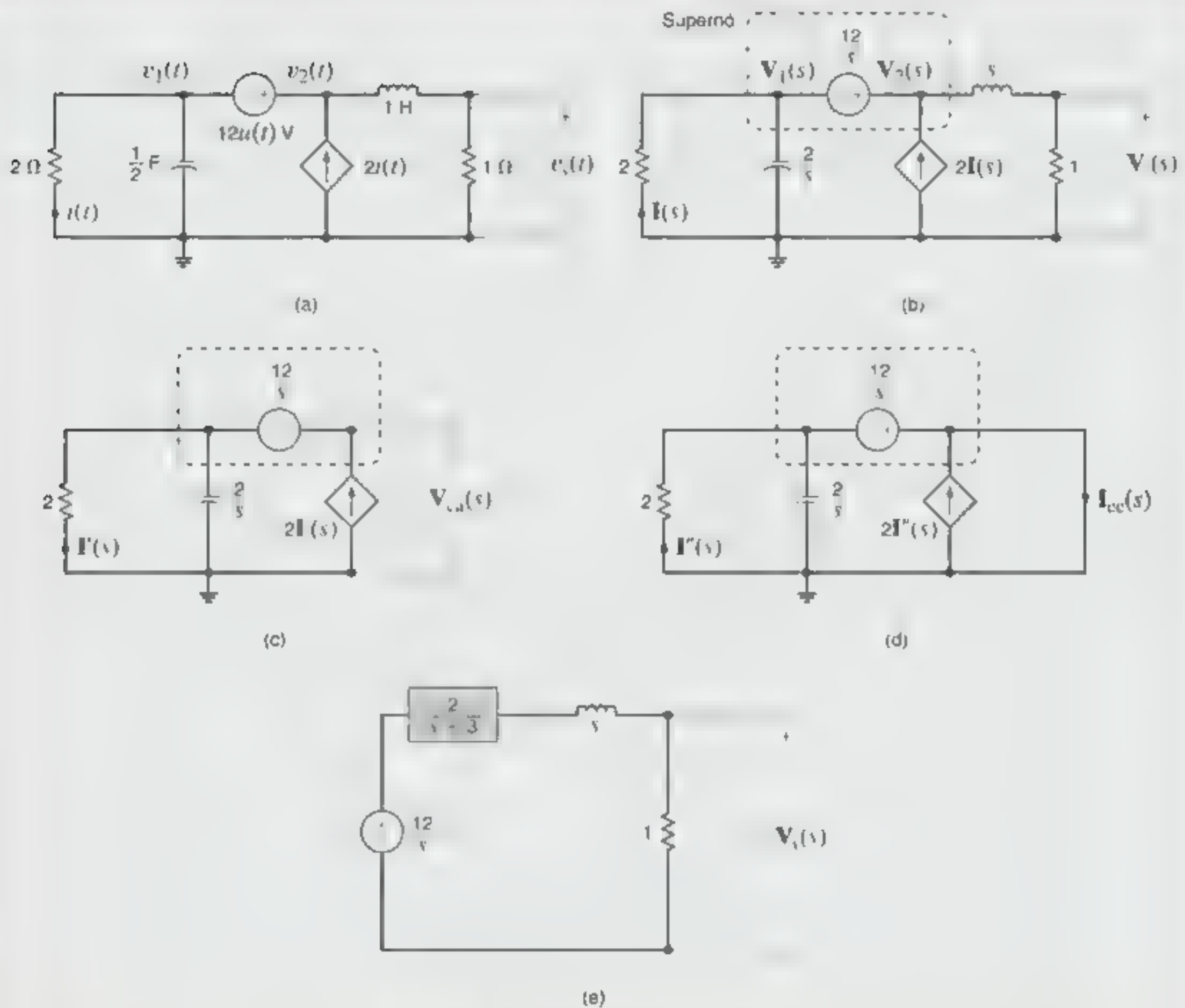


Figura 14.6 Circuitos utilizados no Exemplo 14.4.

em que

$$I'(s) = \left(\frac{V_{cs}(s) - \frac{12}{s}}{2} \right)$$

A solução dessa equação para $V_{cs}(s)$ fornece

$$V_{cs}(s) = \frac{12}{s}$$

A corrente de curto-circuito é obtida com base na rede mostrada na Fig. 14.6d como

$$I_{cc}(s) = 2I''(s) + \frac{\frac{12}{s}}{2 + \frac{2}{s}}$$

em que

$$I''(s) = \frac{\frac{12}{s}}{2}$$

A solução dessa equação para $I_{cc}(s)$ fornece

$$I_{cc}(s) = \frac{6(s+3)}{s}$$

Portanto, a impedância equivalente de Thévenin pode ser expressa por

$$Z_{Th}(s) = \frac{V_2(s)}{I_{cc}(s)} = \frac{12}{\frac{6(s+3)}{s}} = \frac{s}{s+3}$$

Conectando agora o circuito equivalente de Thévenin ao que restou da rede original, obtém-se o circuito mostrado na Fig 14.6e. Utilizando a divisão de tensão, tem-se

$$V_{co}(s) = \frac{1}{\frac{2}{s+3} + s+1} \left(\frac{12}{s} \right)$$

$$= \frac{12(s+3)}{s(s^2+4s+5)}$$

ou

$$V_{co}(s) = \frac{12(s+3)}{s(s+2-j1)(s+2+j1)}$$

Para se obter a transformada inversa, a função é escrita como

$$\frac{12(s+3)}{s(s+2-j1)(s+2+j1)} = \frac{K_0}{s} + \frac{K_1}{s+2-j1} + \frac{K_1^*}{s+2+j1}$$

Calculando as constantes, obtém-se

$$\left. \frac{12(s+3)}{s^2+4s+5} \right|_{s=0} = K_0$$

$$\frac{36}{5} = K_0$$

e

$$\left. \frac{12(s+3)}{s(s+2+j1)} \right|_{s=2-j1} = K_1$$

$$3,79/161,57^\circ = K_1$$

Portanto,

$$v_o(t) = [7,2 + 7,58e^{-2t} \cos(t + 161,57^\circ)]u(t) \text{ V}$$

Avaliação do Aprendizado

E14.1 Determine a corrente $i_x(t)$ da rede mostrada na Fig. E14.1 utilizando as equações dos nós.

RESPOSTA:

$$i_x(t) = 6,53e^{-t/4} \cos[(\sqrt{15}/4)t - 156,72^\circ]u(t) \text{ A.}$$

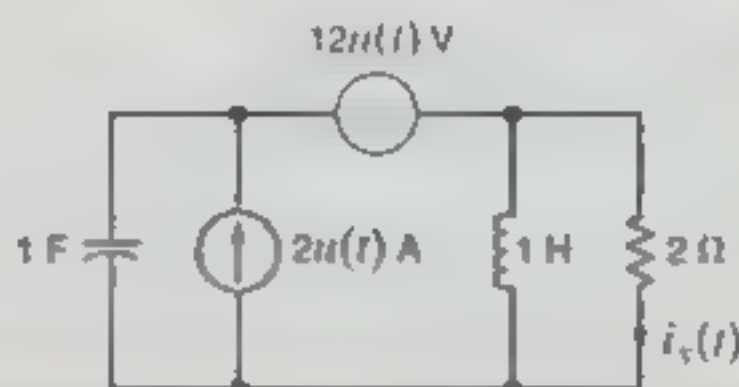


Figura E14.1

E14.2 Determine a tensão $v_x(t)$ da rede mostrada na Fig. E14.2, para $t > 0$, utilizando a análise nodal.

RESPOSTA:

$$v_x(t) = (10,64e^{-0,75t} \cos(0,97t - 19,84^\circ))u(t) \text{ V.}$$

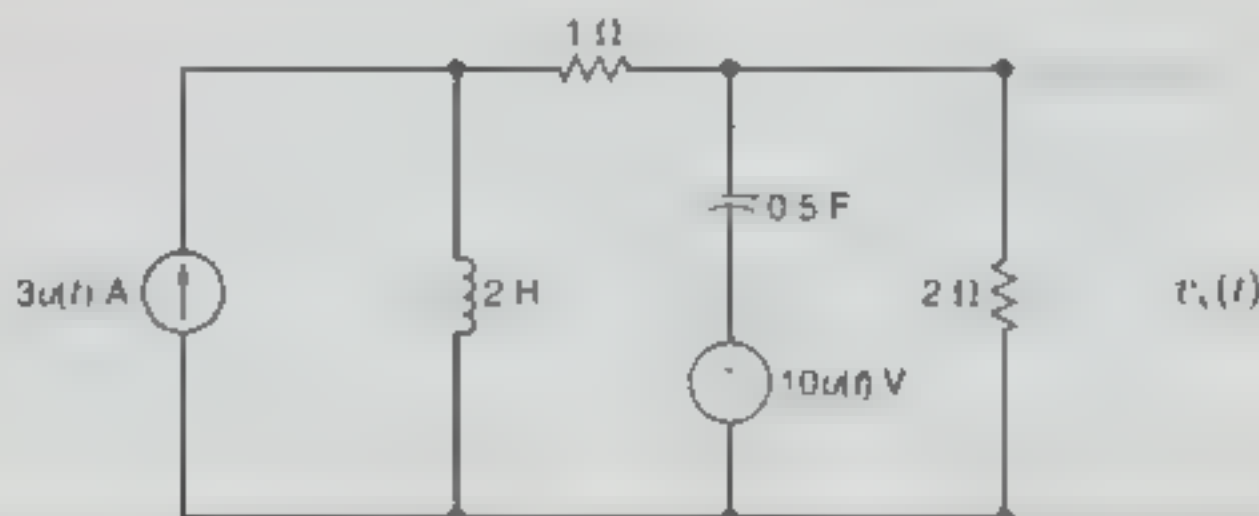


Figura E14.2

E14.3 Determine a tensão $v_x(t)$ da rede mostrada na Fig. E14.3 utilizando as equações dos laços.

RESPOSTA:

$$v_x(t) = (4 - 8,93e^{-3,79t} + 4,93e^{-0,27t})u(t) \text{ V}$$

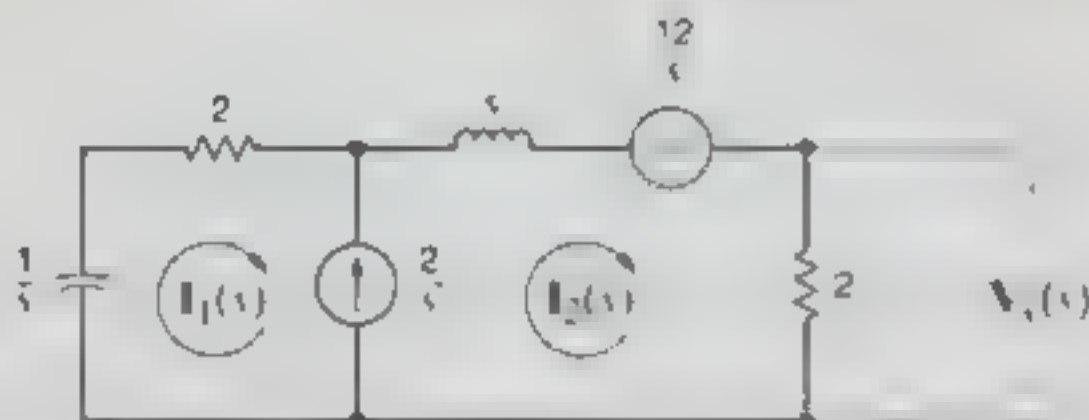


Figura E14.3

E14.4 Determine a tensão $v_s(t)$ da rede mostrada na Fig. E14.2 utilizando a análise das malhas.

RESPOSTA:

$$v_s(t) = (10,64e^{-0,75t} \cos(0,97t - 19,84^\circ))u(t) \text{ V}$$

E14.5 Utilize o teorema de Thévenin para determinar a tensão $v_s(t)$ da rede mostrada na Fig. E14.2, para $t > 0$.

RESPOSTA:

$$v_s(t) = (10,64e^{-0,75t} \cos(0,97t - 19,84^\circ))u(t) \text{ V.}$$

E14.6 Utilize o teorema de Thévenin para determinar a tensão $v_s(t)$ da rede mostrada na Fig. E14.6, para $t > 0$.

RESPOSTA:

$$v_s(t) = (21,5 + 12,29e^{-1,267t})u(t) \text{ V.}$$

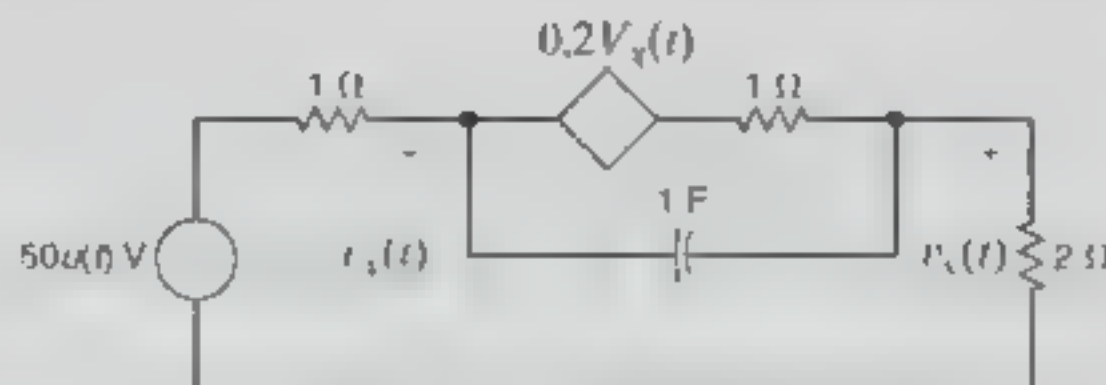


Figura E14.6

Ilustraremos, agora, o uso da transformada de Laplace na análise transiente dos circuitos. Serão analisadas redes similares àsquelas consideradas no Capítulo 7. O procedimento a ser adotado será o de inicialmente determinar as condições iniciais para os capacitores e para os indutores da rede e, em

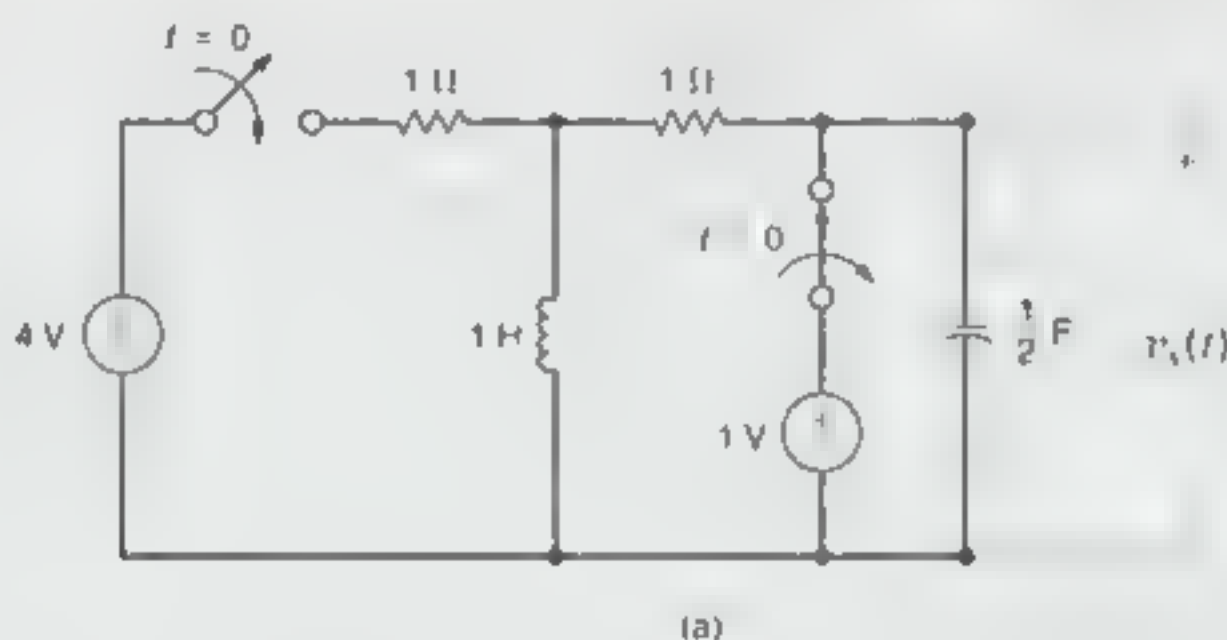
seguida, empregar os modelos dos componentes especificados no início deste capítulo juntamente com as técnicas de análise de circuitos para se obter uma solução. O exemplo a seguir ilustra esse procedimento.

EXEMPLO 14.5

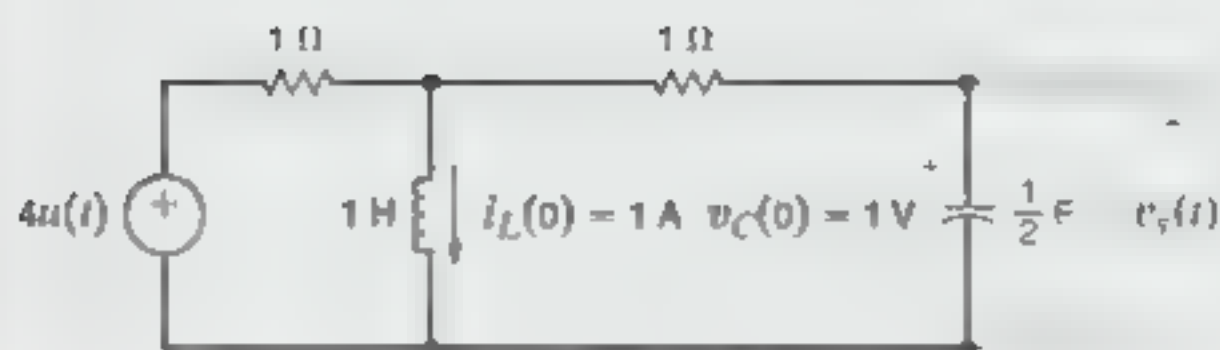
Determine a tensão de saída da rede mostrada na Fig. 14.7a para $t > 0$.

SOLUÇÃO

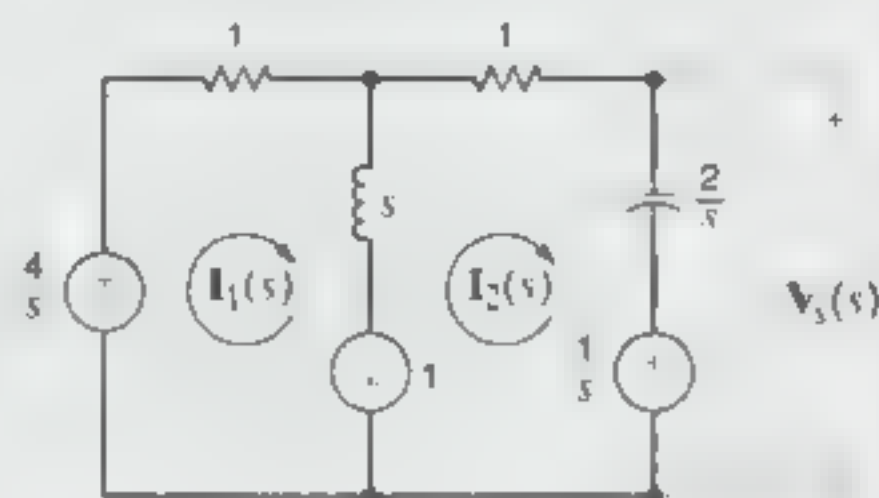
Em $t = 0$ a tensão inicial entre os terminais do capacitor é de 1 V, e a corrente inicial que passa pelo indutor é de 1 A.



(a)



(b)



(c)

Figura 14.7 Circuitos empregados no Exemplo 14.5.

O circuito para $t > 0$ é mostrado na Fig. 14.7b com a indicação das condições iniciais. A rede transformada é mostrada na Fig. 14.7c.

As equações das malhas para a rede transformada são

$$(s + 1)I_1(s) - sI_2(s) = \frac{4}{s} + 1$$

$$sI_1(s) + \left(s + \frac{2}{s} + 1\right)I_2(s) = \frac{-1}{s} - 1$$

que podem ser escritas na forma matricial como

$$\begin{bmatrix} s+1 & -s \\ -s & s^2+s+2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1(s) \\ I_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{s+4}{s} \\ \frac{-(s+1)}{s} \end{bmatrix}$$

Resolvendo para as correntes, obtém-se

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} I_1(s) \\ I_2(s) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} s+1 & -s \\ -s & s^2+s+2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{s+4}{s} \\ \frac{-(s+1)}{s} \end{bmatrix} \\ &= \frac{s}{2s^2+3s+2} \begin{bmatrix} s^2+s+2 & s \\ s & s+1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{s+4}{s} \\ \frac{-(s+1)}{s} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{-4s^2+6s+8}{s(2s^2+3s+2)} \\ \frac{2s-1}{2s^2+3s+2} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Assim, a tensão de saída é expressa por

$$\begin{aligned} V_o(s) &= \frac{2}{s} I_2(s) + \frac{1}{s} \\ &= \frac{2}{s} \left(\frac{2s-1}{2s^2+3s+2} \right) + \frac{1}{s} \\ &= \frac{s+\frac{7}{2}}{s^2+\frac{3}{2}s+1} \end{aligned}$$

Essa função pode ser escrita na forma de uma expansão em frações parciais como

$$\frac{s+\frac{7}{2}}{s^2+\frac{3}{2}s+1} = \frac{K_1}{s+\frac{3}{4}+j(\sqrt{7}/4)} + \frac{K_1^*}{s+\frac{3}{4}-j(\sqrt{7}/4)}$$

Calculando as constantes, tem-se

$$\begin{aligned} \frac{s+\frac{7}{2}}{s+\frac{3}{4}+j(\sqrt{7}/4)} \bigg|_{s=-\frac{3}{4}-j(\sqrt{7}/4)} &= K_1 \\ 2,14/-76,5^\circ &= K_1 \end{aligned}$$

Portanto,

$$v_o(t) = \left[4,29e^{-(3/4)t} \cos\left(\frac{\sqrt{7}}{4}t - 76,5^\circ\right) \right] u(t) \text{ V}$$

Avaliação do Aprendizado

E14.7 Resolva o Problema de Avaliação do Aprendizado E7.3 utilizando as transformadas de Laplace.

RESPOSTA:
 $i_1(t) = (1e^{-4t})u(t) \text{ A.}$

E14.8 Resolva o Problema de Avaliação do Aprendizado E7.6 utilizando as transformadas de Laplace.

RESPOSTA:
 $v_o(t) = \left(6 - \frac{10}{3}e^{-3t}\right)u(t) \text{ V.}$

E14.9 Determine a corrente $i_x(t)$ do circuito mostrado na Fig. E14.9 para $t > 0$.

RESPOSTA:
 $i_x(t) = (-2e^{-2t} + e^{-4t})u(t) \text{ A.}$

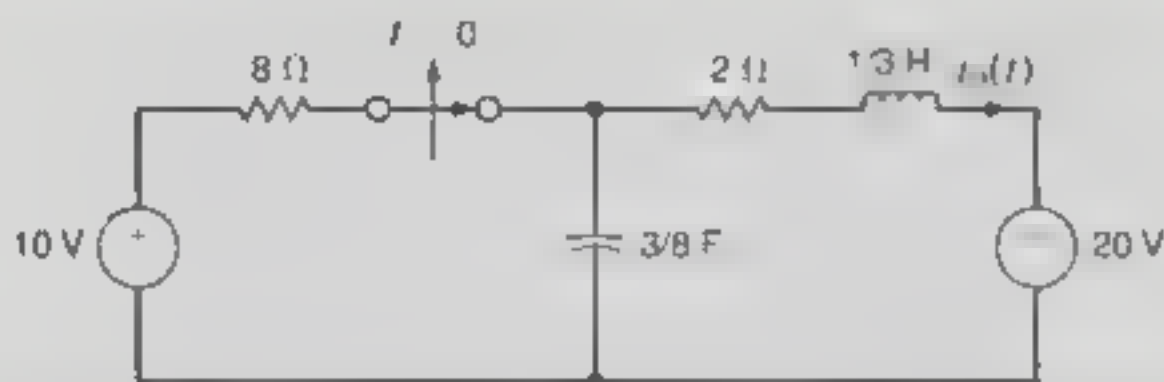


Figura E14.9

E14.10 Determine a tensão $v_s(t)$ do circuito mostrado na Fig. E14.10 para $t > 0$.

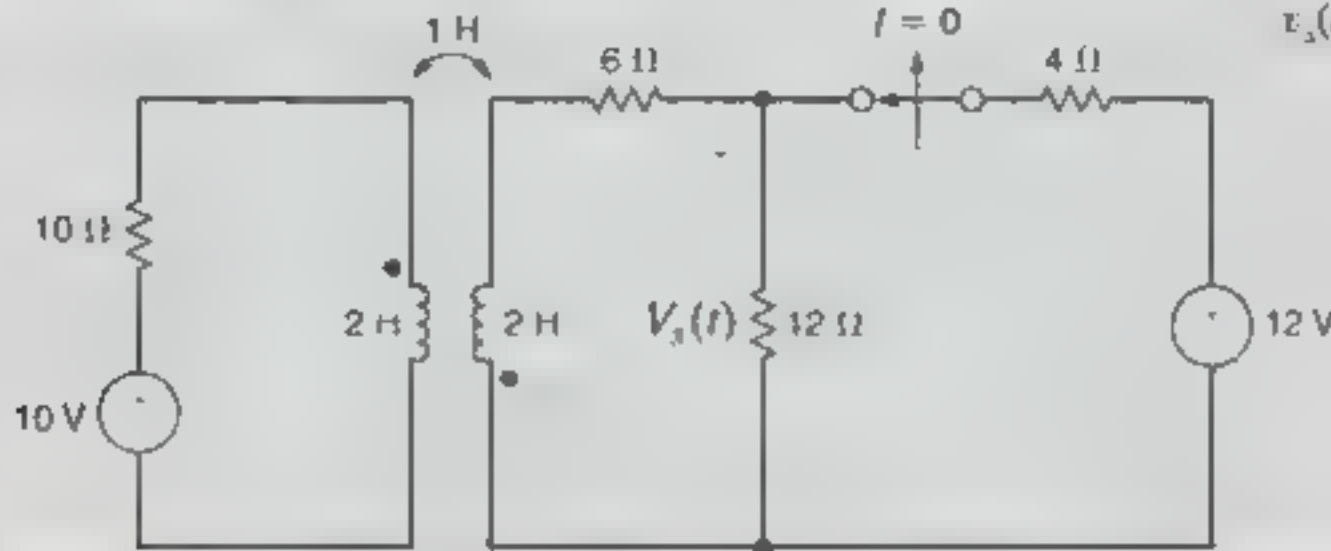


Figura E14.10

$$v_s(t) = (2,93e^{-3t} - 9,07e^{-4,54t})u(t) \text{ V}$$

E14.11 A tensão de saída do circuito mostrado na Fig. E14.11 é definida pela curva do gráfico. Determine a tensão de saída $v_s(t)$.

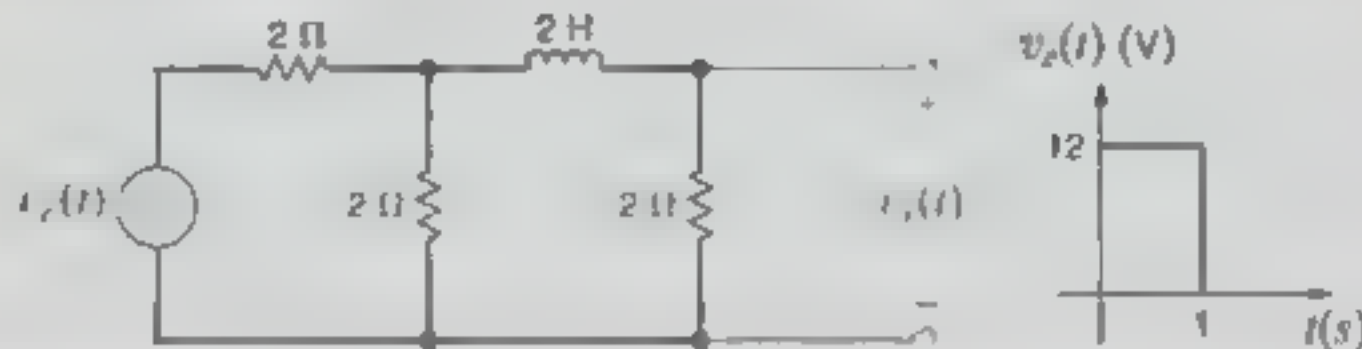


Figura E14.11

RESPOSTA:

$$v_s(t) = [(4 - 4e^{-1,5t})u(t) - (4 - 4e^{-1,5(t-1)})u(t-1)] \text{ V.}$$

14.4 Função de Transferência

No Capítulo 12 introduzimos o conceito de função de rede ou função de transferência. Basicamente, essa função representa a razão entre uma variável de saída e uma variável de entrada. Caso ambas as variáveis estejam associadas à tensão, a função de transferência será um ganho em tensão. Caso ambas as variáveis sejam correntes, a função de transferência será um ganho em corrente. Se uma variável é uma tensão e a outra uma corrente, a função de transferência representa uma admitância ou impedância de transferência.

Ao se determinar uma função de transferência, todas as condições iniciais são consideradas nulas. Além disso, se a saída for gerada por mais de uma fonte de entrada em uma rede, o princípio da superposição pode ser empregado em combinação com a função de transferência de cada fonte.

Para apresentar esse conceito de maneira mais formal, pode-se admitir que a relação entrada/saída de um circuito linear seja

$$b_n \frac{d^n v(t)}{dt^n} + b_{n-1} \frac{d^{n-1} v(t)}{dt^{n-1}} + \dots + b_1 \frac{dv(t)}{dt} + b_0 v(t) = a_m \frac{d^m x(t)}{dt^m} + a_{m-1} \frac{d^{m-1} x(t)}{dt^{m-1}} + \dots + a_1 \frac{dx(t)}{dt} + a_0 x(t)$$

Sendo todas as condições iniciais nulas, a transformada dessa equação será

$$(b_n s^n + b_{n-1} s^{n-1} + \dots + b_1 s + b_0)Y(s) = (a_m s^m + a_{m-1} s^{m-1} + \dots + a_1 s + a_0)X(s)$$

ou

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{a_m s^m + a_{m-1} s^{m-1} + \dots + a_1 s + a_0}{b_n s^n + b_{n-1} s^{n-1} + \dots + b_1 s + b_0}$$

Essa relação entre $Y(s)$ e $X(s)$ é chamada de *função de transferência* ou *função de rede*, e será representada por $H(s)$; isto é,

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = H(s)$$

ou

$$Y(s) = H(s)X(s) \quad 14.16$$

Essa equação estabelece que a resposta da saída $Y(s)$ é igual à função de rede multiplicada pela entrada $X(s)$. Note que se $x_s(t) = \delta(t)$, e, portanto, $X(s) = 1$, a resposta ao impulso será igual à transformada inversa de Laplace da função de rede. Esse é um conceito extremamente importante, uma vez que ele mostra que, ao se conhecer a resposta ao impulso de uma rede, pode-se obter a resposta devida a uma outra função forçamento utilizando a Eq. (14.16).

Neste ponto, é conveniente rever-se, rapidamente, a resposta natural das redes de primeira e segunda ordem. Demonstrou-se no Capítulo 7 que, se apenas um único componente armazenador estiver presente no circuito, a resposta natural a uma condição inicial será sempre da forma

$$x(t) = X_0 e^{-t/\tau}$$

em que $x(t)$ pode ser tanto a tensão $v(t)$ quanto a corrente $i(t)$, X_0 é o valor inicial de $x(t)$, e τ é a constante de tempo da rede. Verificou-se também que a resposta natural de uma rede de se-

gunda ordem é controlada pelas raízes da *equação característica*, que possui a forma

$$s^2 + 2\zeta\omega_0 s + \omega_0^2 = 0$$

em que ζ é a *fração de amortecimento* e ω_0 é a *frequência natural não amortecida*. Esses dois importantes fatores, ζ e ω_0 , controlam a resposta e, basicamente, podem ocorrer três situações de interesse.

CASO 1, $\zeta > 1$: REDE SUPERAMORTECIDA As raízes da equação característica são $s_1, s_2 = -\zeta\omega_0 \pm \omega_0 \sqrt{\zeta^2 - 1}$ e, portanto, a resposta da rede possui a forma

$$x(t) = K_1 e^{-(\zeta\omega_0 + \omega_0 \sqrt{\zeta^2 - 1})t} + K_2 e^{-(\zeta\omega_0 - \omega_0 \sqrt{\zeta^2 - 1})t}$$

CASO 2, $\zeta < 1$: REDE SUBAMORTECIDA As raízes da equação característica são $s_1, s_2 = -\zeta\omega_0 \pm j\omega_0 \sqrt{1 - \zeta^2}$ e, portanto, a resposta da rede possui a forma

$$x(t) = K e^{-\zeta\omega_0 t} \cos(\omega_0 \sqrt{1 - \zeta^2} t + \phi)$$

CASO 3, $\zeta = 1$: REDE CRITICAMENTE AMORTECIDA As raízes da equação característica são $s_1, s_2 = -\omega_0$ e, assim, a resposta é da forma

$$x(t) = K_1 t e^{-\omega_0 t} + K_2 e^{-\omega_0 t}$$

O leitor deve observar que a equação característica é o denominador da função de transferência $H(s)$, e as raízes dessa

equação, que são os polos da rede, determinam a forma da resposta natural da rede.

Um procedimento conveniente para se mostrar os polos e os zeros na forma gráfica é por meio do uso do diagrama de polos e zeros. O diagrama de polos e zeros de uma função pode ser obtido utilizando o que é normalmente chamado de *plano complexo* ou *plano s* . No plano complexo a abscissa indica o valor real σ , e a ordenada indica a componente imaginária $j\omega$. Os zeros são representados por '0' e os polos são representados por 'x'. Embora haja uma preocupação apenas com os polos e zeros finitos definidos pela função de rede ou pela função resposta, cabe salientar que uma função racional deve possuir o mesmo número de polos e zeros. Portanto, se $n > m$, existirão $n - m$ zeros em um ponto que tende a infinito, e se $n < m$, existirão $m - n$ polos que tendem a infinito. Um engenheiro de sistemas pode extrair diversas conclusões sobre a operação de uma rede ou sistema simplesmente examinando seu diagrama de polos e zeros.

De modo a correlacionar a resposta natural de uma rede a uma condição inicial por meio da localização dos polos da rede, a Fig. 14.8 ilustra a correspondência para todos os três casos: rede superamortecida, rede subamortecida e rede criticamente amortecida. Note que se os polos da rede são reais e distintos, a resposta é lenta e, portanto, $x(t)$ demora algum tempo para atingir o zero. Se os polos da rede forem complexos conjugados, a resposta é rápida; entretanto, ela apresenta um sobrevalor (*overshoot*) e, eventualmente, amortece sem oscilar. A linha divisória entre os casos superamortecido e subamortecido é o caso criticamente amortecido, no qual as raízes são reais e iguais. Nesse caso, a resposta transiente termina tão rapidamente quanto possível, sem apresentar sobrevalor.

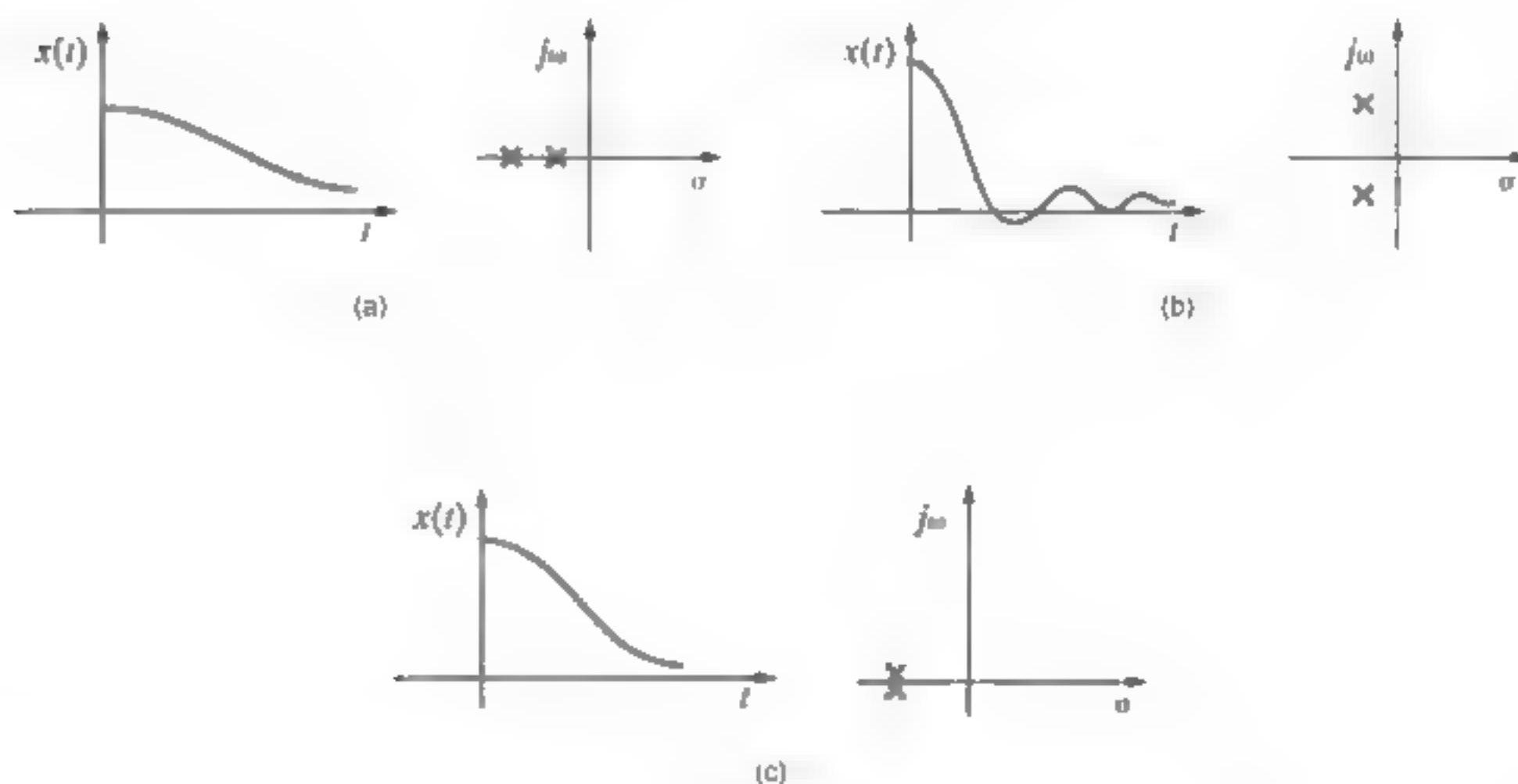


Figura 14.8 Resposta natural de uma rede de segunda ordem com a correspondente localização de seus polos para três casos: (a) superamortecido, (b) subamortecido e (c) criticamente amortecido.

EXEMPLO 14.6

Se a resposta ao impulso de uma rede é $h(t) = e^{-t}$, determine a resposta $v_s(t)$ referente a uma entrada $v_e(t) = 10e^{-2t}u(t)$ V

SOLUÇÃO

As variáveis transformadas são

$$H(s) = \frac{1}{s+1}$$

$$V_e(s) = \frac{10}{s+2}$$

Portanto,

$$V_s(s) = H(s)V_e(s)$$

$$= \frac{10}{(s+1)(s+2)}$$

e, assim,

$$v_s(t) = 10(e^{-t} - e^{-2t})u(t) \text{ V}$$

A importância da função de transferência está no fato de ela fornecer ao engenheiro de sistemas uma grande fonte de conhe-

cimento sobre a operação do sistema, uma vez que suas propriedades dinâmicas são governadas pelos polos do sistema.

EXEMPLO 14.7

Seja a obtenção da função de transferência $V_s(s)/V_e(s)$ da rede mostrada na Fig. 14.9a.

SOLUÇÃO

A variável de saída é a tensão entre os terminais do capacitor variável e a tensão de entrada é um degrau unitário. A rede transformada é mostrada na Fig. 14.9b. As equações das malhas para a rede são

$$2I_1(s) - I_2(s) = V_e(s)$$

$$I_1(s) + \left(s + \frac{1}{sC} + 1\right)I_2(s) = 0$$

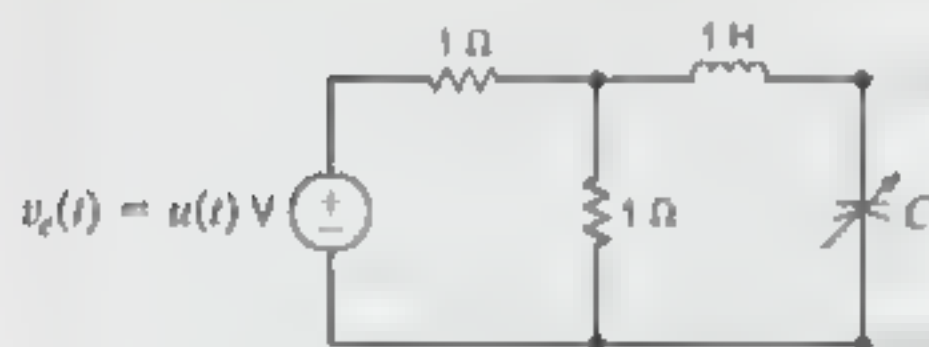
e a equação de saída é

$$V_s(s) = \frac{1}{sC} I_2(s)$$

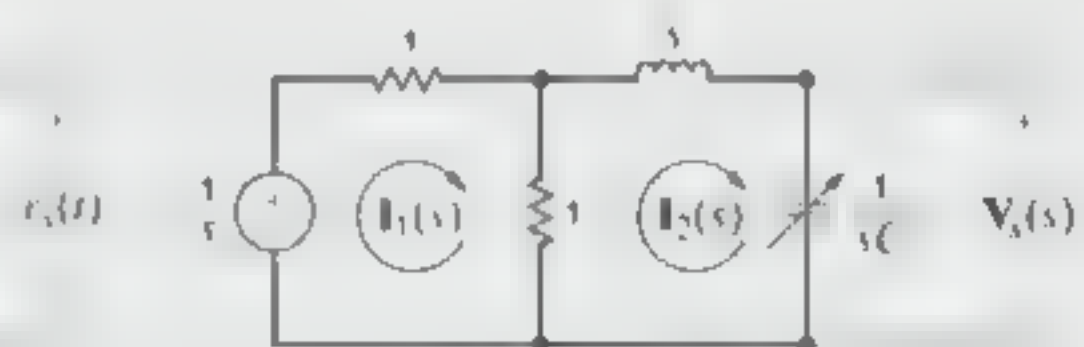
Com base nessas equações se obtém a função de transferência, que pode ser expressa como

$$\frac{V_s(s)}{V_e(s)} = \frac{1/2C}{s^2 + \frac{1}{2C}s + 1/2}$$

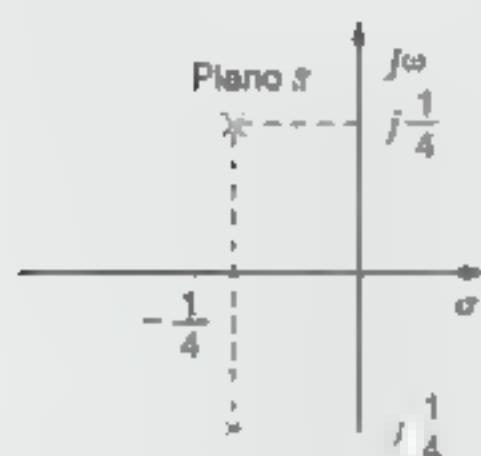
Uma vez que a função de transferência é dependente do valor do capacitor, analisa-se a função de transferência e a tensão na saída para três valores do capacitor.



(a)



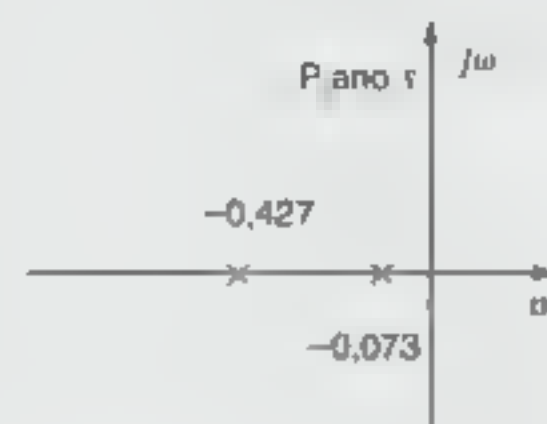
(b)



(c)



(d)



(e)

Figura 14.9 Redes e diagramas de polos-zeros utilizados no Exemplo 14.7.

a. $C = 8 \text{ F}$

$$\frac{V_o(s)}{V_i(s)} = \frac{\frac{1}{16}}{\left(s^2 + \frac{1}{2}s + \frac{1}{8}\right)} = \frac{\frac{1}{16}}{\left(s + \frac{1}{4} - j\frac{1}{4}\right)\left(s + \frac{1}{4} + j\frac{1}{4}\right)}$$

A tensão na saída fica

$$V_o(s) = \frac{\frac{1}{16}}{s\left(s + \frac{1}{4} - j\frac{1}{4}\right)\left(s + \frac{1}{4} + j\frac{1}{4}\right)}$$

Conforme ilustrado no Capítulo 7, os polos da função de transferência, que são as raízes da equação característica, são complexos conjugados, conforme mostrado na Fig. 14.9c; portanto, a resposta para a tensão na saída será *subamortecida*. Essa tensão na saída, em função do tempo, pode ser expressa como

$$v_o(t) = \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-t/4} \cos\left(\frac{t}{4} + 135^\circ\right) \right] u(t) \text{ V}$$

Note que, para altos valores do tempo, as oscilações transitórias, representadas pelo segundo termo da resposta, tornam-se desprezíveis e a saída se estabiliza no valor de $1/2 \text{ V}$. Essa condição também pode ser verificada diretamente pela análise do circuito, uma vez que para altos valores do tempo a entrada atua como uma fonte CC, o indutor opera como um curto-circuito, o capacitor opera como um circuito aberto e os resistores formam um divisor de tensão.

b. $C = 16 \text{ F}$

$$\frac{V_o(s)}{V_i(s)} = \frac{\frac{1}{32}}{s^2 + \frac{1}{2}s + \frac{1}{16}} = \frac{\frac{1}{32}}{\left(s + \frac{1}{4}\right)^2}$$

A tensão na saída fica

$$V_o(s) = \frac{\frac{1}{32}}{s\left(s + \frac{1}{4}\right)^2}$$

Uma vez que os polos da função de transferência são reais e iguais, conforme mostrado na Fig. 14.9d, a resposta para a tensão de saída será *criticamente amortecida*, e a função $v_o(t) = \mathcal{L}^{-1}[V_o(s)]$ será expressa como

$$v_o(t) = \left[\frac{1}{2} - \left(\frac{t}{8} + \frac{1}{2} \right) e^{-t/4} \right] u(t) \text{ V}$$

c. $C = 32 \text{ F}$

$$\frac{V_o(s)}{V_i(s)} = \frac{\frac{1}{64}}{s^2 + \frac{1}{2}s + \frac{1}{32}} = \frac{\frac{1}{64}}{s(s + 0,427)(s + 0,073)}$$

A tensão na saída fica

$$V_o(s) = \frac{\frac{1}{64}}{s(s + 0,427)(s + 0,073)}$$

Os polos da função de transferência são reais e distintos, conforme mostrado na Fig. 14.9e e, portanto, a resposta para a tensão de saída será *superamortecida*. A resposta em função do tempo fica

$$v_o(t) = (0,5 + 0,103e^{-0,427t} - 0,603e^{-0,073t})u(t) \text{ V}$$

Embora os valores dos parâmetros selecionados para a rede não sejam muito próximos dos adotados na prática, lembre-se de que tanto o escalamento em magnitude quanto o escalamento em frequência podem ser aplicados nesse caso, conforme discutido no Capítulo 12.

EXEMPLO 14.8

Para a rede mostrada na Fig. 14.10a obtenha (a) a função de transferência, (b) o tipo de amortecimento da rede e (c) sua resposta ao degrau unitário.

SOLUÇÃO

Lembre-se de que a tensão entre os terminais de entrada do op-amp é igual a zero e, portanto, a LKC no nó designado por $V_1(s)$ na Fig. 14.10b fornece a seguinte equação:

$$\frac{V_F(s) - V_1(s)}{1} = sV_1(s) + \frac{V_1(s) - V_o(s)}{1} + \frac{V_1(s)}{1}$$

Como a corrente no terminal de entrada negativo do op-amp é nula, a LKC requer que

$$sV_o(s) = -\frac{V_1(s)}{1}$$

A combinação dessas duas equações fornece a função de transferência

$$\frac{V_o(s)}{V_i(s)} = \frac{1}{s^2 + 3s + 1}$$

que pode ser expressa na forma

$$\frac{V_o(s)}{V_i(s)} = \frac{1}{(s + 2,62)(s + 0,38)}$$

Uma vez que as raízes são reais e distintas, a resposta ao degrau da rede será *superamortecida*. A resposta ao degrau pode ser expressa como

$$V_o(s) = \frac{1}{s(s + 2,62)(s + 0,38)} = \frac{-1}{s} + \frac{-0,17}{s + 2,62} + \frac{1,17}{s + 0,38}$$

Portanto,

$$v_o(t) = (-1 - 0,17e^{-2,62t} + 1,17e^{-0,38t})u(t) \text{ V}$$

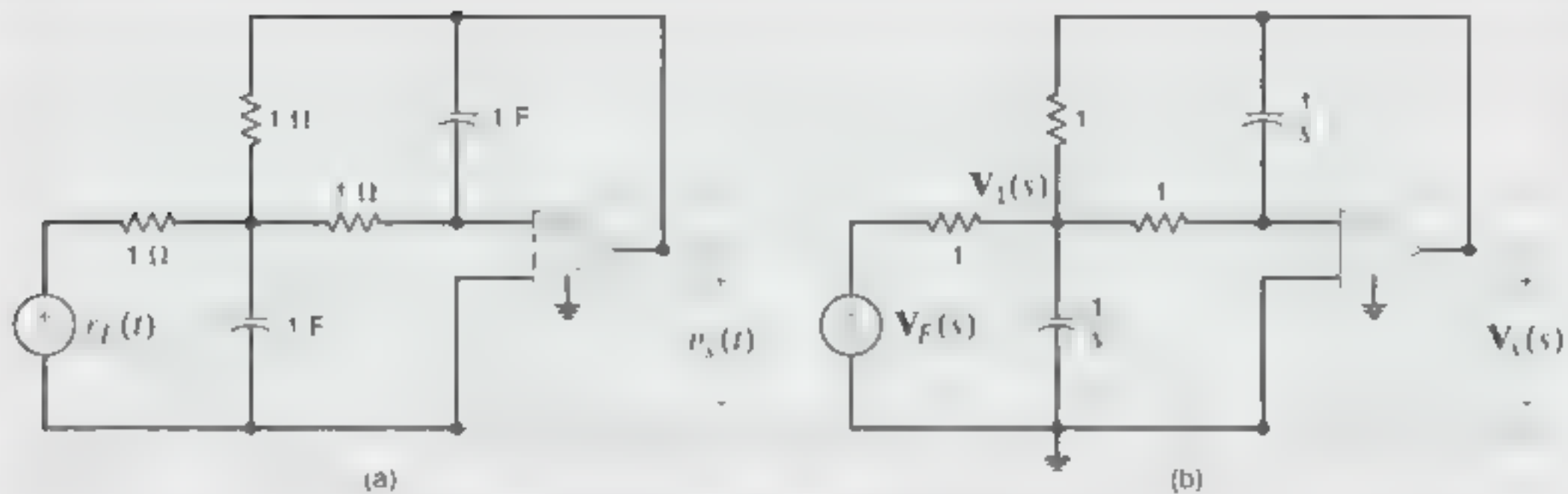


Figura 14.10 Circuitos utilizados no Exemplo 14.8.

Avaliação do Aprendizado

E14.12 Se a resposta ao impulso unitário de uma rede é conhecida como $10/9(e^{-t} - e^{-10t})$, determine sua resposta ao degrau.

RESPOSTA:

$$x(t) = \left(1 - \frac{10}{9}e^{-t} + \frac{1}{9}e^{-10t} \right) u(t)$$

E14.13 A função de transferência de uma rede é

$$H(s) = \frac{s + 10}{s^2 + 4s + 8}$$

Construa o diagrama de polos-zeros de $H(s)$ e determine o tipo de amortecimento da rede e sua resposta ao degrau unitário.

RESPOSTA: A rede é subamortecida e

$$x(t) = \left[\frac{10}{8} + 1.46e^{-2t} \cos(2t - 210.96^\circ) \right] u(t).$$

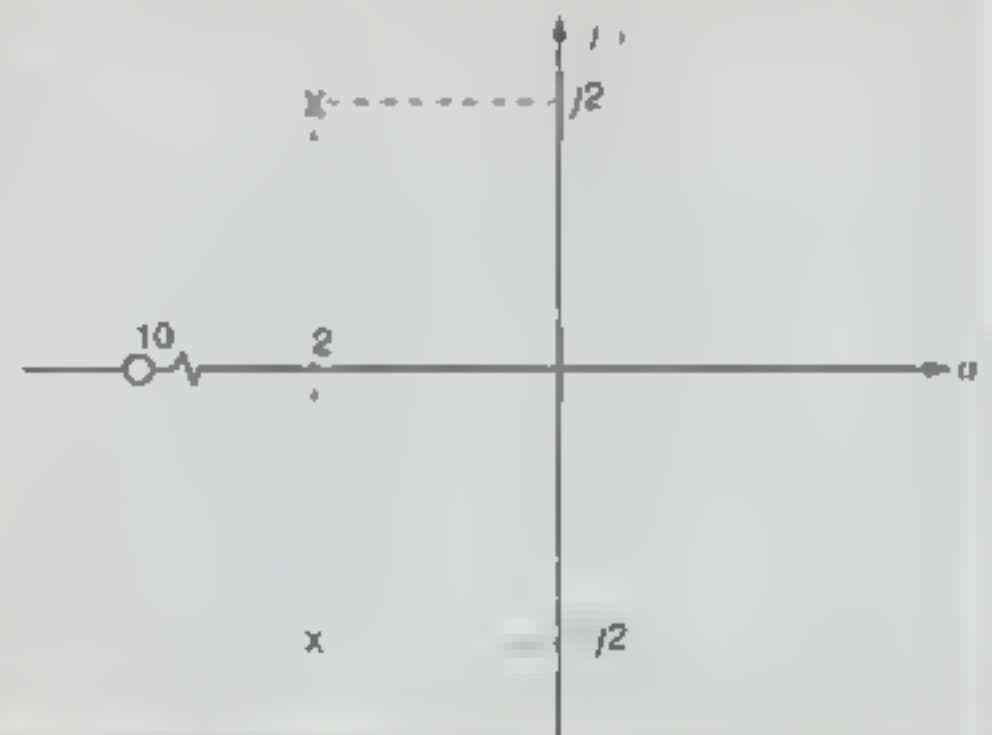


Figura E14.13

E14.14 Obtenha a função de transferência da rede mostrada na Fig. E14.14.

RESPOSTA:

$$\frac{1}{R_1 C_1} \frac{1}{s + \frac{1}{R_2 C_2}} \frac{1}{s + \frac{C_1 + C_2}{R_1 C_1 C_2}}$$

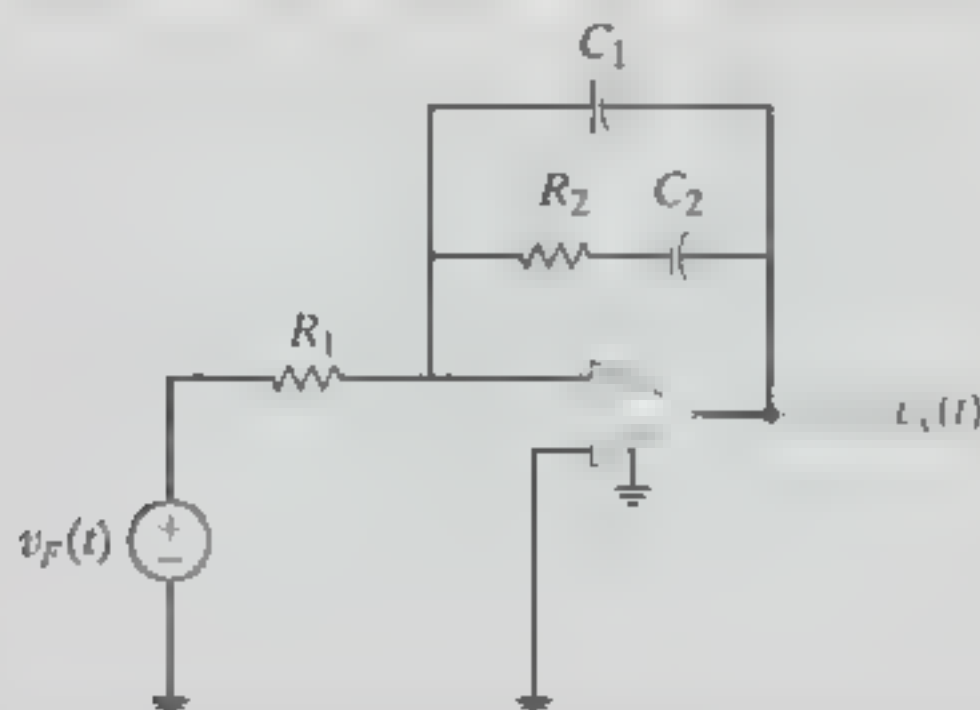


Figura E14.14

Lembre-se, das discussões anteriores, de que se uma rede de segunda ordem é subamortecida, sua equação característica é da forma

$$s^2 + 2\zeta\omega_0 s + \omega_0^2 = 0$$

e as raízes dessa equação, que são os polos da rede, podem ser expressas por

$$s_{1,2} = -\zeta\omega_0 \pm j\omega_0\sqrt{1-\zeta^2}$$

As raízes s_1 e s_2 , quando representadas graficamente no plano s , geralmente aparecem como mostrado na Fig. 14.11, em que

ζ é a fração de amortecimento e

ω_0 é a frequência natural não amortecida

e, conforme ilustrado naquela figura,

$$\zeta = \cos \theta$$

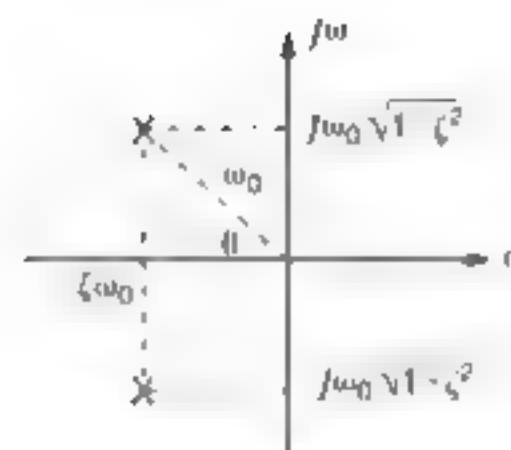


Figura 14.11 Localização dos polos de uma rede de segunda ordem subamortecida.

A fração de amortecimento e a frequência natural não amortecida são exatamente as mesmas grandezas empregadas no Capítulo 12 na determinação da resposta em frequência de uma rede. Conclui-se, assim, que são essas mesmas grandezas que governam a resposta transiente da rede.

EXEMPLO 14.9

Analise o efeito da posição do polo no plano s na resposta transiente da rede de segunda ordem RLC em série mostrada na Fig. 14.12.

SOLUÇÃO

A função de transferência para o ganho em tensão é expressa por

$$G_v(s) = \frac{1}{s^2 + s\left(\frac{R}{L}\right) + \frac{1}{LC}} = \frac{\omega_0^2}{s^2 + 2\zeta\omega_0 s + \omega_0^2}$$

Nessa análise, os seguintes valores serão utilizados: $\omega_0 = 2000$ rad/s e $\zeta = 0,25, 0,50, 0,75$ e $1,0$. Utilizando a equação anterior, tem-se

$$LC = \frac{1}{\omega_0^2} = 2,5 \times 10^{-4}$$

e

$$R = 2\zeta\sqrt{\frac{L}{C}}$$

Ao se arbitrar $L = 10$ mH, ter-se-á $C = 25$ μ F. Fazendo-se, ainda, $\zeta = 0,25, 0,50, 0,75$ e $1,0$, o resistor R será igual a 10Ω ,

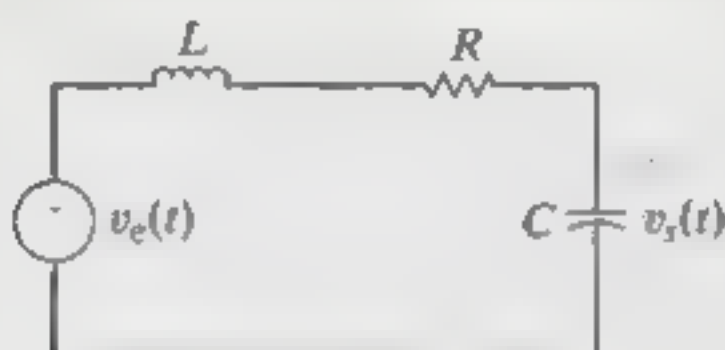


Figura 14.12 Rede RLC em série.

20Ω , 30Ω , e 40Ω , respectivamente. Para a faixa de valores de ζ , a rede comporta-se desde subamortecida até criticamente amortecida. Como os polos são complexos para os sistemas subamortecidos, as componentes real e imaginária e a magnitude dos polos de $G_v(s)$ são as relacionadas na Tabela 14.1 para os valores de ζ listados anteriormente.

A Fig. 14.13 mostra o diagrama de polos e zeros para cada valor de ζ . Note, inicialmente, que os polos se apoiam em um círculo; assim, a magnitude dos polos é constante, o que é consistente com os valores listados na Tabela 14.1. Pode-se perceber também que quando ζ diminui, a parte real do polo também diminui, enquanto a parte imaginária aumenta. De fato, quando ζ tende a zero, os polos tendem a ser imaginários puros.

Uma simulação com excitação transiente em degrau unitário, utilizando os quatro valores de R , é mostrada na Fig. 14.14. Pode-se perceber que quando ζ diminui, o sobrevalor na tensão de saída aumenta. Além disso, quando a rede se torna criticamente amortecida ($\zeta = 1$), não ocorre sobrevalor. Em muitas aplicações, um sobrevalor excessivo se torna indesejável. Para se corrigir esse problema, a fração de amortecimento ζ deve ser aumentada, o que para o circuito aqui analisado seria conseguido com um aumento no valor do resistor.

TABELA 14.1 Localização de polos para $\zeta = 0,25$ até $1,0$

FRAÇÃO DE AMORTECIMENTO	PARTE REAL	PARTE IMAGINÁRIA	MAGNITUDE
1,00	2000,0	0,0	2000,0
0,75	1500,0	1322,9	2000,0
0,50	1000,0	1732,1	2000,0
0,25	500,0	1936,5	2000,0

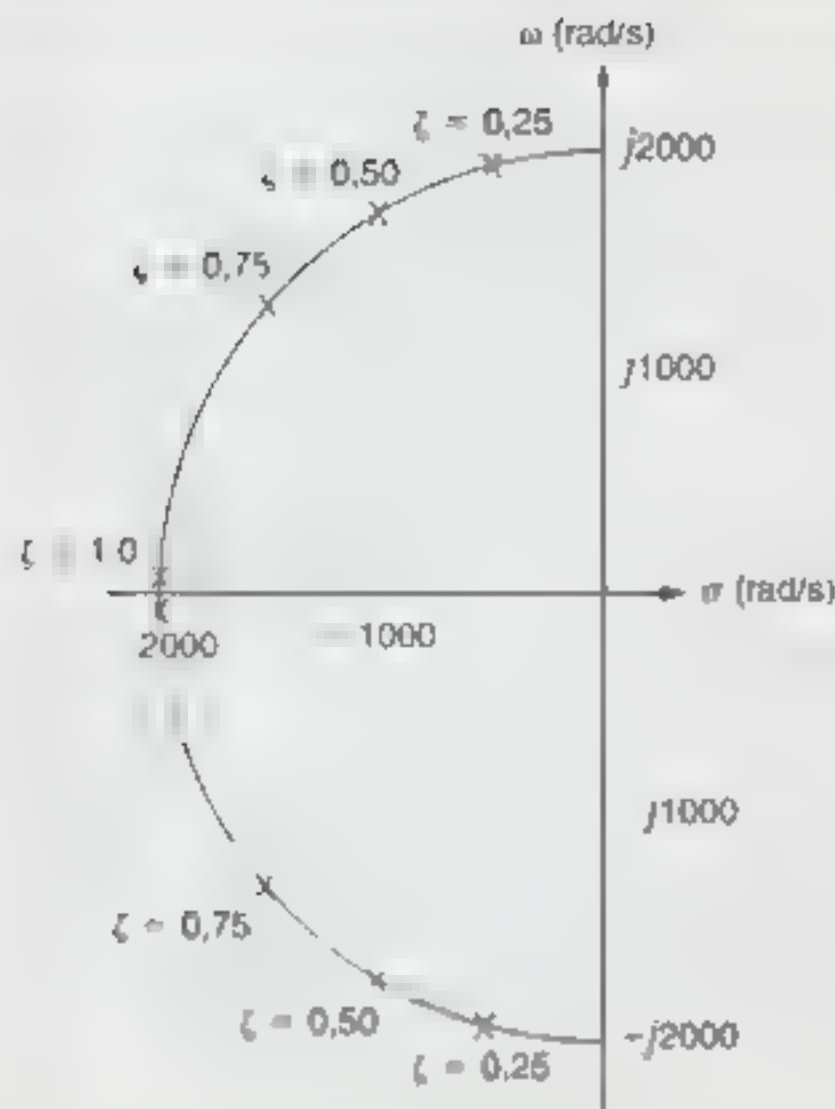


Figura 14.13 Diagrama de polos-zeros para ζ na faixa de 0,25 a 1,0.

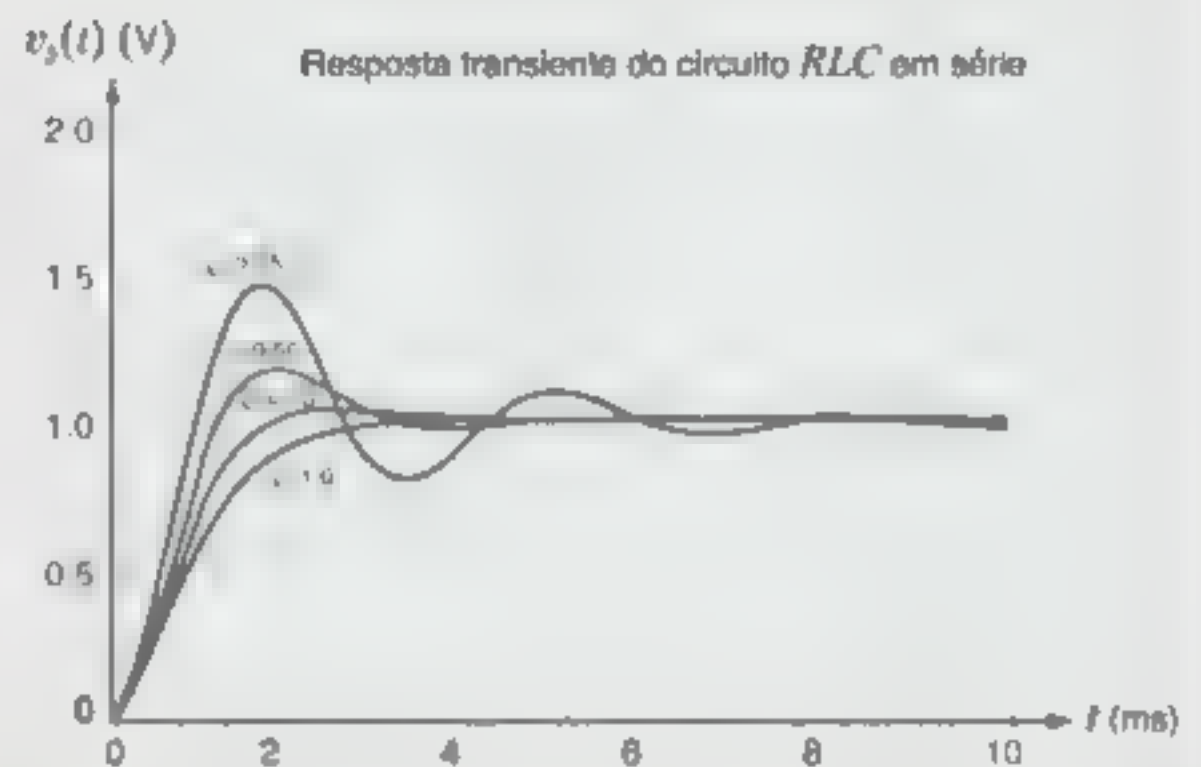


Figura 14.14 Resposta transiente da saída para ζ na faixa de 0,25 a 1,0.

EXEMPLO 14.10

Vamos reanalisar o acidente com a Ponte do Estreito de Tacoma que foi discutido no Exemplo 12.12. Uma fotografia da ponte quando ela entrou em colapso é mostrada na Fig. 14.15.

No Capítulo 12 admitiu-se que a ruptura da ponte ocorreu devido a rajadas de vento a uma frequência próxima à da ponte (0,2 Hz). Verificou-se que é possível criar um circuito *RLC*, mostrado na Fig. 12.30, que entra em ressonância a 0,2 Hz e possui uma tensão de saída consistente com o deslocamento vertical da ponte. Esse tipo de ressonância forçada nunca



Figura 14.15 Colapso da ponte sobre o Estreito de Tacoma ocorrido em 7 de novembro de 1940. (Special Collection Division, University of Washington Libraries, UW21413. Foto de Farguharson.)

ocorreu no Estreito de Tacoma. O verdadeiro culpado não foi tanto as flutuações das rajadas de vento, mas a ponte em si. Esse acidente é minuciosamente detalhado no artigo "Resonance, Tacoma Narrows Bridge Failure, and Undergraduate Physics Textbooks", de K. Y. Billah e R. H. Scanlan, publicado no periódico *American Journal of Physics*, vol. 59, nº 2, pp. 118–124, no qual os autores verificaram que as variações na velocidade do vento afetaram os coeficientes da equação diferencial de segunda ordem que modela o comportamento ressonante. Em particular, a fração de amortecimento, ζ , era dependente da velocidade do vento U , de forma aproximada, pode ser expressa como

$$\zeta = 0,00460 - 0,00013U \quad 14.17$$

em que U é a velocidade do vento em milhas por hora. Note, conforme mostrado na Fig. 14.16, que a fração ζ torna-se negativa para velocidades do vento que excedam a 35 mph – um ponto que será demonstrado posteriormente. Além disso, Billah e Scanlan verificaram que a ponte entrou em ressonância em um modo de torção, o que pode ser visto com facilidade na Fig. 12.29 e descrito pela equação diferencial

$$\frac{d^2\theta(t)}{dt^2} + 2\zeta\omega_0 \frac{d\theta(t)}{dt} + \omega_0^2\theta(t) = 0$$

ou

$$\ddot{\theta} + 2\zeta\omega_0\dot{\theta} + \omega_0^2\theta = 0 \quad 14.18$$

em que $\theta(t)$ é o ângulo de torção em graus e a velocidade do vento está implícita na fração de amortecimento ζ por meio da Eq. (14.17). Billah e Scanlan listam os seguintes dados obtidos pelas observações diretas no local da ponte ou por modelos experimentais em escala que foram construídos posteriormente.

Velocidade do vento no instante da falha ≈ 42 mph (≈ 74 km/h)

Torção no instante da falha $\approx \pm 12^\circ$

Tempo de duração da falha ≈ 45 minutos

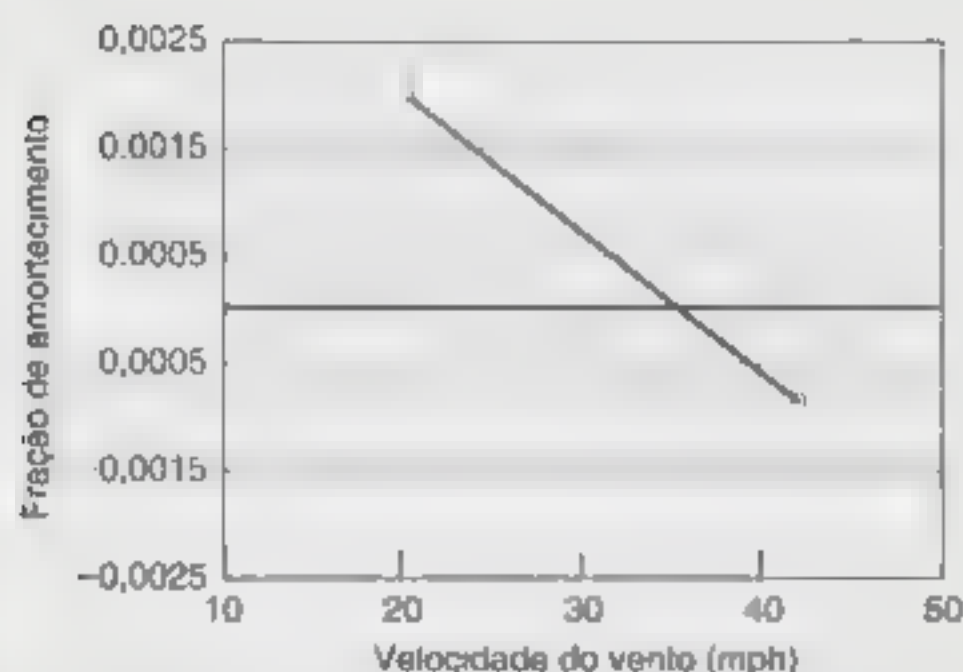


Figura 14.16 Fração de amortecimento versus a velocidade do vento para o modelo de segunda ordem representativo da torção da ponte sobre o Estreito de Tacoma.

Assim, as oscilações são iniciadas por torção utilizando uma condição inicial em $\theta(0)$ e verifica-se se as oscilações da ponte diminuem ou aumentam com o tempo. Pode-se, agora, projetar uma rede que simule o verdadeiro acidente ocorrido no Estreito de Tacoma.

SOLUÇÃO

Inicialmente explicita-se a aceleração $\ddot{\theta}(t)$ na Eq. (14.18)

$$\ddot{\theta} = -2\zeta\omega_0\dot{\theta} - \omega_0^2\theta$$

$$\ddot{\theta} = -(2\pi)(0,2)(0,0046 - 0,00013U)\dot{\theta} - [2(2\pi)(0,2)]^2\theta \quad 14.19$$

ou

$$\ddot{\theta} = -(0,01156 - 0,00033U)\dot{\theta} - 1,579\theta$$

Deseja-se, agora, estabelecer um circuito que represente essa equação e que gere uma tensão proporcional a $\theta(t)$. Um modelo para esse circuito pode ser obtido utilizando o circuito integrador com op-amps mostrado na Fig. 14.17.

A operação do circuito pode ser mais bem compreendida admitindo-se, inicialmente, que a tensão v_a seja proporcional a $\theta(t)$, em que 1 V representa 1 grau/s². Assim, a saída do primeiro integrador, v_w , deve ser

$$v_w = -\frac{1}{R_w C_w} \int v_a dt$$

ou, uma vez que $R_w = 1 \Omega$ e $C_w = 1 F$,

$$v_w = -\int v_a dt$$

Logo, v_w é proporcional a $-\dot{\theta}(t)$ e 1 V equivale a -1 grau/s. Analogamente, a saída do segundo integrador será

$$v_n = \int v_w dt$$

em que $v_n(t)$ é proporcional a $\theta(t)$ e 1 V equivale a 1 grau. As saídas dos integradores são, então, retroalimentadas como entradas no op-amp somador. Note que as fontes dependentes, E_w e E_{v_n} , redefinem o coeficiente de $\theta(t)$ na Eq. (14.17); isto é,

$$2\zeta\omega_0 = (2)(0,2)(2\pi)\zeta = 0,01156 - 0,00033U$$

Para que várias velocidades do vento sejam simuladas, precisa-se apenas alterar o fator de ganho da fonte E_{v_n} . Finalmente, pode-se resolver o circuito para $v_n(t)$, isto é,

$$v_n(t) = \left(\frac{R_f}{R_2}\right)(E_w - E_{v_n}) - \left(\frac{R_f}{R_1}\right)v_n$$

que tem correspondência com a Eq. (14.19) se

$$\frac{R_f}{R_2} = \omega_0^2 = [2\pi(0,2)]^2 \approx 1,579$$

e

$$\frac{R_f}{R_1} [E_w - E_{v_n}] = 2\zeta\omega_0$$

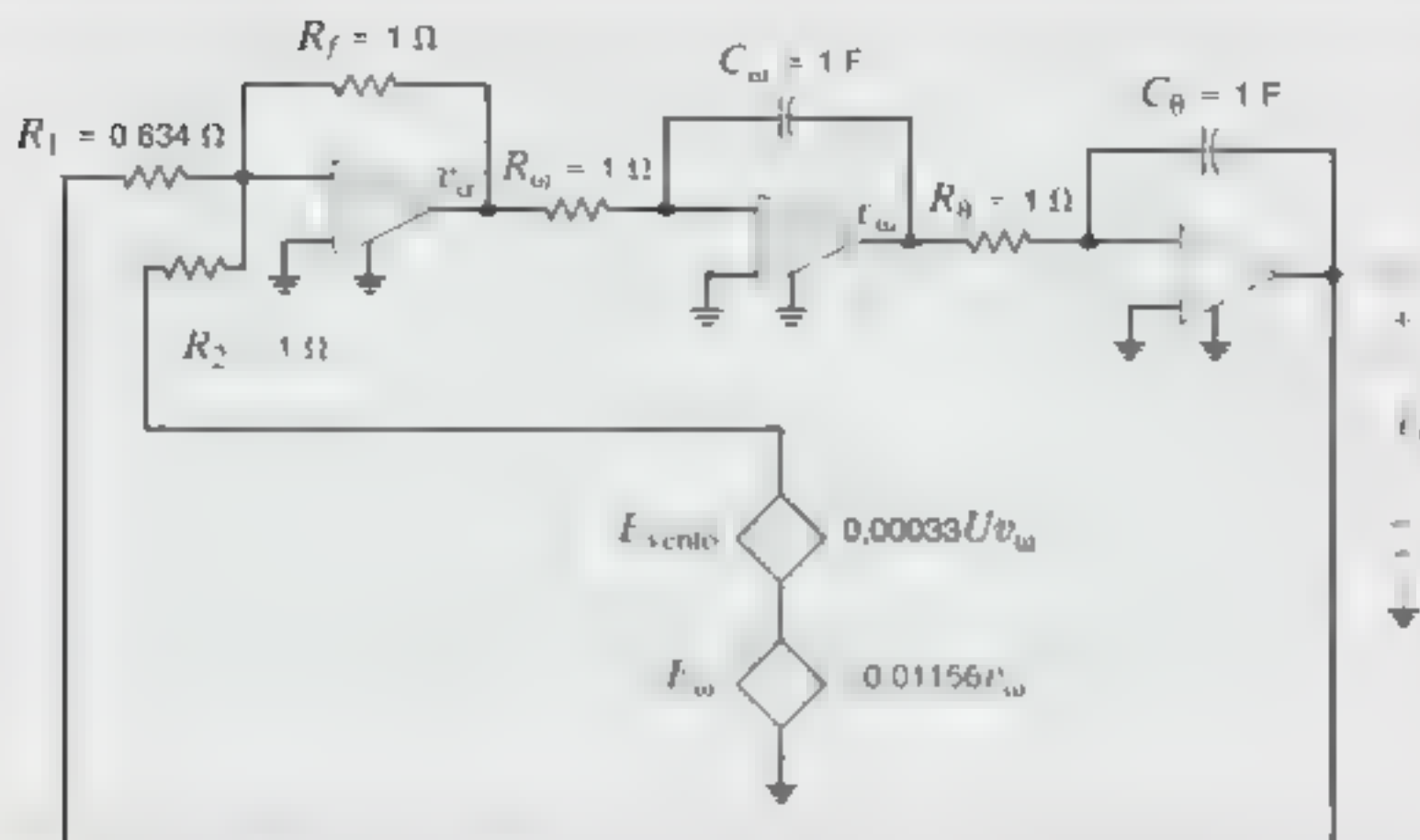


Figura 14.17 Diagrama do circuito para as simulações da ponte sobre o Estreito de Tacoma.

ou

$$\frac{R_f}{R_2} = 1$$

Assim, se $R_f = R_2 = 1 \, \Omega$ e $R_1 = 0,634 \, \Omega$, o circuito simulará o movimento de torção da ponte. As oscilações são iniciadas por torção utilizando uma condição inicial $\theta(0)$ e verificando se as oscilações da ponte diminuem ou aumentam com o tempo.

A primeira simulação é realizada para uma velocidade do vento de 20 mph ($\approx 28 \, \text{km/h}$) e um grau de torção. A tensão de saída correspondente é mostrada na Fig. 14.18. A ponte torce a uma frequência de 0,2 Hz, e as oscilações decrescem exponencialmente, indicando uma situação não destrutiva.

A Fig. 14.19 mostra a saída para uma velocidade do vento de 35 mph ($\approx 61 \, \text{km/h}$) e uma torção inicial de um grau. Note que as oscilações nem aumentam nem diminuem. Isso indica que a fração de amortecimento é nula.

Finalmente, a simulação para uma velocidade do vento de 42 mph ($\approx 74 \, \text{km/h}$) e um grau de torção inicial é mostrada na Fig. 14.20. A torção da ponte fica cada vez mais perigosa até que, após 45 minutos, a ponte apresenta um ângulo de torção de $\pm 12,5$ graus, que são os valores documentados por Billah e Scanlan para o instante do colapso.

A influência da velocidade do vento na fração de amortecimento também pode ser demonstrada investigando-se como os polos do sistema são alterados com o vento. A equação característica do sistema é

$$s^2 + 2\zeta\omega_0 s + \omega_0^2 = 0$$

ou

$$s^2 + (0,01156 - 0,00033U)s + 1,579 = 0$$

As raízes da equação característica fornecem as localizações dos polos. A Fig. 14.21 mostra os polos do sistema para as velocidades do vento de 20, 35 e 42 mph ($\approx 28, 61$ e $74 \, \text{km/h}$, respectivamente). Note que a 20 mph, a situação estável é a mos-

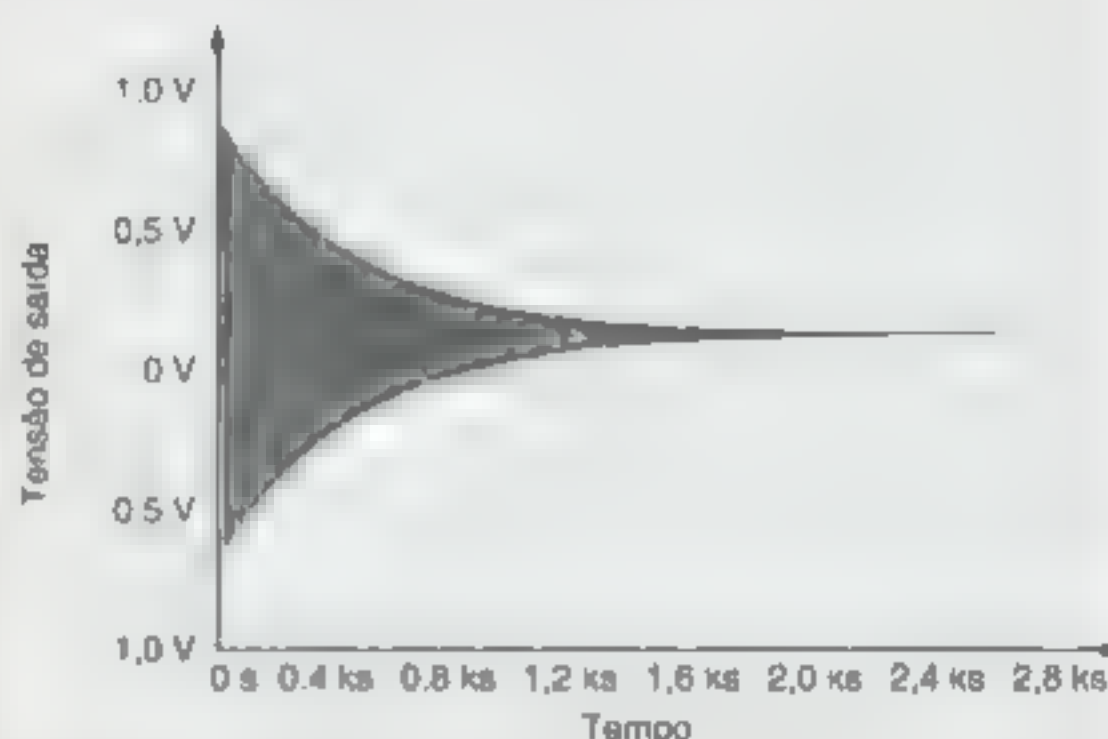


Figura 14.18 Simulação do comportamento da ponte sobre o Estreito de Tacoma para uma velocidade do vento de 20 mph e uma condição inicial de um grau de torção.

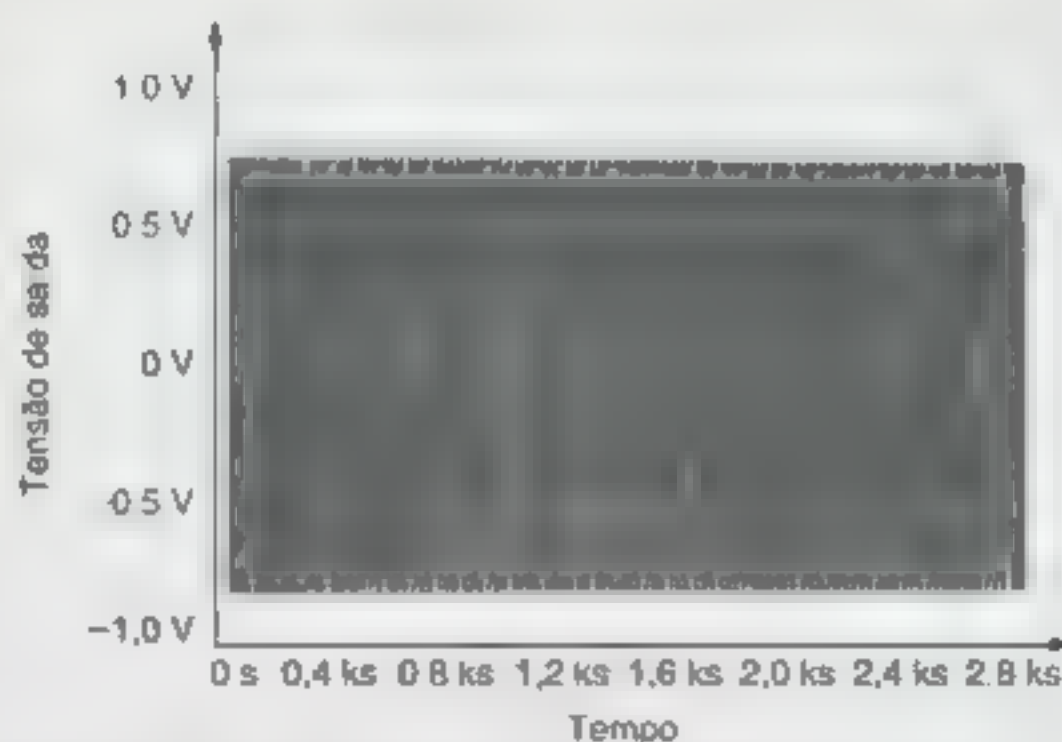


Figura 14.19 Simulação do comportamento da ponte sobre o Estreito de Tacoma para uma velocidade do vento de 35 mph e um grau de torção inicial.

trada na Fig. 14.18, e os polos estão do lado esquerdo do plano s . A 35 mph ($\zeta = 0$) os polos estão sobre o eixo $j\omega$ e o sistema é oscilatório, conforme mostrado na Fig. 14.19. Finalmente, a 42 mph, observa-se que os polos estão do lado direito do plano

s e, pela Fig. 14.20, pode-se perceber que esse é um sistema instável. Essa relação entre a localização do polo e a resposta transiente é verdadeira para todos os sistemas – polos no semiplano direito do plano s resultam em sistemas instáveis.

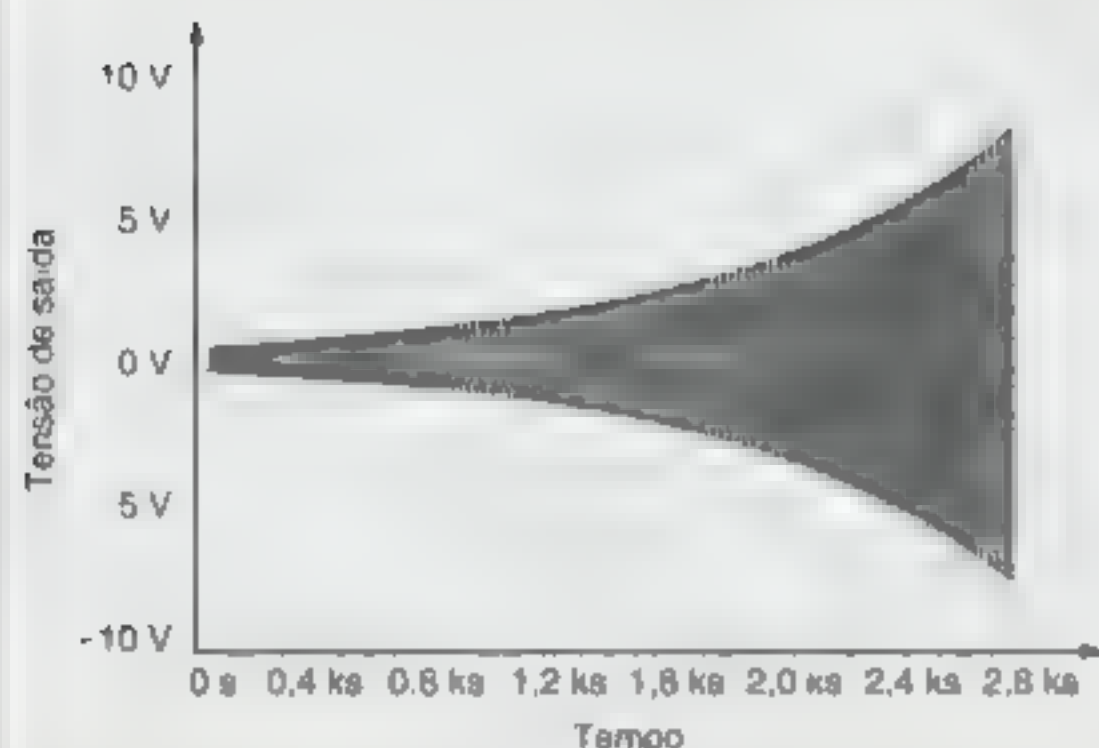


Figura 14.20 Simulação do comportamento da ponte sobre o Estreito de Tacoma para uma velocidade do vento de 42 mph e um grau de torção inicial.

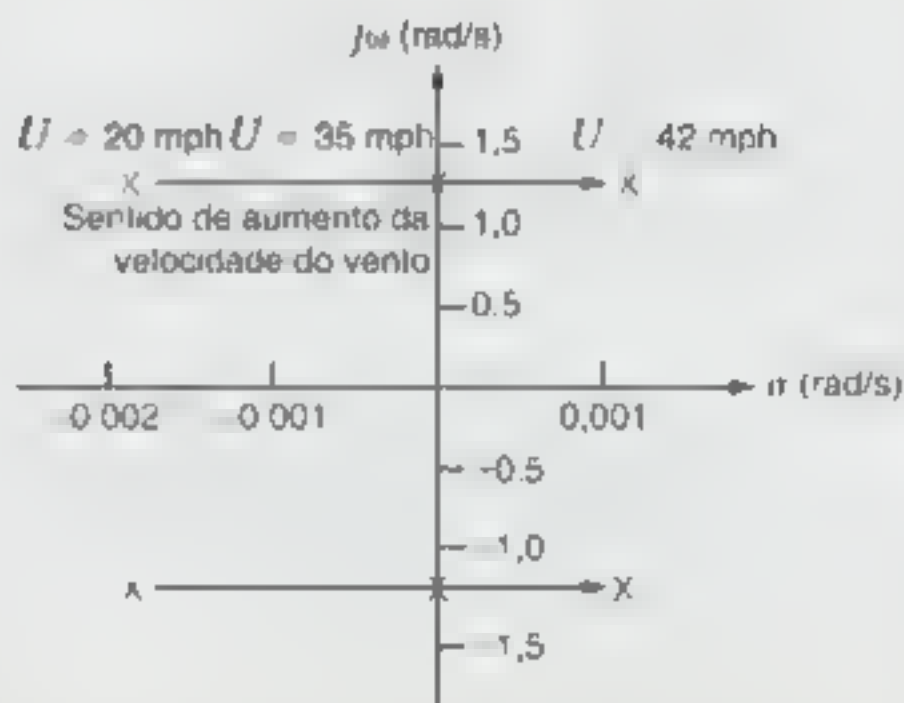


Figura 14.21 Diagrama de polos-zeros para o modelo de segunda ordem da ponte sobre o Estreito de Tacoma considerando as velocidades do vento de 20, 35, e 42 mph.

14.5 Relação entre o Diagrama de Polos-Zeros e o Diagrama de Bode

No Capítulo 12 introduzimos o diagrama de Bode como uma ferramenta de análise para o estudo das respostas no domínio da frequência. Investiga-se, agora, a relação entre o diagrama de polos-zeros traçado no plano s e o diagrama de Bode. Como exemplo, considere a função de transferência do filtro RLC passa-alta mostrado na Fig. 14.22.

Sua função de transferência é

$$G_v(s) = \frac{sL}{sL + R + \frac{1}{sC}} = \frac{s}{s^2 + s\left(\frac{R}{L}\right) + \frac{1}{LC}}$$

Utilizando os valores dos componentes do circuito, a função de transferência fica

$$G_v(s) = \frac{s}{s^2 + 2s + 5} = \frac{s}{(s + 1 + j^2)(s + 1 - j^2)}$$

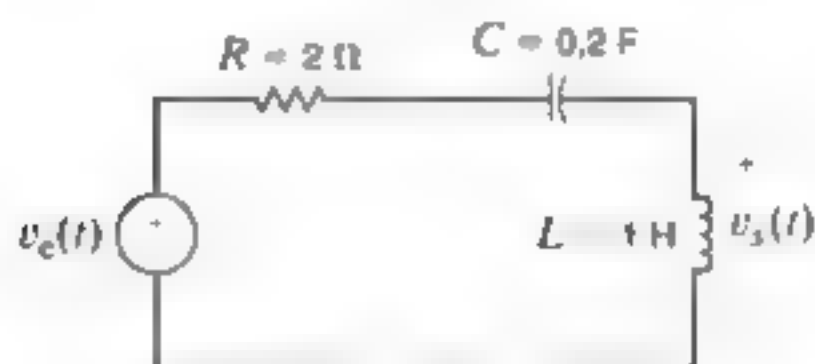


Figura 14.22 Filtro RLC passa-alta.

Pode-se perceber que a função de transferência possui dois zeros na origem ($s = 0$) e dois polos conjugados complexos, $s = -1 \pm j2$. O diagrama de polos-zeros padrão para essa função é mostrado na Fig. 14.23a. O diagrama tridimensional representando a magnitude de $G_v(s)$ é mostrado na Fig. 14.23b. Observe atentamente que, quando $s = 0$, $G_v(s) = 0$ e quando $s = -1 \pm j2$, a função é infinita.

Lembre-se de que o diagrama de Bode da magnitude de uma função de transferência é, na realidade, um gráfico da magnitude do ganho em função da frequência. O domínio da frequência, na qual $s = j\omega$, corresponde ao eixo $j\omega$ no plano s , obtido fazendo-se σ , a parte real de s , igual a zero. Assim, o domínio da frequência corresponde diretamente àquela parte do domínio s em que $\sigma = 0$, conforme ilustrado no gráfico tridimensional mostrado na Fig. 14.23c.

Desenvolve-se o diagrama de Bode girando-se, inicialmente, a Fig. 14.23c de modo que o eixo real fique perpendicular à página, conforme mostrado na Fig. 14.23d. Note que o máximo da função de transferência ocorre em $\omega = \sqrt{5} = 2,24$ rad/s que é a intensidade das frequências dos polos complexos. Além disso, a simetria do polo em relação ao eixo real fica bastante evidente. Como resultado dessa simetria, pode-se restringir a análise aos valores positivos de $j\omega$ sem perda de informações. Esse gráfico para $\omega \geq 0$ é mostrado na Fig. 14.23e, em que a frequência é apresentada em Hz em vez de em rad/s. Finalmente, convertendo a magnitude da função de transferência para dB e utilizando um eixo logarítmico para as frequências, obtém-se o diagrama de Bode mostrado na Fig. 14.23f.

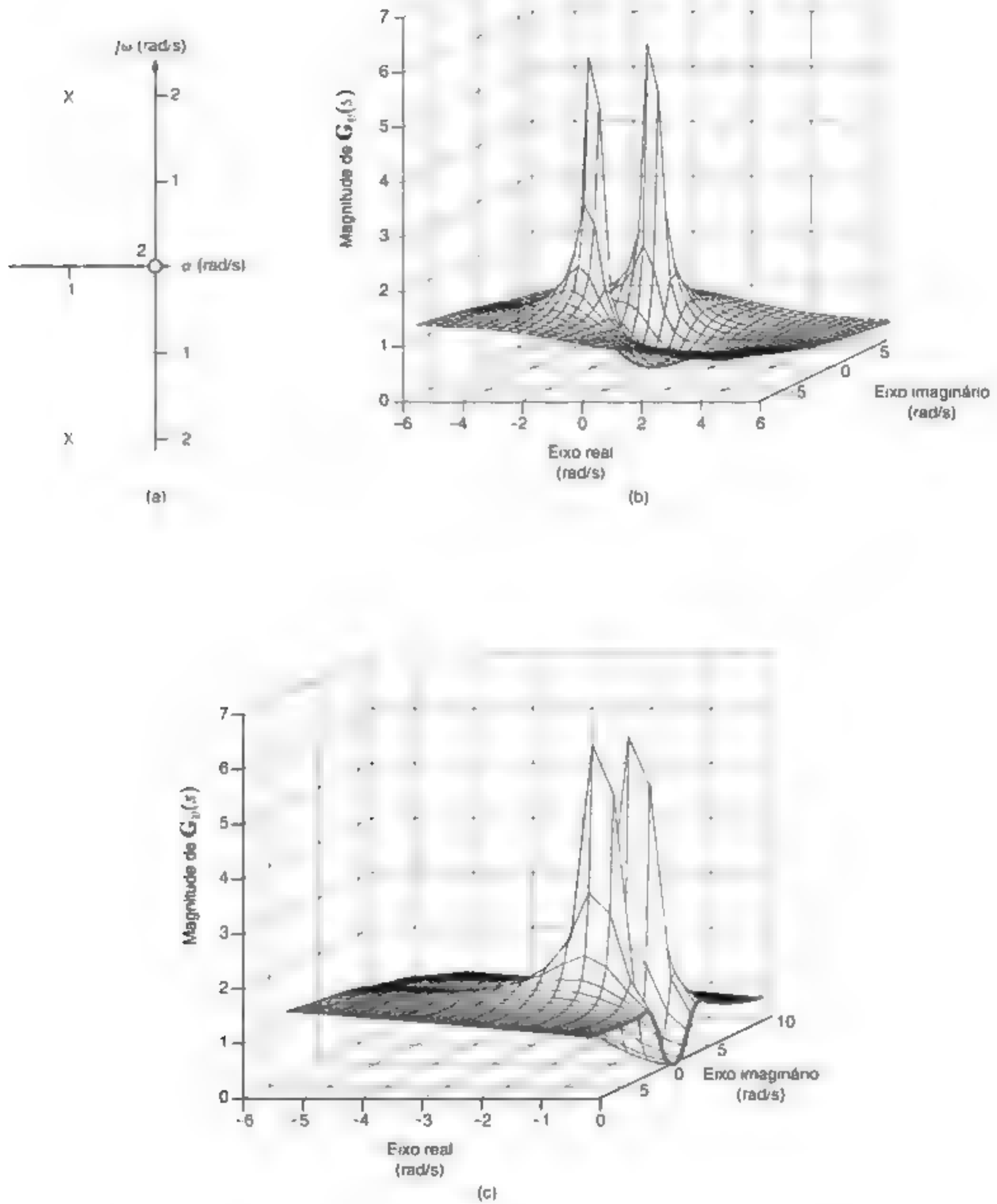
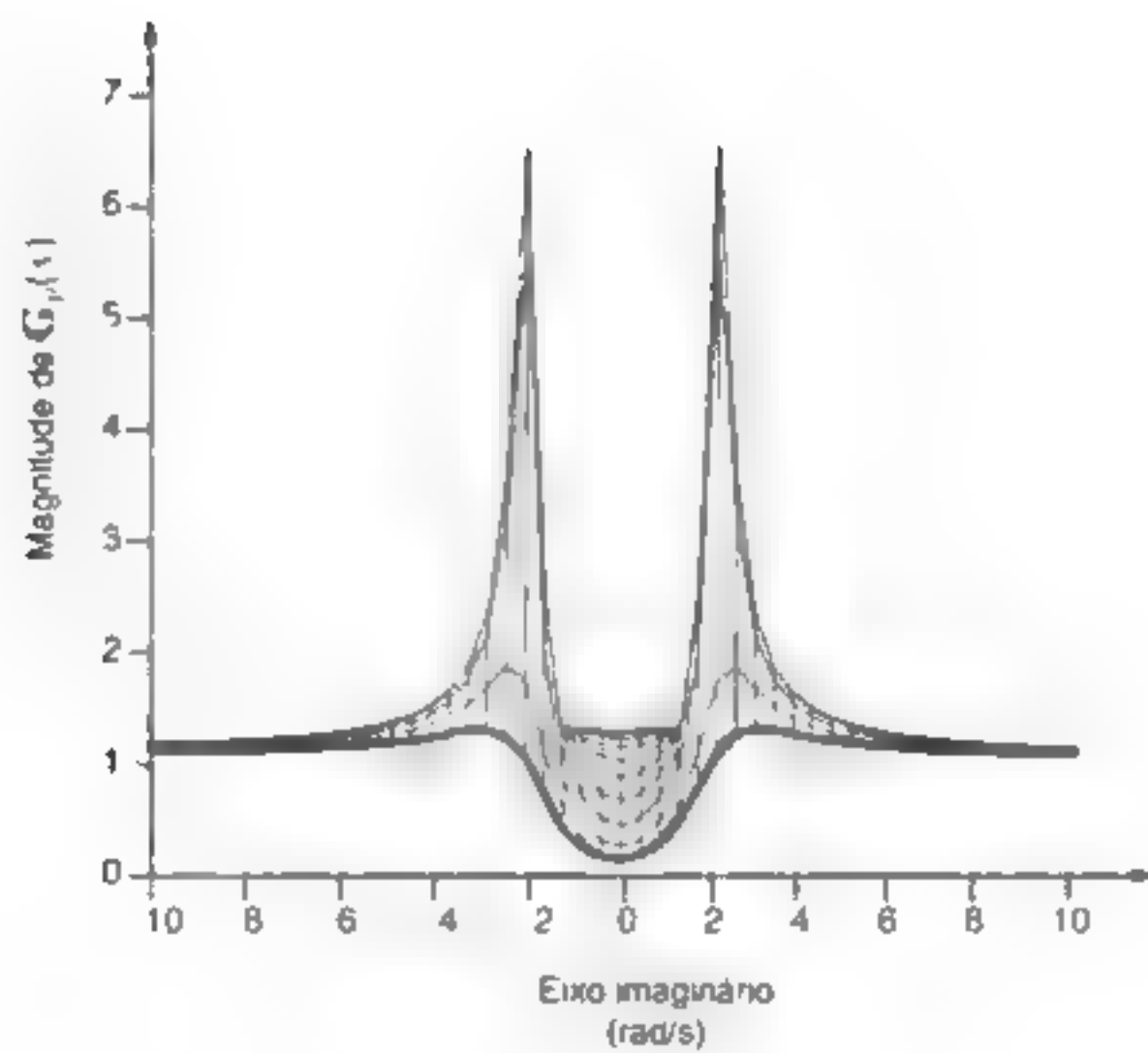
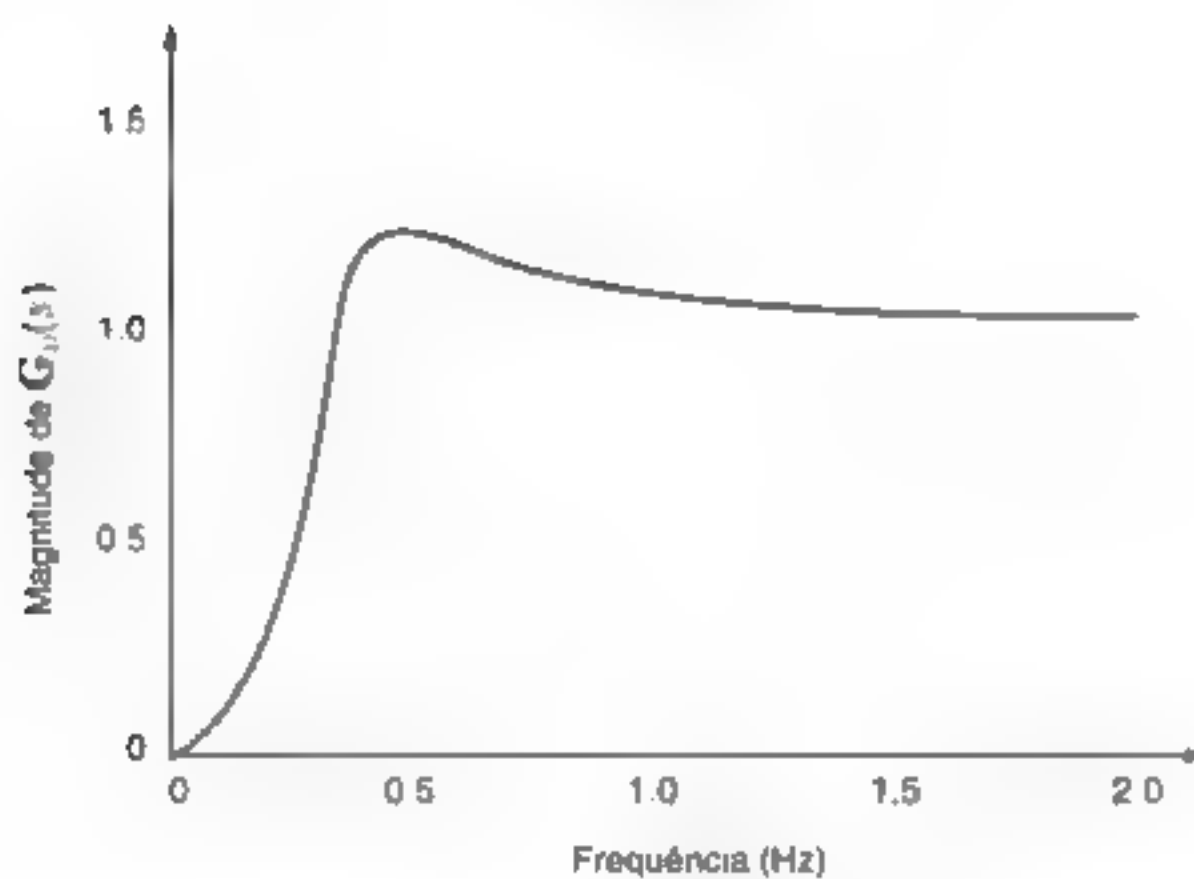


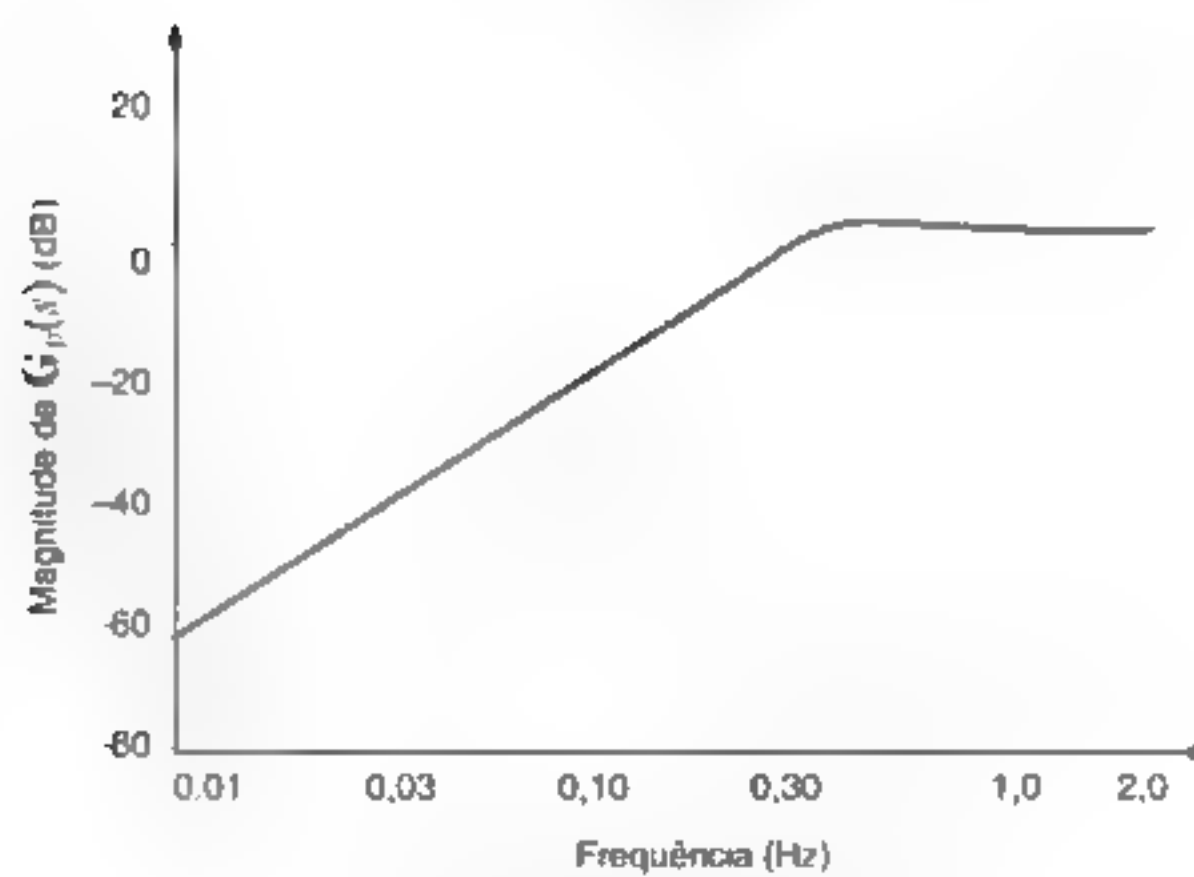
Figura 14.23 Figura utilizada para ilustrar a relação entre o diagrama de polos-zeros e o diagrama de Bode.



(d)



(e)



(f)

Figura 14-23 (continuação).

14.6 Resposta no Regime Estacionário

Na Seção 14.3 mostrou-se, por meio de diversos exemplos, a poderosa ferramenta que é a técnica da transformada de Laplace utilizada na determinação da resposta completa de uma rede. Essa resposta completa é composta de termos transientes, que desaparecem quando $t \rightarrow \infty$, e termos referentes ao regime estacionário, que estão presentes durante todo o tempo. Analise-se, agora, um procedimento que permite determinar a resposta do regime estacionário de uma rede diretamente. Lembre-se de que nos exemplos anteriores a resposta da rede pôde ser escrita como

$$Y(s) = H(s)X(s) \quad 14.20$$

em que $Y(s)$ é a saída ou resposta, $X(s)$ é a entrada ou função forçamento, e $H(s)$ é a função da rede ou função de transferência definida na Seção 12.1. A parcela transiente da resposta $Y(s)$ resulta dos polos de $H(s)$, e a parcela da resposta referente ao regime estacionário resulta dos polos da entrada ou função forçamento.

Fazendo-se um paralelo com a resposta de uma rede a uma entrada senoidal, conforme discutido na Seção 8.2, admite-se que a função forçamento tenha a forma

$$x(t) = X_M e^{j\omega_0 t} \quad 14.21$$

que, pela identidade de Euler, pode ser escrita como

$$x(t) = X_M \cos \omega_0 t + jX_M \sin \omega_0 t \quad 14.22$$

A transformada de Laplace da Eq. (14.21) é

$$X(s) = \frac{X_M}{s - j\omega_0} \quad 14.23$$

e, portanto,

$$Y(s) = H(s) \left(\frac{X_M}{s - j\omega_0} \right) \quad 14.24$$

Nesse ponto, admite-se, tacitamente, que $H(s)$ não possui qualquer polo da forma $(s - j\omega_0)$. Entretanto, caso isso ocorra, alguma dificuldade será encontrada na definição da resposta para o regime estacionário.

A expansão em frações parciais da Eq. (14.24) fornece

$$Y(s) = \frac{X_M H(j\omega_0)}{s - j\omega_0} + \text{termos que ocorrem devido aos polos de } H(s) \quad 14.25$$

O primeiro termo à direita do sinal de igualdade pode ser expresso como

$$Y(s) = \frac{X_M H(j\omega_0) e^{j\omega_0 t}}{s - j\omega_0} + \dots \quad 14.26$$

uma vez que $H(j\omega_0)$ é uma grandeza complexa com magnitude e fase dependentes de $j\omega_0$.

Calculando a transformada inversa da Eq. (14.26), tem-se

$$\begin{aligned} v(t) &= X_M |H(j\omega_0)| e^{j\omega_0 t} e^{j\phi(j\omega_0)} + \dots \\ &= X_M |H(j\omega_0)| e^{j(\omega_0 t + \phi(j\omega_0))} \end{aligned} \quad 14.27$$

e, portanto, a resposta referente ao regime estacionário será

$$v_{re}(t) = X_M |H(j\omega_0)| e^{j(\omega_0 t + \phi(j\omega_0))} \quad 14.28$$

Como a função forçamento real é $X_M \cos(\omega_0 t)$, que é a parte real de $X_M e^{j\omega_0 t}$, a resposta do regime estacionário será a parte real da Eq. (14.28).

$$v_{re}(t) = X_M |H(j\omega_0)| \cos[\omega_0 t + \phi(j\omega_0)] \quad 14.29$$

Em geral, a função forçamento pode apresentar um ângulo de fase θ . Nesse caso, θ é simplesmente somado a $\phi(j\omega_0)$ de modo que a fase resultante da resposta é $\phi(j\omega_0) + \theta$.

[atenção]

Os termos transientes desaparecem na análise do regime estacionário.

EXEMPLO 14.11

Deseja-se determinar a tensão $v_{sc}(t)$ de regime estacionário do circuito mostrado na Fig. 14.24a para $t > 0$, considerando as condições iniciais nulas.

SOLUÇÃO

Conforme ilustrado anteriormente, esse problema poderia ser resolvido por meio de diversas técnicas, por exemplo, as equações nodais, as equações das malhas, transformação de fonte e teorema de Thévenin. Neste exemplo serão empregadas as equações dos nós na obtenção de sua solução. A rede transformada utilizando os valores das impedâncias dos parâmetros é mostrada na Fig. 14.24b. As equações dos nós dessa rede são

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{5}{2} \right) V_1(s) - \left(\frac{1}{2} \right) V_2(s) &= \frac{1}{2} V_c(s) \\ \left(\frac{5}{2} \right) V_1(s) + \left(\frac{5}{2} + 1 \right) V_2(s) &= 0 \end{aligned}$$

Resolvendo essas equações para $V_1(s)$, obtém-se

$$V_1(s) = \frac{s^2}{3s^2 + 4s + 4} V_c(s)$$

Note que essa equação está na forma da Eq. (14.20), em que $H(s)$ é

$$H(s) = \frac{s^2}{3s^2 + 4s + 4}$$

Uma vez que a função forçamento é $10 \cos 2t \, u(t)$, então, $V_M = 10$ e $\omega_0 = 2$. Logo,

$$\begin{aligned} H(j2) &= \frac{(j2)^2}{3(j2)^2 + 4(j2) + 4} \\ &= 0,354 \angle 45^\circ \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} |H(j2)| &= 0,354 \\ \phi(j2) &= 45^\circ \end{aligned}$$

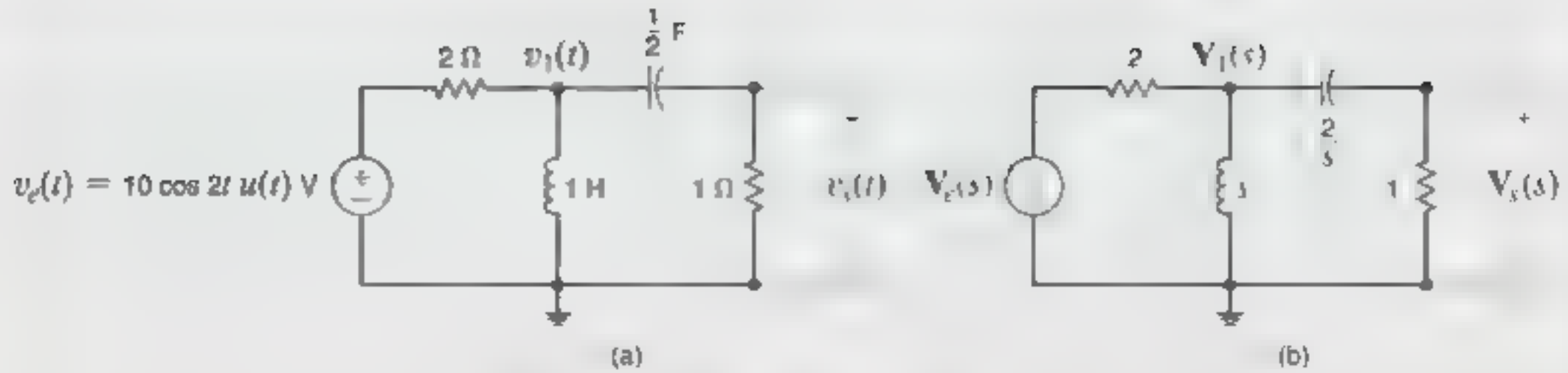


Figura 14.24 Circuito utilizado no Exemplo 14.11.

e, assim, a resposta em regime estacionário será

$$\begin{aligned} v_{\text{res}}(t) &= V_M |H(j2)| \cos[2t + \phi(j2)] \\ &= 3,54 \cos(2t + 45^\circ) \text{ V} \end{aligned}$$

A resposta completa (transiente superposta a de regime estacionário) pode ser obtida a partir da expressão

$$\begin{aligned} V_1(s) &= \frac{s}{3s^2 + 4s + 4} V_s(s) \\ &= \frac{s^2}{3s^2 + 4s + 4} \left(\frac{10s}{s^2 + 4} \right) \\ &= \frac{10s^3}{(s^2 + 4)(3s^2 + 4s + 4)} \end{aligned}$$

A determinação da transformada inversa de Laplace dessa função, utilizando as técnicas do Capítulo 13, fornece

$$\begin{aligned} v_1(t) &= 3,54 \cos(2t + 45^\circ) \\ &+ 1,44e^{-(2/3)t} \cos\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}t - 55^\circ\right) \text{ V} \end{aligned}$$

Note que quando $t \rightarrow \infty$ o segundo termo tende a zero, e a resposta do regime estacionário fica

$$v_{\text{res}}(t) = 3,54 \cos(2t + 45^\circ) \text{ V}$$

que pode ser facilmente verificada utilizando uma análise por meio de fasores.

Avaliação do Aprendizado

E14.15 Determine a tensão $v_{\text{res}}(t)$ do regime estacionário da rede mostrada na Fig. E14.15 para $t > 0$, considerando que as condições iniciais na rede são nulas.

RESPOSTA:

$$v_{\text{res}}(t) = 3,95 \cos(2t - 99,46^\circ) \text{ V.}$$

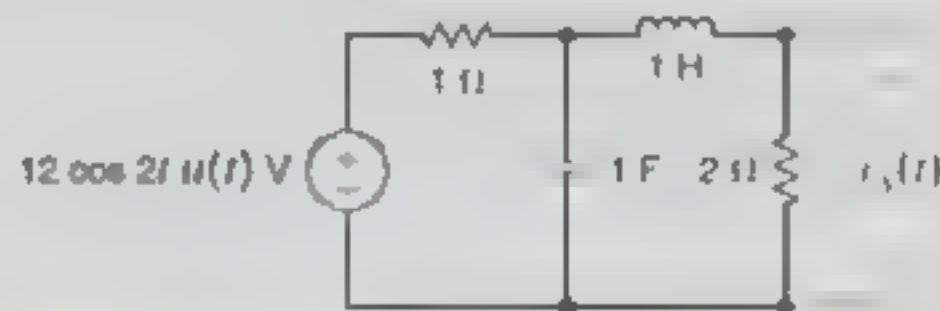


Figura E14.15

E14.16 Obtenha a resposta do regime estacionário para a tensão $v_{\text{res}}(t)$ do circuito mostrado na Fig. E14.16.

RESPOSTA:

$$v_{\text{res}}(t) = 2,98 \cos(2t + 153,43^\circ) \text{ V.}$$

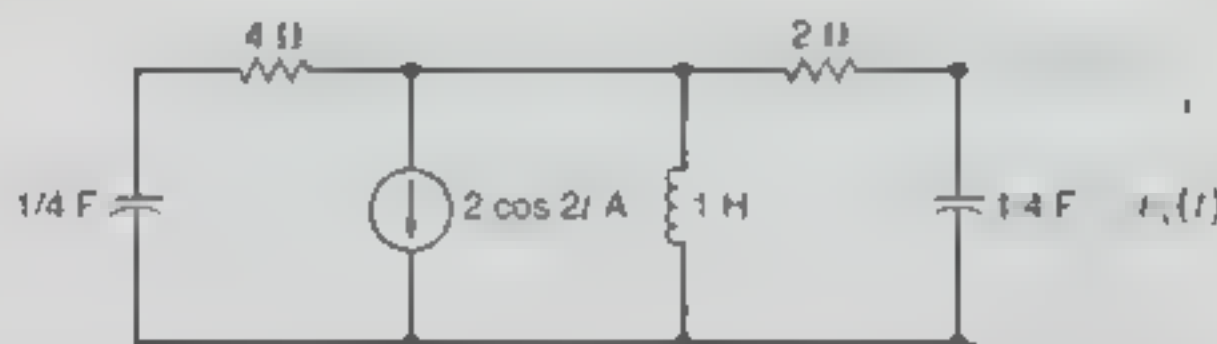


Figura E14.16

14.7 Exemplos de Aplicação

EXEMPLO DE APLICAÇÃO 14.12

A Associação Americana de Indústrias Gravadoras (RIAA – *Recording Industry Association of America*) utiliza filtros padronizados de gravação e reprodução para melhorar a qualidade das gravações dos discos fonográficos. Esse processo é mostrado na Fig. 14.25. Durante a seção de gravação, o sinal de uma voz ou de uma música passa por um filtro de gravação que atenua os sinais graves. Esse sinal filtrado é então gravado em um disco de vinil. No toca-discos a agulha do fonógrafo sente a mensagem gravada e reproduz o sinal filtrado, que prossegue para o filtro do toca-discos. A finalidade do filtro do toca-discos é ressaltar os sinais graves e reconstruir o sinal original de voz ou de música. Em seguida, o sinal reconstruído pode ser amplificado e enviado aos alto-falantes.

Examina-se a seguir os diagramas de polos-zeros dos filtros do gravador e do toca-discos.

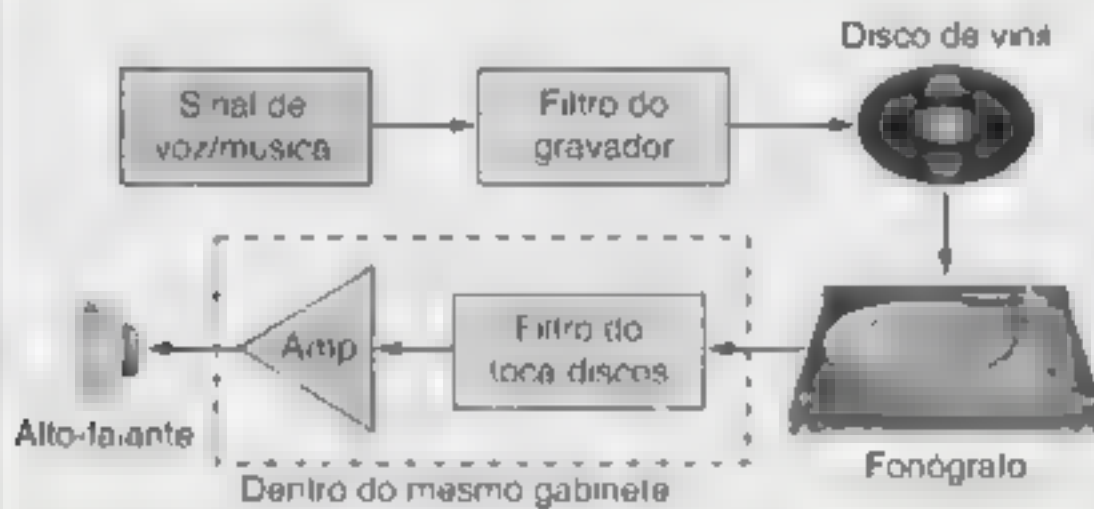


Figura 14.25 Diagrama de blocos do fonógrafo gravador de discos e do toca-discos.

SOLUÇÃO

A função de transferência do filtro de gravação é

$$G_{\text{RG}}(s) = \frac{K(1 + s\tau_1)(1 + s\tau_2)}{1 + s\tau_p}$$

em que as constantes de tempo são $\tau_{z1} = 75 \mu\text{s}$, $\tau_{z2} = 3180 \mu\text{s}$ e $\tau_p = 318 \mu\text{s}$, e K é uma constante escolhida de modo que $G_{\text{RG}}(s)$ tenha uma intensidade de 1 a 1000 Hz. As frequências resultantes para os polos-zeros em radianos/segundo são

$$\omega_{z1} = 1/\tau_{z1} = 13,33 \text{ krad/s}$$

$$\omega_{z2} = 1/\tau_{z2} = 313,46 \text{ rad/s}$$

$$\omega_p = 1/\tau_p = 3,14 \text{ krad/s}$$

A Fig. 14.26a mostra o diagrama de polos-zeros para o filtro do gravador.

A função de transferência do filtro do toca-discos é a inversa da função de transferência do gravador, isto é,

$$G_{\text{RD}}(s) = \frac{1}{G_{\text{RG}}(s)} = \frac{A_d(1 + s\tau_p)}{(1 + s\tau_{p1})(1 + s\tau_{p2})}$$

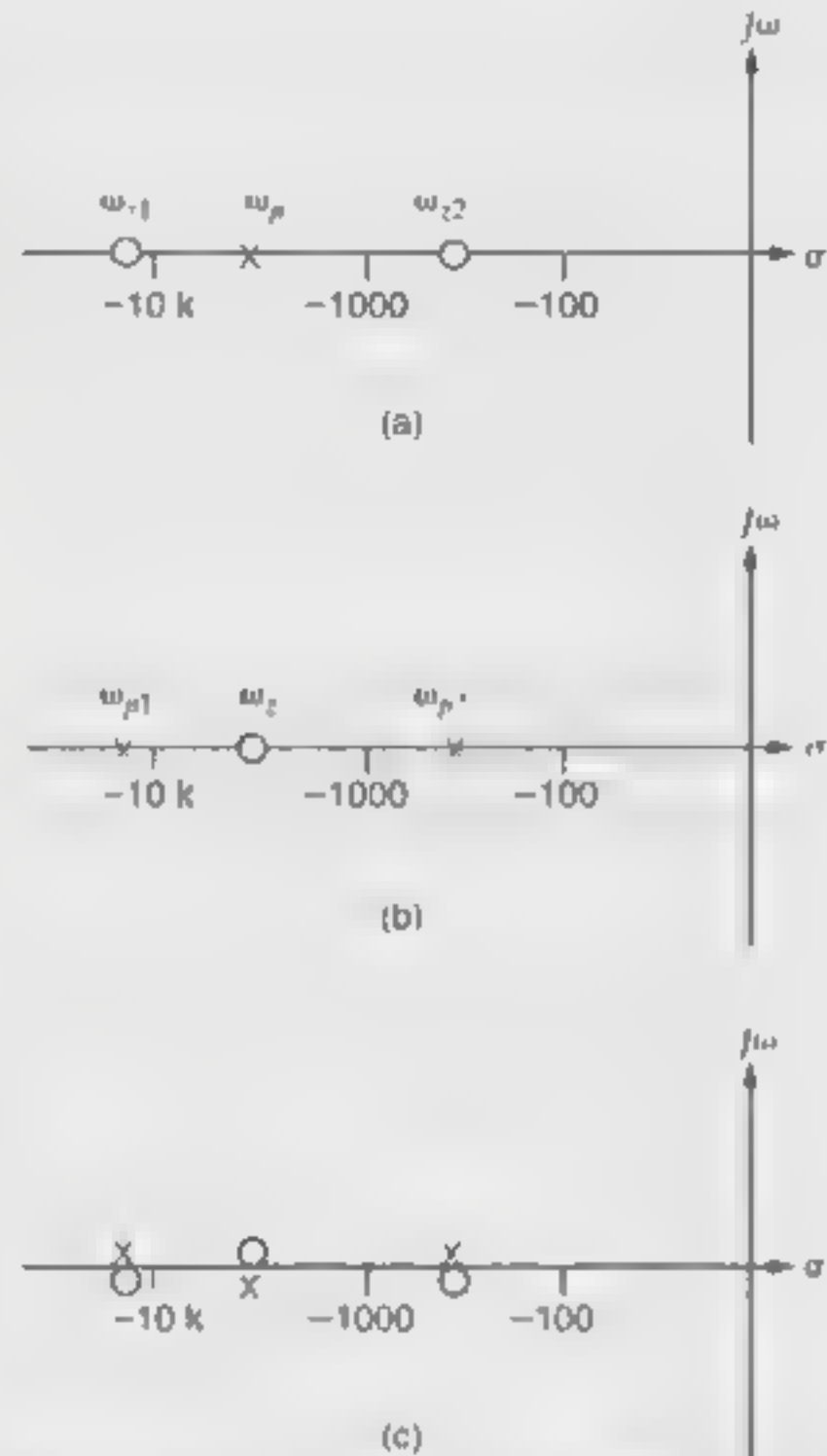


Figura 14.26 Diagrama de polos-zeros dos filtros fonográficos da RIAA.

em que as constantes de tempo, agora, são $\tau_{d1} = 75 \mu\text{s}$, $\tau_{d2} = 3180 \mu\text{s}$, $\tau_d = 318 \mu\text{s}$ e A_d é igual a $1/K$. As frequências para os polos-zeros em radianos/segundo são

$$\omega_{p1} = 1/\tau_{d1} = 13,33 \text{ krad/s}$$

$$\omega_{p2} = 1/\tau_{d2} = 313,46 \text{ rad/s}$$

$$\omega_z = 1/\tau_d = 3,14 \text{ krad/s}$$

que fornece o diagrama de polos-zeros mostrado na Fig. 14.26b. O sinal de voz/música eventualmente passa por ambos os filtros antes de chegar ao amplificador. No domínio s , essa condição é equivalente a multiplicar $V_f(s)$ por $G_{\text{RG}}(s)$ e $G_{\text{RD}}(s)$. No diagrama de polos-zeros, simplesmente superpõem-se os diagramas de polos-zeros dos dois filtros, conforme mostrado na Fig. 14.26c. Note que para cada frequência do polo existe um zero e vice-versa. Assim, os pares polo-zero se cancelam mutuamente, fornecendo um diagrama de polos-zeros que nem contém polo nem zero. Esse efeito pode ser verificado matematicamente multiplicando-se as duas funções de transferência, isto é, $G_{\text{RG}}(s)G_{\text{RD}}(s)$. O resultado deste produto é independente de s . Assim, o sinal de voz/música original é reconstruído e preservado em sua fidelidade.

Considerando um resistor $R = 40 \text{ k}\Omega$, pode-se escrever

$$\omega_0 = 25.000 = \frac{1}{40.000 \sqrt{C_1 C_2}}$$

ou

$$C_1 C_2 = 10^{-10}$$

Tem-se, também, que

$$\zeta = \frac{2}{2} \sqrt{\frac{C_2}{C_1}}$$

que pode ser expressa como

$$\frac{C_2}{C_1} = \frac{16}{9}$$

A solução para C_1 e C_2 fornece

$$C_1 = 0,75 \text{ nF}$$

$$C_2 = 1,33 \text{ nF}$$

O circuito utilizado para simular o filtro é mostrado na Fig. 14.31. A fonte senoidal possui uma frequência de 100 kHz e é utilizada para representar a fonte de ruído.

Os resultados para as tensões de entrada e de saída do filtro para uma simulação de 2 ms são mostrados na Fig. 14.32. Observe que a saída apresenta, de fato, uma forte atenuação do ruído de 100 kHz. Note também que a rápida elevação e a queda no tempo do sinal de transmissão são menores na tensão de saída. Embora essa resposta seja mais lenta, a tensão de saída é rápida o suficiente para manter o ritmo da taxa de transferência de 1000 bits/s.

Considere, agora, um aumento na taxa de transferência de dados de 1000 para 25.000 bits/s, conforme mostrado na Fig. 14.33. A entrada completa e os sinais de saída são mostrados na Fig. 14.34 para um tempo de 200 μs . Nesse caso, a saída não pode ser mantida no mesmo ritmo da entrada e as informações dos dados são perdidas. Cabe, assim, investigar a razão dessa ocorrência. Sabe-se que o filtro é de segunda ordem

com polos em s_1 e s_2 . Representando-se a entrada dos dados por uma função degrau de 5 V, a tensão de saída será

$$V_o(s) = G_v(s) \left(\frac{5}{s} \right) = \frac{K}{(s + s_1)(s + s_2)} \left(\frac{5}{s} \right)$$

em que K é uma constante. Uma vez que o filtro é superamortecido, s_1 e s_2 são números reais e positivos. Uma expansão em frações parciais de $V_o(s)$ será da forma

$$V_o(s) = \frac{K_1}{s} + \frac{K_2}{s + s_1} + \frac{K_3}{s + s_2}$$

que fornece a seguinte expressão no domínio do tempo

$$v_o(t) = [K_1 + K_2 e^{-s_1 t} + K_3 e^{-s_2 t}] u(t) \text{ V}$$

em que K_1 , K_2 e K_3 são constantes reais. As constantes de tempo nas exponenciais são as inversas das frequências dos polos, isto é,

$$\tau_1 = \frac{1}{s_1} = \frac{1}{6,7\text{k}} = 149 \mu\text{s}$$

$$\tau_2 = \frac{1}{s_2} = \frac{1}{93,3\text{k}} = 10,7 \mu\text{s}$$

Como as funções exponenciais atingem a condição de regime estacionário em um tempo de aproximadamente 5τ , a exponencial associada a τ_2 afeta a saída por cerca de 50 μs e a exponencial associada a τ_1 atinge o regime estacionário após cerca de 750 μs . Pela Fig. 14.33, percebe-se que a uma taxa de transferência de dados de 25.000 bits/s, cada bit (um valor de tensão "alto" ou "baixo") precisa de um intervalo de tempo de 40 μs . Portanto, a exponencial associada a s_1 , e assim $v_o(t)$, ainda está longe de sua condição de regime estacionário quando o próximo bit é transmitido. Resumindo, s_1 é muito pequeno.

Para remediar essa situação, pode-se aumentar as frequências dos polos e alterar o sistema para criticamente amortecido, isto é, $\zeta = 1$. Selecionando $\omega_0 = 125 \text{ krad/s}$, os polos

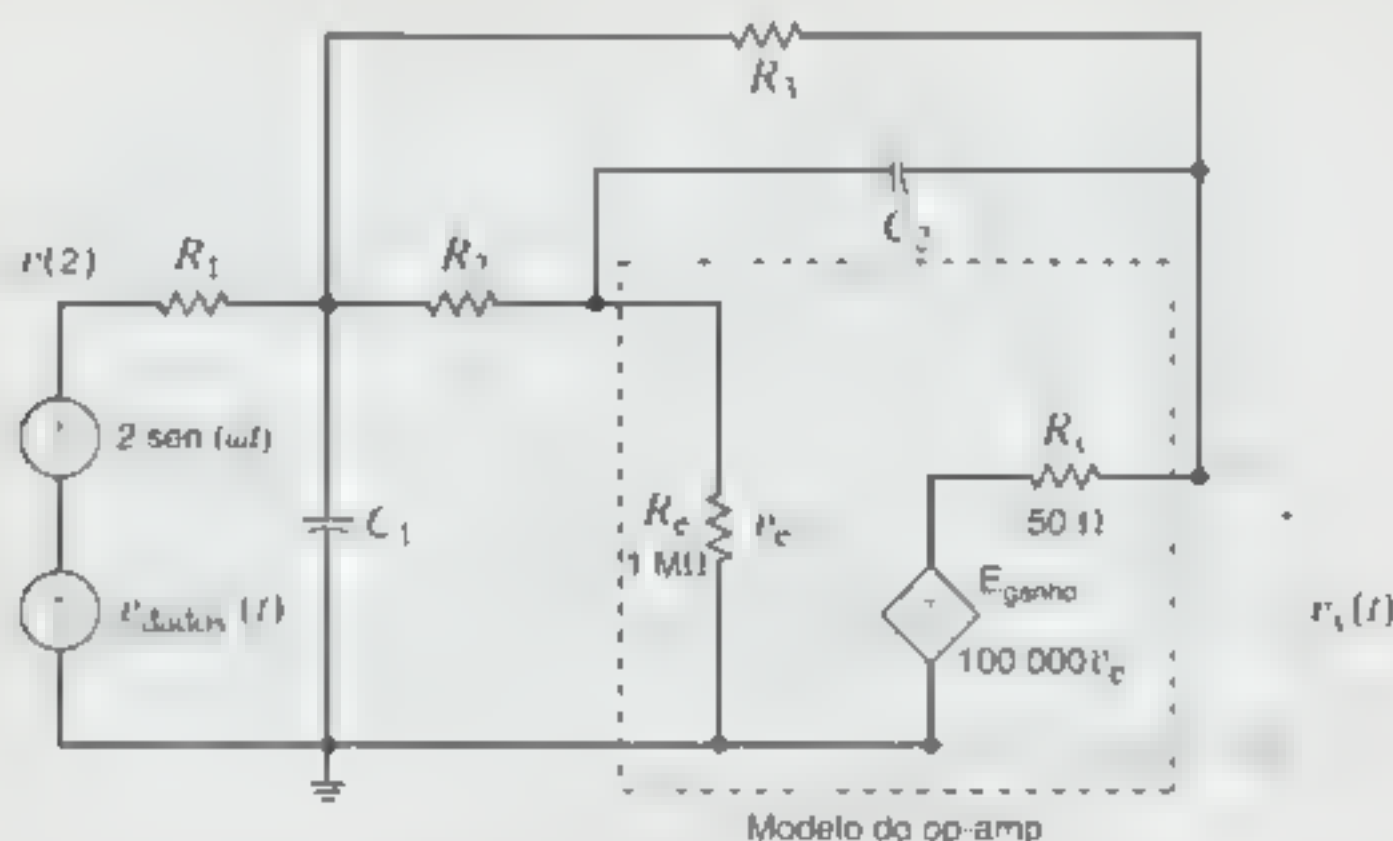


Figura 14.31 Circuito do filtro de segunda ordem.

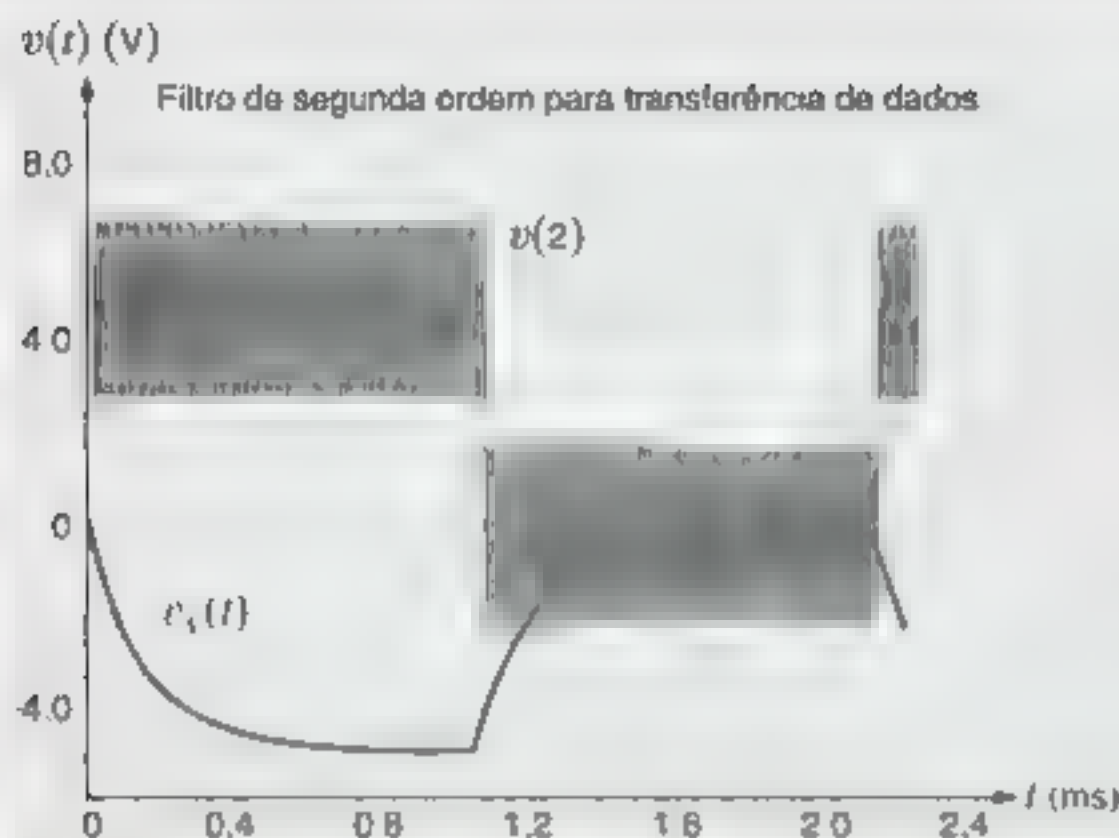


Figura 14.32 Resultado de simulação para as saídas do nó 2 e da tensão $v_s(t)$.



Figura 14.33 Forma de onda dos dados digitais com taxa de transmissão de 25.000 bits/s.

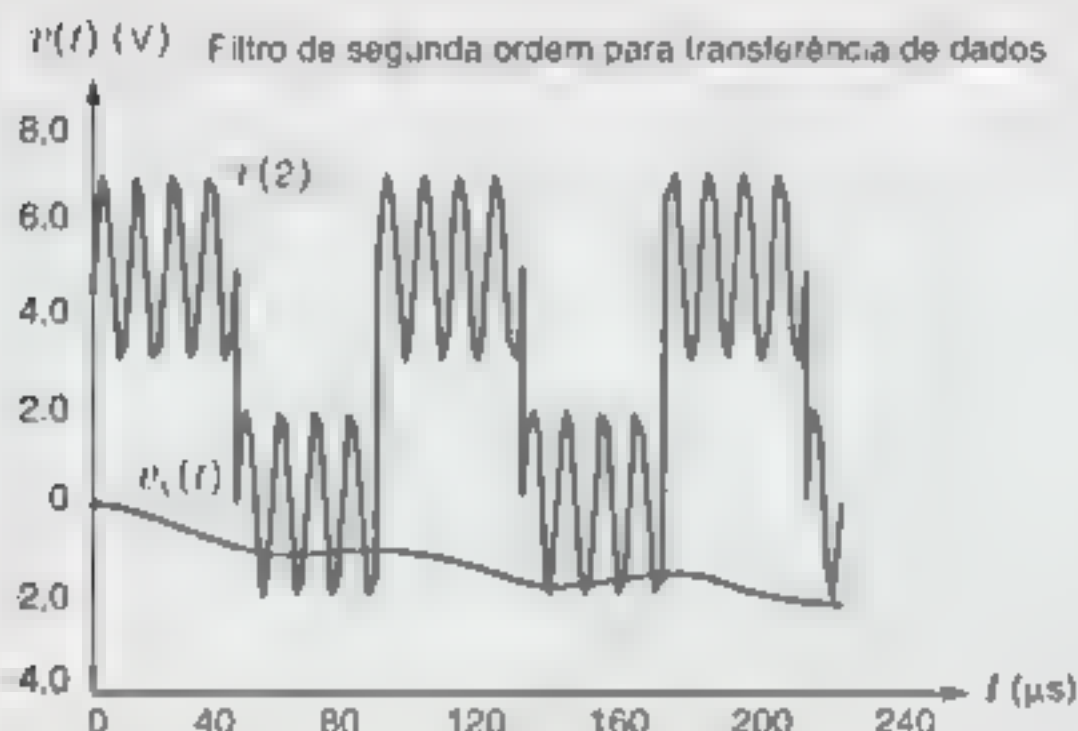


Figura 14.34 Resultado de simulação para as saídas do nó 2 e da tensão $v_s(t)$ para uma taxa de transferência de dados de 25.000 bits/s.

estarão em $s_1 = s_2 = -125 \text{ krad/s}$ ou $19,9 \text{ kHz}$ – ambos abaixo do ruído de 100 kHz que deve ser filtrado. A Fig. 14.35 mostra as novas posições dos polos movimentados para a esquerda de suas posições originais. Espera-se que os polos assim posicionados propiciem ao sistema uma resposta mais rápida para o trem de pulsos representados por v_{dados} .

As expressões para ω_0 e ζ serão, neste caso,

$$\omega_0 = 125.000 = \frac{1}{40.000 \sqrt{C_1 C_2}}$$

ou

$$C_1 C_2 = 4 \times 10^{-20}$$

E, também,

$$\zeta = 1 = \frac{3}{2} \sqrt{\frac{C_1}{C_2}}$$

que pode ser expressa como

$$\frac{C_1}{C_2} = \frac{4}{9}$$

A solução para C_1 e C_2 fornece

$$C_1 = 300 \text{ pF}$$

$$C_2 = 133,3 \text{ pF}$$

Uma simulação utilizando esses novos valores para os capacitores produz as curvas representativas da entrada e da saída de dados mostradas na Fig. 14.36. Agora, a tensão de saída atinge os níveis “alto” e “baixo” no instante imediatamente anterior ao instante em que a tensão v_{dados} faz sua próxima transmissão e o ruído de 100 kHz fica ainda bastante reduzido.

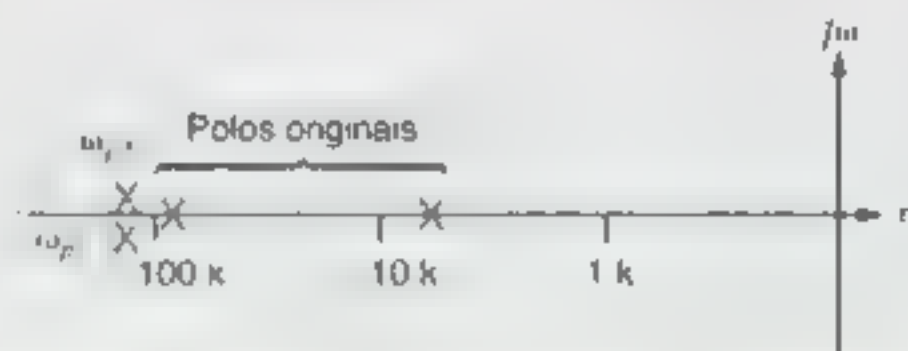


Figura 14.35 Diagrama de polos-zeros para os sistemas original e criticamente amortecido.

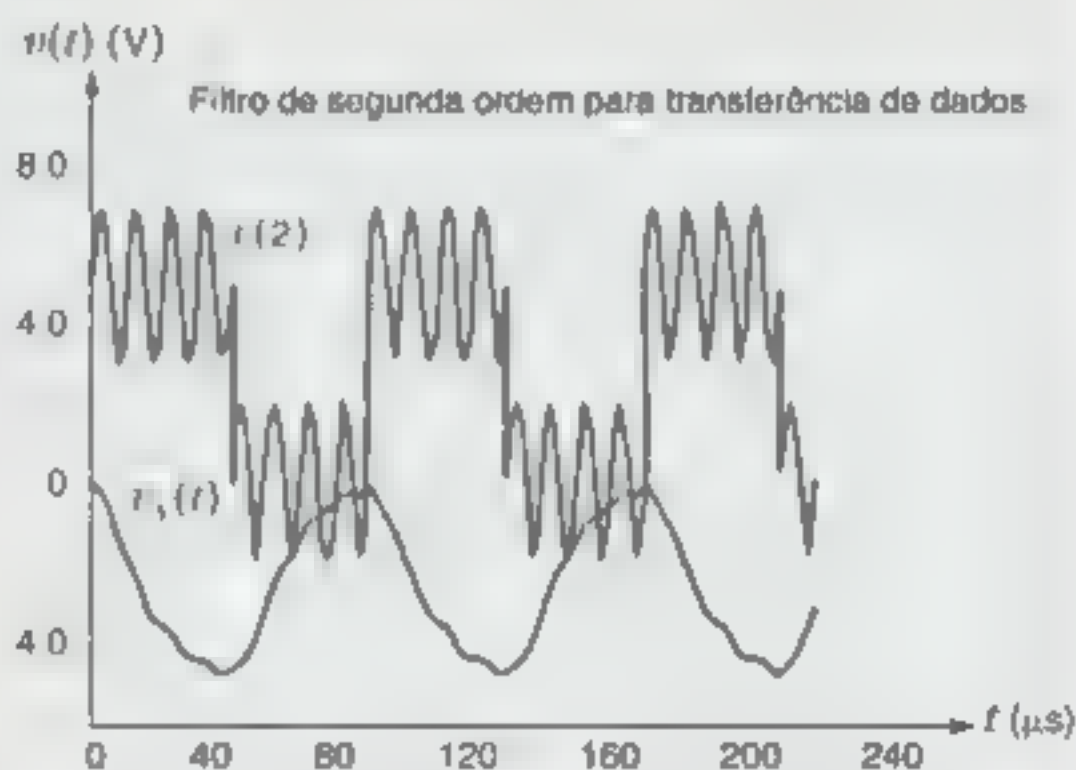


Figura 14.36 Simulação das saídas do nó 2 e da tensão $v_s(t)$ para o sistema criticamente amortecido.

EXEMPLO DE PROJETO 14.14

O circuito mostrado na Fig. 14.37 é o de um filtro passa-baixa. Durante sua instalação, verificou-se que sua saída apresenta oscilações significativas quando o sinal de entrada é pulsante. Deseja-se modificar o filtro de modo a torná-lo criticamente amortecido.

SOLUÇÃO

Inicialmente, deve-se determinar a correspondente função de transferência, $H(s)$.

$$H(s) = \frac{V_s}{V_F} = \frac{\frac{R}{1 + sRC}}{\frac{R}{1 + sRC} + sL} = \frac{\frac{1}{LC}}{s^2 + \frac{s}{RC} + \frac{1}{LC}} \quad 14.30$$

em que o termo $\frac{R}{1 + sRC}$ representa a combinação em paralelo do resistor com o capacitor. Dados os valores dos parâmetros dos componentes, a função de transferência fica

$$H(s) = \frac{10^{10}}{s^2 + (5 \times 10^4)s + 10^{10}} \quad 14.31$$

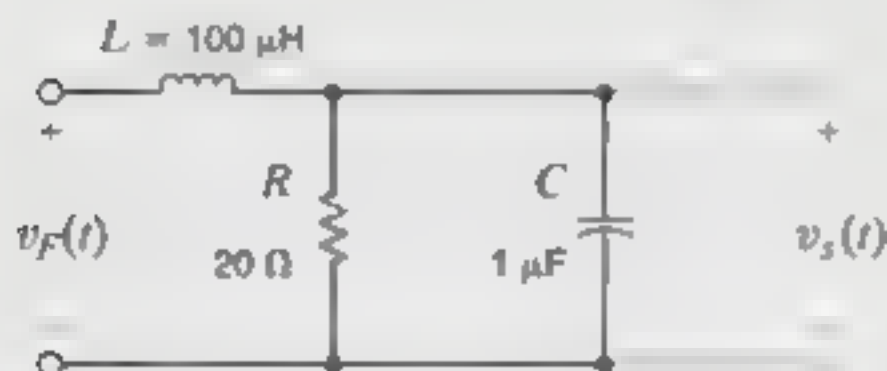


Figura 14.37 Filtro passa-baixa de segunda ordem.

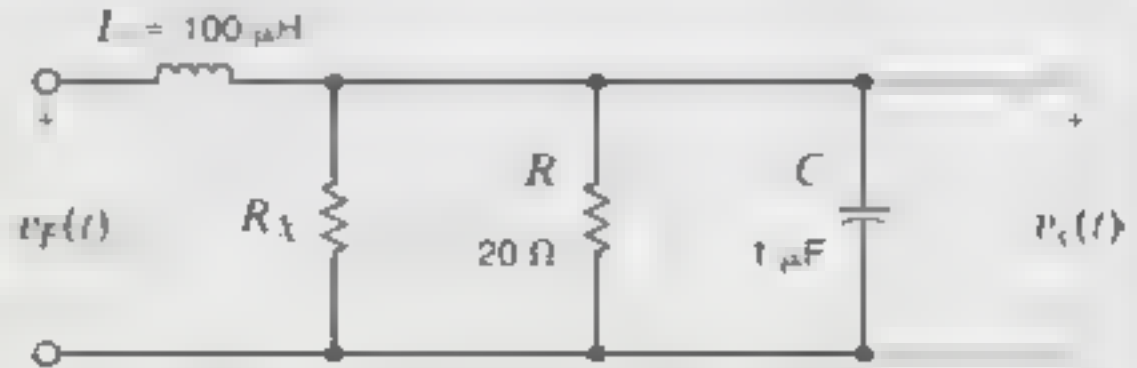


Figura 14.38 Instalação de um resistor adicional para alterar a fração de amortecimento da rede.

e a frequência ressonante e a fração de amortecimento são

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = 10^5 \text{ rad/s} \quad \text{e} \quad 14.32$$

$$2\zeta\omega_0 = \frac{1}{RC} \Rightarrow \zeta = \frac{5 \times 10^4}{2 \times 10^5} = \frac{5 \times 10^4}{2 \times 10^5} = 0,25$$

Assim, a rede é, de fato, subamortecida. Com base na Eq. (14.32), constata-se que o aumento da fração de amortecimento de um fator igual a 4, passando a valer 1,0, requer uma redução na resistência R pelo mesmo fator 4, isto é, passa a valer 5 Ω. Esta condição pode ser conseguida instalando-se um resistor, R_x , em paralelo com R , conforme mostrado na Fig. 14.38. O valor necessário a este resistor pode ser obtido resolvendo-se a Eq. (14.33) para R_x

$$R_{eq} = 5 = \frac{RR_x}{R + R_x} = \frac{20R_x}{20 + R_x} \quad 14.33$$

A solução é $R_x = 6,67 \Omega$.

EXEMPLO DE PROJETO 14.15

O circuito mostrado na Fig. 14.39 é denominado oscilador de ponte de Wien. Sua tensão de saída é uma onda senoidal cuja frequência pode ser sintonizada. Projete esse circuito para uma frequência de oscilação de 10 kHz.

SOLUÇÃO

Essa rede parece ímpar por duas razões. Primeiro, não existe qualquer sinal de entrada! Segundo, não se observa um circuito com op-amp no qual a saída seja conectada aos terminais não inversores da entrada. Entretanto, sabe-se que, se os op-amps estiverem operando de forma apropriada, suas correntes de saída serão nulas e a diferença entre os níveis de tensão dos dois terminais de entrada será nula. Essas restrições serão empregadas para se escrever duas funções de transferência relacionando o retorno da saída do op-amp e a cada uma das entradas do op-amp. A primeira é definida como

$$H_{poz}(s) = \frac{V_{out}}{V_1} = \frac{R_1}{R_1 + R} \quad 14.34$$

e a segunda é

$$H_{neg}(s) = \frac{V_{out}}{V_2} = \frac{Z_1}{Z_1 + Z_2} \quad 14.35$$

em que Z_1 representa a rede R - C em paralelo e Z_2 representa a rede R - C em série. Assim,

$$Z_1 = \frac{R \parallel (1/sC)}{(1/sC) + R} = \frac{R}{1 + sRC} \quad \text{e} \quad 14.36$$

$$Z_2 = R + \frac{1}{sC} = \frac{1 + sRC}{sC}$$

A substituição da Eq. (14.36) na Eq. (14.35) fornece

$$H_{neg}(s) = \frac{V_{out}}{V_2} = \frac{\frac{R}{1 + sRC}}{\frac{R}{1 + sRC} + \frac{1 + sRC}{sC}} = \frac{R}{s^2(RC)^2 + 3sRC + 1} \quad 14.37$$

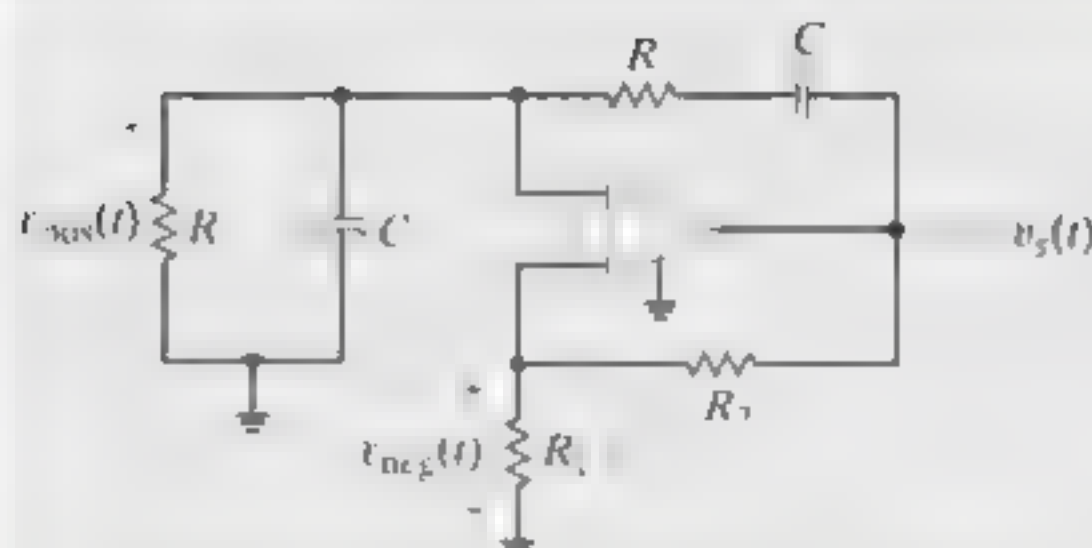


Figura 14-39 O oscilador clássico da ponte de Wien.

Como a tensão entre os terminais de entrada do op-amp é nula, $V_{\text{neg}} = V_{\text{pos}}$ e, portanto, $H_{\text{pos}}(s) = H_{\text{neg}}(s)$! Note que $H_{\text{neg}}(s)$ na Eq. (14.34) é exatamente uma razão entre resistores e, portanto, um número real. O op-amp força o mesmo a ocorrer com $H_{\text{pos}}(s)$ na frequência de oscilação! Observe, agora, a Eq. (14.37). Seu numerador é um imaginário puro. Se $H_{\text{pos}}(s)$ deve ser real, então seu denominador também deve ser um imaginário puro. O resultado é

$$(j\omega)^2(RC)^2 + 1 = 0 \Rightarrow \omega = \frac{1}{RC} \Rightarrow f = \frac{1}{2\pi RC}$$

Escolhendo arbitrariamente $C = 10 \text{ nF}$, obtém-se

$$R = \frac{1}{2\pi f C} = \frac{1}{2\pi (0.5)(10^{-8})} = 1,59 \text{ k}\Omega$$

Deve-se ainda determinar os valores de R_1 e R_2 . Examine, novamente, o fato de $H_{\text{pos}}(s) = H_{\text{neg}}(s)$. A uma frequência de 10 kHz, $H_{\text{pos}}(s)$ fica

$$H_{\text{pos}}(s) = \frac{sRC}{s^2(RC)^2 + 3sRC + 1} = \frac{sRC}{3sRC} = \frac{1}{3}$$

O mesmo deve ser verdadeiro para $H_{\text{neg}}(s)$.

$$H_{\text{neg}}(s) = \frac{R_1}{R_1 + R_2} = \frac{1}{3}$$

A única solução possível é $R_2 = 2R_1$. Escolhendo-se arbitrariamente $R_1 = R = 1,59 \text{ k}\Omega$, obtém-se $R_2 = 3,18 \text{ k}\Omega$.

O que acontece se $H_{\text{pos}}(s)$ não for igual a $H_{\text{neg}}(s)$ na construção do circuito? Caso $H_{\text{neg}}(s)$ seja maior, a oscilação desaparecerá. Porém, se $H_{\text{pos}}(s)$ for maior, as oscilações aumentarão até que a saída do op-amp atinja o limite de potência fornecida. Nesse ponto, a forma da saída é mais a de uma onda quadrada que de uma senoide. Como é impossível assegurar que $H_{\text{pos}}(s)$ e $H_{\text{neg}}(s)$ sejam exatamente iguais a 10 kHz, os engenheiros geralmente substituem R_2 por um resistor não linear cuja resistência diminui com o aumento da temperatura. Dessa forma, caso as oscilações de saída comecem a crescer, a potência dissipada aumentará na resistência não linear, diminuindo seu valor. Essa diminuição na resistência aumentará $H_{\text{neg}}(s)$ e trará o oscilador de volta ao ponto de operação equilibrado.

RESUMO

- A utilização dos modelos dos componentes de um circuito no domínio s permite descrevê-los como equações algébricas, em vez de diferenciais.
- Todas as técnicas de análise de circuitos CC, incluindo os teoremas de rede, são aplicáveis no domínio s . Uma vez obtida a solução no domínio s , a transformada inversa é utilizada para se obter a solução no domínio do tempo.
- As raízes da equação característica da rede (isto é, os polos) determinam o tipo de resposta da rede. Um gráfico dessas raízes no semiplano s da esquerda oferece uma indicação imediata do comportamento da rede. A relação entre o diagrama de polos-zeros e o diagrama de Bode é imediata.
- A função de transferência (ou de rede) de uma rede é expressa como

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)}$$

em que $Y(s)$ é a resposta da rede e $X(s)$ é a função forçamento de entrada. Se a função de transferência for conhecida, a resposta na saída será obtida pelo simples produto $H(s)X(s)$.

Se a entrada for uma função impulso, de modo que $X(s) = 1$, a resposta ao impulso será igual à transformada inversa de Laplace da função de rede.

- As propriedades CC dos componentes armazenadores, L e C , podem ser utilizadas para se obter as condições inicial e final. As condições iniciais são necessárias como uma parte do modelo no domínio s , e as condições finais são frequentemente úteis na verificação de uma solução.
- A solução por meio da transformada de Laplace para a resposta de uma rede é composta dos termos transientes, que desaparecem (tendem a zero) quando $t \rightarrow \infty$, e dos termos do regime estacionário, que ficam presentes durante todo o tempo.
- A resposta de uma rede pode ser expressa como

$$Y(s) = H(s)X(s)$$

- A parcela transiente da resposta $Y(s)$ resulta dos polos de $H(s)$, e a parcela do regime estacionário da resposta resulta dos polos da função forçamento $X(s)$.

PROBLEMAS

- 14.1 Determine a impedância $Z(s)$ da rede mostrada na Fig. P14.1.

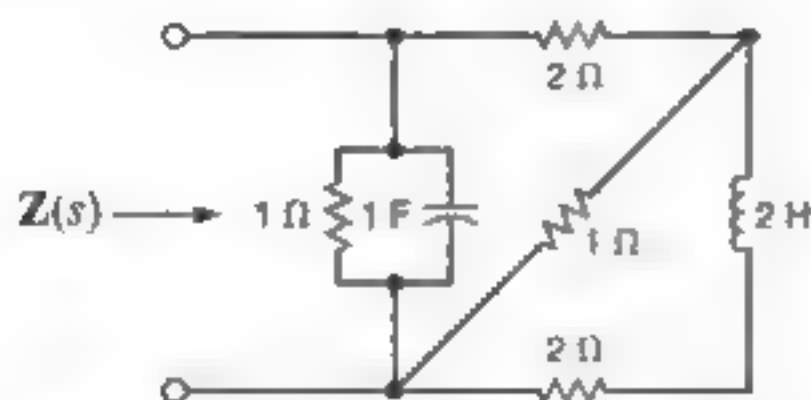


Figura P14.1

- 14.2 Determine a impedância $Z(s)$ da rede mostrada na Fig. P14.2 (a) quando os terminais $B-B'$ formam um circuito aberto e (b) quando os terminais $B-B'$ formam um curto-circuito.

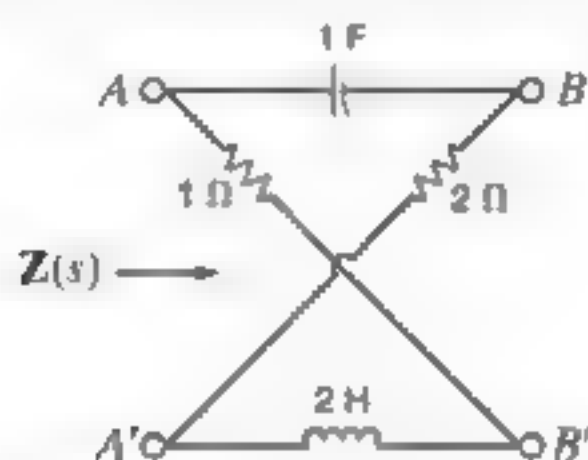


Figura P14.2

- 14.3 Obtenha a tensão $v_x(t)$ da rede mostrada na Fig. P14.3, para $t > 0$.

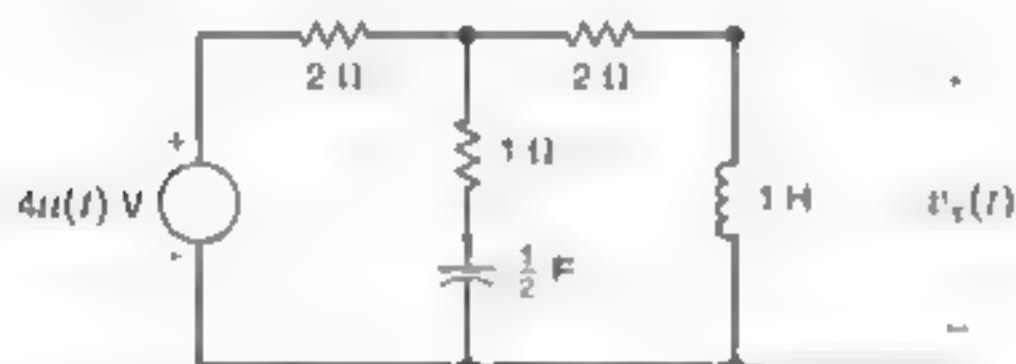


Figura P14.3

- 14.4 Obtenha a tensão $v_x(t)$ da rede mostrada na Fig. P14.4, para $t > 0$.

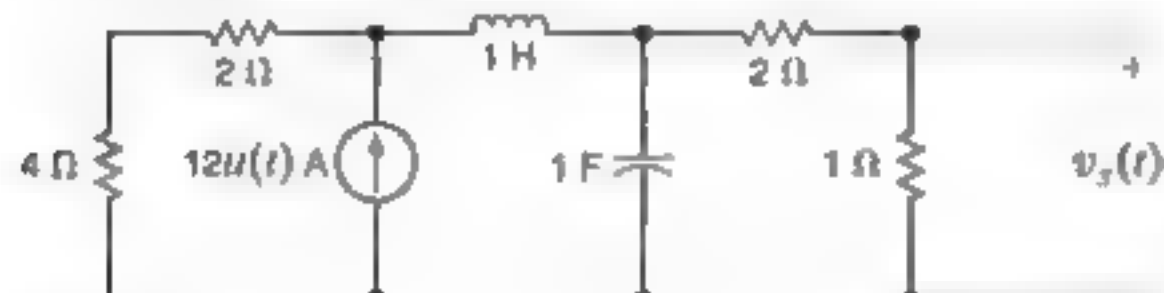


Figura P14.4

- 14.5 Determine a tensão $v_x(t)$, para $t > 0$, da rede mostrada na Fig. P14.5 utilizando as equações dos nós.



Figura P14.5

- 14.6 Utilize a transformada de Laplace e a análise nodal para obter a corrente $i_1(t)$, para $t > 0$, da rede mostrada na Fig. P14.6. Admita que as condições iniciais sejam nulas.

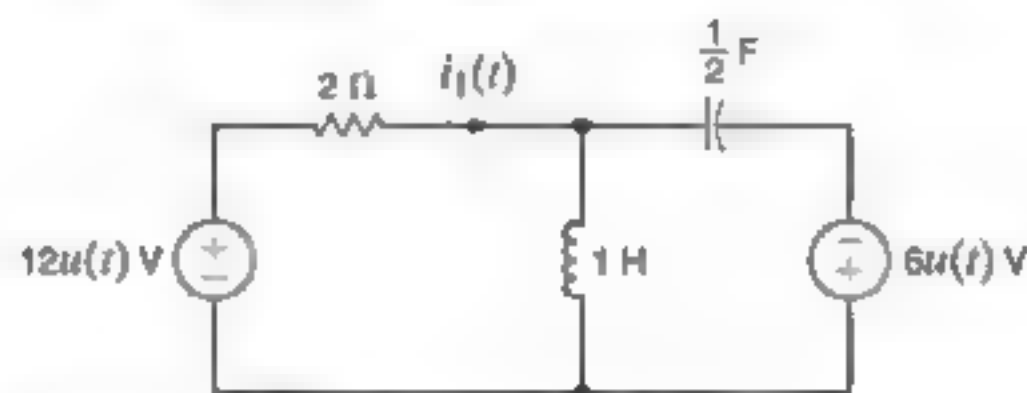


Figura P14.6

- 14.7 Utilize a transformada de Laplace na determinação da tensão $v(t)$, para $t > 0$, da rede mostrada na Fig. P14.7. Admita que as condições iniciais sejam nulas.

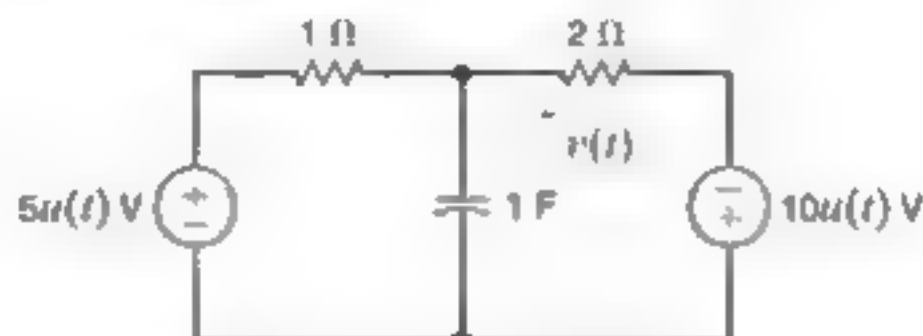


Figura P14.7

- 14.8 Para a rede mostrada na Fig. P14.8, determine a corrente $i_o(t)$ para $t > 0$.

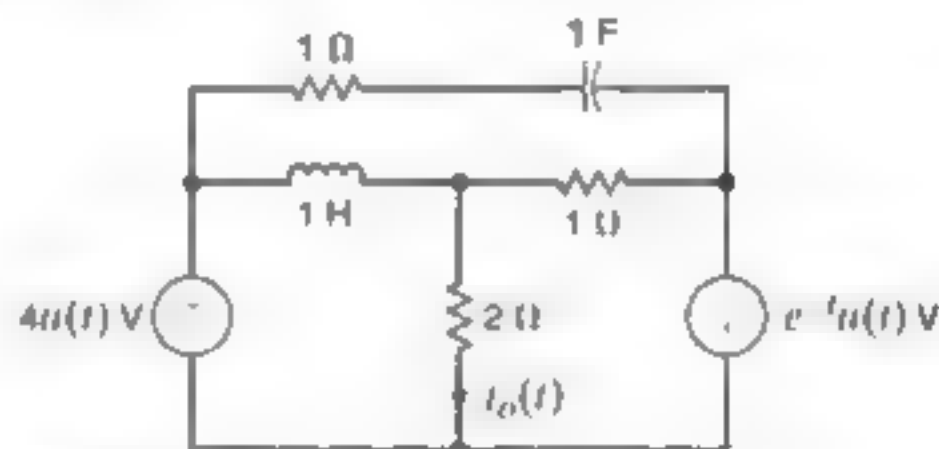


Figura P14.8

- 14.9 Para a rede mostrada na Fig. P14.9, obtenha a tensão $v_x(t)$, para $t > 0$, utilizando as equações dos nós.

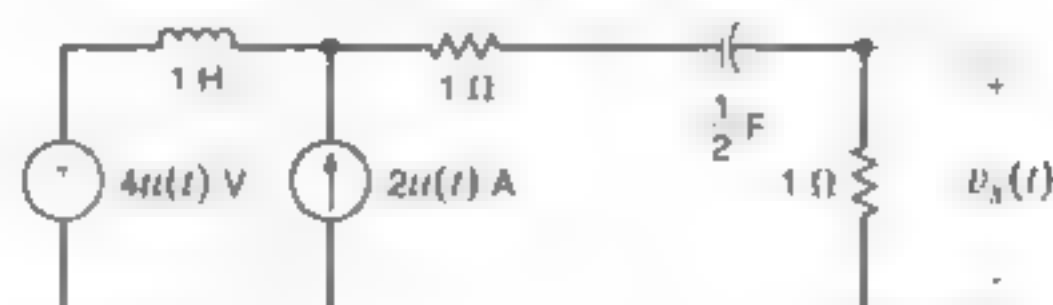


Figura P14.9

- 14.10** Utilize a análise nodal para determinar a tensão $v_x(t)$, para $t > 0$, da rede mostrada na Fig. P14.10.

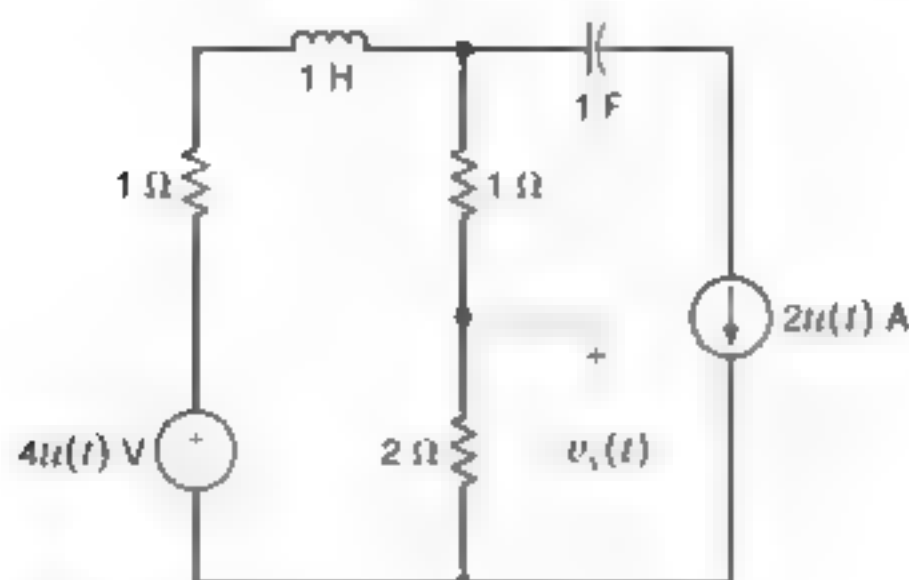


Figura P14.10

- 14.11** Determine a tensão $v_x(t)$, para $t > 0$, da rede mostrada na Fig. P14.11 utilizando a análise nodal.

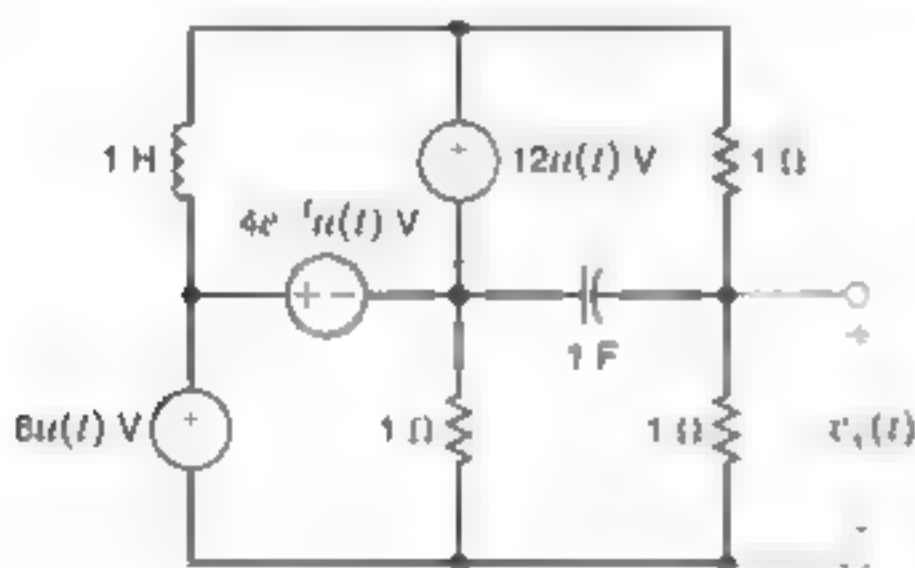


Figura P14.11

- 14.12** Para a rede mostrada na Fig. P14.12, determine a tensão $v_x(t)$, para $t > 0$, utilizando as equações dos laços.

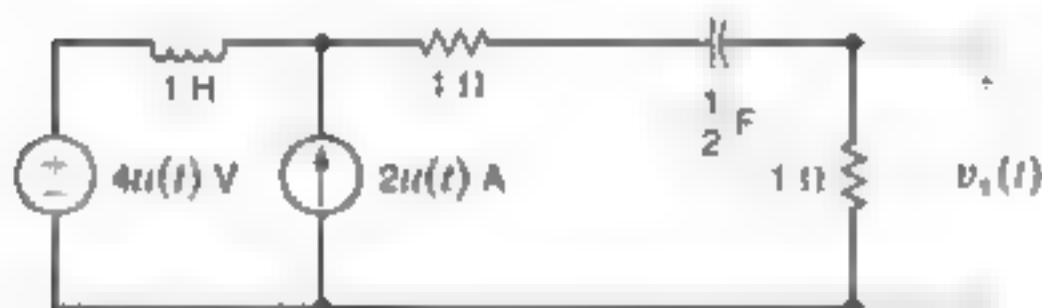


Figura P14.12

- 14.13** Para a rede mostrada na Fig. P14.13, determine a tensão $v_x(t)$, para $t > 0$, utilizando as equações das malhas.

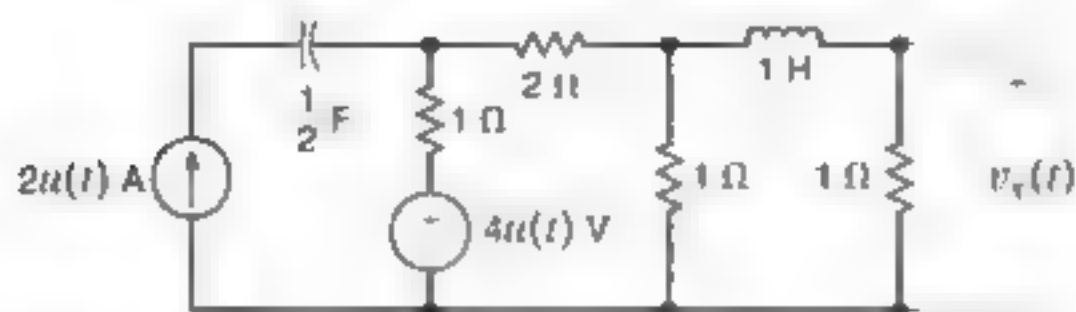


Figura P14.13

- 14.14** Utilize as equações dos laços para determinar a corrente $i_x(t)$, para $t > 0$, da rede mostrada na Fig. P14.14.

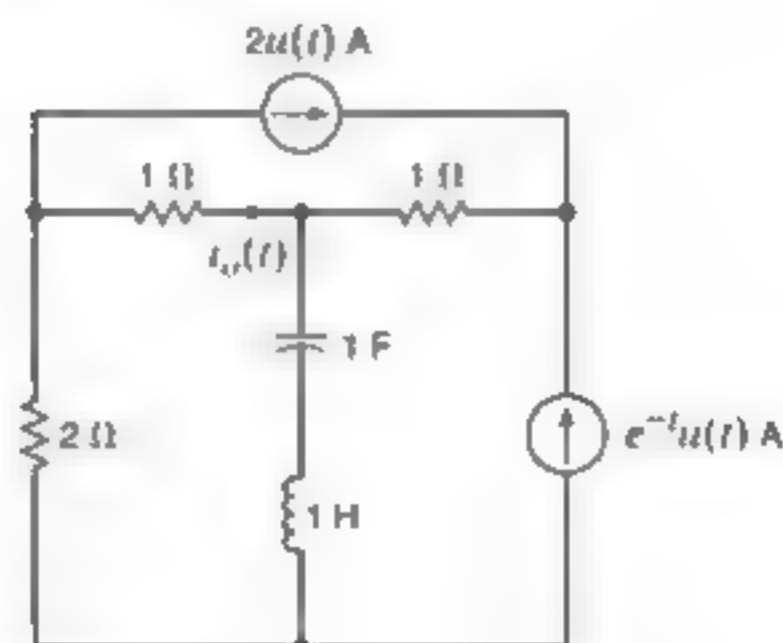


Figura P14.14

- 14.15** Dada a rede mostrada na Fig. P14.15, determine a corrente $i_x(t)$, para $t > 0$, utilizando as equações das malhas.

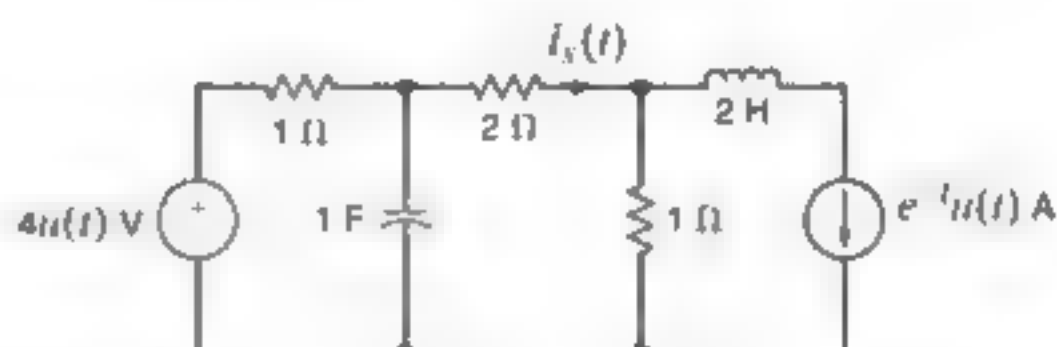


Figura P14.15

- 14.16** Utilize a análise das malhas para determinar a tensão $v_x(t)$, para $t > 0$, da rede mostrada na Fig. P14.16.

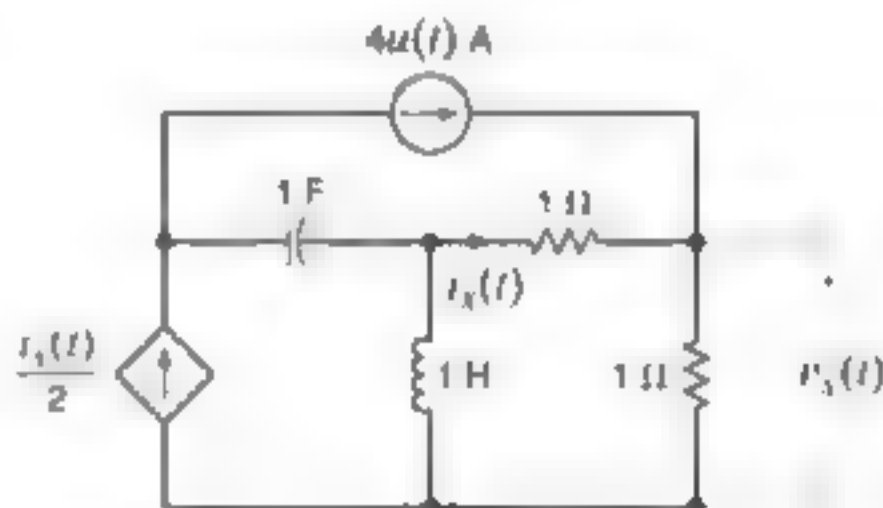


Figura P14.16

- 14.17** Utilizando as equações dos laços, determine a tensão $v_x(t)$, para $t > 0$, da rede mostrada na Fig. P14.17.

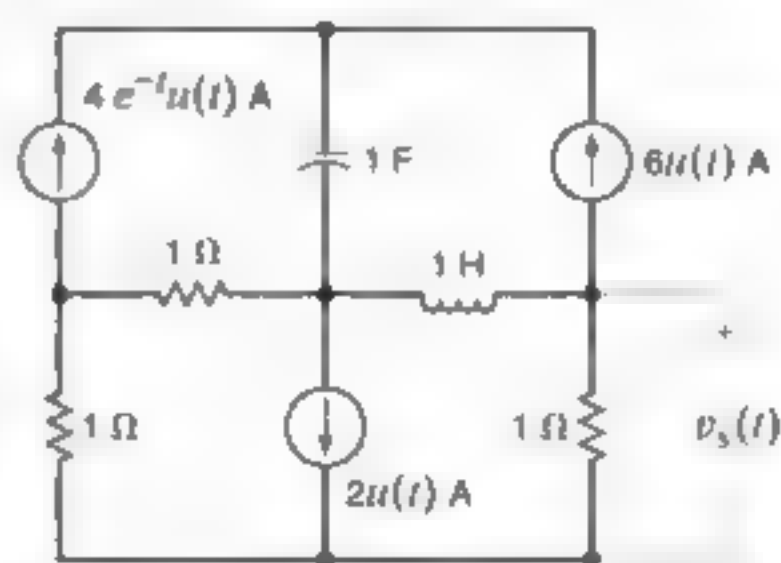


Figura P14.17

14.18 Utilize a análise das malhas para determinar a tensão $v_s(t)$, para $t > 0$, da rede mostrada na Fig. P14.18.

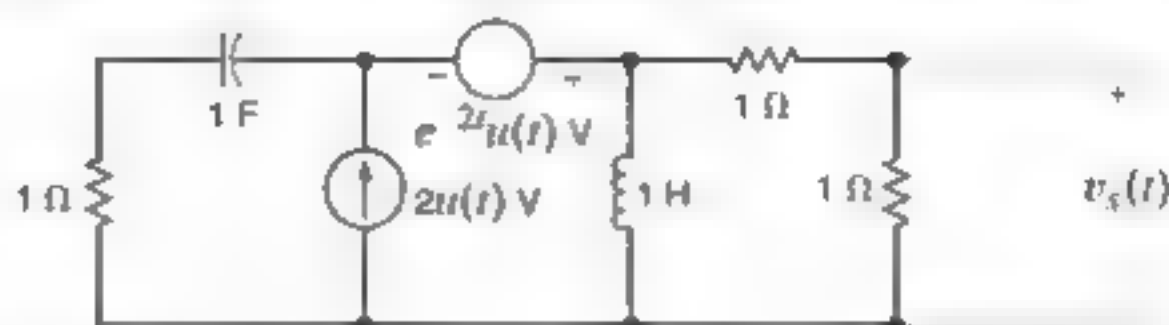


Figura P14.18

14.19 Utilize a análise das malhas para determinar a tensão $v_s(t)$, para $t > 0$, da rede mostrada na Fig. P14.19.

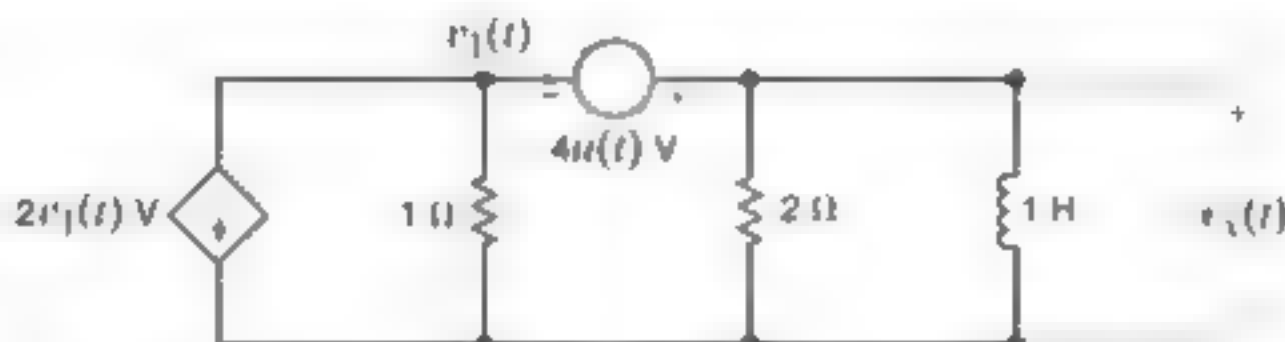


Figura P14.19

14.20 Utilize o princípio da superposição para determinar a tensão $v_s(t)$, para $t > 0$, da rede mostrada na Fig. P14.20.

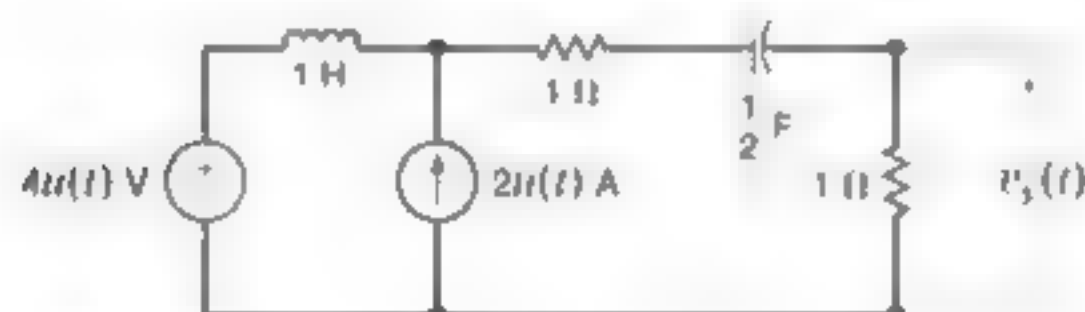


Figura P14.20

14.23 Utilize a transformação de fonte para determinar a tensão $v_s(t)$, para $t > 0$, do circuito mostrado na Fig. P14.23.

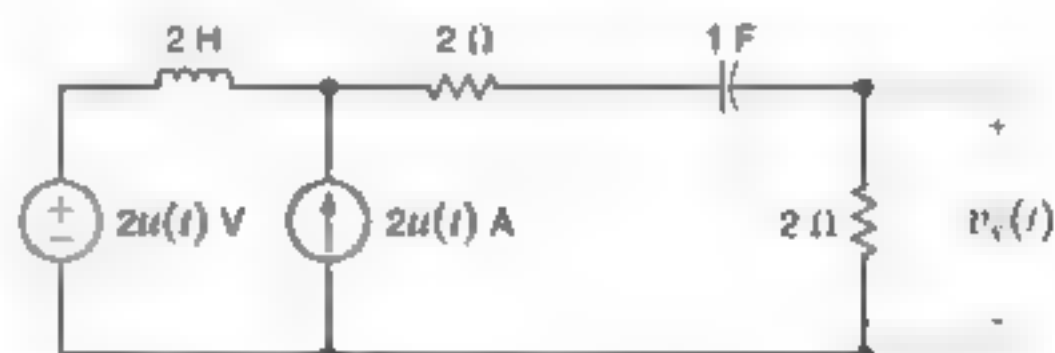


Figura P14.23

14.21 Utilize o princípio da superposição para determinar a tensão $v_s(t)$, para $t > 0$, da rede mostrada na Fig. P14.21.

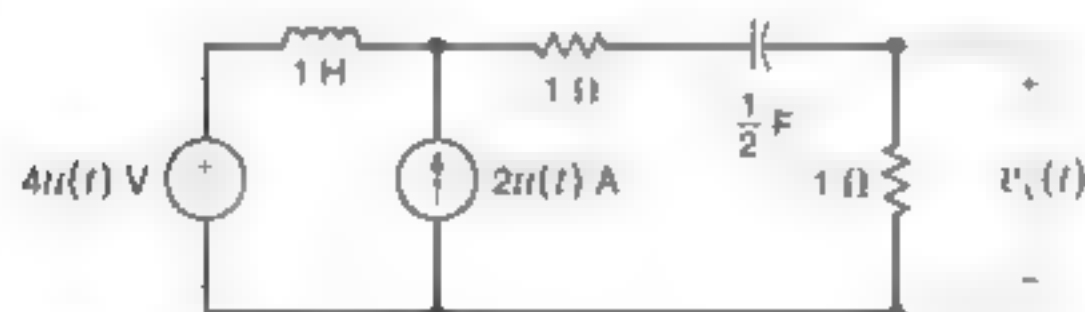


Figura P14.21

14.24 Utilize a transformação de fonte para resolver o Problema 14.21.

14.25 Utilize o teorema de Thévenin para determinar a tensão $v_s(t)$, para $t > 0$, da rede mostrada na Fig. P14.25.

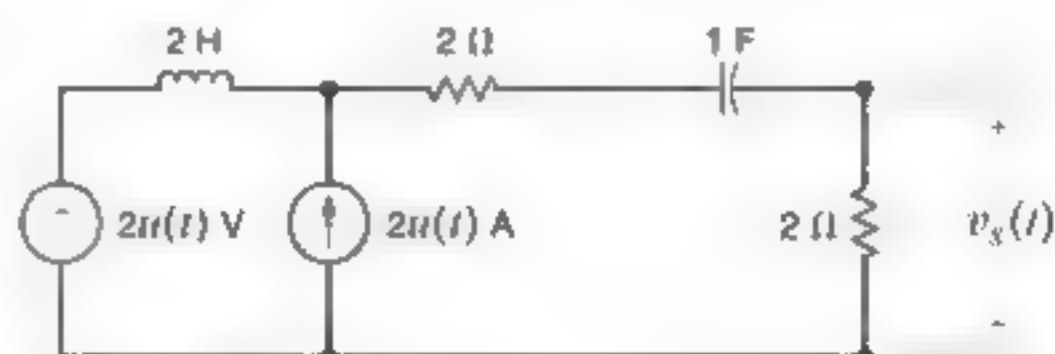


Figura P14.25

14.22 Utilize o princípio da superposição para determinar a tensão $v_s(t)$, para $t > 0$, da rede mostrada na Fig. P14.22.

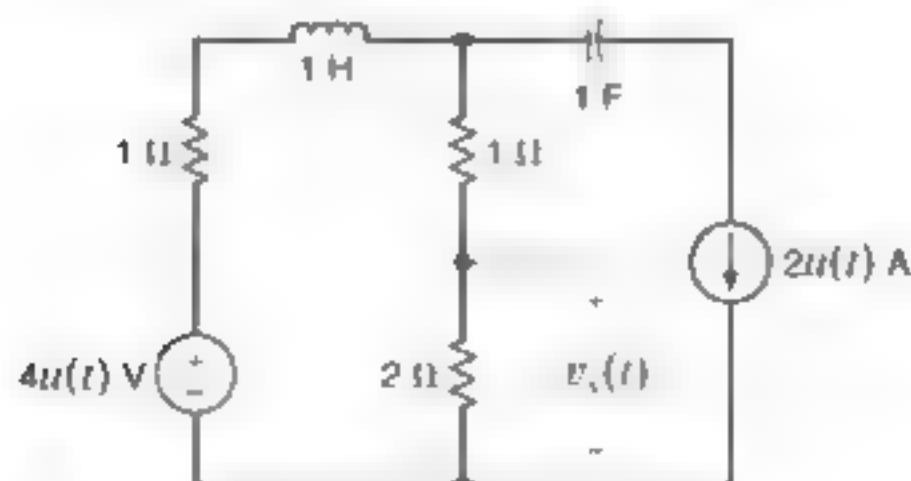


Figura P14.22

14.26 Utilize o teorema de Thévenin para determinar a tensão $v_s(t)$, para $t > 0$, da rede mostrada na Fig. P14.26.

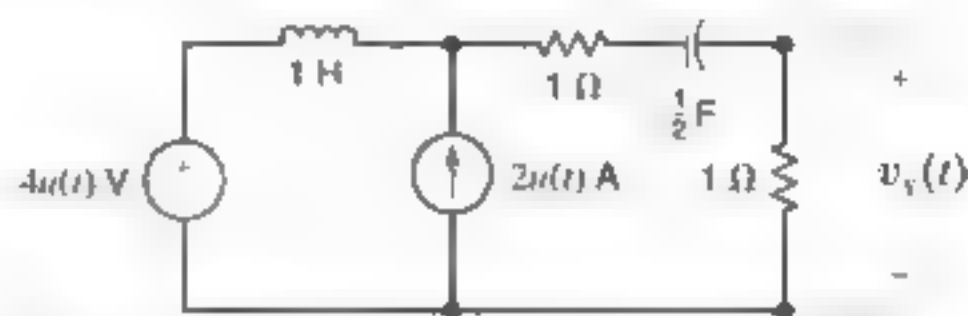


Figura P14.26

- 14.27** Utilize o teorema de Thévenin para determinar a corrente $i_x(t)$, para $t > 0$, da rede mostrada na Fig. P14.27.

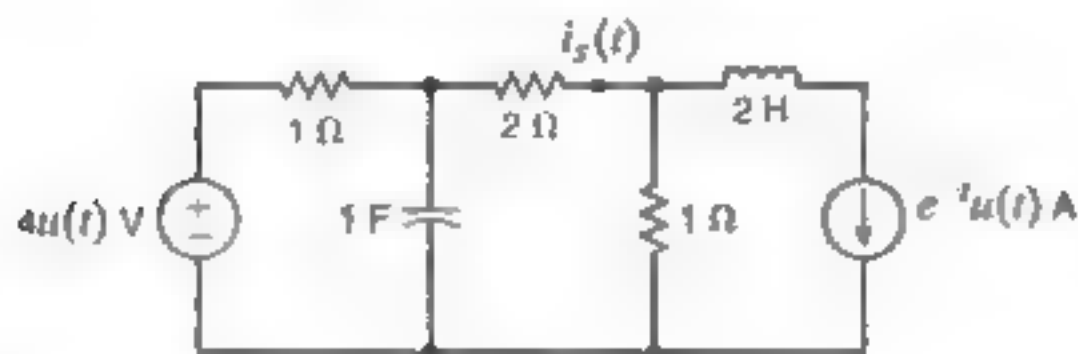


Figura P14.27

- 14.28** Utilize o teorema de Thévenin para determinar a corrente $i_x(t)$, para $t > 0$, da rede mostrada na Fig. P14.28.

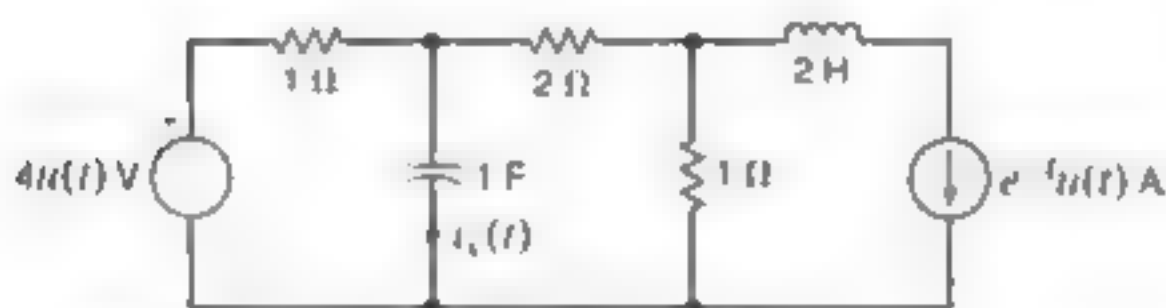


Figura P14.28

- 14.29** Utilize o teorema de Thévenin para determinar a corrente $i_x(t)$, para $t > 0$, do circuito mostrado na Fig. P14.29.

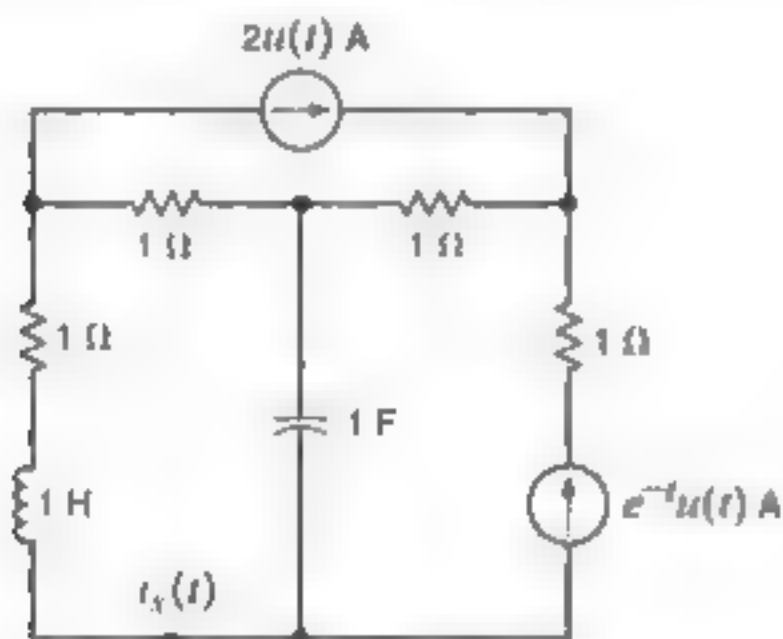


Figura P14.29

- 14.30** Utilize o teorema de Thévenin para determinar a tensão $v_x(t)$, para $t > 0$, da rede mostrada na Fig. P14.30.

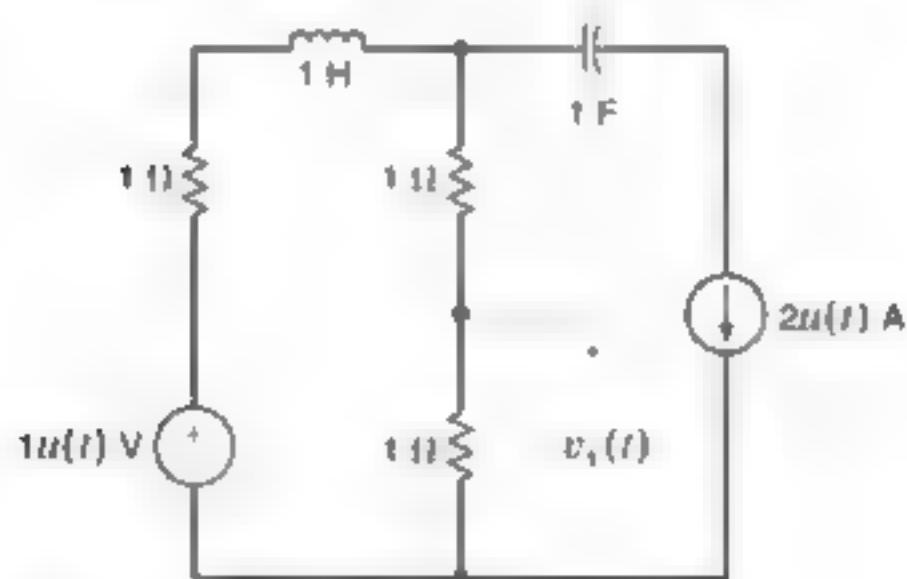


Figura P14.30

- 14.31** Determine a tensão $v_x(t)$, para $t > 0$, da rede mostrada na Fig. P14.31 utilizando o teorema de Thévenin.

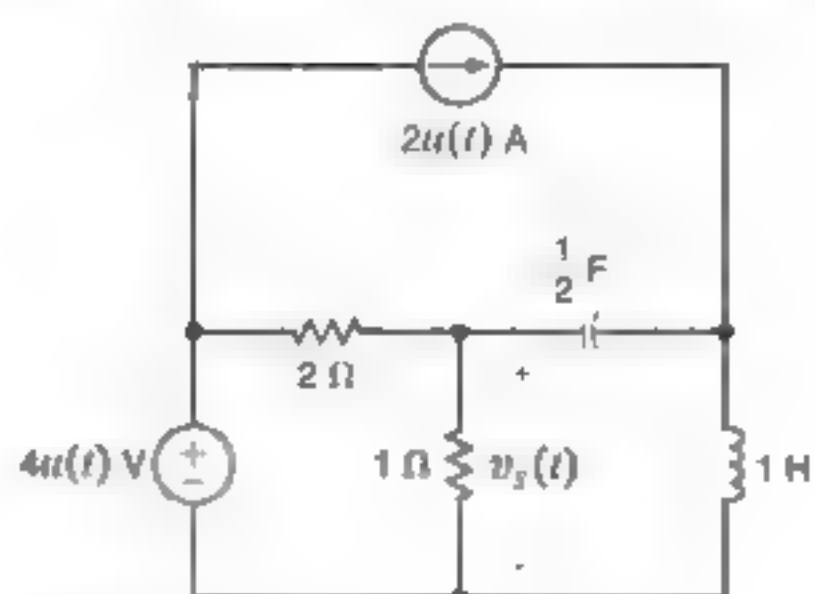


Figura P14.31

- 14.32** Utilize o teorema de Thévenin para determinar a tensão $v_x(t)$, para $t > 0$, da rede mostrada na Fig. P14.32.

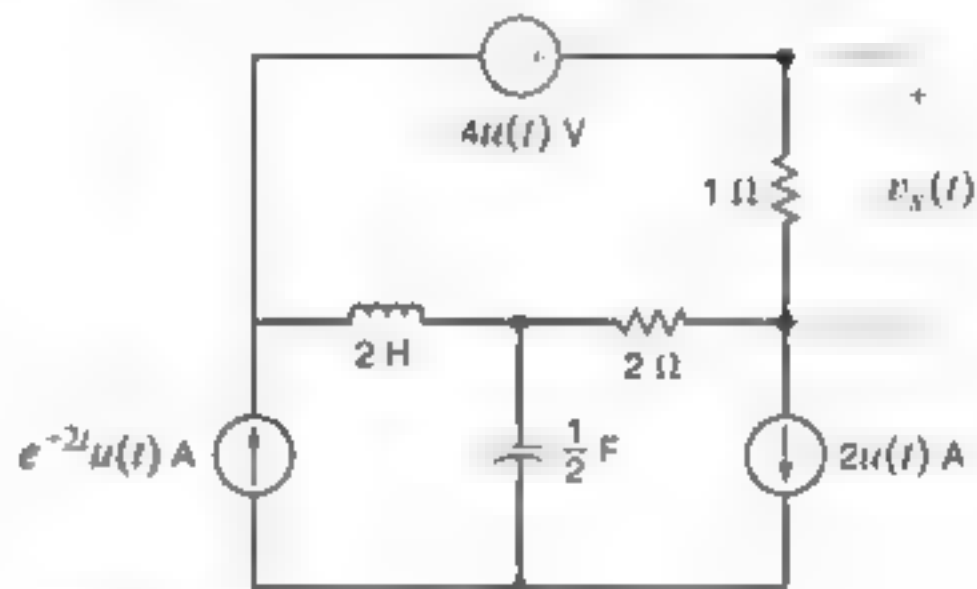


Figura P14.32

- 14.33** Utilize o teorema de Thévenin para determinar a tensão $v_x(t)$, para $t > 0$, da rede mostrada na Fig. P14.33.

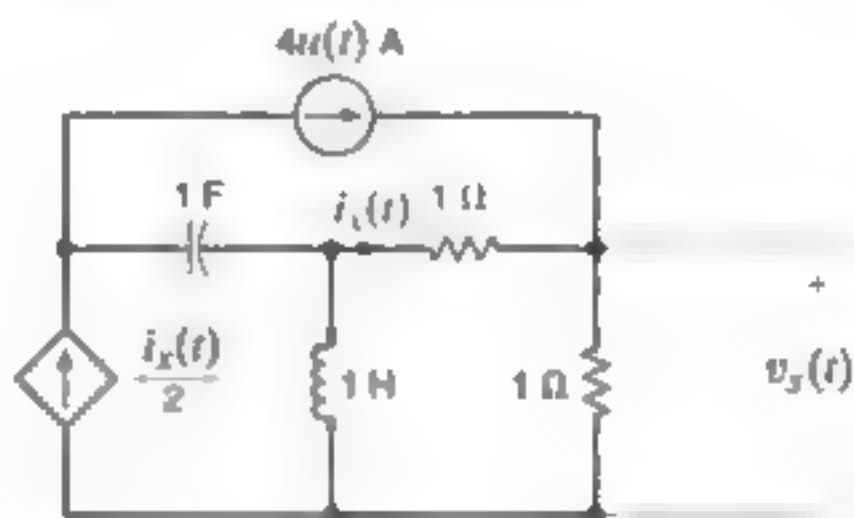


Figura P14.33

- 14.34** Utilize o teorema de Thévenin para determinar a tensão $v_x(t)$, para $t > 0$, da rede mostrada na Fig. P14.34.

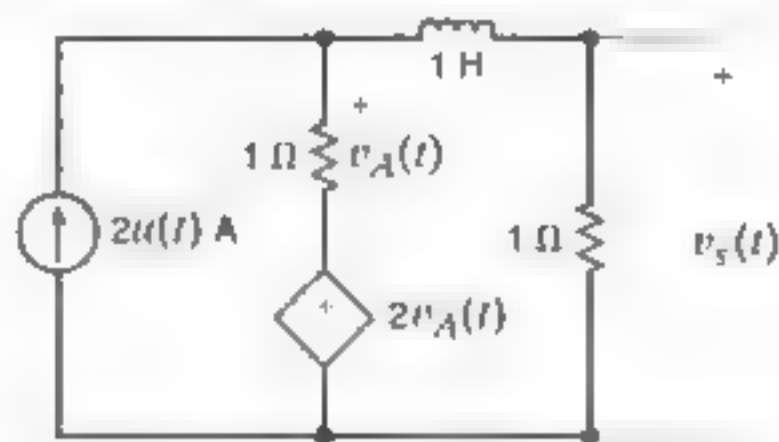


Figura P14.34

- 14.35** Utilize o teorema de Thévenin para determinar a corrente $i_1(t)$, para $t > 0$, da rede mostrada na Fig. P14.35

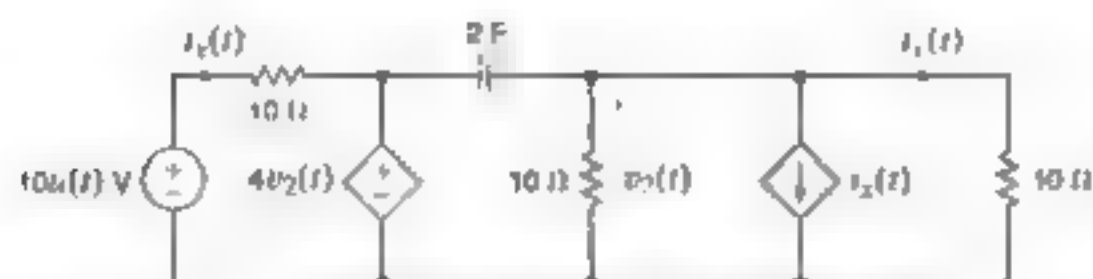


Figura P14.35

- 14.36** Obtenha a tensão $v_s(t)$, para $t > 0$, da rede mostrada na Fig. P14.36. Admita que o circuito tenha atingido o regime estacionário em $t = 0^-$.

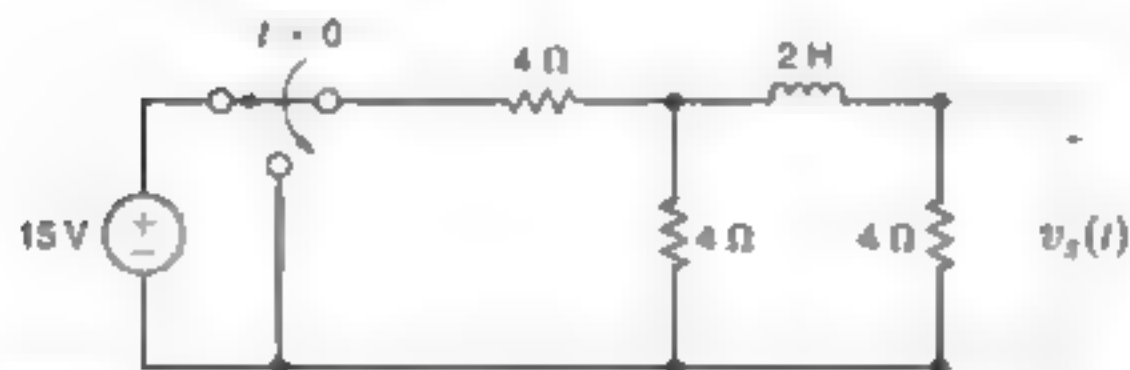


Figura P14.36

- 14.37** Determine a tensão $v_s(t)$, para $t > 0$, do circuito mostrado na Fig. P14.37.

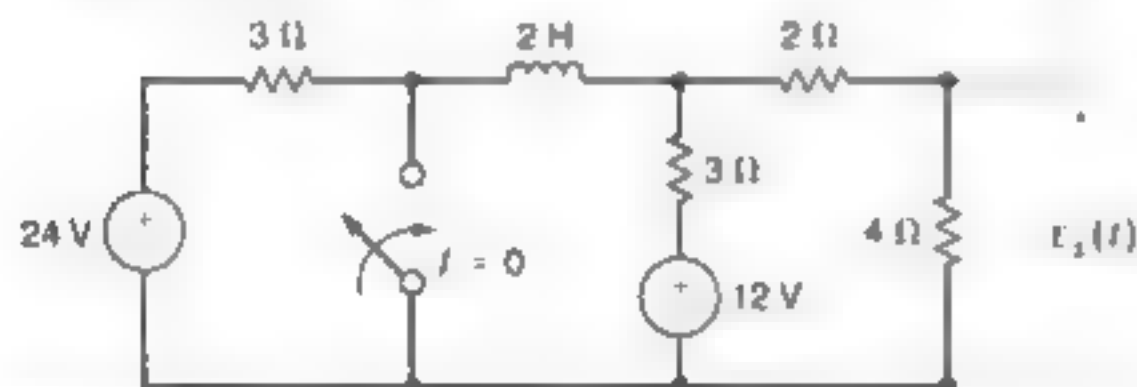


Figura P14.37

- 14.38** Determine a corrente $i_1(t)$, para $t > 0$, da rede mostrada na Fig. P14.38.

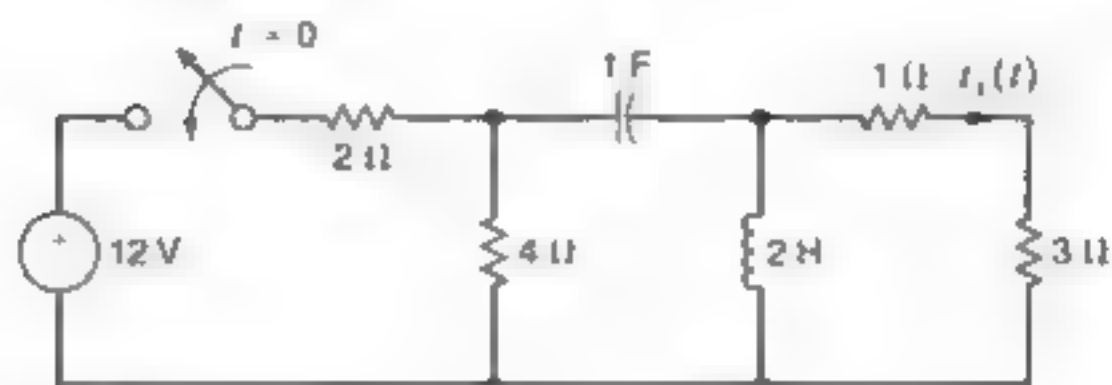


Figura P14.38

- 14.39** Determine a tensão $v_s(t)$, para $t > 0$, do circuito mostrado na Fig. P14.39.

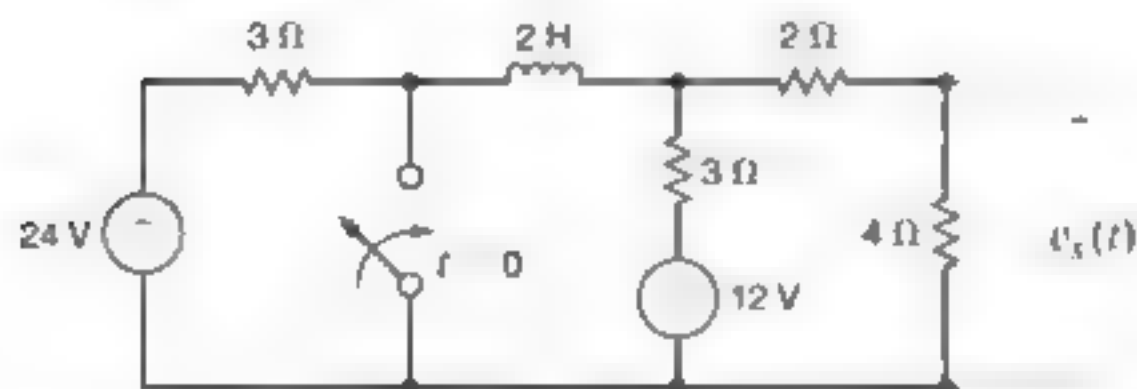


Figura P14.39

- 14.40** Determine a tensão $v_s(t)$, para $t > 0$, do circuito mostrado na Fig. P14.40.

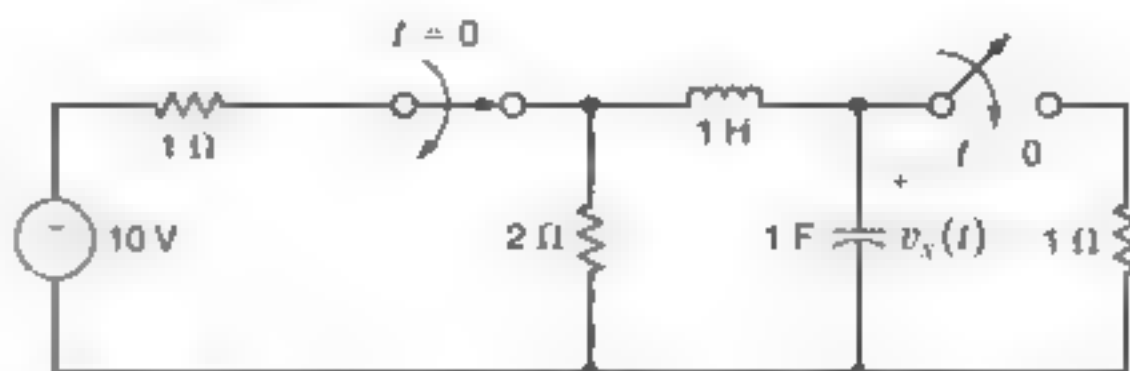


Figura P14.40

- 14.41** Determine a tensão $v_s(t)$, para $t > 0$, da rede mostrada na Fig. P14.41.

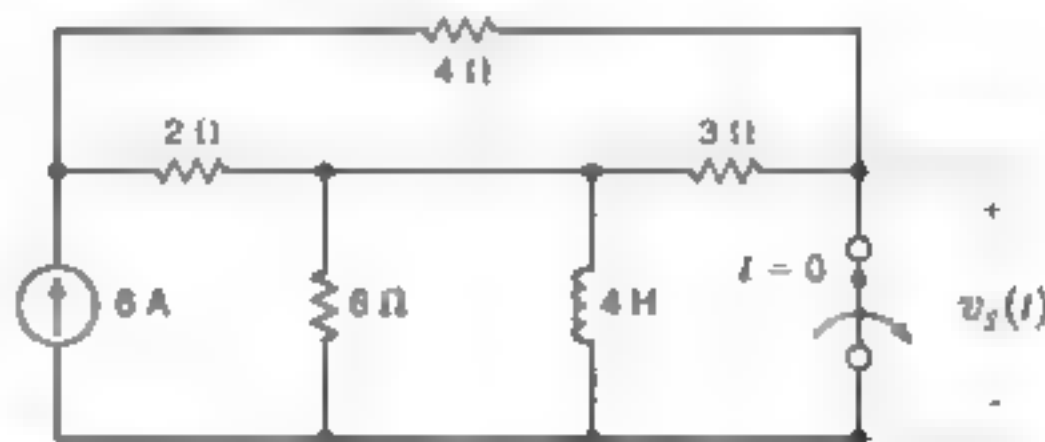


Figura P14.41

- 14.42** Determine a corrente $i_x(t)$, para $t > 0$, da rede mostrada na Fig. P14.42.

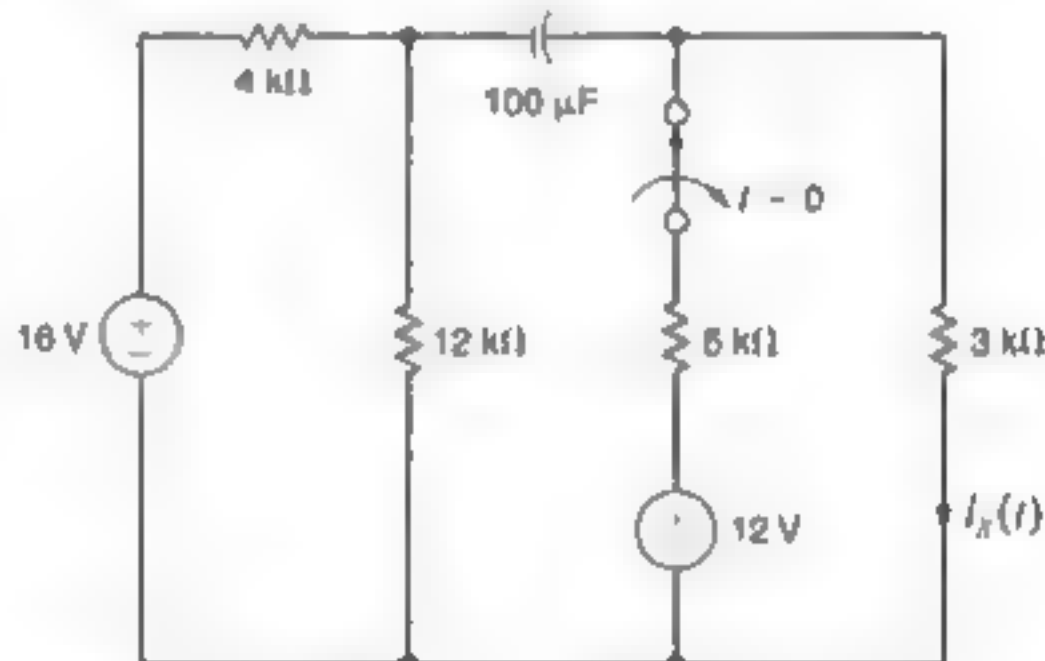


Figura P14.42

- 14.43** Determine a tensão $v_s(t)$, para $t > 0$, da rede mostrada na Fig. P14.43.

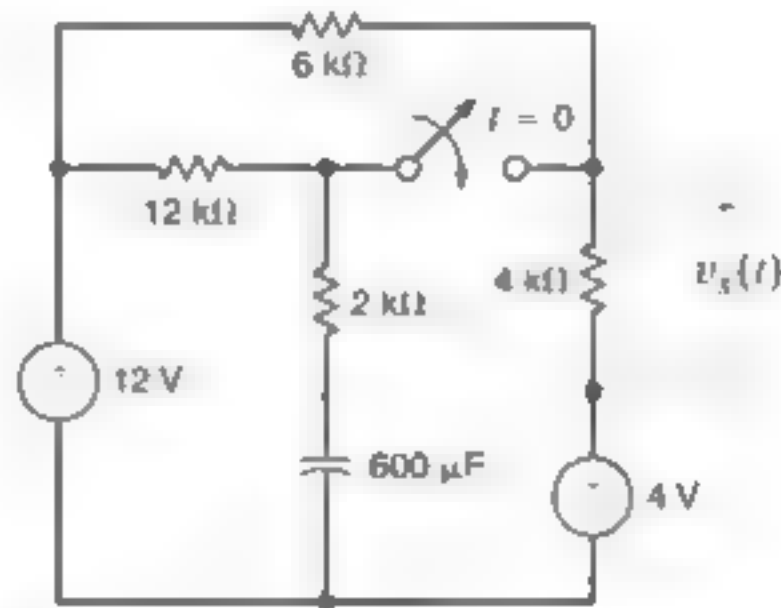


Figura P14.43

- 14.44 Determine a tensão $v_s(t)$, para $t > 0$, da rede mostrada na Fig. P14.44.

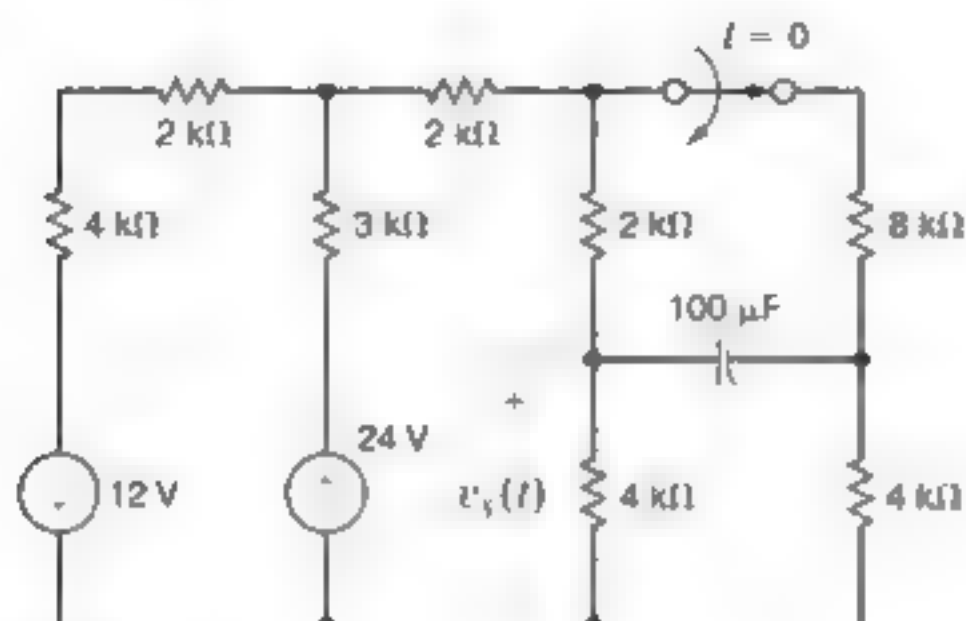


Figura P14.44

- 14.45 Determine a tensão $v_s(t)$, para $t > 0$, da rede mostrada na Fig. P14.45.

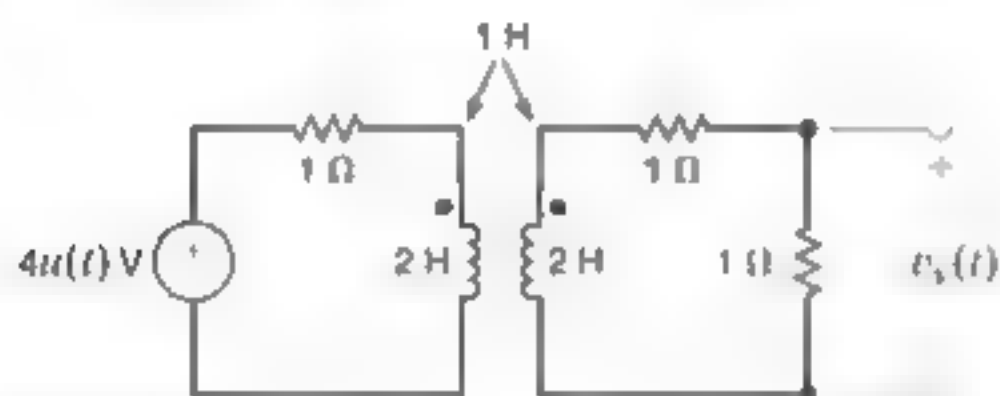


Figura P14.45

- 14.46 Determine a tensão $v_s(t)$, para $t > 0$, da rede mostrada na Fig. P14.46.

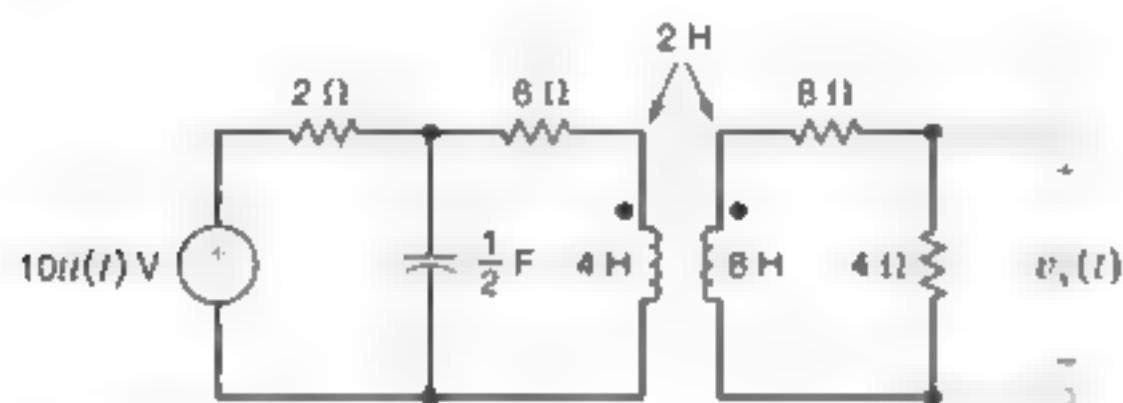


Figura P14.46

- 14.47 Determine a tensão $v_s(t)$, para $t > 0$, da rede mostrada na Fig. P14.47.

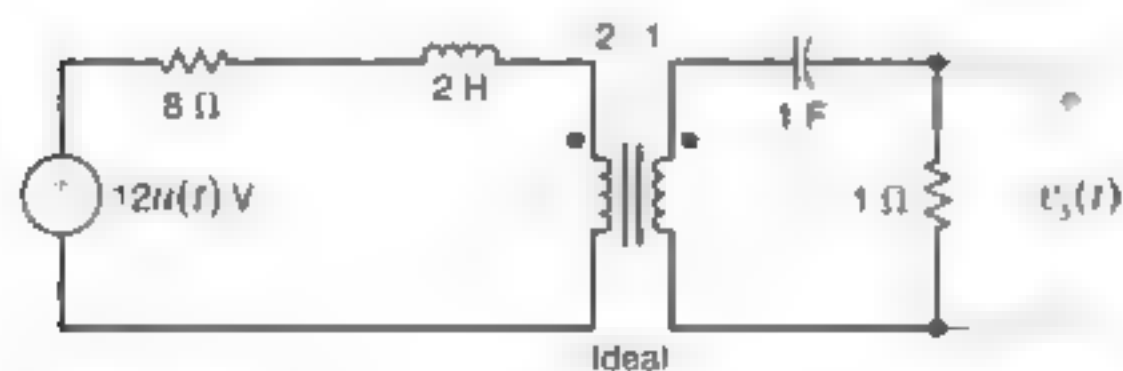


Figura P14.47

- 14.48 Determine a tensão $v_s(t)$, para $t > 0$, da rede mostrada na Fig. P14.48.

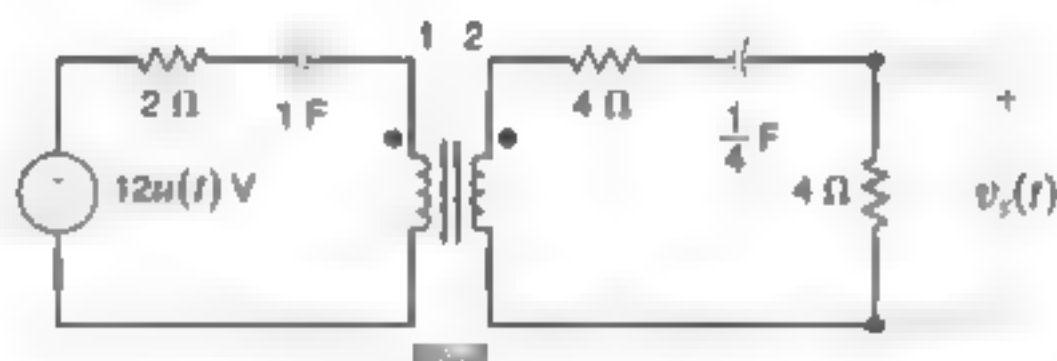


Figura P14.48

- 14.49 Determine o valor da tensão de saída quando $t \rightarrow \infty$, para a rede mostrada na Fig. P14.49.

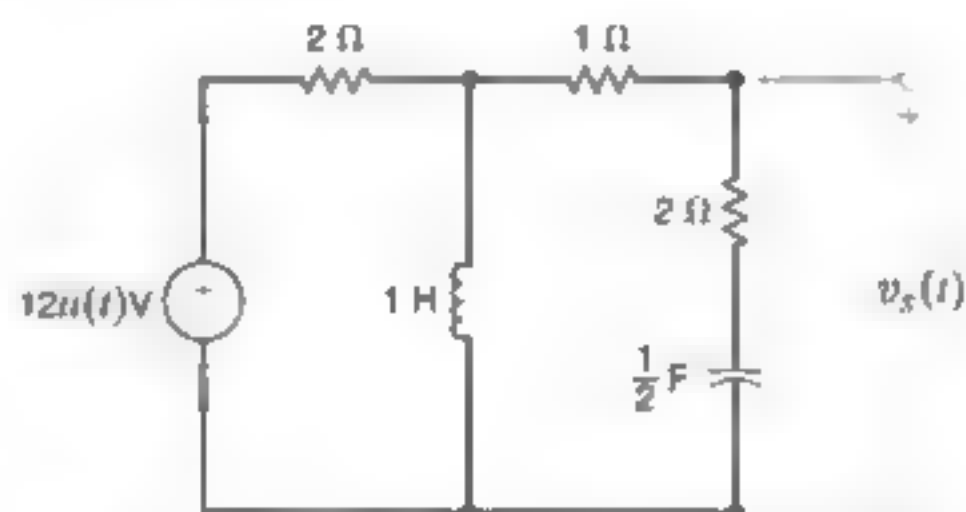


Figura P14.49

- 14.50 Dada a rede mostrada na Fig. P14.50, determine o valor da tensão de saída quando $t \rightarrow \infty$.

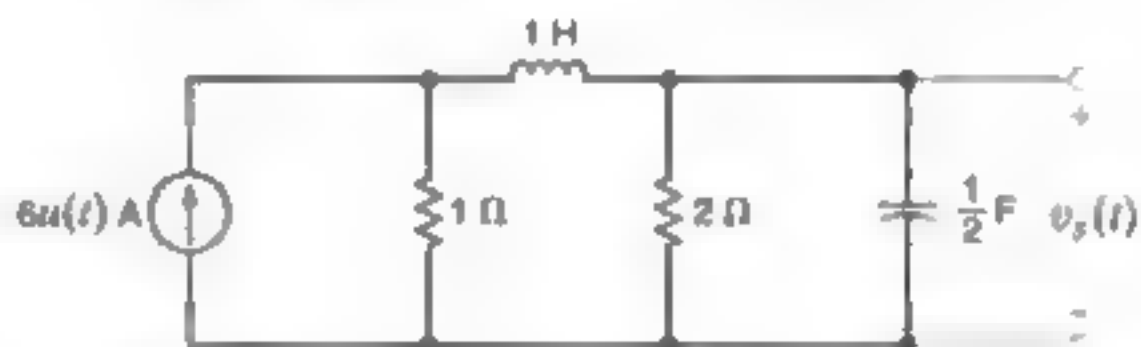


Figura P14.50

- 14.51 Determine os valores inicial e final da tensão $v_s(t)$ da rede mostrada na Fig. P14.51.

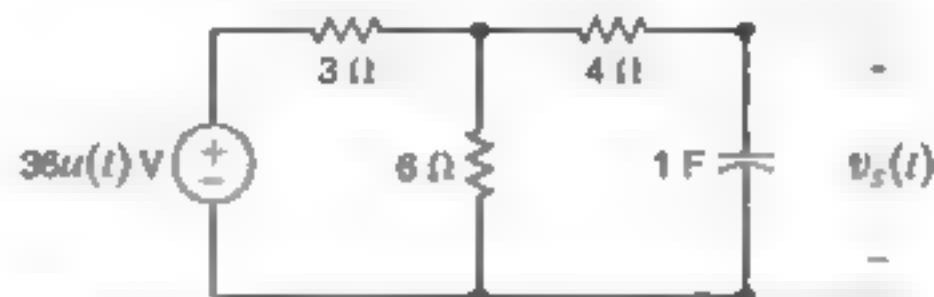


Figura P14.51

- 14.52 Determine os valores inicial e final da tensão $v_s(t)$ da rede mostrada na Fig. P14.52.

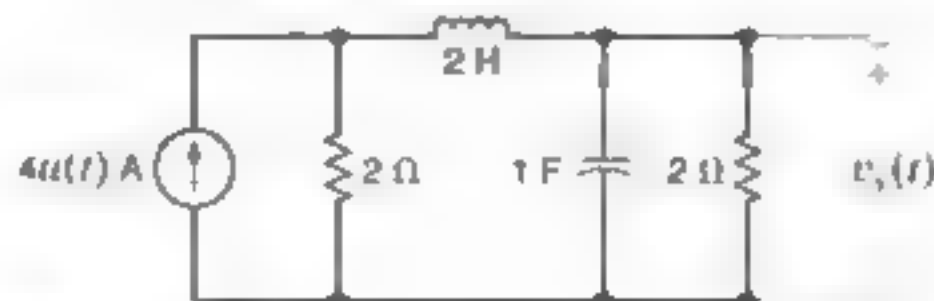


Figura P14.52

- 14.53** Determine os valores inicial e final da corrente $i_x(t)$ da rede mostrada na Fig. P14.53

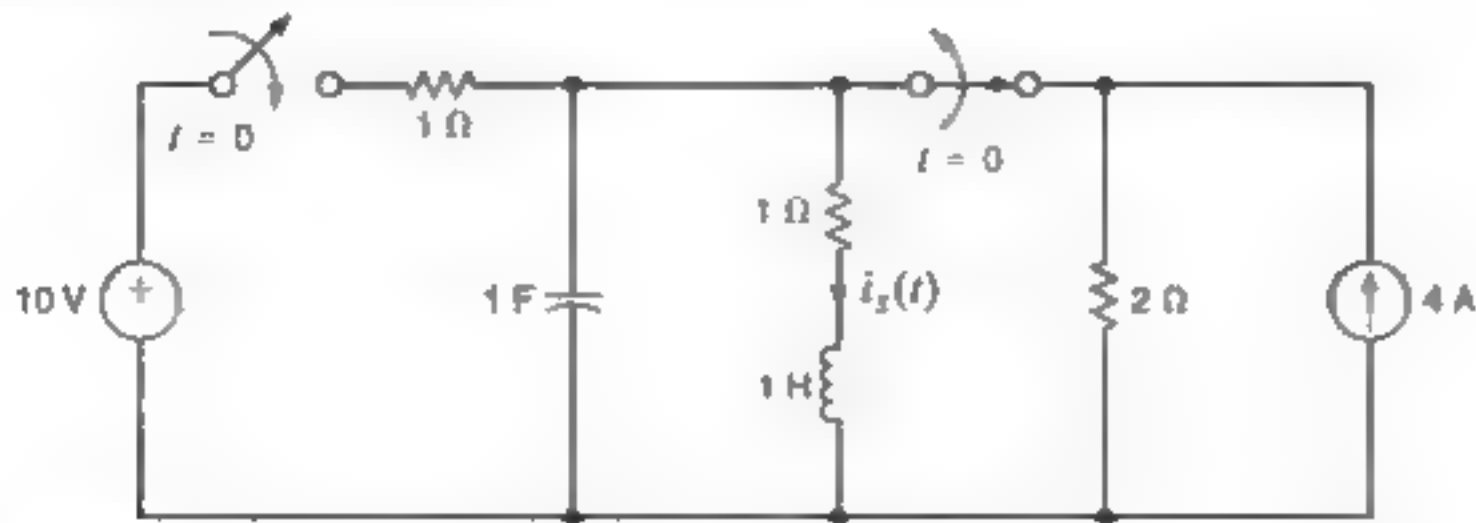


Figura P14.53

- 14.54** Determine a tensão de saída $v_s(t)$ da rede mostrada na Fig. P14.54a considerando que a entrada seja representada pela fonte ilustrada na Fig. P14.54b.

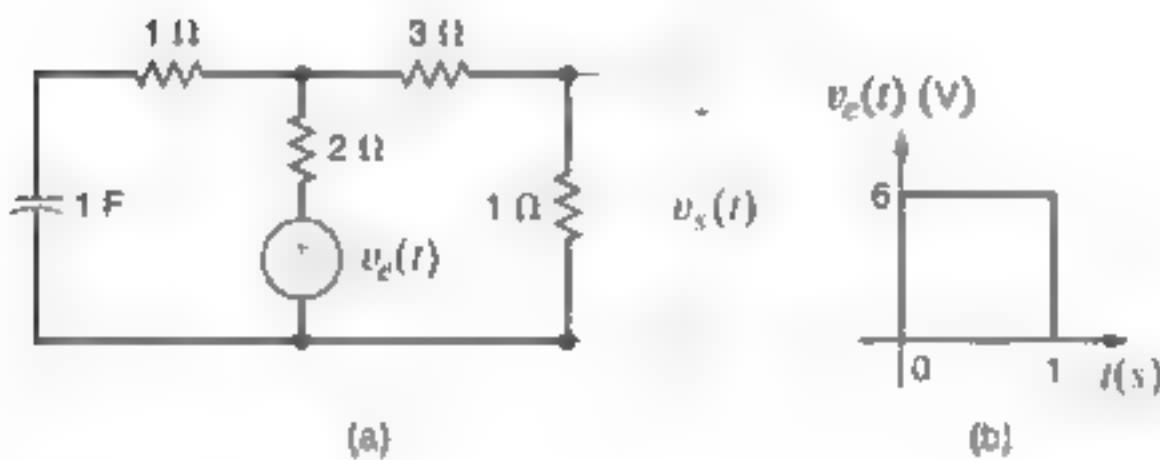
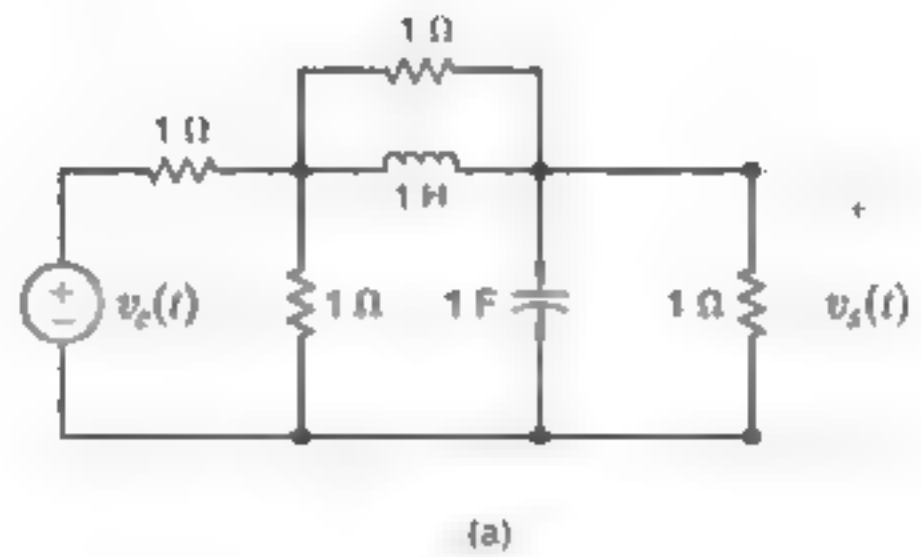
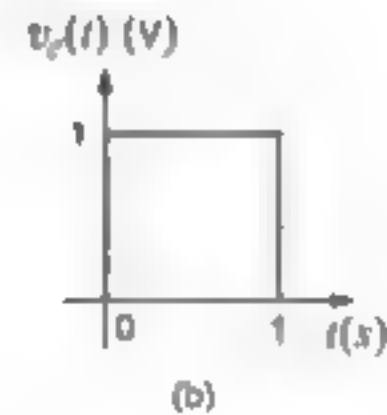


Figura P14.54



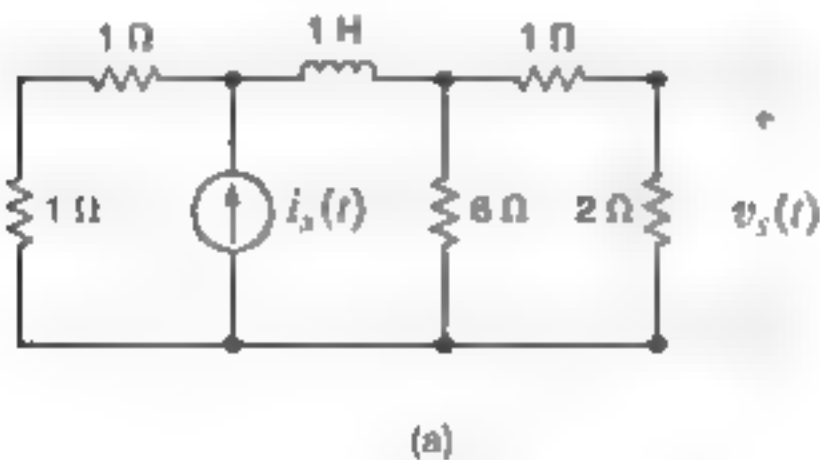
(a)



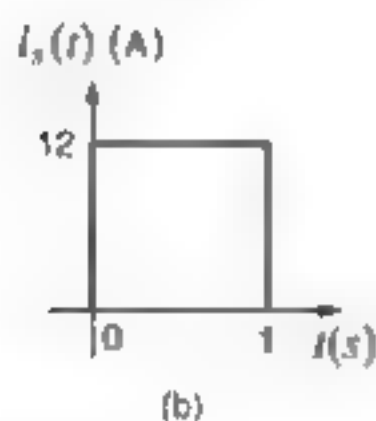
(b)

Figura P14.56

- 14.55** Determine a tensão de saída $v_s(t)$, para $t > 0$, da rede mostrada na Fig. P14.55a considerando que a entrada seja representada pela forma de onda ilustrada na Fig. P14.55b.



(a)



(b)

Figura P14.55

- 14.57** Determine a função de transferência $I_x(s)/I_e(s)$ para a rede mostrada na Fig. P14.57.

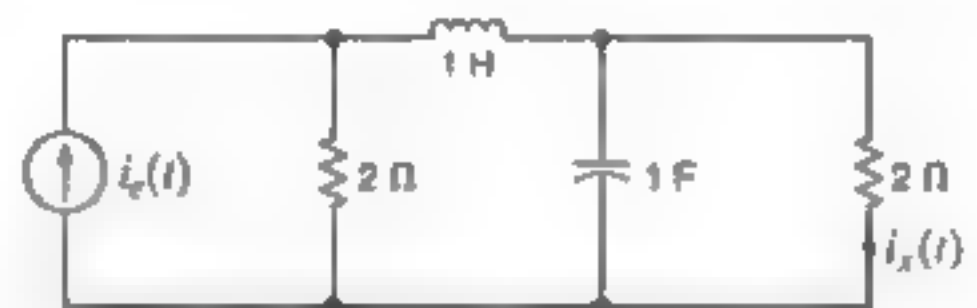


Figura P14.57

- 14.58** Obtenha a função de transferência $V_s(s)/V_e(s)$ para a rede mostrada na Fig. P14.58.

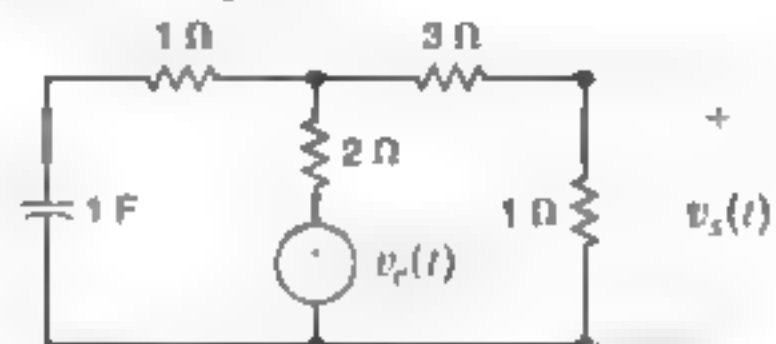


Figura P14.58

- 14.56** Determine a tensão de saída $v_s(t)$ do circuito mostrado na Fig. P14.56a considerando que a entrada seja representada pela fonte descrita na Fig. P14.56b.

- 14.59** Obtenha a função de transferência da rede mostrada na Fig. P14.59.

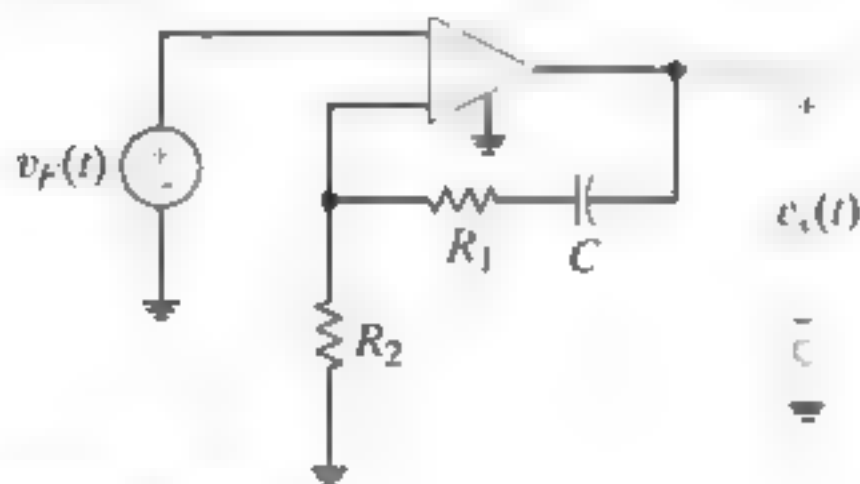


Figura P14.59

- 14.60** Obtenha a função de transferência da rede mostrada na Fig. P14.60.

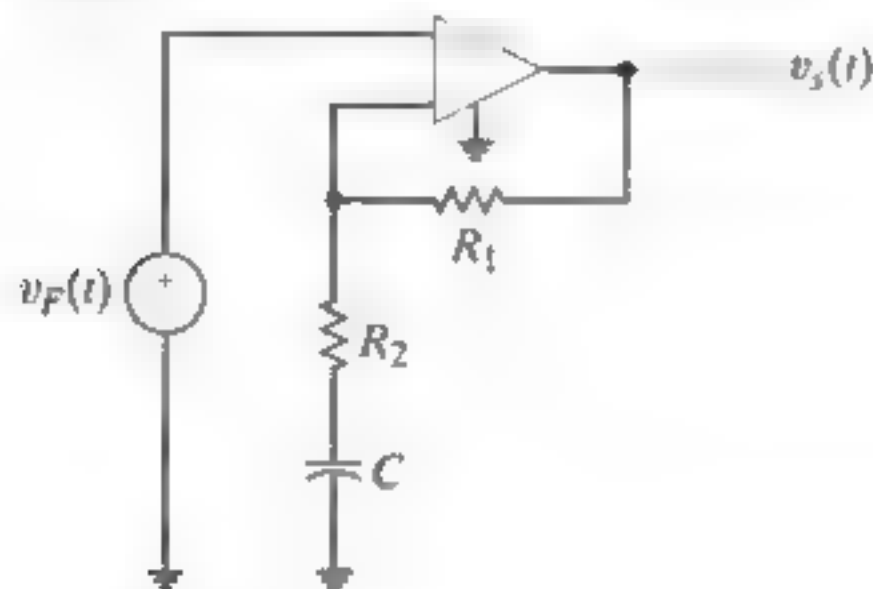


Figura P14.60

- 14.61** Obtenha a função de transferência da rede mostrada na Fig. P14.61.

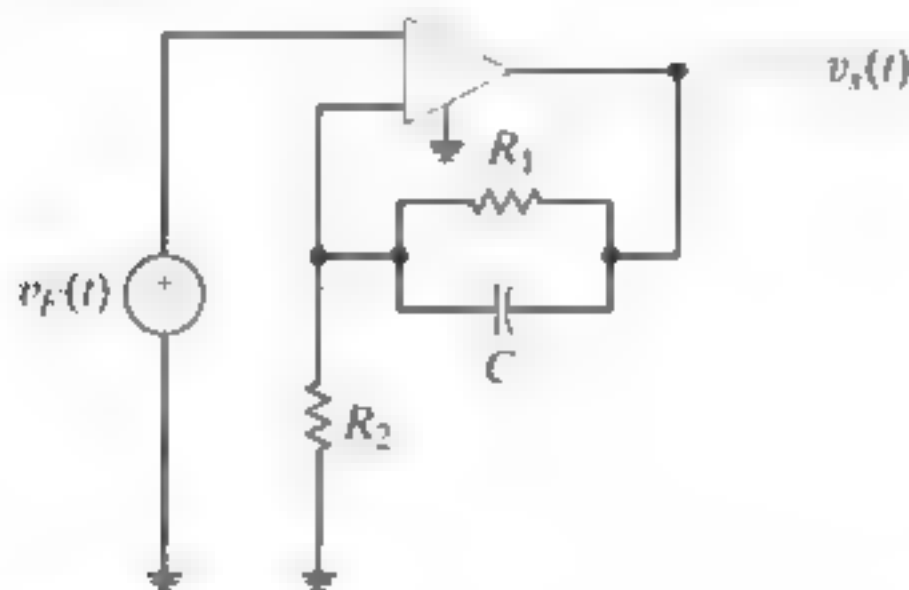


Figura P14.61

- 14.62** Obtenha a função de transferência da rede mostrada na Fig. P14.62.

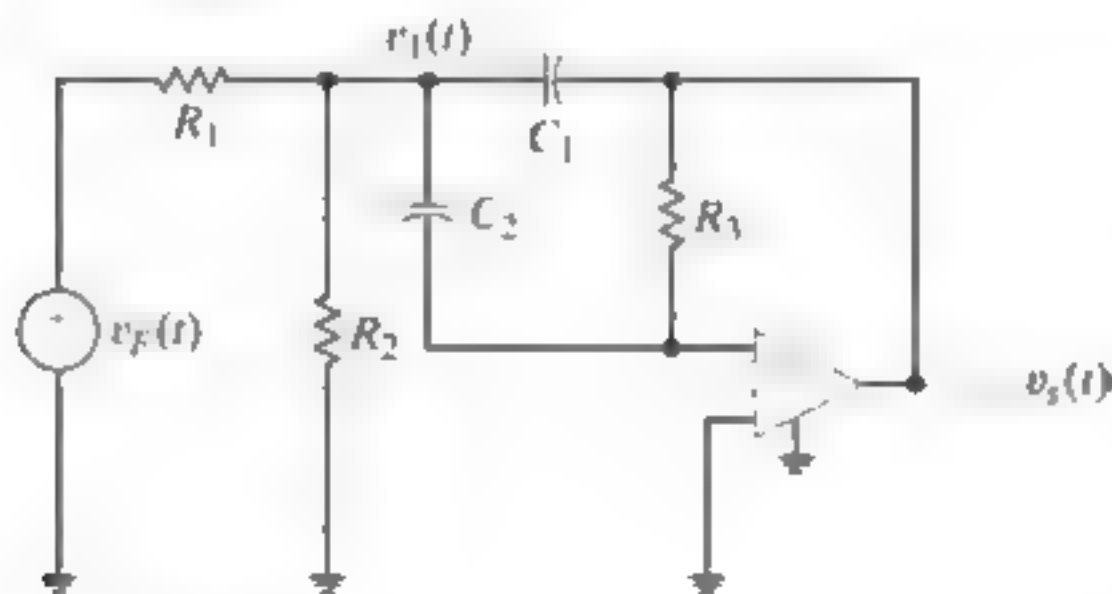


Figura P14.62

- 14.63** Obtenha a função de transferência da rede mostrada na Fig. P14.63. Caso uma função degrau seja aplicada à rede, sua resposta será superamortecida, subamortecida ou criticamente amortecida?

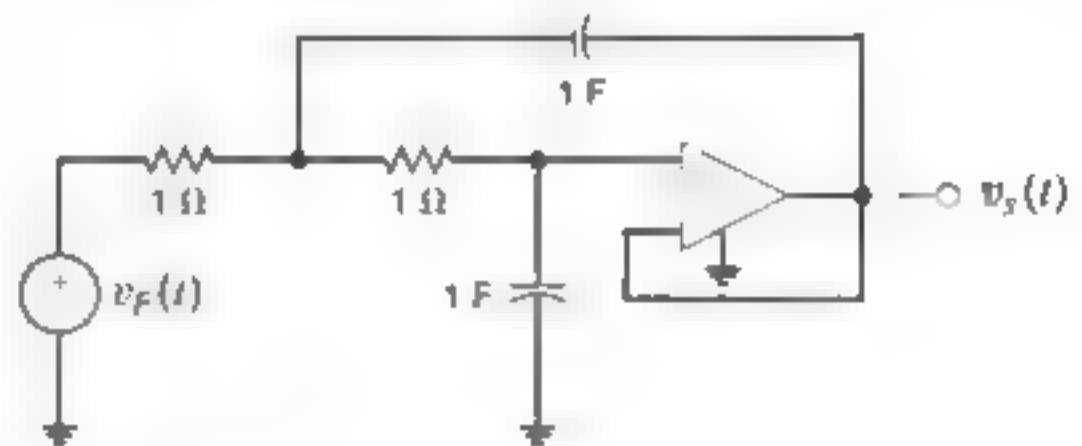


Figura P14.63

- 14.64** Determine a função de transferência da rede mostrada na Fig. P14.64. Caso uma função degrau seja aplicada à rede, qual o tipo de amortecimento que será apresentado pela rede?

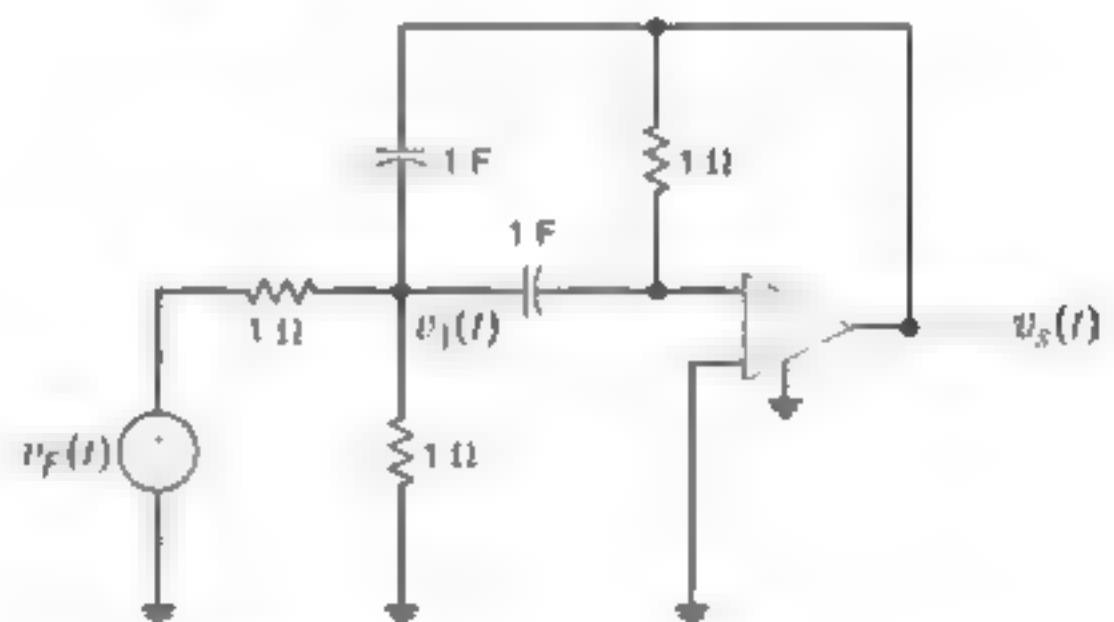


Figura P14.64

- 14.65** A resposta em tensão de uma rede sujeita a uma entrada em degrau unitário é

$$V_s(s) = \frac{2(s+1)}{s(s^2 + 10s + 25)}$$

Será sua resposta superamortecida?

- 14.66** A função de transferência de uma rede é dada pela expressão

$$G(s) = \frac{100s}{s^2 + 13s + 40}$$

Determine a fração de amortecimento, a frequência natural não amortecida e o tipo de resposta que será apresentada pela rede.

- 14.67** A função de transferência de uma rede é dada pela expressão

$$G(s) = \frac{100s}{s^2 + 22s + 40}$$

Determine a fração de amortecimento, a frequência natural não amortecida e o tipo de resposta que será apresentada pela rede.

- 14.68** A resposta em tensão de uma rede sujeita a uma entrada em degrau unitário é

$$V_o(s) = \frac{10}{s(s^2 + 8s + 18)}$$

Seria sua resposta criticamente amortecida?

- 14.69** Para a rede mostrada na Fig. P14.69, estabeleça o valor de C que torna sua resposta criticamente amortecida.

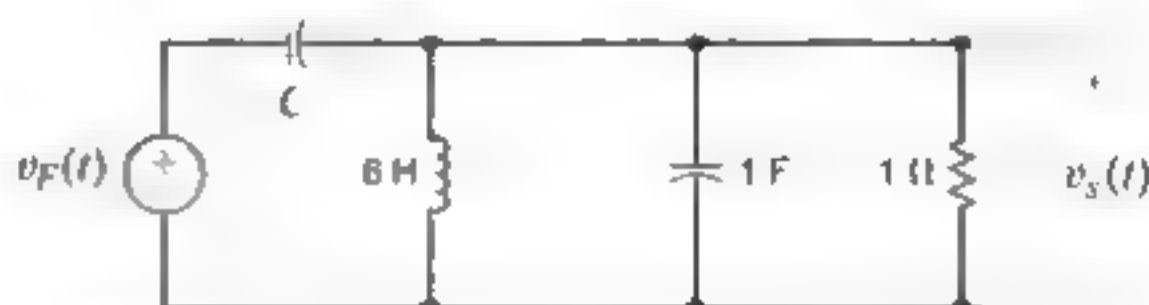


Figura P14.69

- 14.70** Para o filtro mostrado na Fig. P14.70, estabeleça os valores das capacitâncias C_1 e C_2 de modo a posicionar os polos do filtro em $s = -2$ e $s = -5$ rad/s.

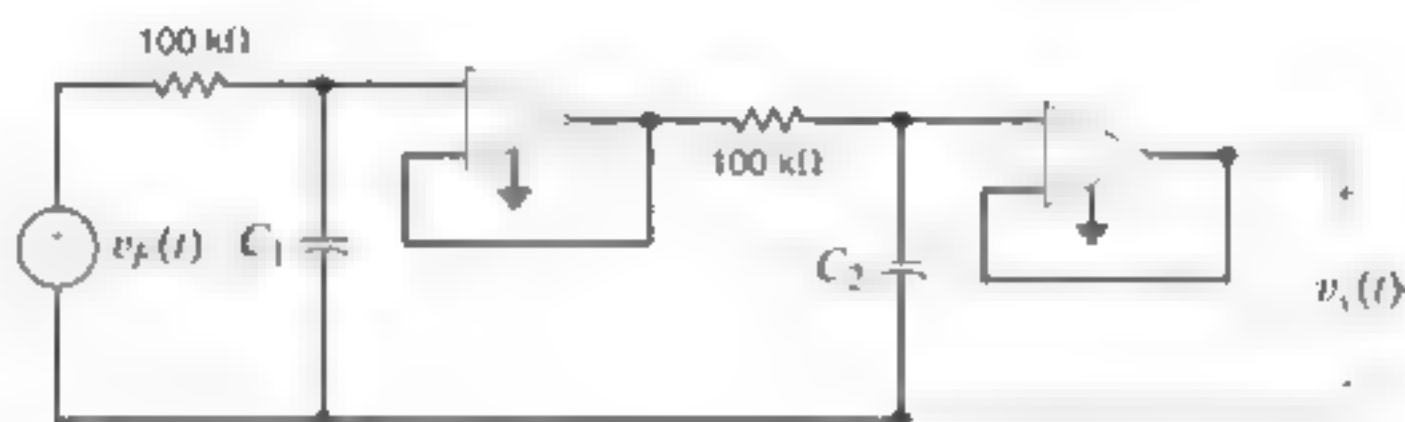


Figura P14.70

- 14.71** Obtenha a resposta em regime estacionário da tensão $v_S(t)$ para o circuito mostrado na Fig. P14.71.

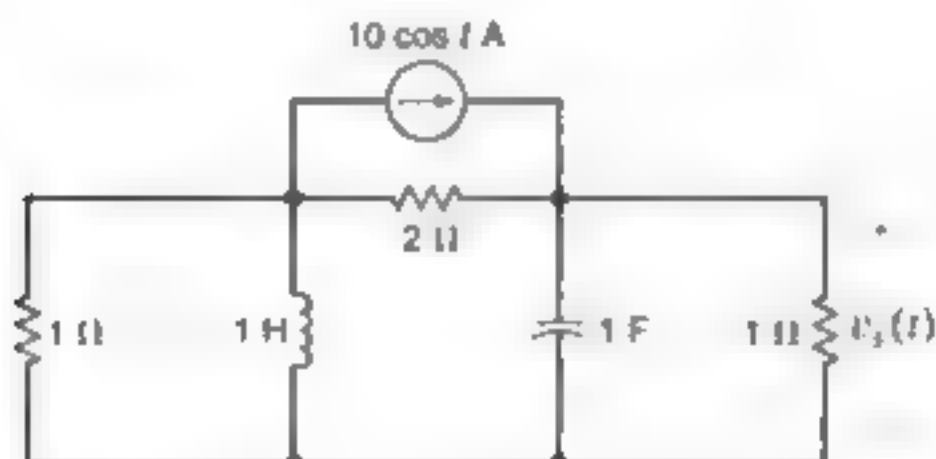


Figura P14.71

- 14.73** Determine a resposta em regime estacionário da tensão $v_S(t)$ da rede mostrada na Fig. P14.73.

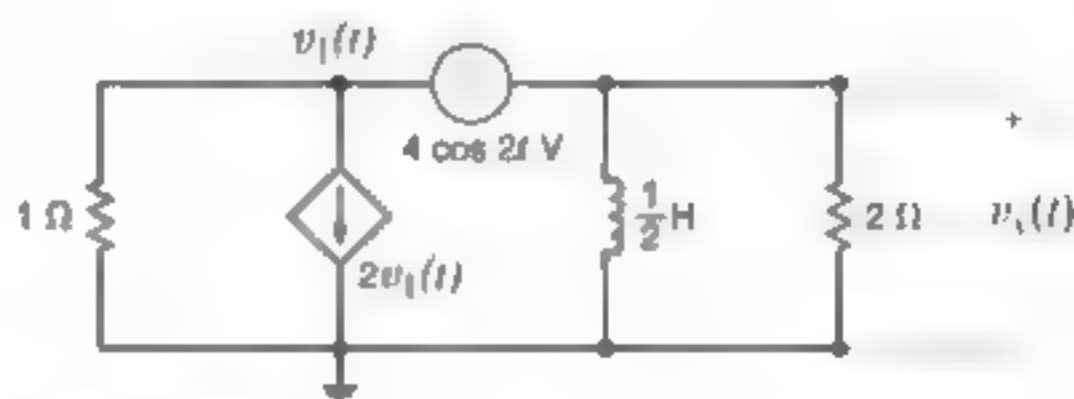


Figura P14.73

- 14.72** Obtenha a resposta em regime estacionário da tensão $v_S(t)$ para a rede mostrada na Fig. P14.72.

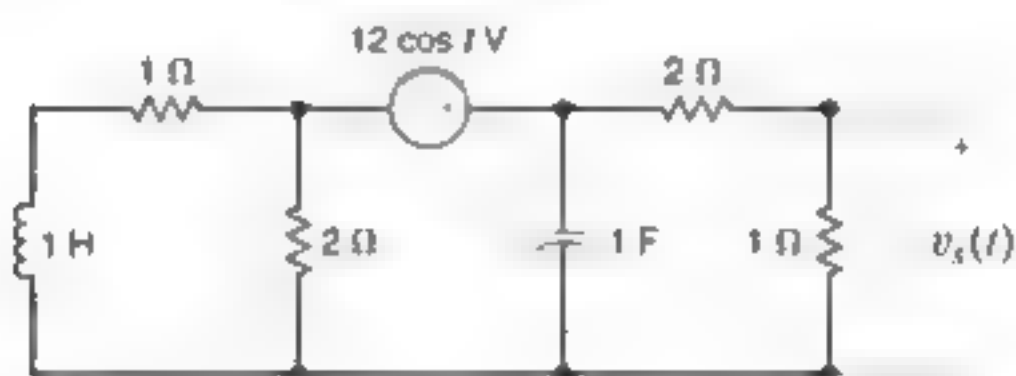


Figura P14.72

- 14.74** Determine a resposta em regime estacionário da corrente $i_S(t)$ da rede mostrada na Fig. P14.74.

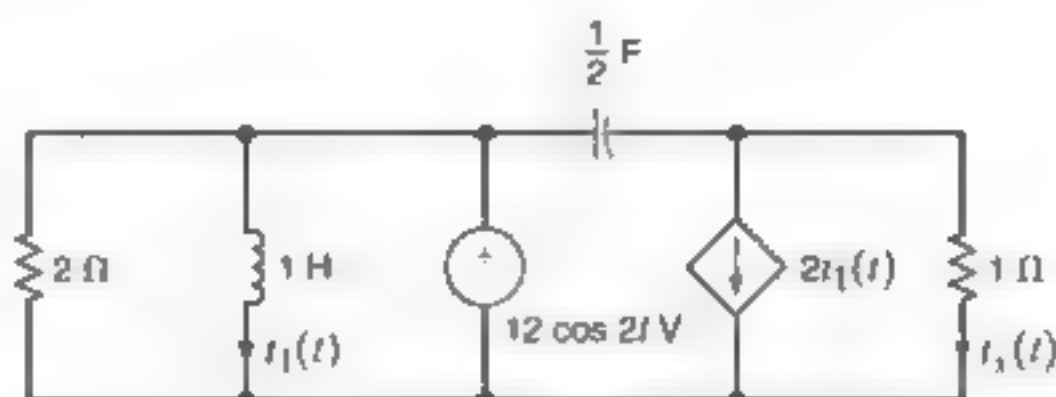


Figura P14.74

- 14.75** Obtenha a resposta em regime estacionário da corrente $i_s(t)$ da rede mostrada na Fig. P14.75.

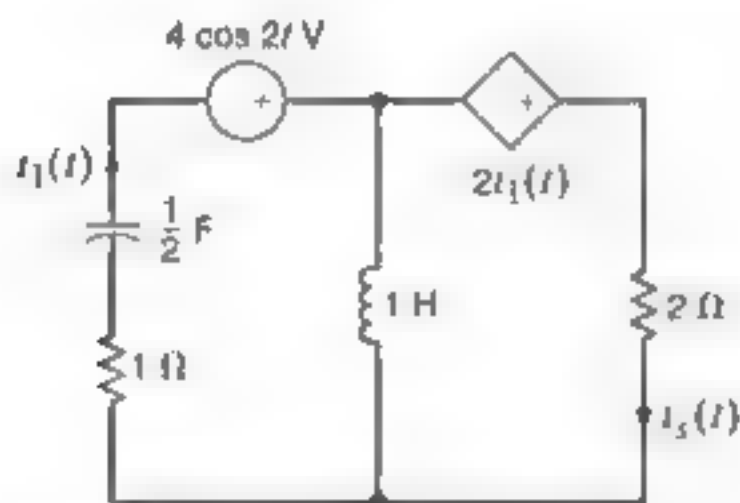


Figura P14.75

- 14.76** Obtenha a resposta em regime estacionário da tensão $v_s(t)$, para $t > 0$, da rede mostrada na Fig. P14.76.

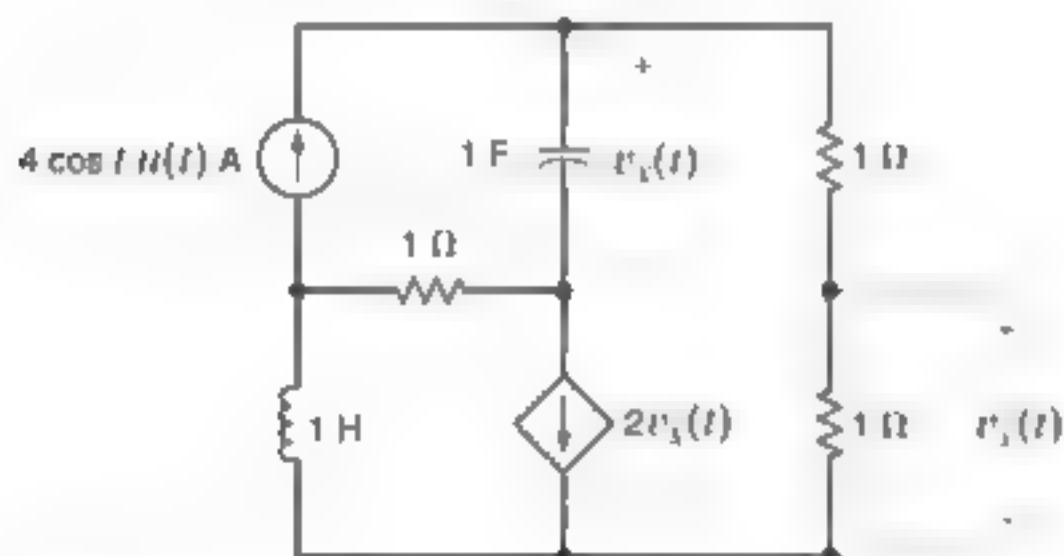


Figura P14.76

- 14.77** Obtenha a resposta em regime estacionário da tensão $v_s(t)$, para $t > 0$, da rede mostrada na Fig. P14.77.

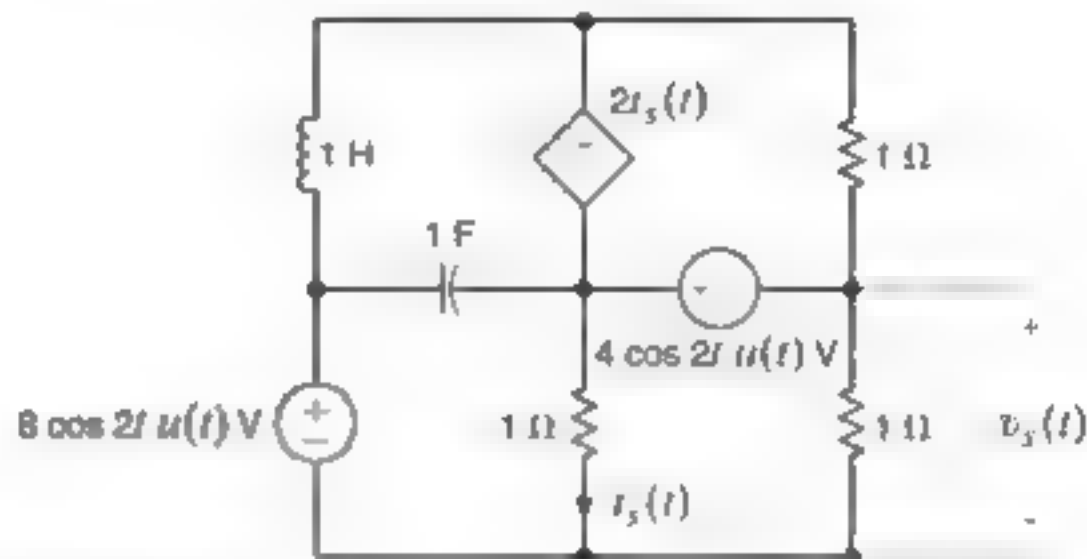


Figura P14.77

PROBLEMAS TÍPICOS DE EXAMES PROFISSIONAIS DE ENGENHARIA

- 14PEP-1** Um circuito de segunda ordem com um único laço é descrito pela seguinte equação diferencial:

$$2 \frac{dv^2(t)}{dt^2} + 4 \frac{dv(t)}{dt} + 4v(t) = 12u(t) \quad t > 0$$

Qual é a forma correta de sua resposta completa (superposição das respostas natural e forçada)?

- $v(t) = K_1 + K_2 e^{-t}$
- $v(t) = K_1 \cos t + K_2 \sin t$
- $v(t) = K_1 + K_2 e^{-t}$
- $v(t) = K_1 + K_2 e^{-t} \cos t + K_3 e^{-t} \sin t$

- 14PEP-2** Considerando que todas as condições iniciais das variáveis da rede mostrada na Fig. 14PEP-2 sejam nulas, obtenha a função de transferência $V_s(s)/V_F(s)$.



Figura 14PEP-2

- $\frac{s+1}{s^2+4s+6}$
- $\frac{s}{s^2+2s+5}$
- $\frac{s}{s^2+s+2}$
- $\frac{s+2}{s^2+5s+8}$

- 14PEP-3** As condições iniciais das variáveis do circuito mostrado na Fig. 14PEP-3 são nulas. Obtenha a função de transferência $I_s(s)/I_F(s)$.

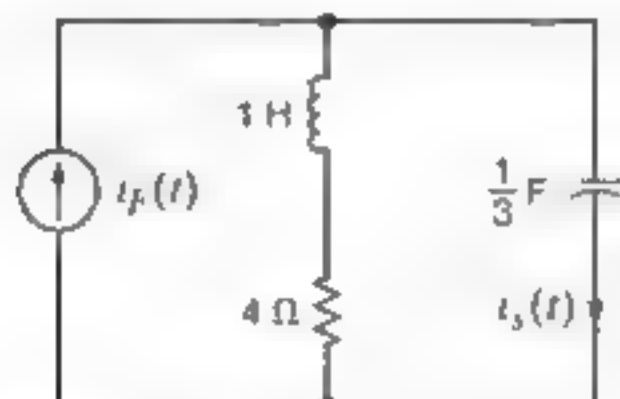


Figura 14PEP-3

- a. $\frac{s(s+4)}{s^2+4s+3}$
 b. $\frac{s+2}{s^2+3s+1}$
 c. $\frac{s}{s^2+5s+7}$
 d. $\frac{s+3}{s^2+2s+10}$

- 14PEP-4** Utilize a transformada de Laplace para determinar a corrente $I(s)$ do circuito mostrado na Fig. 14PEP-4. Admita que as condições iniciais sejam nulas e que $v_F(t) = 4 \cos t \, u(t)$.

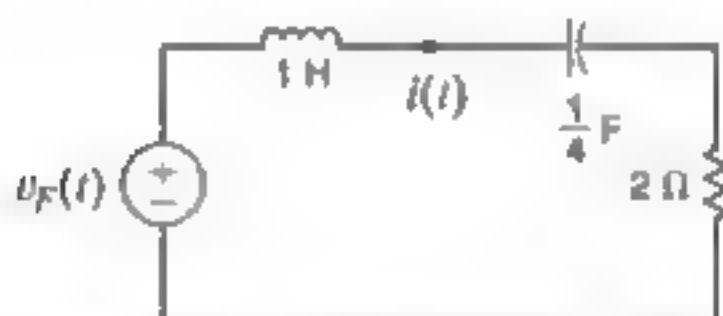


Figura 14PEP-4

- a. $\frac{2s}{s^2+4s+5}$
 b. $\frac{4s^2}{(s^2+1)(s^2+2s+4)}$
 c. $\frac{2s}{s^2+7s+9}$
 d. $\frac{4s}{(s^2+1)(s^2+3s+5)}$

- 14PEP-5** Admitindo que a corrente inicial do indutor seja nula no circuito mostrado na Fig. 14PEP-5, obtenha a função de transferência $V_s(s)/V_F(s)$.

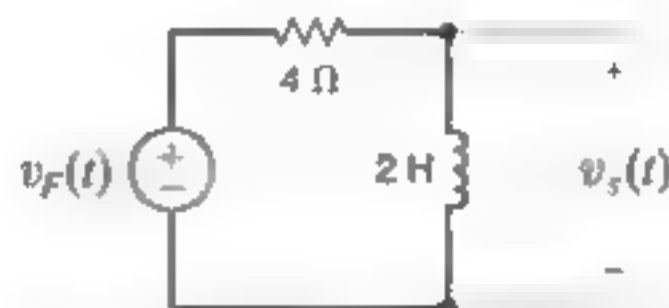
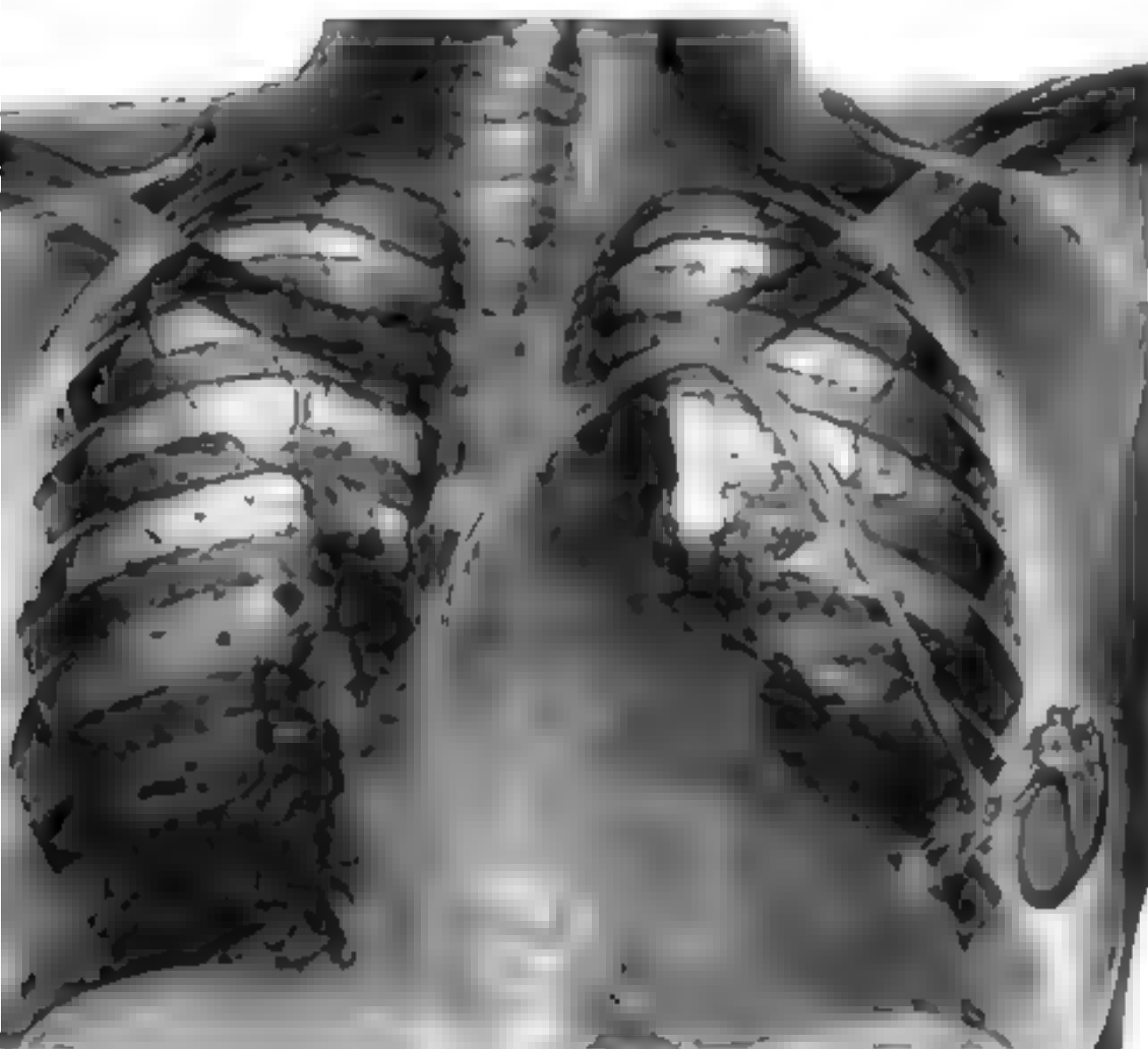


Figura 14PEP-5

- a. $\frac{1}{s^2+1}$
 b. $\frac{s^2}{2s+5}$
 c. $\frac{s^2}{s+8}$
 d. $\frac{s}{s+2}$

TÉCNICAS DE ANÁLISE ATRAVÉS DAS SÉRIES DE FOURIER



Du Cane Medical Imaging Ltd./Photo Researchers

AS METAS DE APRENDIZAGEM DESTE CAPÍTULO SÃO:

- Ser capaz de determinar as séries trigonométrica e exponencial de Fourier para um sinal periódico e compreender os efeitos da simetria da forma de onda nos coeficientes de uma série de Fourier trigonométrica
- Ser capaz de calcular a resposta em regime estacionário de um circuito elétrico quando excitado por um sinal periódico de tensão ou de corrente
- Saber como calcular a potência média em um circuito elétrico excitado por um sinal periódico de tensão ou de corrente
- Ser capaz de determinar o par de transformada de Fourier de sinais comuns à análise de circuitos elétricos e utilizar a transformada de Fourier para calcular a resposta de um circuito elétrico
- Ser capaz de aplicar o teorema de Parseval

Marca-passos Artificiais para o Coração Para encontrar a felicidade, o Homem de Lata da obra *O Mágico de Oz* imaginou que precisava apenas de um coração – porém, um coração saudável. A maioria dos corações possui um marca-passos natural e são saudáveis. Para batimentos irregulares ou para o caso de bloqueios cardíacos, podem ser necessários marca-passos artificiais de modo a manter um ritmo cardíaco adequado. Esses marca-passos utilizam eletrodos em contato com o músculo cardíaco e fornecem impulsos elétricos que regulam o batimento do coração. A condição de ritmo ótimo para pacientes individuais pode ser programada externamente por um microprocessador. Os sinais de estímulo são impulsos periódicos dentro de uma faixa estreita (marca-passos) ou sobressaltos bruscos que propiciam um choque no coração dentro de um padrão estacionário (desfibrilador). Um

marca-passos e um desfibrilador podem ser combinados em um único dispositivo a ser implantado.

Os marca-passos podem ser de camada única, de camada dupla ou com taxa de resposta. Em uma unidade de camada única o átrio ou o ventrículo possui um único eletrodo; as unidades de camada dupla possuem eletrodos em cada câmara de modo a propiciar a sincronização. No marca-passos de taxa de resposta, os sensores detectam a atividade do corpo e, automaticamente, ajustam a frequência de estímulo. Os marca-passos são constituídos de uma bateria de lítio que opera como fonte de potência, uma lógica computacional e um circuito externo que define o sinal de estímulo dos eletrodos.

Este capítulo apresenta uma introdução às séries de Fourier e às transformadas de Fourier – as técnicas básicas no domínio

da frequência utilizadas na determinação das respostas dos sistemas dinâmicos sujeitos a entradas na forma de tensões e correntes periódicas e não periódicas. As séries de Fourier descrevem sinais periódicos. São consideradas três formas para as séries de Fourier, as propriedades de simetria e os espectros de potência na frequência fundamental e seus harmônicos. As transformadas de Fourier descrevem os sinais não periódicos. As transformadas de Fourier são tratadas como uma extensão das

transformadas de Laplace, e são relacionadas às representações das fontes e dos circuitos no domínio do tempo. A grande questão para manter o batimento de um coração comprometido, ou restabelecer o batimento de um coração parado é fornecer níveis de tensão apropriados, periódicos ou não periódicos, a um órgão delicado imerso em uma pessoa viva. Poucos sistemas são tão dinâmicos – ou tão importantes – quanto este.

15.1 Séries de Fourier

Uma função periódica deve satisfazer à seguinte relação

$$f(t) = f(t + nT_0), \quad n = \pm 1, \pm 2, \pm 3,$$

para cada valor de t , em que T_0 é o período. Conforme mostrado nos capítulos anteriores, a função senoidal é uma função periódica muito importante. Todavia, existem muitas outras funções periódicas que possuem grande aplicação. Por exemplo, os geradores de sinais utilizados em laboratórios produzem sinais do tipo trem de pulsos e ondas quadradas, mostradas nas Figs. 15.1a e b, respectivamente, os quais são utilizados para testar circuitos. O osciloscópio é outro instrumento de laboratório, e a varredura do feixe de elétrons através da superfície do tubo de raios catódicos é controlada por um sinal triangular cuja forma é a mostrada na Fig. 15.1c.

As técnicas que serão aqui exploradas são baseadas no trabalho de Jean Baptiste Joseph Fourier. Embora os casos analisados sejam limitados aos circuitos elétricos, é importante lembrar que essas técnicas são aplicáveis a uma ampla gama de problemas de engenharia. De fato, foi o trabalho de Fourier na área de transferência de calor que conduziu às técnicas que serão aqui apresentadas.

Nesse trabalho, Fourier demonstrou que uma função periódica $f(t)$ poderia ser expressa como um somatório de funções

senoidais. Portanto, com essa demonstração e pelo fato de que se uma função periódica é expressa como uma soma de funções linearmente independentes, cada função presente no somatório deve ser periódica com o mesmo período, a função $f(t)$ pode ser expressa na forma

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} D_n \cos(n\omega_0 t + \theta_n) \quad 15.1$$

em que $\omega_0 = 2\pi/T_0$ e a_0 é o valor médio da forma de onda. Uma análise dessa expressão ilustra que todas as formas de onda senoidais periódicas com período T_0 foram incluídas. Por exemplo, para $n = 1$, um ciclo é concluído em T_0 segundos e a função $D_1 \cos(\omega_0 t + \theta_1)$ é chamada de *harmônica fundamental*. Para $n = 2$, dois ciclos se passam em T_0 segundos e a função $D_2 \cos(2\omega_0 t + \theta_2)$ é chamada de *segunda harmônica*. Em geral, para $n = k$, k ciclos ocorrem em T_0 segundos e a expressão $D_k \cos(k\omega_0 t + \theta_k)$ representa o k -ésimo harmônico.

Uma vez que a função $\cos(n\omega_0 t + \theta_n)$ pode ser escrita na forma exponencial utilizando a identidade de Euler ou uma soma de termos em cosseno e seno da forma $\cos n\omega_0 t$ e $\sin n\omega_0 t$, conforme apresentado no Capítulo 8, a série representada pela Eq. (15.1) pode ser escrita como

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega_0 t} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega_0 t} \quad 15.2$$

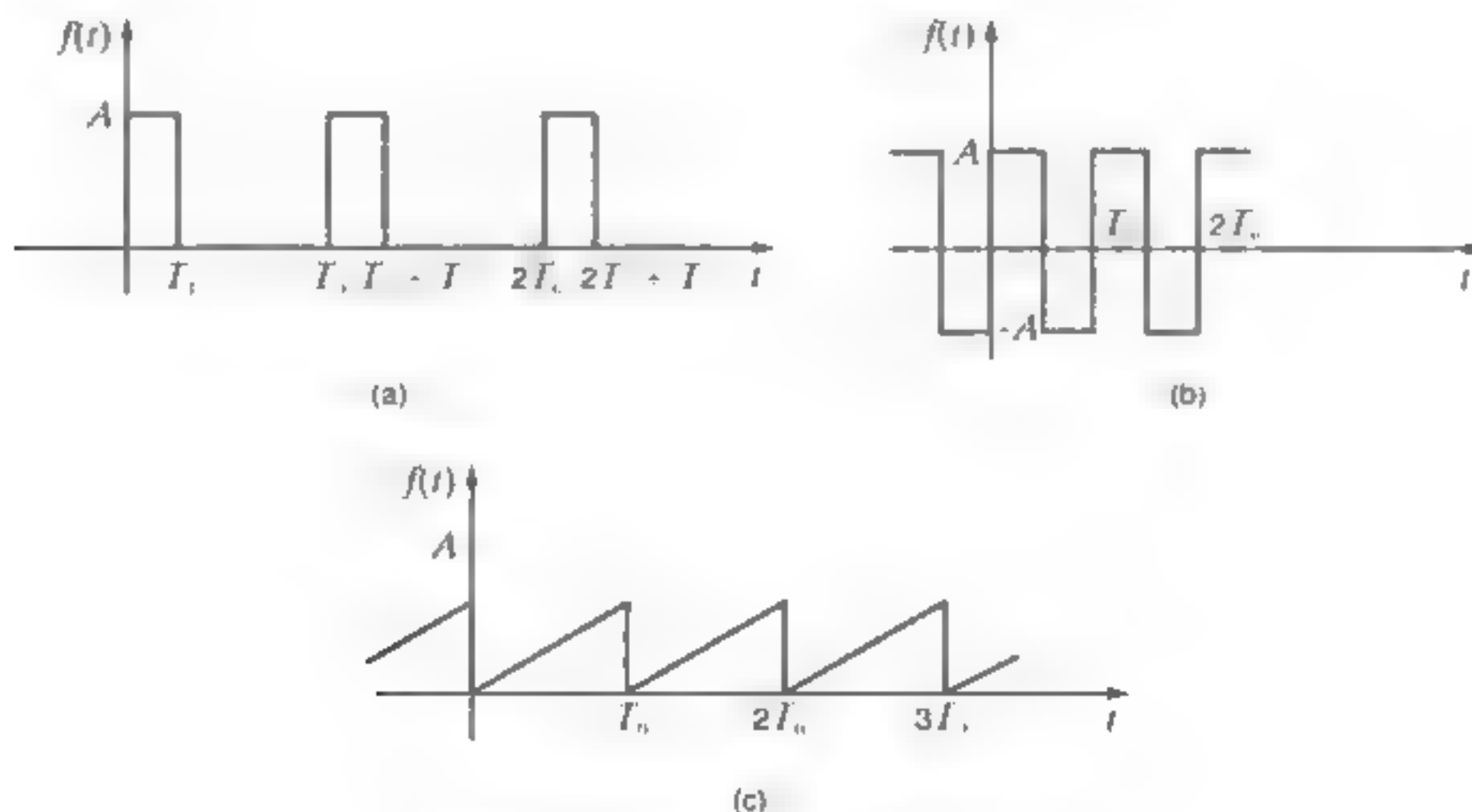


Figura 15.1 Alguns sinais periódicos usuais.

Utilizando a relação da parte real empregada como uma transformação entre o domínio do tempo e o domínio da frequência, pode-se expressar $f(t)$ como

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Re}[(D_n/\theta_n)e^{jn\omega_0 t}] \quad 15.3$$

$$= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Re}(2c_n e^{jn\omega_0 t}) \quad 15.4$$

$$= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Re}[(a_n - jb_n)e^{jn\omega_0 t}] \quad 15.5$$

$$= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t) \quad 15.6$$

Essas equações permitem escrever as séries de Fourier de diversas formas equivalentes. Note que o fasor para o n -ésimo harmônico é

$$D_n/\theta_n = 2c_n = a_n - jb_n \quad 15.7$$

O procedimento a ser empregado será representar uma entrada periódica não senoidal por um somatório de funções exponenciais complexas, que, devido à identidade de Euler, será equivalente a um somatório de senos e cossenos. Em seguida, para se determinar a resposta de um sistema linear, serão utilizadas duas condições: (1) a propriedade da superposição de sistemas lineares e (2) o conhecimento de que a resposta em regime estacionário de um sistema linear invariante com o tempo, a uma entrada senoidal de frequência ω_0 , é uma função senoidal com a mesma frequência.

Para ilustrar a maneira pela qual um sinal periódico não senoidal pode ser representado por uma série de Fourier, considere a função periódica mostrada na Fig. 15.2a. Nas Figs. 15.2b-d

percebe-se o impacto de se utilizar uma quantidade específica de termos da série para representar a função original. Note que a série representa mais precisamente a função original na medida em que mais termos são empregados.

SÉRIE DE FOURIER EXPONENCIAL Qualquer sinal periódico fisicamente realizável pode ser representado, para um intervalo de tempo $t_1 < t < t_1 + T_0$, por uma série de Fourier exponencial

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega_0 t} \quad 15.8$$

em que c_n são os coeficientes complexos de Fourier (fasores). Esses coeficientes são determinados conforme descrito a seguir. Multiplicando ambos os lados da Eq. (15.8) por $e^{-jn\omega_0 t}$ e integrando no intervalo de t_1 a $t_1 + T_0$, obtém-se

$$\int_{t_1}^{t_1+T_0} f(t) e^{-jn\omega_0 t} dt = \int_{t_1}^{t_1+T_0} \left(\sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m e^{jm\omega_0 t} \right) e^{-jn\omega_0 t} dt = c_n T_0$$

uma vez que

$$\int_{t_1}^{t_1+T_0} e^{j(n-k)\omega_0 t} dt = \begin{cases} 0 & \text{para } n \neq k \\ T_0 & \text{para } n = k \end{cases}$$

Portanto, os coeficientes de Fourier são definidos pela equação

$$c_n = \frac{1}{T_0} \int_{t_1}^{t_1+T_0} f(t) e^{-jn\omega_0 t} dt \quad 15.9$$

O exemplo a seguir ilustra a maneira pela qual se pode representar um sinal periódico por uma série de Fourier exponencial.

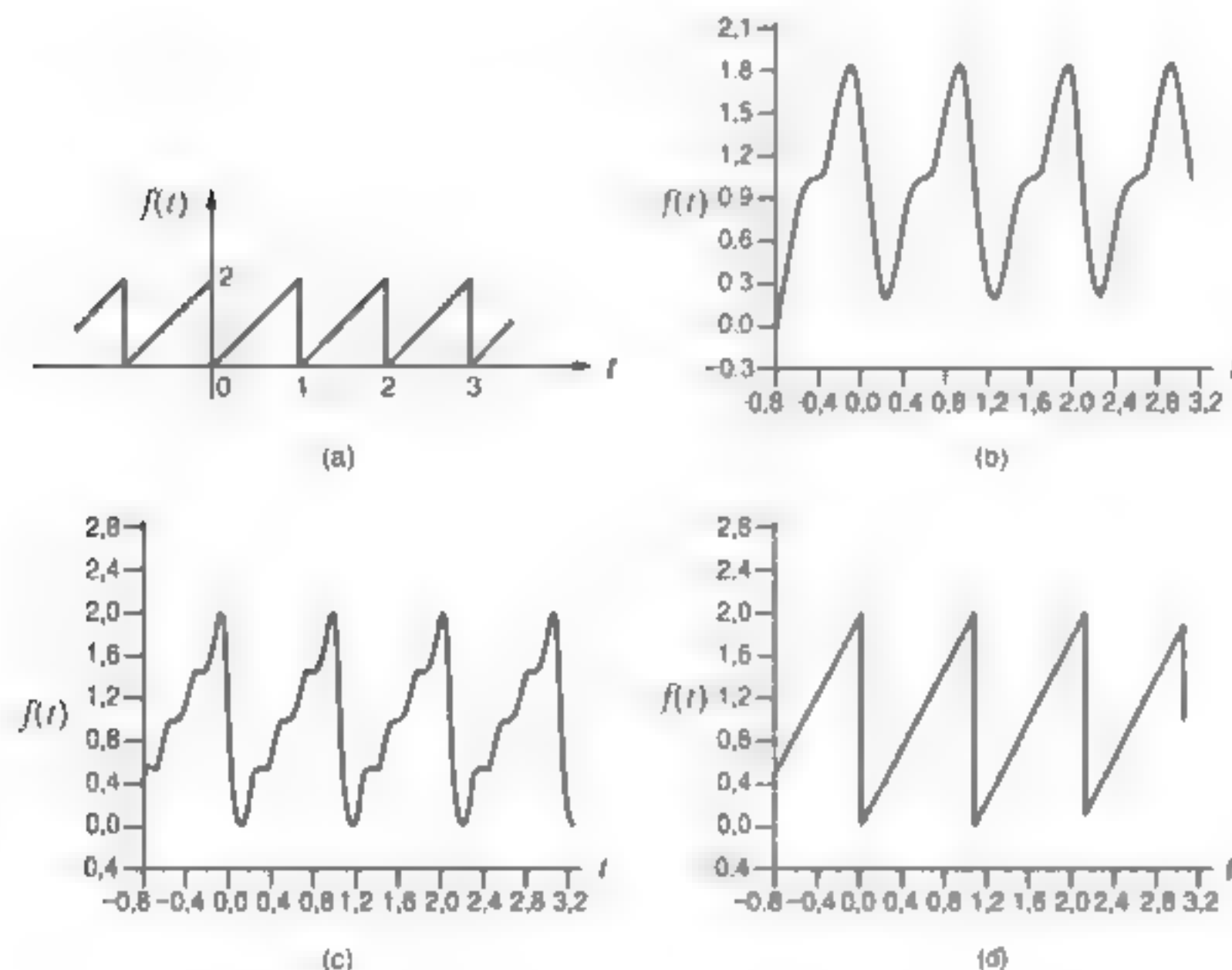


Figura 15.2 Função periódica (a) e suas representações por um número determinado de termos da série de Fourier, (b) 2 termos, (c) 4 termos, (d) 100 termos.

EXEMPLO 15.1

Determine a série de Fourier exponencial para a forma de onda da tensão periódica mostrada na Fig. 15.3.

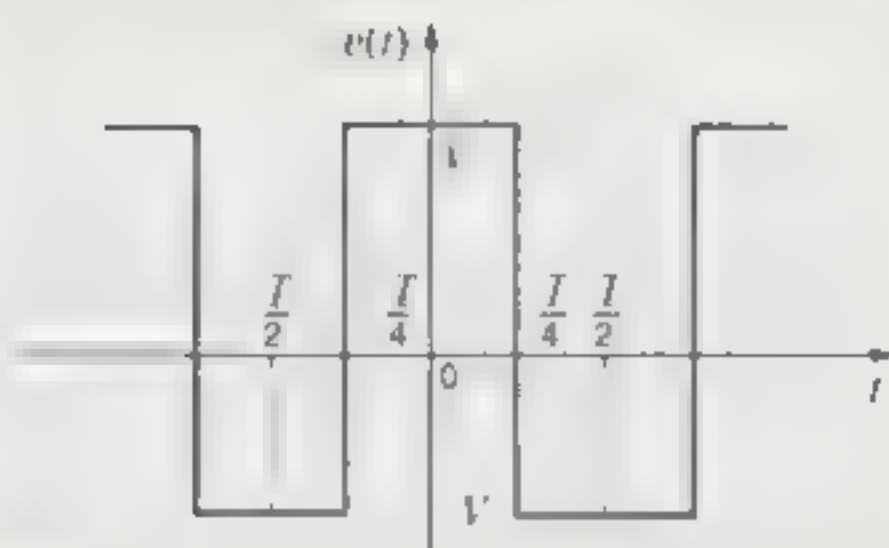


Figura 15.3 Forma de onda periódica para a tensão.

SOLUÇÃO

Os coeficientes de Fourier são determinados por meio da Eq. (15.9) pela integração ao longo de um período completo da forma de onda.

$$\begin{aligned}
 c_n &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-jn\omega_0 t} dt \\
 &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{-T/4} -V e^{-jn\omega_0 t} dt \\
 &\quad + \int_{-T/4}^{T/4} V e^{-jn\omega_0 t} dt + \int_{T/4}^{T/2} -V e^{-jn\omega_0 t} dt \\
 &= \frac{V}{jn\omega_0 T} \left[+e^{-jn\omega_0 t} \right]_{-T/4}^{-T/4} - \left[e^{-jn\omega_0 t} \right]_{T/4}^{T/4} + \left[e^{-jn\omega_0 t} \right]_{T/4}^{T/2} \right] \\
 &= \frac{V}{jn\omega_0 T} (2e^{jn\pi/2} - 2e^{-jn\pi/2} + e^{-jn\pi} - e^{-jn\pi}) \\
 &= \frac{V}{jn\omega_0 T} \left[4 \sin \frac{n\pi}{2} - 2 \sin(n\pi) \right] \\
 &= 0 \quad \text{para } n \text{ par} \\
 &= \frac{2V}{n\pi} \sin \frac{n\pi}{2} \quad \text{para } n \text{ ímpar}
 \end{aligned}$$

O coeficiente c_0 corresponde ao valor médio da forma de onda. Esse termo pode ser calculado utilizando a equação original para c_n . Assim,

$$\begin{aligned}
 c_0 &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} v(t) dt \\
 &= \frac{1}{T} \left[\int_{-T/2}^{-T/4} -V dt + \int_{-T/4}^{T/4} V dt + \int_{T/4}^{T/2} -V dt \right] \\
 &= \frac{1}{T} \left[-\frac{V}{4} + \frac{V}{2} - \frac{V}{4} \right] = 0
 \end{aligned}$$

Portanto,

$$v(t) = \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0 \\ n \text{ ímpar}}}^{\infty} \frac{2V}{n\pi} \sin \frac{n\pi}{2} e^{jn\omega_0 t}$$

Essa equação pode ser escrita como

$$\begin{aligned}
 v(t) &= \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \text{ ímpar}}}^{\infty} \frac{2V}{n\pi} \sin \frac{n\pi}{2} e^{jn\omega_0 t} + \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \text{ ímpar}}}^{\infty} \frac{2V}{n\pi} \sin \frac{n\pi}{2} e^{-jn\omega_0 t} \\
 &= \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \text{ ímpar}}}^{\infty} \left(\frac{2V}{n\pi} \sin \frac{n\pi}{2} \right) e^{jn\omega_0 t} + \left(\frac{2V}{n\pi} \sin \frac{n\pi}{2} \right)^* e^{-jn\omega_0 t}
 \end{aligned}$$

Como um número somado ao seu complexo conjugado é igual a duas vezes a parte real do número, a tensão $v(t)$ pode ser expressa por

$$v(t) = \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \text{ ímpar}}}^{\infty} 2 \operatorname{Re} \left(\frac{2V}{n\pi} \sin \frac{n\pi}{2} e^{jn\omega_0 t} \right)$$

ou

$$v(t) = \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \text{ ímpar}}}^{\infty} \frac{4V}{n\pi} \sin \frac{n\pi}{2} \cos n\omega_0 t$$

Note que este mesmo resultado poderia ter sido obtido por integração ao longo do intervalo $-T/4$ a $3T/4$.

Avaliação do Aprendizado

E15.1 Determine os coeficientes de Fourier para a forma de onda mostrada na Fig. E15.1.

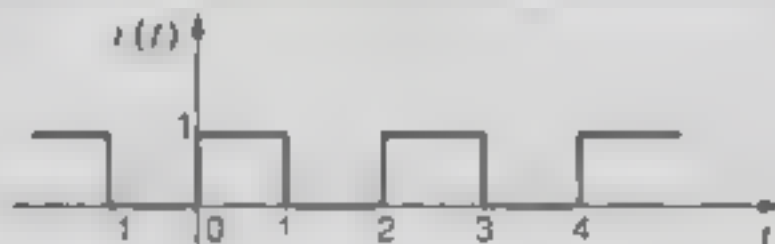


Figura E15.1

RESPOSTA:

$$c_n = \frac{1}{j2\pi n} e^{-jn\pi}, \quad c_0 = \frac{1}{2}$$

E15.2 Determine os coeficientes de Fourier para a forma de onda mostrada na Fig. E15.2.

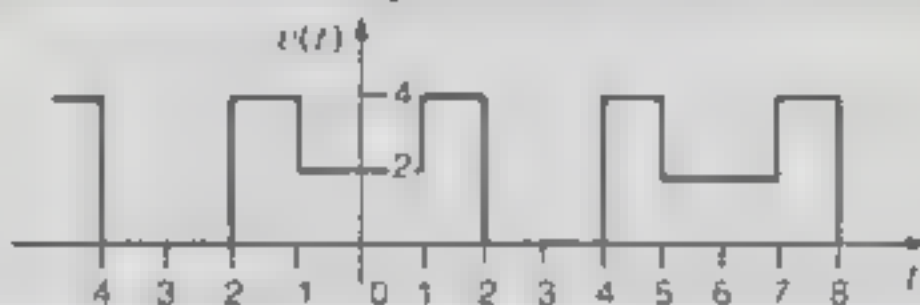


Figura E15.2

RESPOSTA:

$$c_n = \frac{2}{n\pi} \left(2 \sin \frac{2\pi n}{4} - \sin \frac{n\pi}{4} \right), \quad c_0 = 2$$

E15.3 Obtenha a série de Fourier exponencial para a forma de onda mostrada na Fig. E15.3

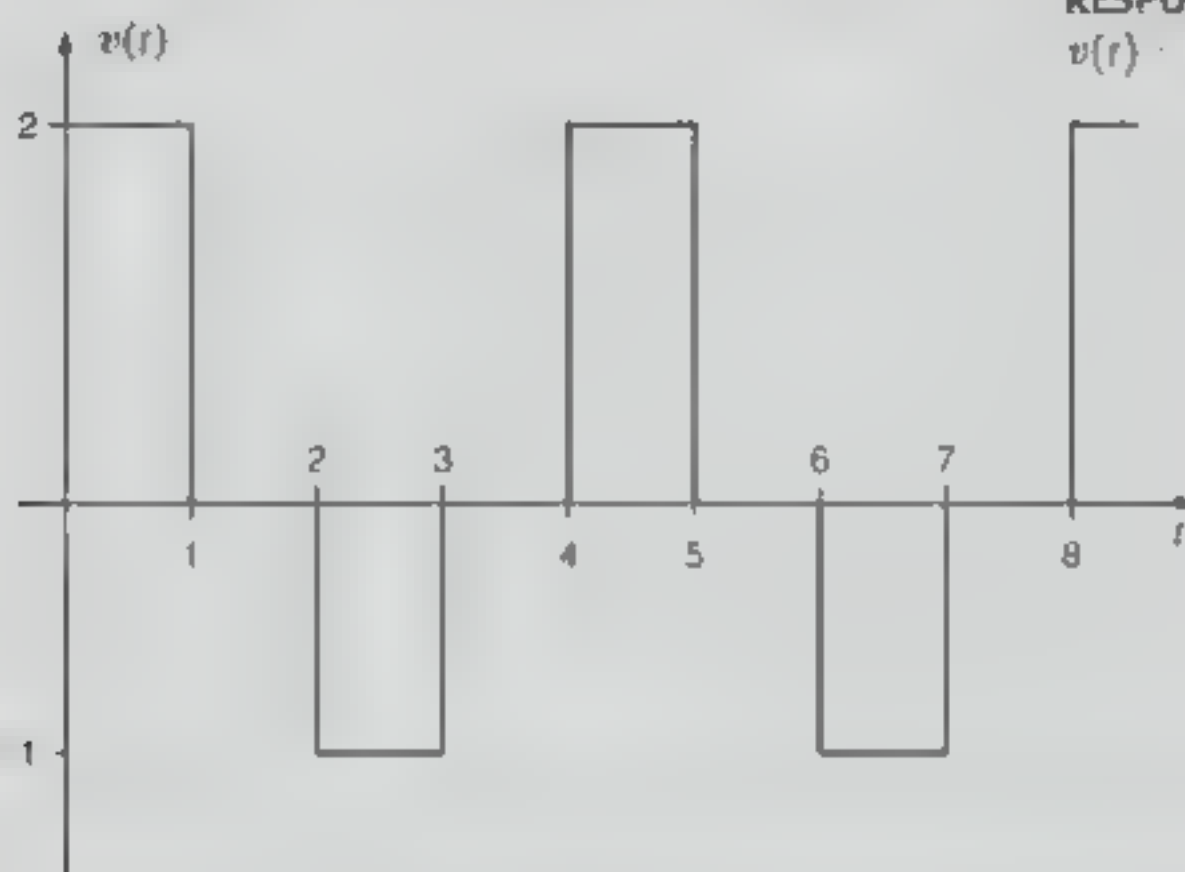


Figura E15.3

RESPOSTA:

$$v(t) = \dots + 0,225e^{j135^\circ} e^{j1,5\pi t} + 0,159e^{j90^\circ} e^{j\pi t} + 0,675e^{j45^\circ} e^{j0,5\pi t} + 0,25 + 0,675e^{-j45^\circ} e^{j0,5\pi t} + 0,159e^{-j90^\circ} e^{j\pi t} + 0,225e^{-j135^\circ} e^{j1,5\pi t} + \dots V.$$

SÉRIE DE FOURIER TRIGONOMÉTRICA Analisa-se, agora, uma outra forma da série de Fourier. Uma vez que

$$2c_n = a_n - jb_n \quad 15.10$$

o termo $2c_n$ será analisado e decomposto segundo suas partes real e imaginária. Utilizando a Eq. (15.9), tem-se que

$$2c_n = \frac{2}{T_0} \int_{t_1}^{t_1+T_0} f(t) e^{-jn\omega_0 t} dt \quad 15.11$$

Empregando-se a identidade de Euler, pode-se escrever essa equação na forma

$$\begin{aligned} 2c_n &= \frac{2}{T_0} \int_{t_1}^{t_1+T_0} f(t) (\cos n\omega_0 t - j \sin n\omega_0 t) dt \\ &= \frac{2}{T_0} \int_{t_1}^{t_1+T_0} f(t) \cos n\omega_0 t dt - j \frac{2}{T_0} \int_{t_1}^{t_1+T_0} f(t) \sin n\omega_0 t dt \end{aligned}$$

Assim, pela Eq. (15.10), nota-se que

$$a_n = \frac{2}{T_0} \int_{t_1}^{t_1+T_0} f(t) \cos n\omega_0 t dt \quad 15.12$$

$$b_n = \frac{2}{T_0} \int_{t_1}^{t_1+T_0} f(t) \sin n\omega_0 t dt \quad 15.13$$

Esses são os coeficientes da série de Fourier descrita pela Eq. (15.6), a qual será chamada de *série de Fourier trigonométrica*. Essas equações são obtidas diretamente em diversos livros utilizando as propriedades de ortogonalidade das funções seno e cosseno. Note que, agora, é possível calcular os coeficientes c_n , a_n , b_n e, uma vez que

$$2c_n = D_n / \theta_n \quad 15.14$$

os coeficientes da *série de Fourier para o cosseno* descritos pela Eq. (15.1) podem ser deduzidos. Essa forma da série de

Fourier é particularmente útil porque ela permite representar cada harmônico da função como um fasor.

Observando a Eq. (15.9) percebe-se que o coeficiente c_0 , que é escrito como a_0 , pode ser expresso como

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_{t_1}^{t_1+T_0} f(t) dt \quad 15.15$$

Esse é o valor médio do sinal $f(t)$ e, geralmente, pode ser calculado diretamente da forma de onda.

SIMETRIA E A SÉRIE DE FOURIER TRIGONOMÉTRICA Se um sinal apresenta certas propriedades de simetria, pode-se aproveitar a vantagem dessas propriedades para simplificar os cálculos dos coeficientes de Fourier. Existem três tipos de simetria: (1) simetria das funções pares, (2) simetria das funções ímpares e (3) simetria de meia-onda.

Simetria de Funções Pares Uma função é dita par se

$$f(t) = f(-t) \quad 15.16$$

Uma função par é simétrica em relação ao eixo vertical, e um exemplo notável de função com essa propriedade é a função $\cos n\omega_0 t$. Observe que a forma de onda mostrada na Fig. 15.3 também apresenta simetria de função par. Agora, seja a determinação das expressões dos coeficientes de Fourier para o caso em que uma função satisfaz à Eq. (15.16).

Fazendo $t_1 = -T_0/2$ na Eq. (15.15), obtém-se

$$a_0 = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} f(t) dt$$

$$a_0 = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^0 f(t) dt + \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0/2} f(t) dt$$

Trocando-se, agora, a variável na primeira integral (isto é, fazendo $t = -x$), tem-se que $f(-x) = f(x)$, $dt = -dx$, e os limites de integração passam a ser de $x = T_0/2$ a $x = 0$. Portanto, as equações precedentes ficam

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{T_0} \int_{T_0/2}^0 f(x)(-dx) + \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0/2} f(t) dt \\ &= \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0/2} f(x) dx + \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0/2} f(t) dt \\ &= \frac{2}{T_0} \int_0^{T_0/2} f(t) dt \end{aligned} \quad 15.17$$

Os demais coeficientes de Fourier são obtidos de modo semelhante. O coeficiente a_n pode ser escrito como

$$a_n = \frac{2}{T_0} \int_{T_0/2}^0 f(t) \cos n\omega_0 t dt + \frac{2}{T_0} \int_0^{T_0/2} f(t) \cos n\omega_0 t dt$$

Empregando a mudança de variável que conduziu à Eq. (15.17), pode-se expressar a equação precedente como

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{T_0} \int_{T_0/2}^0 f(x) \cos(-n\omega_0 x)(-dx) + \frac{2}{T_0} \int_0^{T_0/2} f(t) \cos n\omega_0 t dt \\ &= \frac{2}{T_0} \int_0^{T_0/2} f(x) \cos n\omega_0 x dx + \frac{2}{T_0} \int_0^{T_0/2} f(t) \cos n\omega_0 t dt \end{aligned}$$

$$a_n = \frac{4}{T_0} \int_0^{T_0/2} f(t) \cos n\omega_0 t dt \quad 15.18$$

Mais uma vez, seguindo o desenvolvimento anterior, pode-se escrever a equação para o coeficiente b_n como

$$b_n = \frac{2}{T_0} \int_{T_0/2}^0 f(t) \sin n\omega_0 t dt + \frac{2}{T_0} \int_0^{T_0/2} f(t) \sin n\omega_0 t dt$$

A mudança de variável empregada anteriormente fornece

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{T_0} \int_{T_0/2}^0 f(x) \sin(-n\omega_0 x)(-dx) + \frac{2}{T_0} \int_0^{T_0/2} f(t) \sin n\omega_0 t dt \\ &= \frac{2}{T_0} \int_0^{T_0/2} f(x) \sin n\omega_0 x dx + \frac{2}{T_0} \int_0^{T_0/2} f(t) \sin n\omega_0 t dt \end{aligned}$$

$$b_n = 0 \quad 15.19$$

A análise precedente indica que a série de Fourier para uma função periódica par consiste em um termo constante e nos termos expressos em cosseno. Portanto, se $f(t)$ é uma função par, $b_n = 0$ e, pelas Eqs. (15.10) e (15.14), os coeficientes c_n são reais e θ_n são múltiplos de 180° .

Simetria de Funções Ímpares Uma função é dita ímpar se

$$f(t) = -f(-t) \quad 15.20$$

Um exemplo de função ímpar é a função $\sin n\omega_0 t$. Outro exemplo é a forma de onda mostrada na Fig. 15.4a. Segundo o desenvolvimento matemático que conduziu às Eqs. (15.17) até (15.19), pode-se mostrar que, para uma função ímpar, os coeficientes de Fourier são

$$a_0 = 0 \quad 15.21$$

$$a_n = 0 \quad \text{para todo } n > 0 \quad 15.22$$

$$b_n = \frac{4}{T_0} \int_0^{T_0/2} f(t) \sin n\omega_0 t dt \quad 15.23$$

Portanto, se $f(t)$ é uma função ímpar, $a_n = 0$ e, pelas Eqs. (15.10) e (15.14), os coeficientes c_n são imaginários puros e θ_n são múltiplos ímpares de 90° .

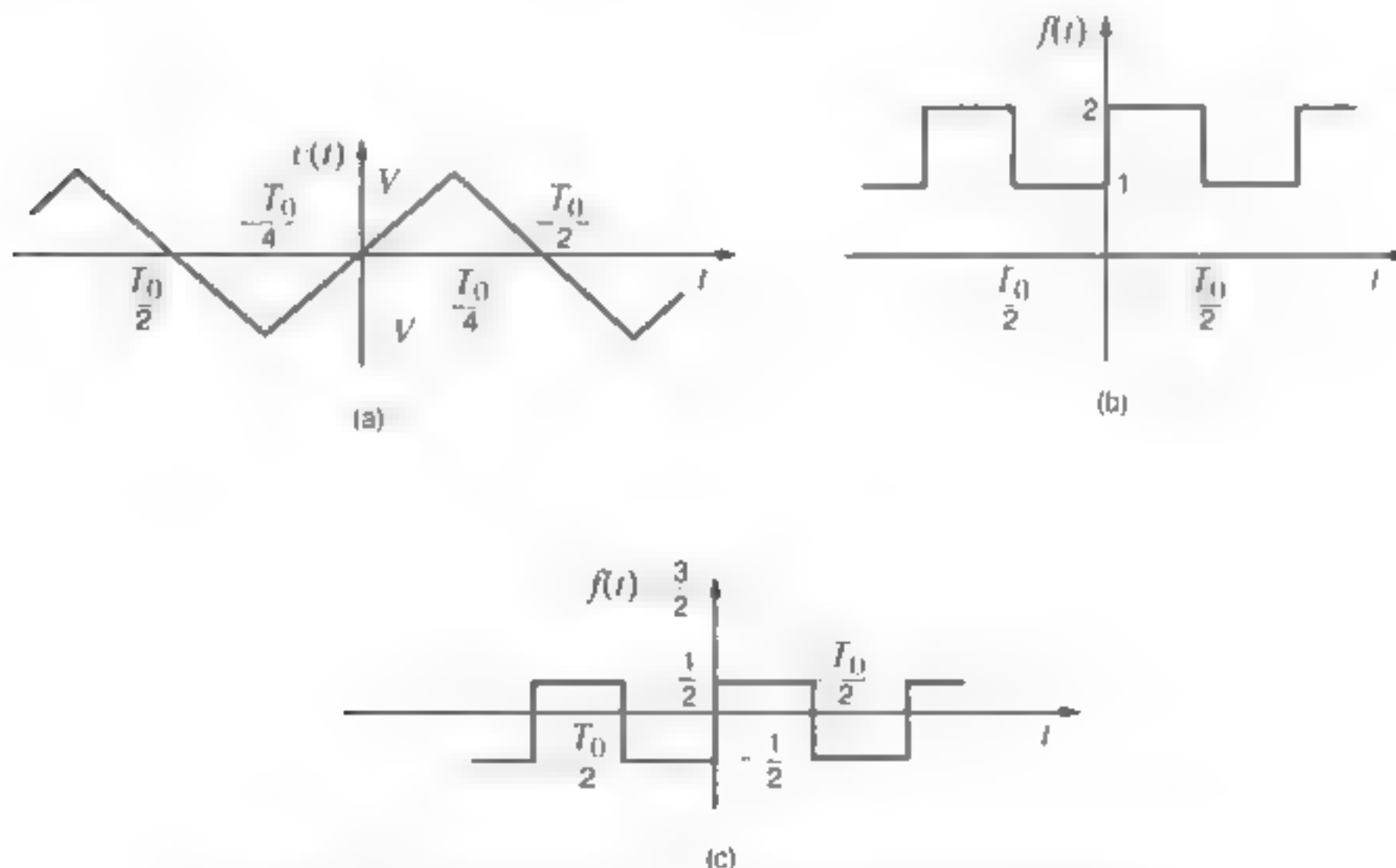


Figura 15.4 Três formas de onda; (a) e (c) possuem simetria de meia-onda.

Simetria de Meia-onda Diz-se que uma função possui *simetria de meia-onda* se

$$f(t) = -f\left(t - \frac{T_0}{2}\right) \quad 15.24$$

Basicamente, essa equação estabelece que cada meio ciclo é uma versão invertida do meio ciclo adjacente; isto é, se a forma de onda de $-T_0/2$ a 0 for invertida, ela será idêntica à forma de onda desde o tempo 0 até $T_0/2$. As formas de onda mostradas nas Figs. 15.4a e c possuem simetria de meia-onda.

Mais uma vez, podem-se obter as expressões para os coeficientes de Fourier nesse caso repetindo-se o desenvolvimento matemático que resultou nas equações para a simetria de funções pares utilizando a troca da variável t para $x + T_0/2$ e a Eq. (15.24). Os resultados desse desenvolvimento são as equações descritas a seguir.

$$a_0 = 0 \quad 15.25$$

$$a_n = b_n = 0 \quad \text{para } n \text{ par} \quad 15.26$$

EXEMPLO 15.2

Deseja-se obter a série de Fourier trigonométrica para o sinal periódico mostrado na Fig. 15.3.

SOLUÇÃO

A forma de onda apresenta simetria de função par, assim,

$$a_n = 0$$

$$b_n = 0 \quad \text{para todo } n$$

A forma de onda apresenta simetria de meia-onda e, portanto,

$$a_n = 0 \quad \text{para } n \text{ par}$$

Logo,

$$a_n = \frac{4}{T_0} \int_0^{T_0/2} f(t) \cos n\omega_0 t \, dt \quad \text{para } n \text{ ímpar}$$

$$a_n = \frac{4}{T_0} \int_0^{T_0/2} f(t) \cos n\omega_0 t \, dt \quad \text{para } n \text{ ímpar} \quad 15.27$$

$$b_n = \frac{4}{T_0} \int_0^{T_0/2} f(t) \sin n\omega_0 t \, dt \quad \text{para } n \text{ ímpar} \quad 15.28$$

As equações a seguir são geralmente úteis no cálculo dos coeficientes das séries de Fourier trigonométricas:

$$\begin{aligned} \int \sin ax \, dx &= -\frac{1}{a} \cos ax \\ \int \cos ax \, dx &= \frac{1}{a} \sin ax \\ \int x \sin ax \, dx &= -\frac{1}{a} x \cos ax + \frac{1}{a^2} \sin ax \\ \int x \cos ax \, dx &= \frac{1}{a^2} \cos ax + \frac{1}{a} x \sin ax \end{aligned} \quad 15.29$$

$$\begin{aligned} &= \frac{4}{T} \left(\int_0^{T/4} V \cos n\omega_0 t \, dt - \int_{T/4}^{T/2} V \cos n\omega_0 t \, dt \right) \\ &= \frac{4V}{n\omega_0 T} \left(\sin n\omega_0 t \Big|_0^{T/4} - \sin n\omega_0 t \Big|_{T/4}^{T/2} \right) \\ &= \frac{4V}{n\omega_0 T} \left(\sin \frac{n\pi}{2} - \sin n\pi + \sin \frac{n\pi}{2} \right) \\ &= \frac{8V}{\pi^2 n^2} \sin \frac{n\pi}{2} \quad \text{para } n \text{ ímpar} \\ &= \frac{4V}{n\pi} \sin \frac{n\pi}{2} \quad \text{para } n \text{ ímpar} \end{aligned}$$

O leitor deve comparar esse resultado com aquele obtido no Exemplo 15.1.

EXEMPLO 15.3

Obtenha a expansão em série de Fourier trigonométrica da forma de onda mostrada na Fig. 15.4a.

SOLUÇÃO

A função não apresenta simetria de função ímpar, porém, possui simetria de meia-onda. Portanto, é necessário determinar apenas os coeficientes b_n para n ímpar. Note que

$$v(t) = \begin{cases} \frac{4V_f}{T_0} & 0 \leq t \leq T_0/4 \\ 2V_f - \frac{4V_f}{T_0} t & T_0/4 < t \leq T_0/2 \end{cases}$$

Os coeficientes b_n são, portanto,

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{4}{T_0} \int_0^{T_0/4} \frac{4V_f}{T_0} \sin n\omega_0 t \, dt \\ &\quad + \frac{4}{T_0} \int_{T_0/4}^{T_0/2} \left(2V_f - \frac{4V_f}{T_0} t \right) \sin n\omega_0 t \, dt \end{aligned}$$

O cálculo dessas integrais é tedioso, porém imediato, e fornece

$$b_n = \frac{8V_f}{\pi^2 n^2} \sin \frac{n\pi}{2} \quad \text{para } n \text{ ímpar}$$

Logo, a expansão em série de Fourier fica

$$v(t) = \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{8V_f}{\pi^2 n^2} \sin \frac{n\pi}{2} \sin n\omega_0 t$$

EXEMPLO 15.4

Obtenha a expansão em série de Fourier trigonométrica da forma de onda mostrada na Fig. 15.4b.

SOLUÇÃO

Note que essa forma de onda possui um valor médio de $3/2$. Portanto, no lugar da expansão em série de Fourier de $f(t)$, será determinada a série de Fourier para $f(t) - 3/2$, que é a forma de onda mostrada na Fig. 15.4c. Essa última forma de onda possui uma simetria de meia-onda. A função é também ímpar e, portanto,

$$b_n = \frac{4}{T_0} \int_0^{T_0/2} \frac{1}{2} \sin n\omega_0 t \, dt$$

$$= \frac{2}{T_0} \left(\frac{-1}{n\omega_0} \cos n\omega_0 t \right) \Big|_0^{T_0/2}$$

$$= \frac{2}{n\omega_0 T_0} (\cos n\pi - 1)$$

$$= \frac{2}{n\pi} \quad \text{para } n \text{ ímpar}$$

Assim, a expansão em série de Fourier para $f(t) - 3/2$ fica

$$f(t) - \frac{3}{2} = \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ ímpar}}}^{\infty} \frac{2}{n\pi} \sin n\omega_0 t$$

ou

$$f(t) = \frac{3}{2} + \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ ímpar}}}^{\infty} \frac{2}{n\pi} \sin n\omega_0 t$$

Avaliação do Aprendizado

E15.4 Determine o tipo de simetria apresentada pela forma de onda mostrada nas Figs. E15.2 e E15.4.

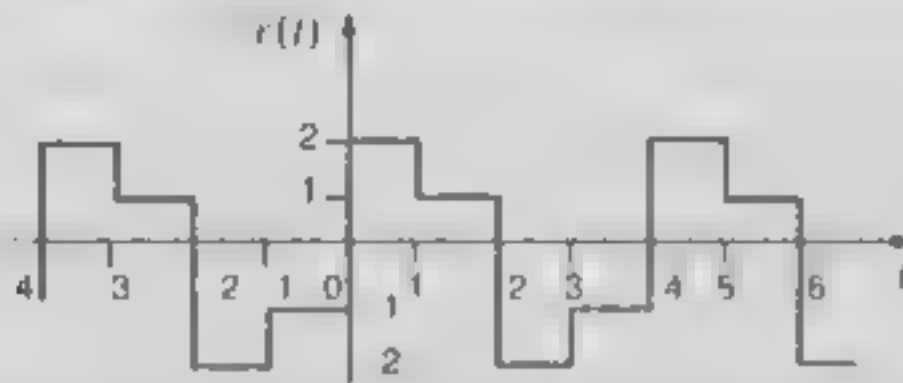


Figura E15.4

RESPOSTA: A forma de onda da Fig. E15.2 apresenta simetria par e a da Fig. E15.4 apresenta simetria de meia-onda.

E15.5 Obtenha a série de Fourier trigonométrica para a forma de onda de tensão mostrada na Fig. E15.2.

RESPOSTA:

$$v(t) = 7 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n\pi} \left(2 \sin \frac{2n\pi}{3} - \sin \frac{n\pi}{3} \right) \cos \frac{n\pi}{3} t$$

E15.6 Obtenha a série de Fourier trigonométrica para a forma de onda de tensão mostrada na Fig. E15.4.

RESPOSTA:

$$v(t) = \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ ímpar}}}^{\infty} \frac{2}{n\pi} \sin \frac{n\pi}{2} \cos \frac{n\pi}{2} t$$

$$+ \frac{2}{n\pi} (2 - \cos n\pi) \sin \frac{n\pi}{2} t.$$

E15.7 Determine a série de Fourier trigonométrica para a forma de onda mostrada na Fig. E15.3

RESPOSTA:

$$v(t) = 0,25 + 0,955 \cos(0,5\pi t) + 0,955 \sin(0,5\pi t) +$$

$$0,318 \sin(\pi t) - 0,318 \cos(1,5\pi t) + 0,318 \sin(1,5\pi t) + \dots V$$

DEFASAGEM NO TEMPO Examina-se, agora, o efeito da defasagem no tempo de uma forma de onda periódica, $f(t)$, definida pela equação

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega_0 t}$$

Note que

$$f(t - t_0) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega_0 (t - t_0)}$$

$$f(t - t_0) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (c_n e^{-jn\omega_0 t_0}) e^{jn\omega_0 t}$$

Uma vez que $e^{-jn\omega_0 t_d}$ corresponde a uma defasagem no tempo, os coeficientes de Fourier da função defasada no tempo são os coeficientes de Fourier da função original com o ângulo defa-

sado de uma quantidade diretamente proporcional à frequência. Portanto, a defasagem no domínio do tempo corresponde à defasagem da fase no domínio da frequência.

EXEMPLO 15.5

Calcule a série de Fourier da forma de onda mostrada na Fig. 15.3 defasada no tempo em um quarto do período.

SOLUÇÃO

A forma de onda da Fig. 15.3 defasada no tempo em $T_0/4$ é mostrada na Fig. 15.5. Como o atraso no tempo é de $T_0/4$, tem-se

$$n\omega_0 t_d = n \frac{2\pi}{T_0} \frac{T_0}{4} = n \frac{\pi}{2} = n 90^\circ$$

Portanto, utilizando a Eq. (15.30) e os resultados do Exemplo 15.1, os coeficientes de Fourier para a forma de onda defasada no tempo são

$$c_n = \frac{2V}{n\pi} \sin \frac{n\pi}{2} \angle -n 90^\circ \quad n \text{ ímpar}$$

e, portanto,

$$v(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{4V}{n\pi} \sin \frac{n\pi}{2} \cos(n\omega_0 t - n 90^\circ)$$

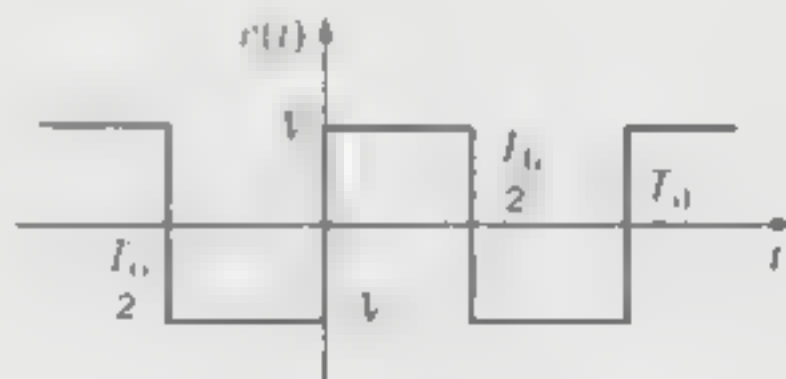


Figura 15.5 Forma de onda da Fig. 15.3 defasada no tempo em $T_0/4$.

Geralmente, é possível calcular o ângulo de defasagem em graus utilizando a expressão

$$\text{defasagem (graus)} = \omega_0 t_d = (360^\circ) \frac{t_d}{T_0} \quad 15.31$$

de modo que uma defasagem no tempo de um quarto de período corresponde a um ângulo de defasagem de 90° .

Como outro interessante aspecto da defasagem no tempo, considere uma função $f_1(t)$ que seja não nula no intervalo $0 \leq t \leq T_0/2$ e nula no intervalo $T_0/2 < t \leq T_0$. Para efeito de ilustração, admite-se que $f_1(t)$ seja a forma de onda triangular mostrada na Fig. 15.6a. Assim, a função $f_1(t - T_0/2)$ possui a forma mostrada na Fig. 15.6b. Logo, a função $f(t)$ definida como

$$f(t) = f_1(t) - f_1\left(t - \frac{T_0}{2}\right) \quad 15.32$$

Calculando os coeficientes de Fourier para a forma de onda defasada no tempo mostrada na Fig. 15.5, obtém-se

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} f(t) e^{-jn\omega_0 t} dt \\ &= \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^0 -V e^{-jn\omega_0 t} dt + \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0/2} V e^{-jn\omega_0 t} dt \\ &= \frac{2V}{jn\pi} \quad \text{para } n \text{ ímpar} \end{aligned}$$

Portanto,

$$c_n = \frac{2V}{n\pi} \angle -90^\circ \quad n \text{ ímpar}$$

Uma vez que n é ímpar, pode-se mostrar que essa expressão é equivalente à obtida anteriormente.

fica conforme mostrado na Fig. 15.6c. Note que $f(t)$ possui simetria de meia-onda. Além disso, note que se

$$f_1(t) = \sum_n c_n e^{-jn\omega_0 t}$$

então

$$\begin{aligned} f(t) &= f_1(t) - f_1\left(t - \frac{T_0}{2}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (1 - e^{-jn\pi}) e^{-jn\omega_0 t} \\ &= \begin{cases} \sum_{n=-\infty}^{\infty} 2c_n e^{-jn\omega_0 t} & n \text{ ímpar} \\ 0 & n \text{ par} \end{cases} \quad 15.33 \end{aligned}$$

Portanto, percebe-se que qualquer função com simetria de meia-onda pode ser expressa na forma da Eq. (15.32), em que a série de Fourier é definida pela Eq. (15.33) e c_n é o coeficiente de Fourier para $f_1(t)$.

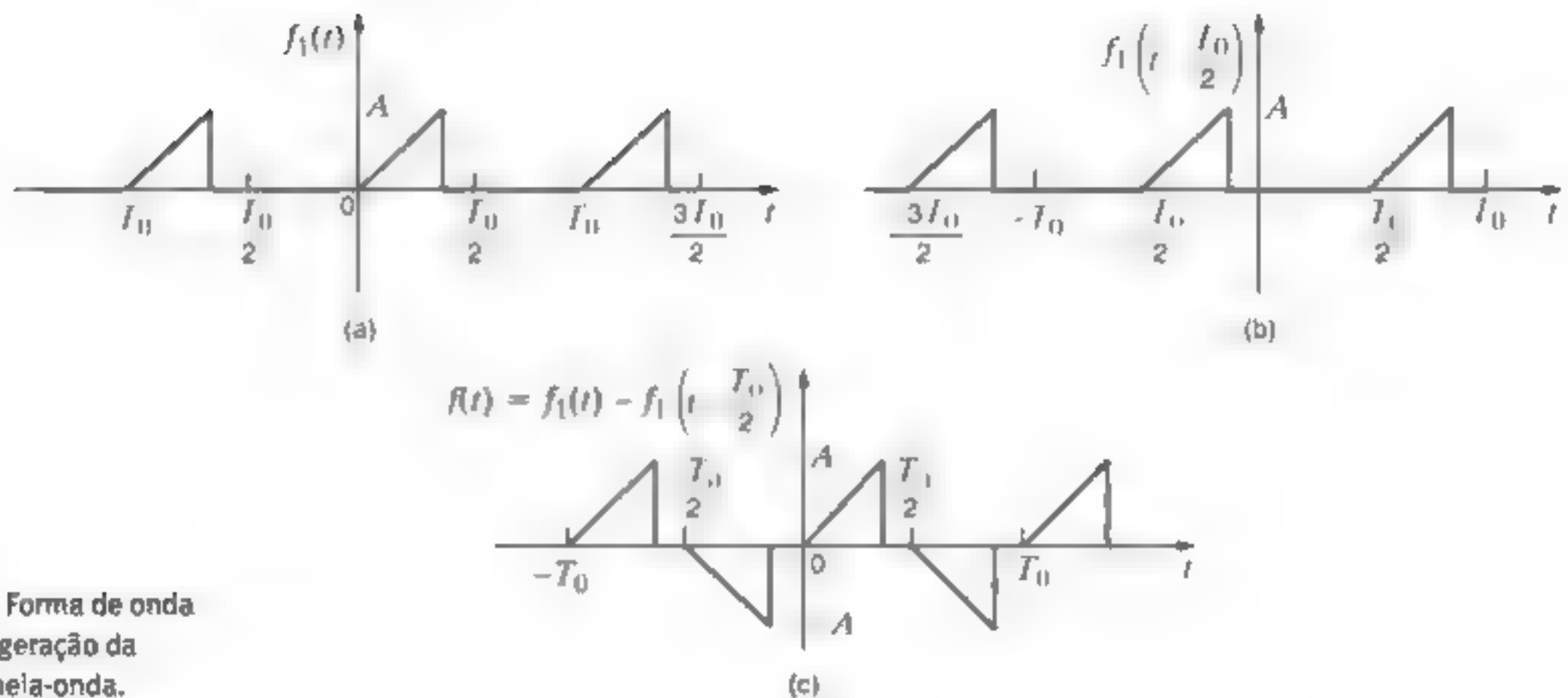


Figura 15.6 Forma de onda que ilustra a geração da simetria de meia-onda.

Avaliação do Aprendizado

E15.8 Se a forma de onda mostrada na Fig. E15.1 for defasada no tempo em 1 s, obtém-se como resultado a forma de onda da Fig. E15.8. Calcule os coeficientes da série de Fourier exponencial para a forma de onda da Fig. E15.8 e mostre que eles diferem dos coeficientes da forma de onda da Fig. E15.1 de um ângulo igual a π (180°).

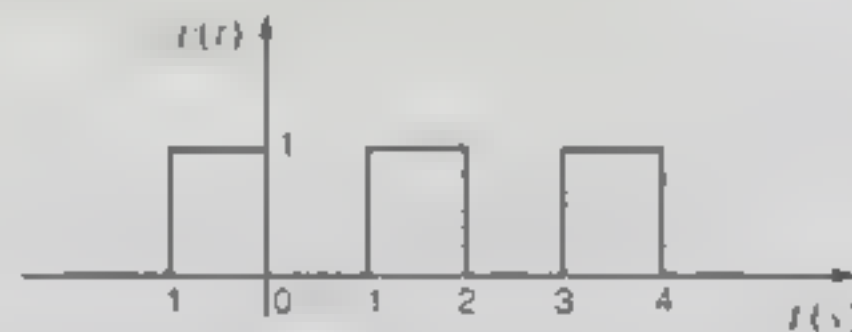


Figura E15.8

RESPOSTAS:

$$c_0 = \frac{1}{2}$$

$$c_n = \left(\frac{1 - e^{jn\pi}}{j2\pi n} \right)$$

GERAÇÃO DA FORMA DE ONDA A magnitude dos harmônicos em uma série de Fourier é independente da escala no tempo para uma dada forma de onda. Portanto, as equações de uma grande variedade de formas de onda podem ser fornecidas por meio de uma tabela sem que seja necessária uma escala de tempo específica. A Tabela 15.1 apresenta um conjunto de ondas periódicas frequentemente utilizadas, em que foi considerada a vantagem da simetria para simplificar os coeficientes. Essas for-

mas de onda podem ser utilizadas na geração de outras formas de onda. O nível de uma onda pode ser ajustado alterando-se a componente de valor médio; o tempo pode ser defasado pelo ajuste do ângulo dos harmônicos; e duas formas de onda podem ser combinadas para produzir uma terceira forma de onda. Por exemplo, a forma de onda mostrada nas Figs. 15.7a e b podem ser combinadas para produzir a forma de onda ilustrada na Fig. 15.7c.

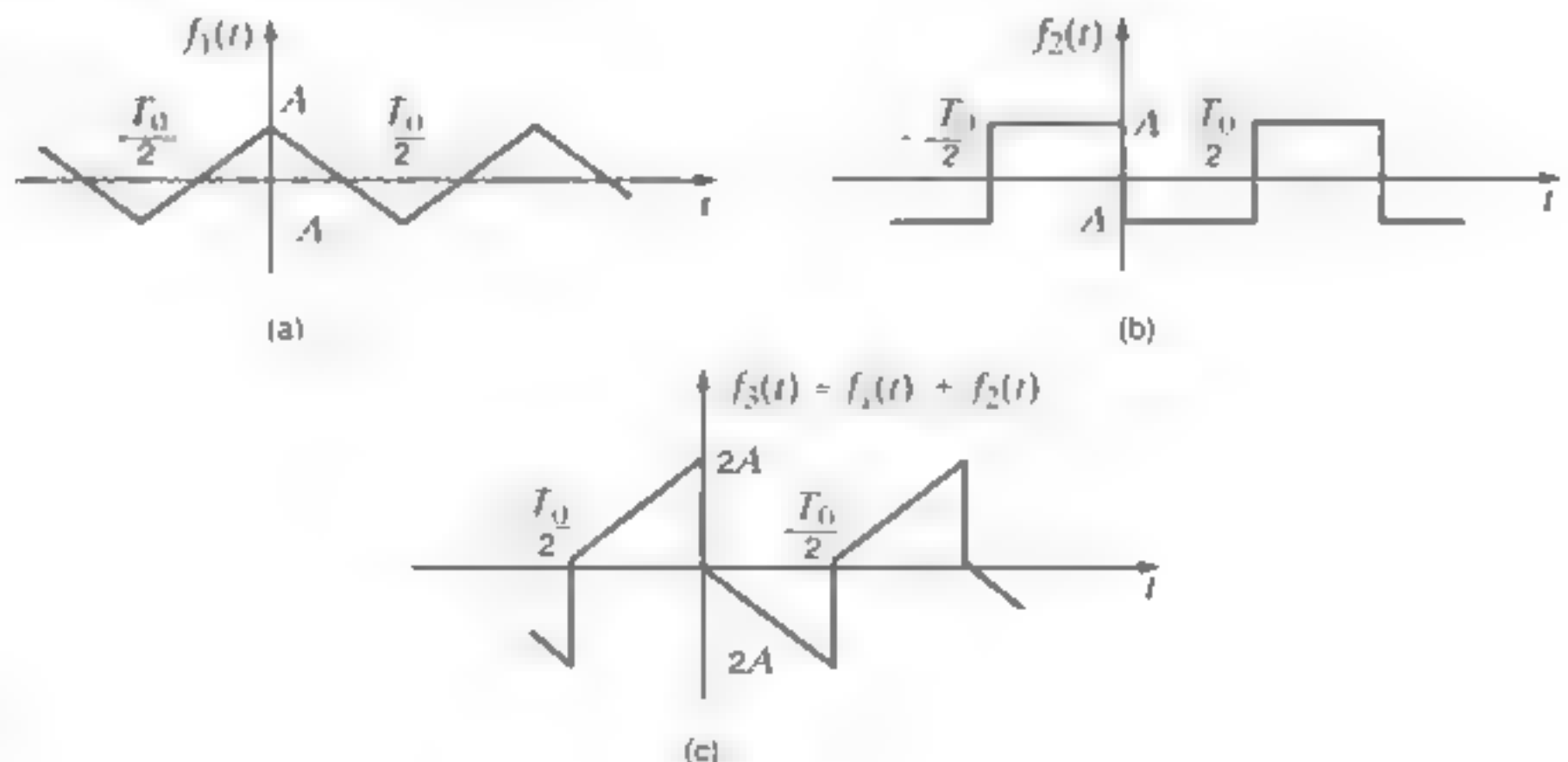
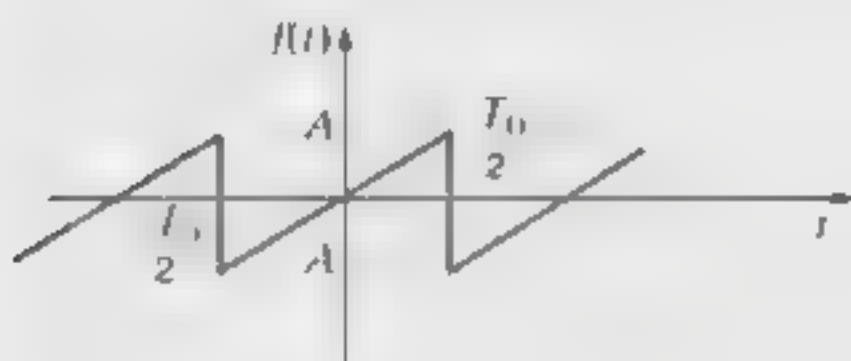
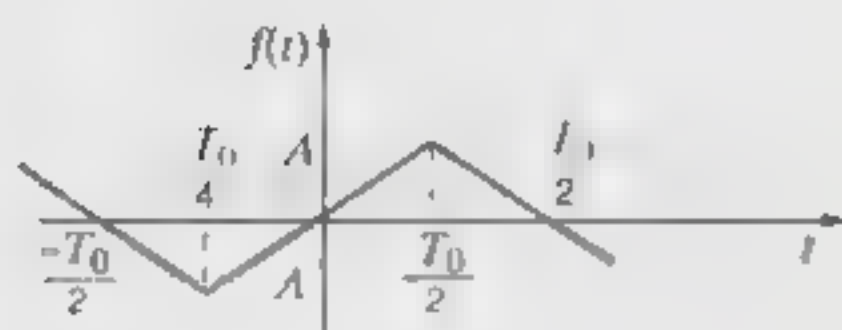


Figura 15.7 Exemplo de geração da forma de onda.

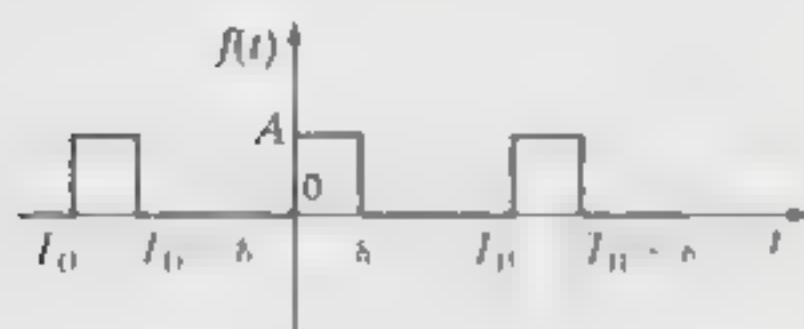
TABELA 15.1 Série de Fourier de algumas formas de onda comuns



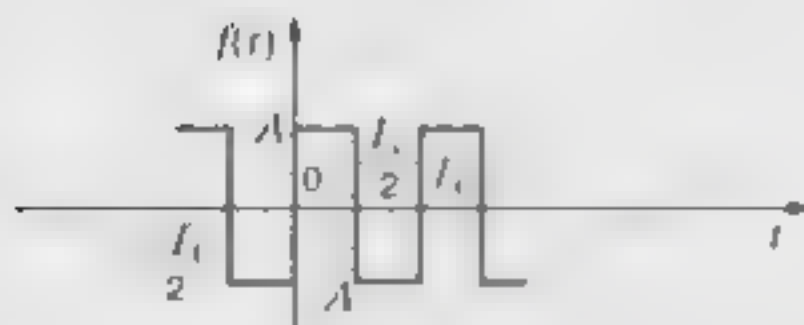
$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2A}{n\pi} \sin n\omega_0 t$$



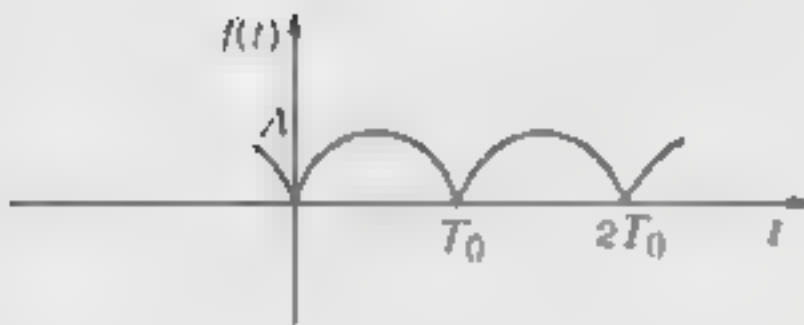
$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8A}{n^3 \pi^2} \sin \frac{n\pi}{2} \sin n\omega_0 t$$



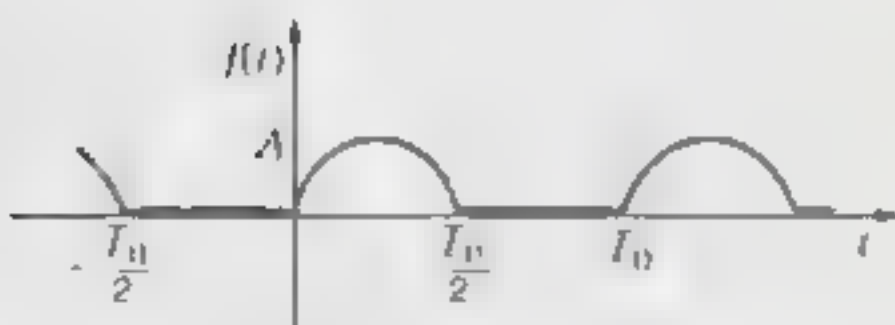
$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{A}{n\pi} \sin \frac{n\pi\delta}{T_0} e^{jn\omega_0 t - (0, 2)}$$



$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4A}{n\pi} \sin n\omega_0 t$$



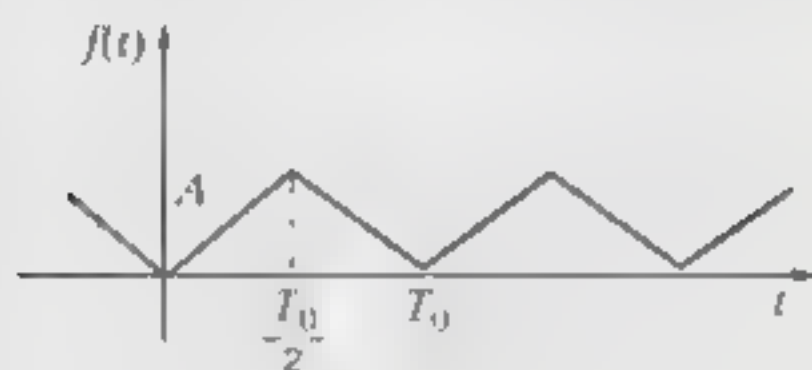
$$f(t) = \frac{2A}{\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4A}{\pi(1 - 4n^2)} \cos n\omega_0 t$$



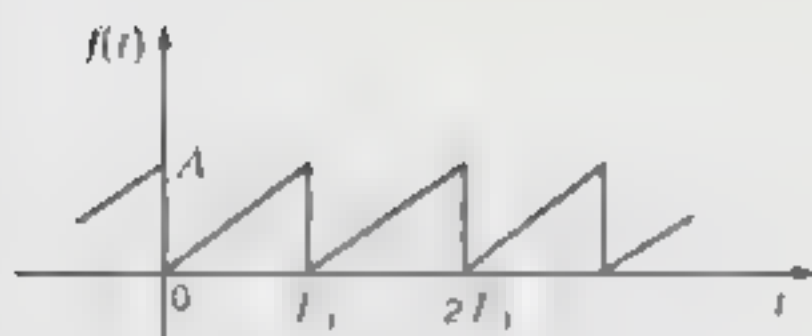
$$f(t) = \frac{A}{\pi} + \frac{A}{2} \sin \omega_0 t + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2A}{\pi(1 - n^2)} \cos n\omega_0 t$$

(Continua)

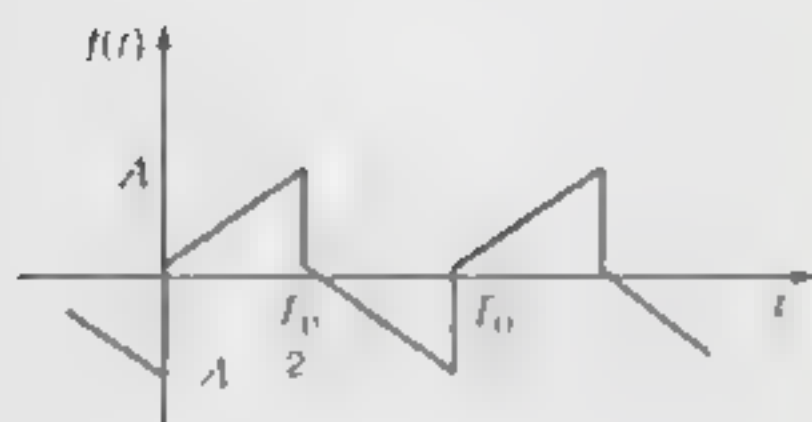
TABELA 15.1 (Continuação)



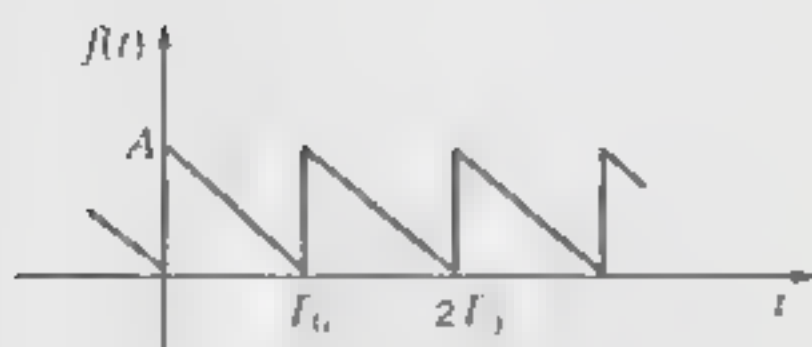
$$f(t) = \frac{A}{2} + \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ ímpar}}}^{\infty} \frac{2A}{n^2 \pi^2} e^{jn\omega_0 t}$$



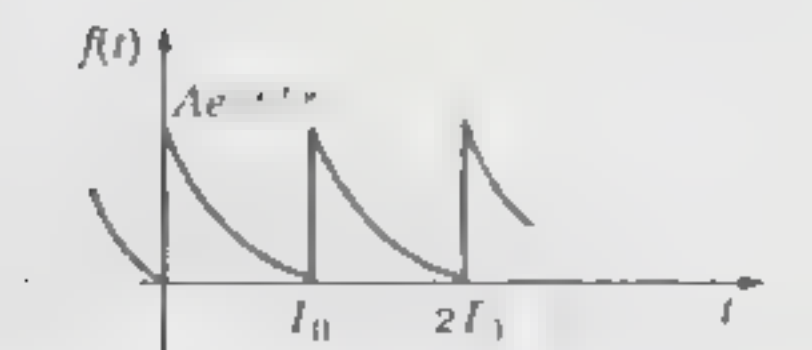
$$f(t) = \frac{A}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A}{n\pi} \text{sen } n\omega_0 t$$



$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-4A}{\pi^2 n^2} \cos n\omega_0 t + \frac{2A}{\pi n} \text{sen } n\omega_0 t$$



$$f(t) = \frac{A}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A}{\pi n} \text{sen } n\omega_0 t$$



$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{A(1 - e^{-\alpha T_0})}{\alpha + j2\pi n} e^{jn\omega_0 t}$$

Avaliação do Aprendizado

E15.9 A Fig. E15.9 mostra duas formas de onda periódicas. Calcule a série de Fourier exponencial para cada forma de onda e, em seguida, superponha os resultados para obter a série de Fourier da forma de onda mostrada na Fig. E15.2.

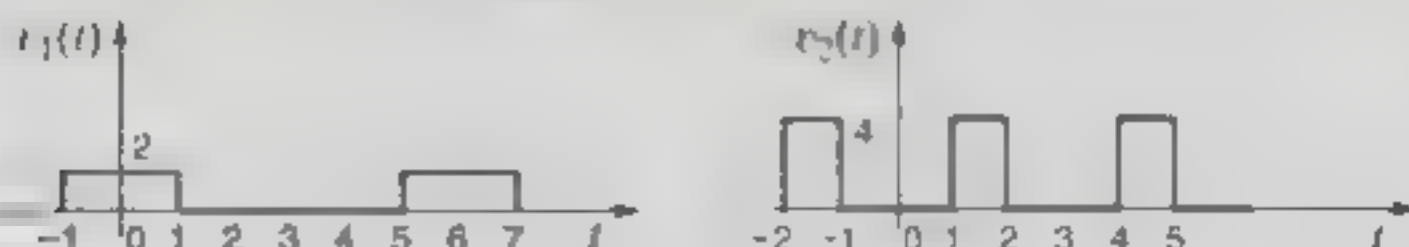


Figura E15.9

RESPOSTAS:

$$v_1(t) = \frac{2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n\pi} \sin \frac{n\pi}{3} e^{jn\omega_0 t}$$

$$v_2(t) = \frac{4}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n\pi} \left(\sin \frac{n\pi}{3} - \sin \frac{2n\pi}{3} \right) e^{jn\omega_0 t}$$

ESPECTRO DE FREQUÊNCIAS O *espectro de frequências* de uma função $f(t)$ expressa por meio de uma série de Fourier consiste em um gráfico da amplitude dos harmônicos em função das frequências, que é chamado de *espectro de amplitudes*, e um gráfico das fases dos harmônicos em função das frequências, que é chamado de *espectro de fases*. Sendo as compo-

nentes de frequências discretas, os espectros são chamados de *espectros de linha*. Esse tipo de espectro mostra as frequências contidas no sinal. Os espectros de amplitude e fase são baseados nas Eqs. (15.1), (15.3) e (15.7), e representam a amplitude e a fase do sinal para frequências específicas.

EXEMPLO 15.6

A série de Fourier da forma de onda do tipo triangular mostrada na Fig. 15.7c, com $A = 5$, é dada pela equação

$$v(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{20}{n\pi} \sin n\omega_0 t - \frac{40}{n^2\pi^2} \cos n\omega_0 t \right)$$

Mostre, por meio de um gráfico, os quatro primeiros termos dos espectros de amplitude e de fase desse sinal.

SOLUÇÃO

Uma vez que $D_n \angle \theta_n = a_n - jb_n$, os primeiros quatro termos desse sinal são

$$D_1 \angle \theta_1 = \frac{40}{\pi^2} - j \frac{20}{\pi} = 7.5 \angle -122^\circ$$

$$D_2 \angle \theta_2 = \frac{40}{9\pi^2} - j \frac{20}{3\pi} = 2.2 \angle -102^\circ$$

$$D_3 \angle \theta_3 = \frac{40}{25\pi^2} - j \frac{20}{5\pi} = 1.3 \angle -97^\circ$$

$$D_4 \angle \theta_4 = \frac{40}{49\pi^2} - j \frac{20}{7\pi} = 0.91 \angle -95^\circ$$

Portanto, os gráficos da amplitude e da fase em função de ω são os mostrados na Fig. 15.8.

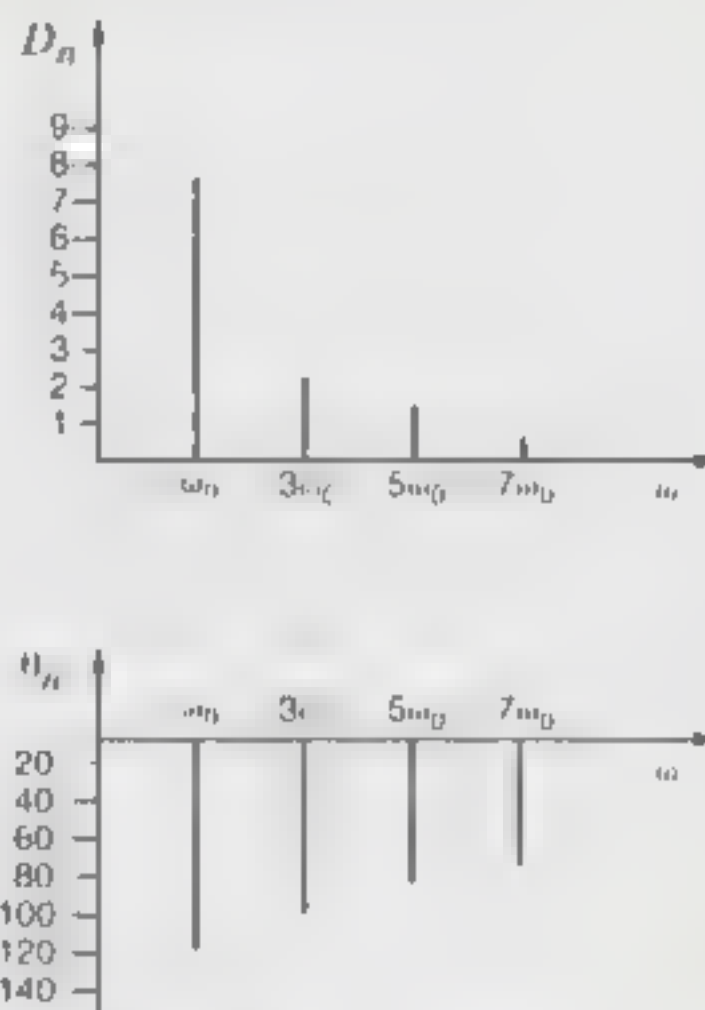


Figura 15.8 Espectros de amplitude e de fase.

Avaliação do Aprendizado

E15.10 Determine a série de Fourier trigonométrica para a forma de onda de tensão mostrada na Fig. E15.10 e represente, por meio de um gráfico, os quatro primeiros termos dos espectros de amplitude e de fase para esse sinal.

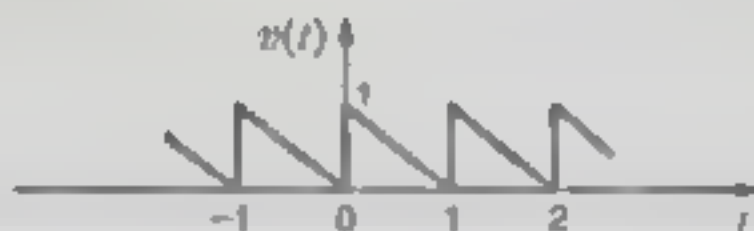


Figura E15.10

RESPOSTAS:

$$a_0 = 1/2;$$

$$D_1 = j(1/\pi);$$

$$D_2 = j(1/2\pi);$$

$$D_3 = j(1/3\pi);$$

$$D_4 = -j(1/4\pi)$$

E15.11 O espectro de linhas discretas de uma função periódica é mostrado na Fig. E15.11. Determine a expressão para $f(t)$.

RESPOSTA:

$$f(t) = 0,25 + 1,35 \cos(40\pi t - 135^\circ) + \cos(80\pi t - 90^\circ) + 0,5 \cos(120\pi t - 45^\circ) + 0,35 \cos(160\pi t - 90^\circ).$$

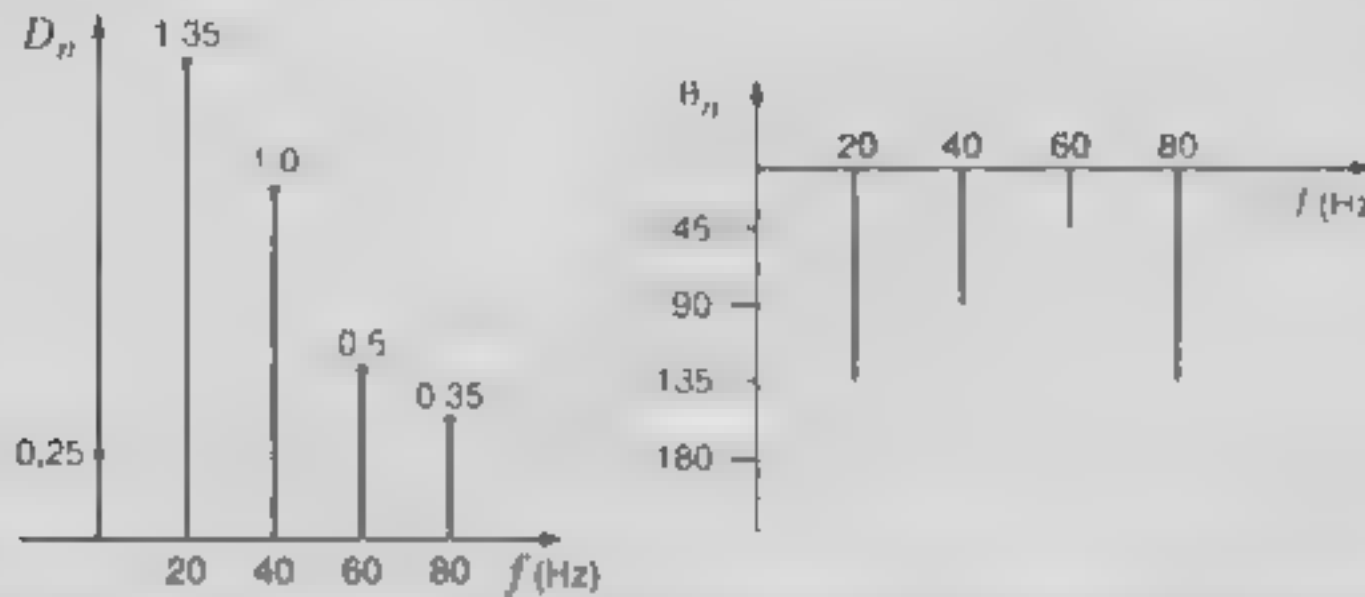


Figura E15.11

RESPOSTA DE UMA REDE EM REGIME ESTACIONÁRIO Se um sinal periódico é aplicado a uma rede, a resposta para a tensão ou para a corrente em um ponto qualquer do circuito pode ser obtida da forma descrita a seguir. Inicialmente, representa-se a função forçamento periódico por uma série de Fourier. Se a função forçamento de entrada de uma rede for uma tensão, ela pode ser expressa na forma

$$v(t) = v_0 + v_1(t) + v_2(t) + \dots$$

e, portanto, representada no domínio do tempo conforme mostrado na Fig. 15.9. Cada fonte possui sua própria amplitude e frequência. Em seguida, é determinada a resposta devida a cada componente da série de Fourier da entrada; isto é, utiliza-se a análise fasorial no domínio da frequência para determinar a resposta da rede para cada fonte. A resposta da rede devida a cada fonte no domínio da frequência é, então, transformada para o domínio do tempo. Finalmente, as soluções no domínio do tempo devidas a cada fonte são somadas utilizando o Princípio da Superposição, obtendo-se, assim, a série de Fourier da resposta completa da rede em regime estacionário.

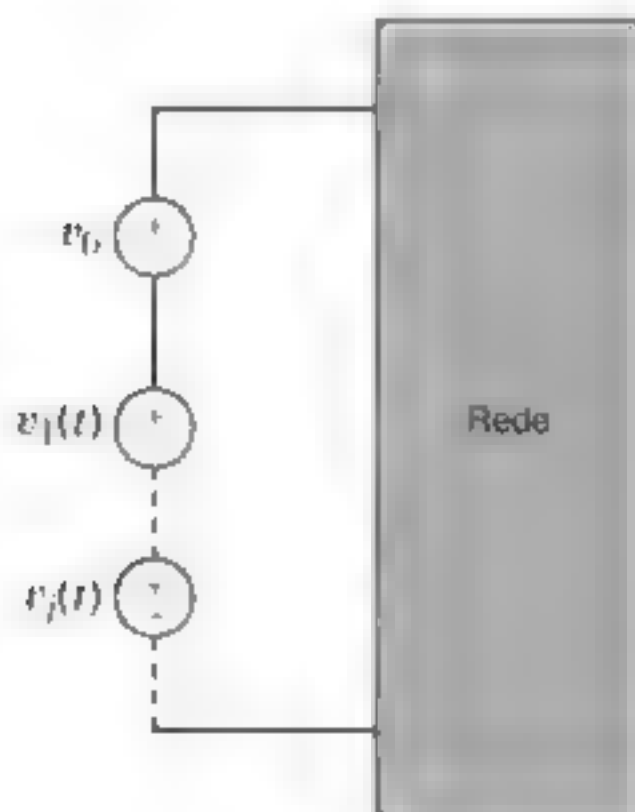


Figura 15.9 Rede sujeita a uma função forçamento em tensão periódica.

POTÊNCIA MÉDIA Mostrou-se que, quando uma rede linear é forçada com um sinal periódico não senoidal, as tensões e as correntes ao longo da rede são da forma

$$v(t) = V_{cc} + \sum_{n=1}^{\infty} V_n \cos(n\omega_0 t - \theta_n)$$

e

$$i(t) = I_{cc} + \sum_{n=1}^{\infty} I_n \cos(n\omega_0 t - \theta_i)$$

Empregando a convenção passiva de sinais e admitindo que a tensão entre os terminais de um componente e a corrente através dele são dadas pelas equações precedentes, então, pela Eq. (9.6), tem-se que

$$P = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} p(t) dt \quad 15.34$$

$$= \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} v(t)i(t) dt$$

Note que o integrando envolve o produto de duas séries infinitas. Todavia, a determinação da potência média é, na realidade, mais fácil do que possa parecer. Primeiro, note que o produto $V_{cc}I_{cc}$, quando integrado ao longo de um período e dividido pelo período, é simplesmente $V_{cc}I_{cc}$. Segundo, o produto da tensão V_{cc} por qualquer harmônico da corrente ou da corrente I_{cc} por qualquer harmônico da tensão, quando integrado ao longo de um período, é igual a zero. Terceiro, o produto de quaisquer dois harmônicos *distintos* da tensão e da corrente, quando integrado ao longo de um período, é igual a zero. Finalmente, os termos não nulos resultam apenas dos produtos de uma tensão por uma corrente a uma *mesma* frequência. Logo, utilizando o desenvolvimento matemático que se segue à Eq. (9.6), obtém-se que

$$P = V_{cc}I_{cc} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{V_n I_n}{2} \cos(\theta_n - \theta_i) \quad 15.35$$

EXEMPLO 15.7

Determine a tensão em regime estacionário $v_s(t)$ do circuito mostrado na Fig. 15.10 considerando uma tensão de entrada $v(t)$ dada pela expressão

$$v(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{20}{n\pi} \sin 2nt - \frac{40}{n^2\pi^2} \cos 2nt \right) \text{ V}$$

SOLUÇÃO

Observe que essa fonte não possui o termo constante c , portanto, seu valor CC é nulo. A amplitude e a fase para os primeiros quatro termos desse sinal são fornecidas no Exemplo 15.6, logo, o sinal $v(t)$ pode ser escrito como

$$v(t) = 7,5 \cos(2t - 122^\circ) + 2,2 \cos(6t - 102^\circ) + 1,3 \cos(10t - 97^\circ) + 0,91 \cos(14t - 95^\circ) + \dots$$

Analisando a rede, obtém-se que

$$I = \frac{V}{2 + \frac{2/j\omega}{2 + 1/j\omega}} = \frac{V(1 + 2j\omega)}{4 + 4j\omega}$$

$$I_1 = \frac{I(1/j\omega)}{2 + 1/j\omega} = \frac{I}{1 + 2j\omega}$$

$$V_s = (1)I_1 = 1 \cdot \frac{V(1 + 2j\omega)}{4 + 4j\omega} \cdot \frac{1}{1 + 2j\omega} = \frac{V}{4 + 4j\omega}$$

Portanto, uma vez que $\omega_0 = 2$,

$$V_s(n) = \frac{V(n)}{4 + j8n}$$

As componentes individuais da saída devidas às componentes da fonte na entrada são, então,

$$V_s(\omega_0) = \frac{7,5 \angle -122^\circ}{4 + j8} = 0,84 \angle -185,4^\circ \text{ V}$$

$$V_s(3\omega_0) = \frac{2,2 \angle -102^\circ}{4 + j24} = 0,09 \angle -182,5^\circ \text{ V}$$

$$V_s(5\omega_0) = \frac{1,3 \angle -97^\circ}{4 + j40} = 0,03 \angle -181,3^\circ \text{ V}$$

$$V_s(7\omega_0) = \frac{0,91 \angle -95^\circ}{4 + j56} = 0,016 \angle -181^\circ \text{ V}$$

Logo, a tensão de saída em regime estacionário $v_s(t)$ pode ser escrita como

$$v_s(t) = 0,84 \cos(2t - 185,4^\circ) + 0,09 \cos(6t - 182,5^\circ) + 0,03 \cos(10t - 181,3^\circ) + 0,016 \cos(14t - 181^\circ) + \dots \text{ V}$$

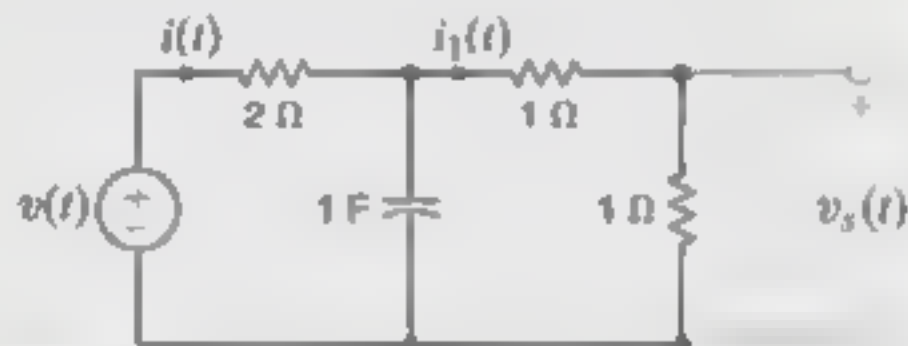


Figura 15.10 Circuito RC empregado no Exemplo 15.7.

EXEMPLO 15.8

Na rede mostrada na Fig. 15.11, $v(t) = 42 + 16 \cos(377t + 30^\circ) + 12 \cos(754t - 20^\circ)$ V. Calcule a corrente $i(t)$ e a potência média absorvida pela rede.

SOLUÇÃO

O capacitor atua como um circuito aberto para sinais CC e, portanto, $I_{CC} = 0$. Para $\omega = 377$ rad/s, tem-se

$$\frac{1}{j\omega C} = \frac{1}{j(377)(100)(10)^{-6}} = -j26,53 \Omega$$

$$j\omega L = j(377)(20)(10)^{-3} = j7,54 \Omega$$

Logo,

$$I_{754} = \frac{16 \angle 30^\circ}{16 + j7,54 - j26,53} = 0,64 \angle 79,88^\circ \text{ A}$$

Para $\omega = 754$ rad/s,

$$\frac{1}{j\omega L} = \frac{1}{j(754)(10)(10)^{-3}} = -j13,26 \Omega$$

$$j\omega L = j(754)(20)(10)^{-3} = j15,08 \Omega$$

Assim,

$$I_{754} = \frac{12 \angle -20^\circ}{16 - j15,08 + j13,26} = 0,75 \angle -26,49^\circ \text{ A}$$

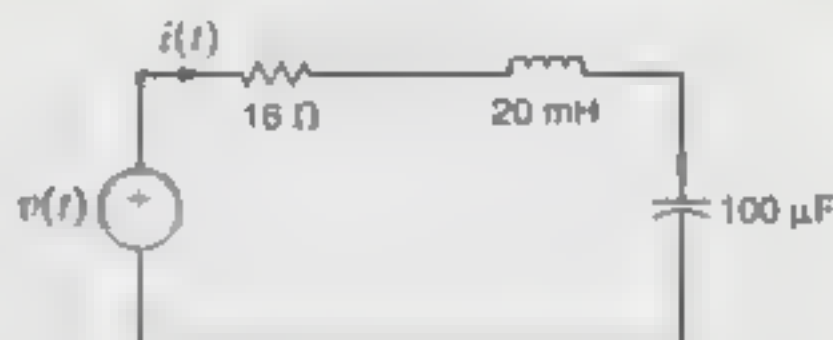


Figura 15.11 Rede utilizada no Exemplo 15.8.

Portanto, a corrente $i(t)$ é

$$i(t) = 0,64 \cos(377t + 79,88^\circ) + 0,75 \cos(754t + 26,49^\circ) \text{ A}$$

e a potência média absorvida pela rede é

$$\begin{aligned} P &= (42)(0) + \frac{(16)(0,64)}{2} \cos(30^\circ - 79,88^\circ) \\ &\quad + \frac{(12)(0,75)}{2} \cos(-20^\circ + 26,49^\circ) \\ &= 7,77 \text{ W} \end{aligned}$$

Estratégia para Solução de Problemas

Resposta em Regime Estacionário para Funções de Forçamento Periódicas

- Etapa 1.** Determine a série de Fourier da função de forçamento periódica, a qual passará agora a ser expressa como um somatório de funções harmônicas senoidais.
- Etapa 2.** Utilize a análise fasorial para determinar a resposta da rede devida a cada função senoidal atuante isoladamente.
- Etapa 3.** Utilize o Princípio da Superposição para somar, no domínio do tempo, as soluções devidas a cada

- fonte atuante isoladamente, determinando, assim, a resposta em regime estacionário total.
- Etapa 4.** Caso precise calcular a potência média dissipada em um componente da rede, determine a potência média dissipada naquele componente devida a cada fonte atuando isoladamente e, em seguida, some todas as contribuições para obter a potência total dissipada devida à função forçamento periódica.

Avaliação do Aprendizado

E15.12 Determine a expressão para a corrente $i(t)$ no regime estacionário do circuito mostrado na Fig. E15.12, considerando que a tensão de entrada $v_F(t)$ é dada pela expressão

$$v_F(t) = \frac{20}{\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-40}{\pi(4n^2 - 1)} \cos 2nt \text{ V}$$

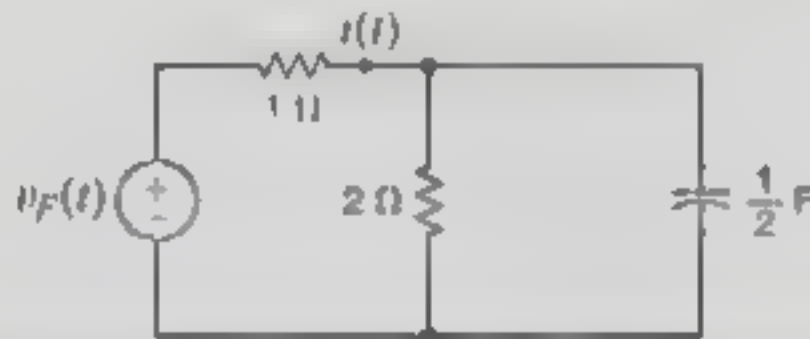


Figura E15.12

RESPOSTA:

$$i(t) = 2,12 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{40}{\pi(4n^2 - 1)} \frac{1}{A_n} \cos(2nt - \theta_n) \text{ A.}$$

E15.13 Nos terminais de entrada de uma rede, a tensão $v(t)$ e a corrente $i(t)$ são dadas pelas seguintes expressões:

$$v(t) = 64 + 36 \cos(377t + 60^\circ) - 24 \cos(754t + 102^\circ) \text{ V}$$

$$i(t) = 1,8 \cos(377t + 45^\circ) + 1,2 \cos(754t + 100^\circ) \text{ A}$$

Determine a potência média absorvida pela rede.

RESPOSTA: $P_{\text{méd}} = 16,91 \text{ W.}$

E15.14 Determine os primeiros três termos da corrente $i(t)$ em regime estacionário para o circuito mostrado na Fig. E15.14, considerando que a tensão de entrada seja dada por

$$v(t) = \frac{30}{\pi} + 15 \sin 10t + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{60}{\pi(1 - n^2)} \cos 10nt \text{ V}$$

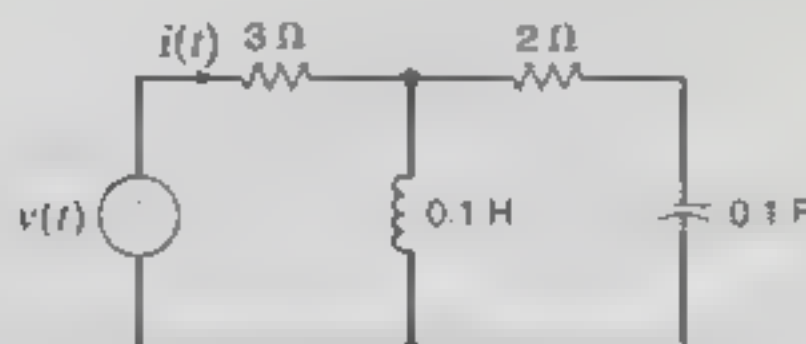


Figura E15.14

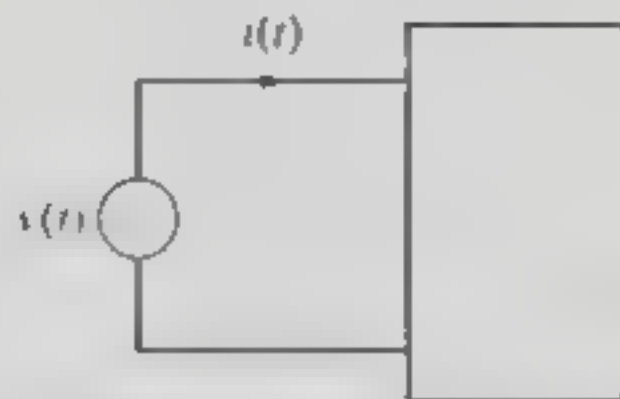
RESPOSTA:

$$i(t) = 3,18 + 4,12 \cos(10t + 106^\circ) + 1,45 \cos(20t + 166^\circ) \text{ A.}$$

E15.15 Determine a potência média absorvida pela rede mostrada na Fig. E15.15, considerando que

$$v(t) = 20 + 5 \cos 377t + 3,5 \cos(754t - 20^\circ) \text{ V e}$$

$$i(t) = 1,2 \cos(377t - 30^\circ) + 0,8 \cos(754t + 45^\circ) \text{ A}$$



RESPOSTA: $P \approx 3,19 \text{ W}$.

Figura E15.15

15.2 Transformada de Fourier

As seções precedentes deste capítulo mostraram que as séries de Fourier exponenciais podem ser utilizadas para representar um sinal periódico em função do tempo. Agora, será considerada uma técnica que permite a representação de um sinal aperiódico para qualquer valor de tempo.

Suponha que um sinal aperiódico $f(t)$ possua a forma mostrada na Fig. 15.12a. Pode-se construir um novo sinal, $f_p(t)$, idêntico a $f(t)$ no intervalo $-T/2$ a $T/2$, porém, que seja periódico, com período T , conforme mostrado na Fig. 15.12b. Como $f_p(t)$ é periódico, ele pode ser representado no intervalo de $-\infty$ a ∞ por uma série de Fourier exponencial, isto é,

$$f_p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega_0 t} \quad 15.36$$

em que

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f_p(t) e^{-jn\omega_0 t} dt \quad 15.37$$

e

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T} \quad 15.38$$

Neste ponto, note que, ao se calcular o limite da função $f_p(t)$ quando $T \rightarrow \infty$, o sinal periódico mostrado na Fig. 15.12b aproxima-se do sinal aperiódico da Fig. 15.12a; isto é, os sinais repetidos centrados em $-T$ e $+T$ na Fig. 15.12b são reduzidos a infinitésimos.

O espectro de linhas para o sinal periódico ocorre para as frequências dos harmônicos ($n\omega_0$) e o espaçamento incremental entre os harmônicos é

$$\Delta\omega = (n+1)\omega_0 - n\omega_0 = \omega_0 = \frac{2\pi}{T} \quad 15.39$$

Quando $T \rightarrow \infty$ as linhas no espectro de frequências para $f_p(t)$ ficam cada vez mais próximas, $\Delta\omega$ tende à diferencial $d\omega$ e a frequência $n\omega_0$ pode assumir qualquer valor de ω . Nessas condições, o espectro de linhas tende a um espectro contínuo. Uma vez que quando $T \rightarrow \infty$, $c_n \rightarrow 0$ na Eq. (15.37), examina-se, agora, o produto $c_n T$, em que

$$c_n T = \int_{-T/2}^{T/2} f_p(t) e^{-jn\omega_0 t} dt$$

No limite, quando $T \rightarrow \infty$,

$$\lim_{T \rightarrow \infty} (c_n T) = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T/2}^{T/2} f_p(t) e^{-jn\omega_0 t} dt$$

que, em função da discussão anterior, pode ser escrito como

$$\lim_{T \rightarrow \infty} (c_n T) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt$$

Essa integral é a transformada de Fourier de $f(t)$, que será representada como $F(\omega)$ e, assim,

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt \quad 15.40$$

Analogamente, $f_p(t)$ pode ser expressa como

$$\begin{aligned} f_p(t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega_0 t} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} (c_n T) e^{jn\omega_0 t} \frac{1}{T} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} (c_n T) e^{jn\omega_0 t} \frac{\Delta\omega}{2\pi} \end{aligned}$$

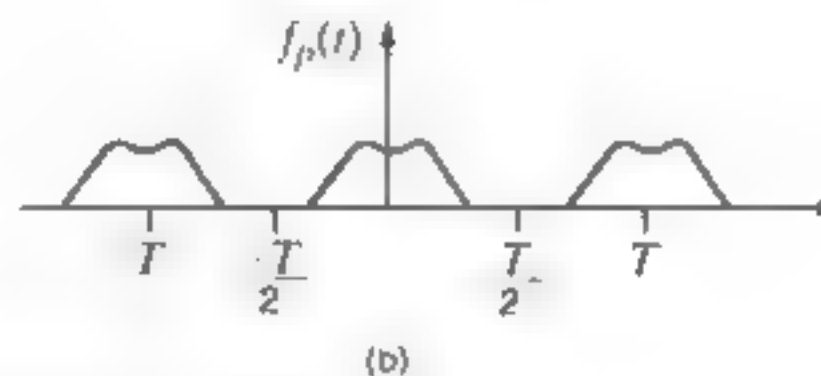
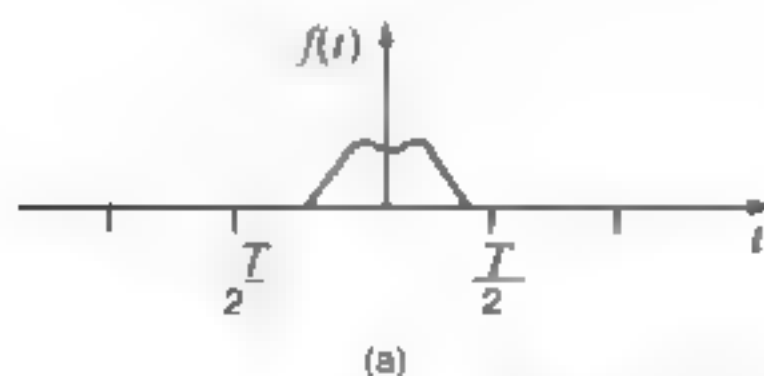


Figura 15.12 Sinais aperiódicos e periódicos.

que, no limite, quando $T \rightarrow \infty$, fica

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad 15.41$$

As Eqs. (15.40) e (15.41) constituem o que é chamado de *par da transformada de Fourier*. Como $F(\omega)$ é a transformada de Fourier de $f(t)$ e $f(t)$ é a transformada inversa de Fourier de $F(\omega)$, elas normalmente são expressas na forma

$$F(\omega) = \mathcal{F}[f(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt \quad 15.42$$

EXEMPLO 15.9

Obtenha a transformada de Fourier para o pulso em tensão mostrado na Fig. 15.13a.

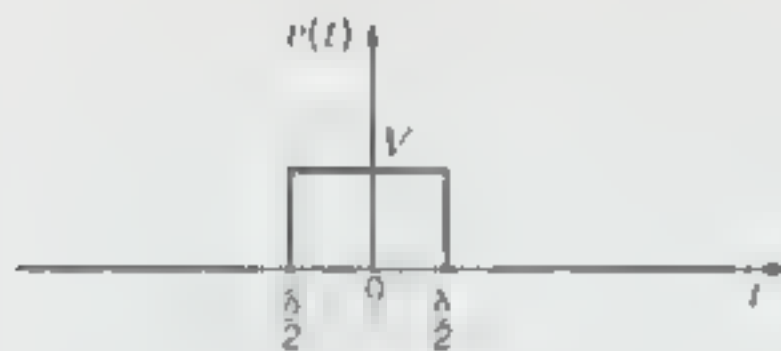
SOLUÇÃO

Utilizando a Eq. (15.42), a transformada de Fourier fica

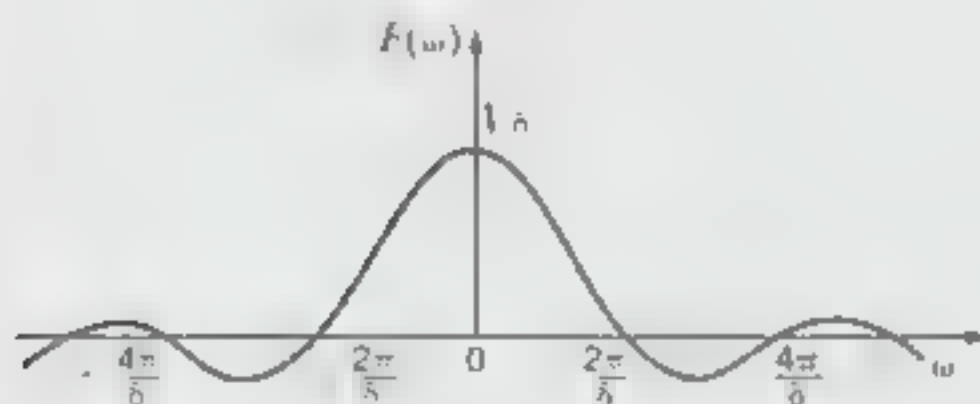
$$\begin{aligned} F(\omega) &= \int_{-\delta/2}^{\delta/2} V e^{-j\omega t} dt \\ &= \left. -\frac{V}{j\omega} e^{-j\omega t} \right|_{-\delta/2}^{\delta/2} \\ &= \frac{V}{j\omega} \left(e^{-j\omega \delta/2} - e^{j\omega \delta/2} \right) \\ &= \frac{V}{j\omega} \left(-2j \sin(\omega \delta/2) \right) \\ &= \frac{2V \sin(\omega \delta/2)}{\omega} \end{aligned}$$

Portanto, a transformada de Fourier da função

$$f(t) = \begin{cases} 0 & -\infty < t \leq -\frac{\delta}{2} \\ V & -\frac{\delta}{2} < t < \frac{\delta}{2} \\ 0 & \frac{\delta}{2} < t < \infty \end{cases}$$



(a)



(c)

é

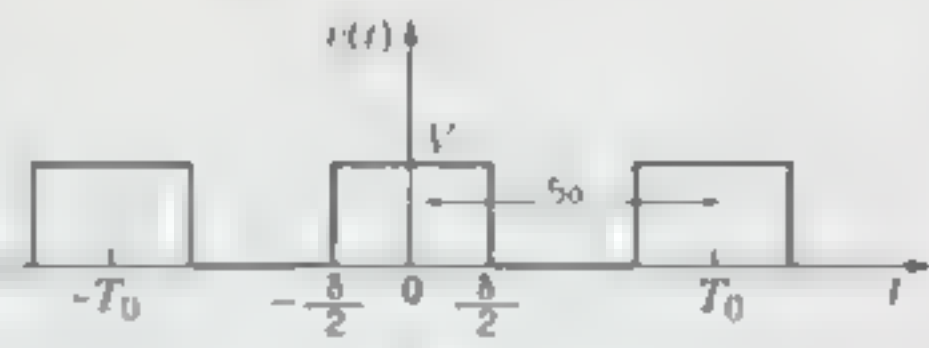
$$F(\omega) = V\delta \frac{\sin(\omega\delta/2)}{\omega\delta/2} \quad 15.43$$

O gráfico dessa função é mostrado na Fig. 15.13c, na qual esse exemplo pode ser explorado ainda mais. Considere o trem de pulsos mostrado na Fig. 15.13b. Utilizando as técnicas demonstradas anteriormente, pode-se mostrar que os coeficientes de Fourier dessa forma de onda são

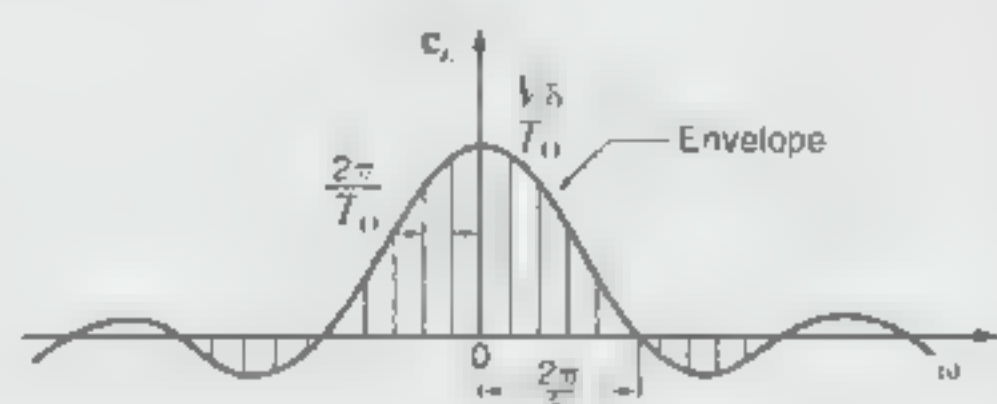
$$c_n = \frac{V\delta \sin(n\omega_0\delta/2)}{n\omega_0\delta/2}$$

O espectro de linha para $T_0 = 5\delta$ é mostrado na Fig. 15.13d.

As equações e figuras apresentadas nesse exemplo indicam que quando $T_0 \rightarrow \infty$ e a função periódica se torna aperiódica, as linhas no espectro discreto tornam-se mais densas e a amplitude fica cada vez menor, fazendo com que o espectro de amplitude mude de um espectro de linha para um espectro contínuo. Note que o envelope para o espectro discreto possui a mesma forma que o espectro contínuo. Como a série de Fourier representa a amplitude e a fase do sinal para frequências específicas, a transformada de Fourier também estabelece as frequências contidas em um sinal.



(b)



(d)

Figura 15.13 Pulsos e seus espectros.

EXEMPLO 15.10

Obtenha a transformada de Fourier da função impulso unitário $\delta(t)$.

SOLUÇÃO

A transformada de Fourier da função impulso unitário $\delta(t - a)$ é

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - a) e^{-j\omega t} dt$$

Utilizando a propriedade de amostragem do impulso unitário, obtém-se

$$F(\omega) = e^{-j\omega a}$$

e, se $a = 0$, então

$$F(\omega) = 1$$

Assim, observe que a função $F(\omega)$ para $f(t) = \delta(t)$ é *constante para todas as frequências*. Essa é uma propriedade importante, conforme será visto posteriormente.

EXEMPLO 15.11

Determine a transformada de Fourier da função $f(t) = e^{-j\omega_0 t}$.

SOLUÇÃO

Nesse caso, note que se $F(\omega) = 2\pi\delta(\omega - \omega_0)$, então

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} 2\pi\delta(\omega - \omega_0) e^{j\omega t} d\omega \\ &= e^{j\omega_0 t} \end{aligned}$$

Portanto, $f(t) = e^{-j\omega_0 t}$ e $F(\omega) = 2\pi\delta(\omega - \omega_0)$ representam um par transformado de Fourier.

Avaliação do Aprendizado

E15.16 Se $f(t) = \sin \omega_0 t$, obtenha $F(\omega)$.

RESPOSTA: $F(\omega) = \pi j [\delta(\omega + \omega_0) - \delta(\omega - \omega_0)]$.

Alguns dos pares transformados de grande utilidade são mostrados na Tabela 15.2.

TABELA 15.2 Pares de transformadas de Fourier

$f(t)$	$F(\omega)$
$\delta(t - a)$	$e^{-j\omega a}$
A	$2\pi A\delta(\omega)$
$e^{j\omega_0 t}$	$2\pi\delta(\omega - \omega_0)$
$\cos \omega_0 t$	$\pi\delta(\omega - \omega_0) + \pi\delta(\omega + \omega_0)$
$\sin \omega_0 t$	$j\pi\delta(\omega - \omega_0) - j\pi\delta(\omega + \omega_0)$
$e^{-\sigma t}u(t), \sigma > 0$	$\frac{1}{\sigma + j\omega}$
$e^{-\sigma t }, \sigma > 0$	$\frac{2\sigma}{\sigma^2 + \omega^2}$
$e^{-\sigma t} \cos \omega_0 t u(t), \sigma > 0$	$\frac{j\omega + \sigma}{(j\omega + \sigma)^2 + \omega_0^2}$
$e^{-\sigma t} \sin \omega_0 t u(t), \sigma > 0$	$\frac{\omega_0}{(j\omega + \sigma)^2 + \omega_0^2}$

ALGUMAS PROPRIEDADES DA TRANSFORMADA DE FOURIER A transformada de Fourier definida pela equação

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt$$

possui diversas propriedades de grande importância. A Tabela 15.3 fornece uma breve lista de algumas dessas propriedades.

As provas dessas propriedades são geralmente imediatas; todavia, como exemplo, será demonstrada a propriedade de convolução no tempo.

Se $\mathcal{F}[f_1(t)] = F_1(\omega)$ e $\mathcal{F}[f_2(t)] = F_2(\omega)$, então

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\left[\int_{-\infty}^{\infty} f_1(x) f_2(t - x) dx\right] &= \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x) f_2(t - x) dx e^{-j\omega t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x) \int_{-\infty}^{\infty} f_2(t - x) e^{-j\omega t} dt dx \end{aligned}$$

TABELA 15.3 Propriedades da transformada de Fourier

$f(t)$	PROPRIEDADE $F(\omega)$	
$Af(t)$	$AF(\omega)$	Línearidade
$f_1(t) \pm f_2(t)$	$F_1(\omega) \pm F_2(\omega)$	
$f(at)$	$\frac{1}{a} F\left(\frac{\omega}{a}\right), a > 0$	Escalonamento no tempo
$f(t - t_0)$	$e^{-j\omega t_0} F(\omega)$	Defasagem no tempo
$e^{j\omega_0 t} f(t)$	$F(\omega - \omega_0)$	Modulação
$\frac{d^n f(t)}{dt^n}$	$(j\omega)^n F(\omega)$	
$t^n f(t)$	$(j)^n \frac{d^n F(\omega)}{d\omega^n}$	Diferenciação
$\int_{-\infty}^{\infty} f_1(x) f_2(t - x) dx$	$F_1(\omega) F_2(\omega)$	
$f_1(t) f_2(t)$	$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F_1(x) F_2(\omega - x) dx$	Convolução

Fazendo, agora, $u = t - x$, tem-se

$$\begin{aligned}
 \mathcal{F} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f_1(x) f_2(t - x) dx \right] &= \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x) \int_{-\infty}^{\infty} f_2(u) e^{-j\omega(t-x)} du dx \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x) e^{-j\omega x} \int_{-\infty}^{\infty} f_2(u) e^{-j\omega u} du dx \\
 &= F_1(\omega) F_2(\omega)
 \end{aligned}
 \quad 15.44$$

Deve-se analisar cuidadosamente a propriedade de convolução no tempo da transformada de Fourier. Em relação à Fig.

15.14, essa propriedade estabelece que se $V_e(\omega) = \mathcal{F}[v_e(t)]$, $H(\omega) = \mathcal{F}[h(t)]$ e $V_s(\omega) = \mathcal{F}[v_s(t)]$, então,

$$V_s(\omega) = H(\omega) V_e(\omega) \quad 15.45$$

em que $V_e(\omega)$ representa o sinal de entrada, $H(\omega)$ é a função de transferência da rede e $V_s(\omega)$ representa o sinal de saída. A Eq. (15.45) admite, implicitamente, que as condições iniciais da rede são nulas.

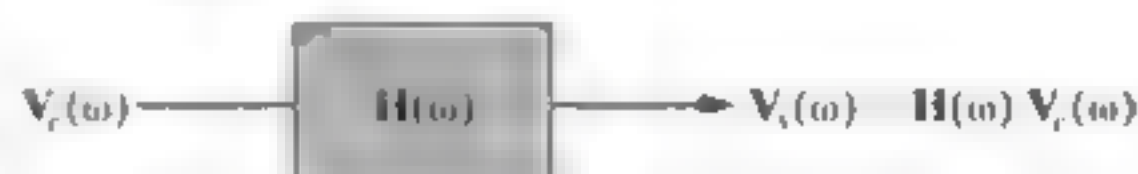


Figura 15.14 Representação da propriedade de convolução no tempo.

Avaliação do Aprendizado

E15.17 Determine a tensão de saída $v_s(t)$ do circuito mostrado na Fig. E15.17 considerando que o sinal de entrada $v_e(t) = e^{-t}u(t)$ V, que a resposta da rede ao impulso $h(t) = e^{-2t}u(t)$ e que todas as condições iniciais sejam nulas.

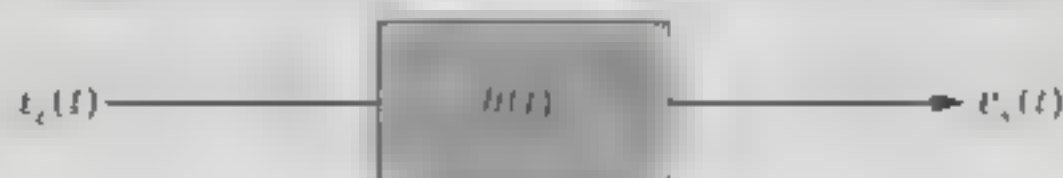


Figura E15.17

RESPOSTA:

$$v_s(t) = (e^{-t} - e^{-2t})u(t) \text{ V}$$

E15.18 Utilize a técnica da transformada para obter a tensão $v_s(t)$ do circuito mostrado na Fig. E15.18 considerando que $v(t) = 15 \cos 10t$ V.

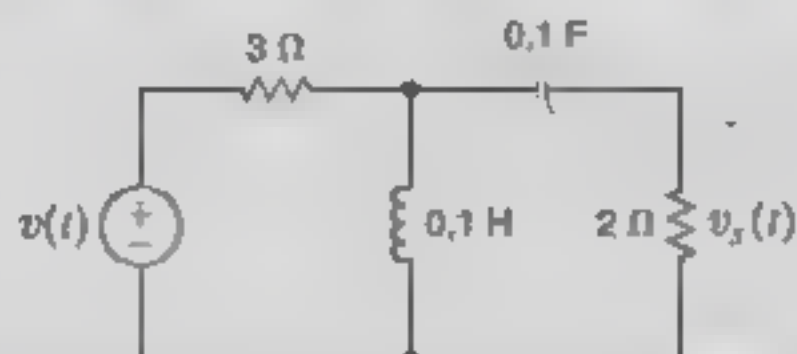


Figura E15.18

RESPOSTA:

$$v_s(t) = 4,12 \cos(10t + 74^\circ) \text{ V}$$

TEOREMA DE PARSEVAL O enunciado matemático do teorema de Parseval é

$$\int_{-\infty}^{\infty} f^2(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2 d\omega \quad 15.46$$

Essa relação pode ser facilmente deduzida como se segue:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} f^2(t) dt &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt d\omega \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} F(\omega) F(-\omega) d\omega \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} F(\omega) F^*(\omega) d\omega \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} |F(\omega)|^2 d\omega \end{aligned}$$

A importância do teorema de Parseval pode ser percebida ao imaginar-se que a função $f(t)$ representa a corrente que passa através de um resistor de 1Ω . Como $f^2(t)$ representa a potência e a integral da potência no tempo é a energia, a Eq. (15.46) mostra que é possível calcular a energia por unidade de resistência, 1Ω , ou energia normalizada, tanto no domínio do tempo quanto no domínio da frequência.

EXEMPLO 15.12

Utilizando a técnica da transformada, deseja-se determinar a tensão $v_r(t)$ do circuito mostrado na Fig. 15.15 considerando (a) $v_e(t) = 5e^{-2t}u(t)$ V e (b) $v_e(t) = 5 \cos 2t$ V.

SOLUÇÃO

a. Nesse caso, como $v_e(t) = 5e^{-2t}u(t)$ V, então

$$V_e(\omega) = \frac{5}{2 + j\omega} \text{ V}$$

A função $H(\omega)$ da rede será

$$\begin{aligned} H(\omega) &= \frac{R}{R + j\omega L} \\ &= \frac{10}{10 + j\omega} \end{aligned}$$

Pela Eq. (15.45), tem-se

$$\begin{aligned} V_r(\omega) &= H(\omega) V_e(\omega) \\ &= \frac{50}{(2 + j\omega)(10 + j\omega)} \\ &= \frac{50}{8} \left(\frac{1}{2 + j\omega} - \frac{1}{10 + j\omega} \right) \end{aligned}$$

Logo, pela Tabela 15.2, verifica-se que

$$v_r(t) = 6,25[e^{-2t}u(t) - e^{-10t}u(t)] \text{ V}$$

b. Neste caso, como $v_e(t) = 5 \cos 2t$, tem-se

$$V_e(\omega) = 5\pi\delta(\omega - 2) + 5\pi\delta(\omega + 2) \text{ V}$$

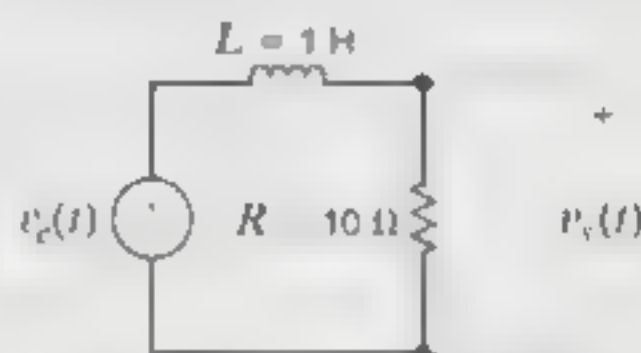


Figura 15.15 Circuito RL simples.

A tensão de saída no domínio da frequência será, portanto,

$$V_r(\omega) = \frac{50\pi[\delta(\omega - 2) + \delta(\omega + 2)]}{(10 + j\omega)}$$

Utilizando a transformada inversa de Fourier, obtém-se

$$\begin{aligned} v_r(t) &= \mathcal{F}^{-1}\{V_r(\omega)\} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} 50\pi \frac{\delta(\omega - 2) + \delta(\omega + 2)}{10 + j\omega} e^{j\omega t} d\omega \end{aligned}$$

Empregando a propriedade de amostragem da função impulso unitário, tem-se

$$\begin{aligned} v_r(t) &= 25 \left(\frac{e^{j2t}}{10 + j2} + \frac{e^{-j2t}}{10 - j2} \right) \\ &= 25 \left(\frac{e^{j2t}}{10,2e^{j11,31^\circ}} + \frac{e^{-j2t}}{10,2e^{-j11,31^\circ}} \right) \\ &= 4,90 \cos(2t - 11,31^\circ) \text{ V} \end{aligned}$$

Esse resultado pode ser facilmente verificado utilizando uma análise fasorial.

15.3 Exemplos de Aplicação

EXEMPLO DE APLICAÇÃO 15.13

Considere a rede mostrada na Fig. 15.16a. Essa rede representa um filtro passa-baixa simples, conforme mostrado no Capítulo 12. Ilustre o impacto dessa rede no sinal de entrada examinando

do a resposta em frequência do sinal de saída e a relação entre a energia normalizada (para o resistor de 1Ω) na entrada e na saída da rede.

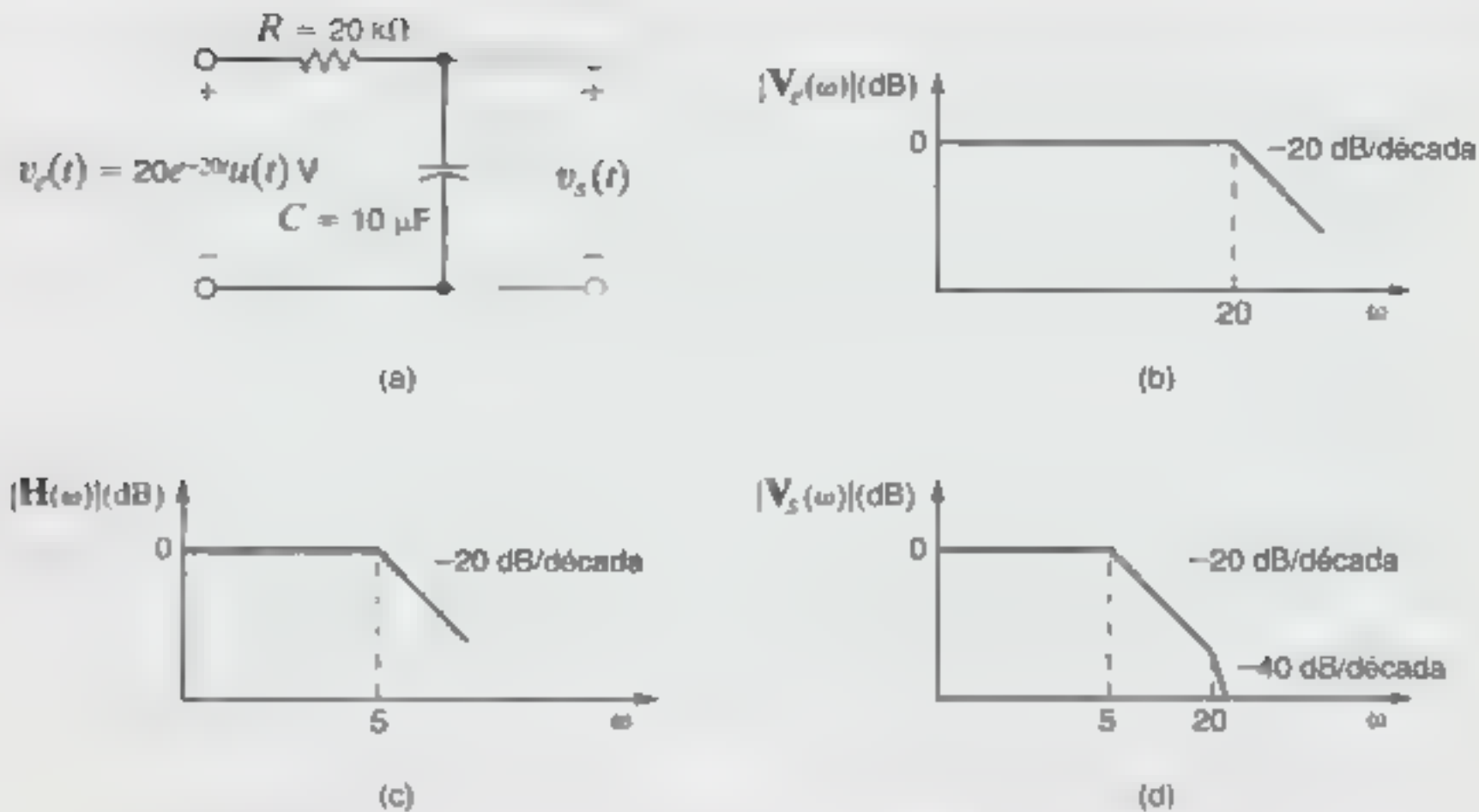


Figura 15.16 Filtro passa-baixa, sua resposta em frequência e o espectro de sua saída.

SOLUÇÃO

A função de transferência da rede é

$$H(\omega) = \frac{1/RC}{1 + j\omega RC} = \frac{5}{5 + j\omega} = \frac{1}{1 + 0,2j\omega}$$

A transformada de Fourier do sinal de entrada é

$$V_e(\omega) = \frac{20}{20 + j\omega} = \frac{1}{1 + 0,05j\omega}$$

Portanto, utilizando a Eq. (15.45), a transformada de Fourier da saída será

$$V_s(\omega) = \frac{1}{(1 + 0,2j\omega)(1 + 0,05j\omega)}$$

Utilizando as técnicas apresentadas no Capítulo 12, observa-se que as respostas no domínio da frequência para essas funções são representadas pelas linhas retas dos gráficos logarítmicos de magnitude mostrados nas Figs. 15.16b–d. Note que o filtro passa-baixa permite a passagem das componentes de baixa frequência do sinal de entrada e atenua os sinais correspondentes às altas frequências.

A energia normalizada na entrada do filtro é

$$\begin{aligned} W_e &= \int_0^{\infty} (20e^{-20t})^2 dt \\ &= \frac{400}{-40} e^{-40t} \Big|_0^{\infty} \\ &= 10 \text{ J} \end{aligned}$$

A energia normalizada na saída do filtro pode ser calculada utilizando o teorema de Parseval. Como

$$V_s(\omega) = \frac{100}{(5 + j\omega)(20 + j\omega)}$$

e

$$|V_s(\omega)|^2 = \frac{10^4}{(\omega^2 + 25)(\omega^2 + 400)}$$

$|V_s(\omega)|^2$ é uma função par e, portanto,

$$W_s = 2 \left(\frac{1}{2\pi} \right) \int_0^{\infty} \frac{10^4 d\omega}{(\omega^2 + 25)(\omega^2 + 400)}$$

Entretanto, pode-se utilizar o fato de que

$$\frac{10^4}{(\omega^2 + 25)(\omega^2 + 400)} = \frac{10^4/375}{\omega^2 + 25} - \frac{10^4/375}{\omega^2 + 400}$$

Logo,

$$\begin{aligned} W_s &= \frac{1}{\pi} \left(\int_0^{\infty} \frac{10^4/375}{\omega^2 + 25} d\omega - \int_0^{\infty} \frac{10^4/375}{\omega^2 + 400} d\omega \right) \\ &= \frac{10^4}{375} \left(\frac{1}{\pi} \right) \left[\frac{1}{5} \left(\frac{\pi}{2} \right) - \frac{1}{20} \left(\frac{\pi}{2} \right) \right] \\ &= 2,0 \text{ J} \end{aligned}$$

Avaliação do Aprendizado

E15.19 Calcule a energia total normalizada (relativa a 1 Ω) contida no sinal $v_e(t) = e^{-2t}u(t)$ V utilizando os procedimentos no domínio do tempo e no domínio da frequência. **RESPOSTA:** $W = 0,25$ J

E15.20 Calcule a energia normalizada (relativa a 1Ω) contida no sinal $v_e(t) = e^{-2t}u(t)$ V na faixa de frequências entre 0 e 1 rad/s. **RESPOSTA:** $W = 0,07$ J.

E15.21 Determine a energia normalizada total (relativa a 1Ω) contida no sinal de saída $v_s(t)$ do circuito mostrado na Fig. E15.21 considerando $v_e(t) = 5e^{-2t}u(t)$ V.

RESPOSTA: $W = 5,21$ J.

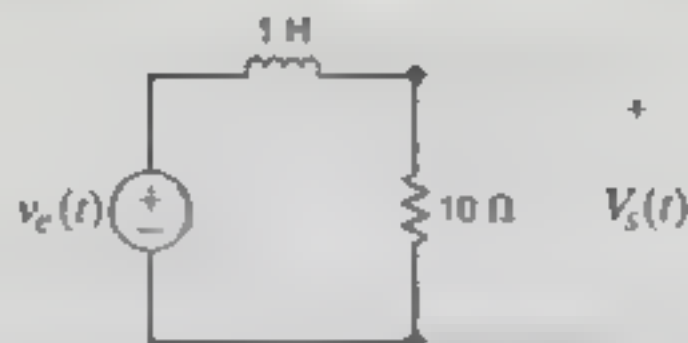


Figura E15.21

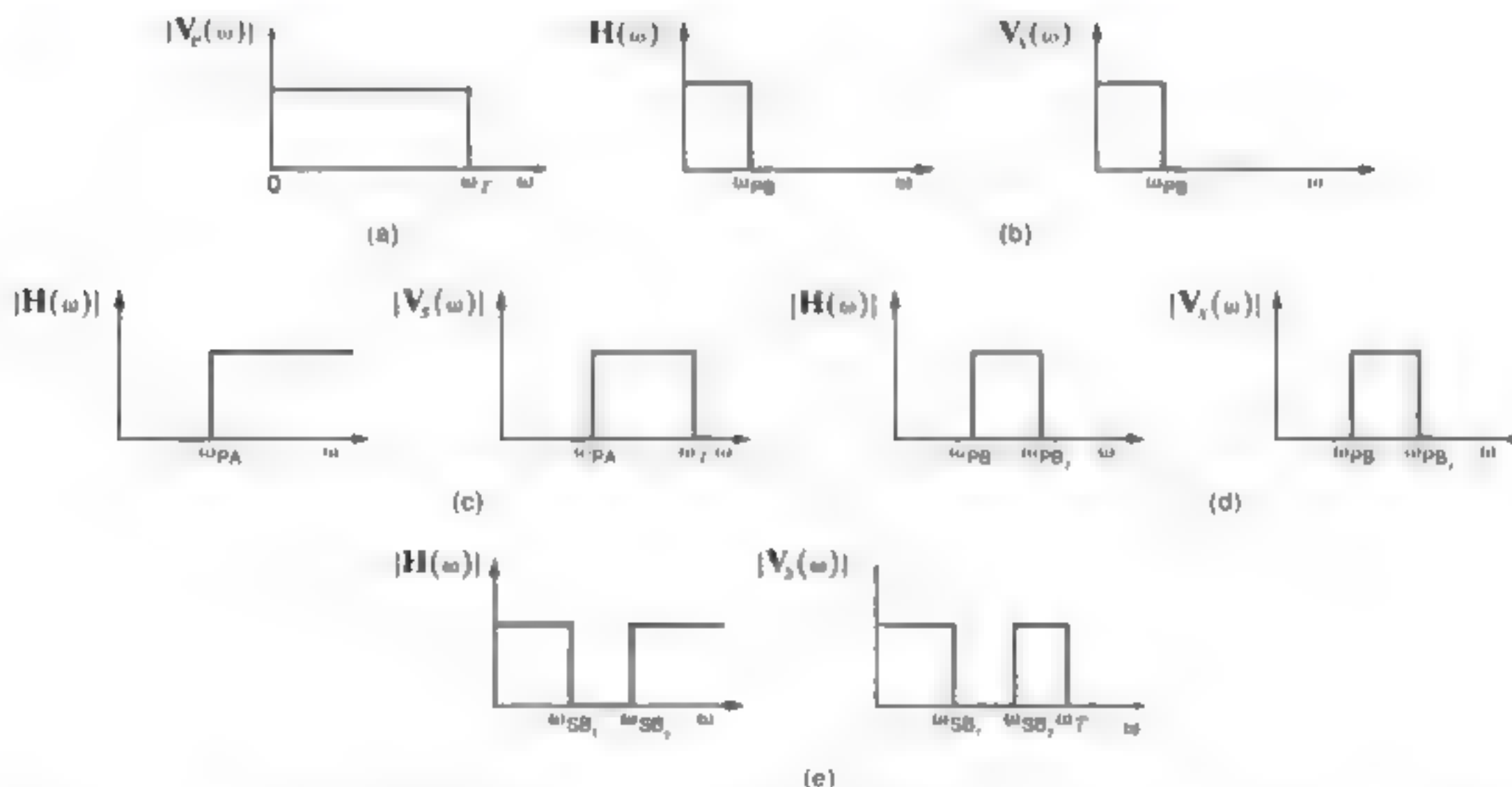


Figura 15.17 Espectro de magnitude de entrada e saída para os filtros ideais passa-baixa, passa-alta, passa-banda e supressor de banda.

O Exemplo 15.13 ilustra o efeito de $H(\omega)$ no espectro de frequências do sinal de entrada. Em geral, $H(\omega)$ pode ser selecionada de modo a definir uma forma preestabelecida para esse espectro. Como ilustração desse efeito, considere os espectros de frequências *ideais* mostrados na Fig. 15.17. A Figura 15.17a mostra um espectro de magnitude de entrada ideal $|V_e(\omega)|$. Os espectros de $|H(\omega)|$ e da magnitude de saída $|V_s(\omega)|$, que estão relacionados pela Eq. (15.45), são mostrados nas Figs. 15.17b–e para os filtros *ideais* passa-bai-

xa, passa-alta, passa-banda e supressor de banda, respectivamente.

Observa-se que utilizando o teorema de Parseval é possível calcular a energia total contida em um sinal através dos procedimentos inerentes tanto ao domínio do tempo quanto ao domínio da frequência. Todavia, o procedimento correspondente ao domínio da frequência é mais flexível no que diz respeito à determinação da quantidade de energia de um sinal para uma banda específica de frequências.

EXEMPLO DE APLICAÇÃO 15.14

Na transmissão de rádio AM (*amplitude modulation*) existem duas importantes formas de onda – o sinal $s(t)$ e a onda portadora. Todas as informações que se deseja transmitir (voz, música e outros) estão contidas na forma de onda do sinal, o

qual, basicamente, é transportado pela portadora. Portanto, a transformada de Fourier de $s(t)$ contém frequências de cerca de 50 Hz até 20.000 Hz. A portadora, $c(t)$, é uma senoide oscilante a uma frequência muito maior que $s(t)$. Por exemplo, as normas e regulamentos da FCC (*Federal Communi-*

communications Commission) nos Estados Unidos estabelecem a faixa de frequências entre 540 kHz e 1,7 MHz para as portadoras de estações de rádio AM. Mesmo a portadora de mais baixa frequência (540 kHz) é bem superior às frequências de áudio presentes em $s(t)$. Na realidade, quando uma estação divulga seu nome e sua frequência, ela está informando a você a frequência de sua portadora, a qual foi designada pela FCC para aquela estação!

Nos casos simples, o sinal, $s(t)$, é modificado para produzir uma tensão da forma,

$$v(t) = [A + s(t)] \cos(\omega_c t)$$

em que A é uma constante e ω_c é a frequência da portadora em rad/s. Essa tensão, $v(t)$, com o sinal nela "codificado", é enviada para a antena e transmitida aos ouvintes cujos rádios estão captando uma onda similar de menor intensidade da forma de onda $v(t)$.

Faça a representação gráfica da magnitude da transformada de Fourier de ambos os sinais, $s(t)$ e $v(t)$, dado que $s(t)$ é expresso por

$$s(t) = \cos(2\pi f_s t)$$

em que f_s vale 1000 Hz, a frequência portadora é de 900 kHz e a constante A é unitária.

SOLUÇÃO

A transformada de Fourier de $s(t)$ é

$$S(\omega) = \mathcal{F}[\cos(\omega_s t)] = \pi\delta(\omega - \omega_s) + \pi\delta(\omega + \omega_s)$$

e é mostrada na Fig. 15.18.

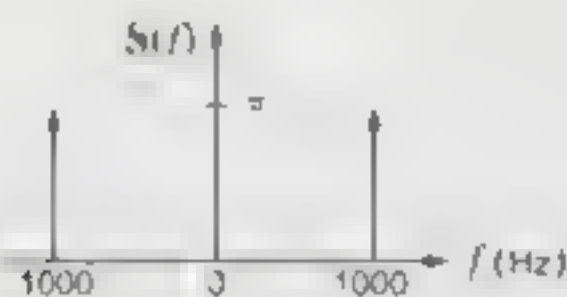


Figura 15.18 Transformada de Fourier da magnitude de $s(t)$ em função da frequência.

A tensão $v(t)$ pode ser expressa na forma

$$v(t) = [1 + s(t)] \cos(\omega_c t) = \cos(\omega_c t) + s(t) \cos(\omega_c t)$$

A transformada de Fourier da portadora é

$$\mathcal{F}[\cos(\omega_c t)] = \pi\delta(\omega - \omega_c) + \pi\delta(\omega + \omega_c)$$

O termo $s(t) \cos(\omega_c t)$ pode ser escrito como

$$s(t) \cos(\omega_c t) = s(t) \left\{ \frac{e^{j\omega_c t} + e^{-j\omega_c t}}{2} \right\}$$

Utilizando a propriedade de modulação, conforme apresentada na Tabela 15.3, pode-se expressar a transformada de Fourier de $s(t) \cos(\omega_c t)$ como

$$\mathcal{F}[s(t) \cos(\omega_c t)] = \frac{1}{2} \{S(\omega - \omega_c) + S(\omega + \omega_c)\}$$

Empregando $S(\omega)$, obtém-se

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[s(t) \cos(\omega_c t)] &= \mathcal{F}[\cos(\omega_s t) \cos(\omega_c t)] \\ &= \frac{\pi}{2} \{ \delta(\omega - \omega_s - \omega_c) + \delta(\omega + \omega_s - \omega_c) \\ &\quad + \delta(\omega - \omega_s + \omega_c) + \delta(\omega + \omega_s + \omega_c) \} \end{aligned}$$

Finalmente, a transformada de Fourier de $v(t)$ fica

$$\begin{aligned} V(\omega) &= \frac{\pi}{2} \{ 2\delta(\omega - \omega_c) + 2\delta(\omega + \omega_c) - \delta(\omega - \omega_s - \omega_c) \\ &\quad + \delta(\omega + \omega_s - \omega_c) + \delta(\omega - \omega_s + \omega_c) \\ &\quad + \delta(\omega + \omega_s + \omega_c) \} \end{aligned}$$

A Fig. 15.19 mostra, graficamente, o resultado dessa transformada. Note que $S(\omega)$ é centrada próxima da frequência portadora. Esse é o efeito da modulação.

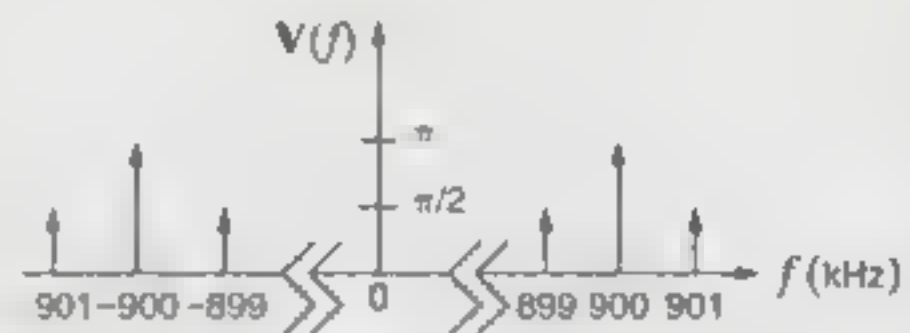


Figura 15.19 Transformada de Fourier da forma de onda transmitida $v(t)$ em função da frequência.

EXEMPLO DE APLICAÇÃO 15.15

Os harmônicos podem ser muito alterados em um sistema de distribuição de potência. Como exemplo, considere o cenário mostrado na Fig. 15.20, em que uma carga trifásica não linear gera correntes harmônicas nas linhas. A Tabela 15.4 mostra a magnitude da corrente para cada um dos harmônicos. Se a resistência de cada linha é de $0,2 \Omega$, qual é o valor da potência total perdida no sistema? Além disso, que parcela da potência perdida é causada pelos harmônicos contidos no sinal?

SOLUÇÃO

A potência perdida em uma linha para qualquer frequência pode ser determinada por

$$P_{\text{linha}} = \frac{I_{\text{linha}}^2}{2} R_{\text{linha}}$$

Utilizando essa equação, pode-se calcular a potência perdida em uma linha para a frequência fundamental e para todas as demais frequências dos harmônicos. Os resultados desse cál-

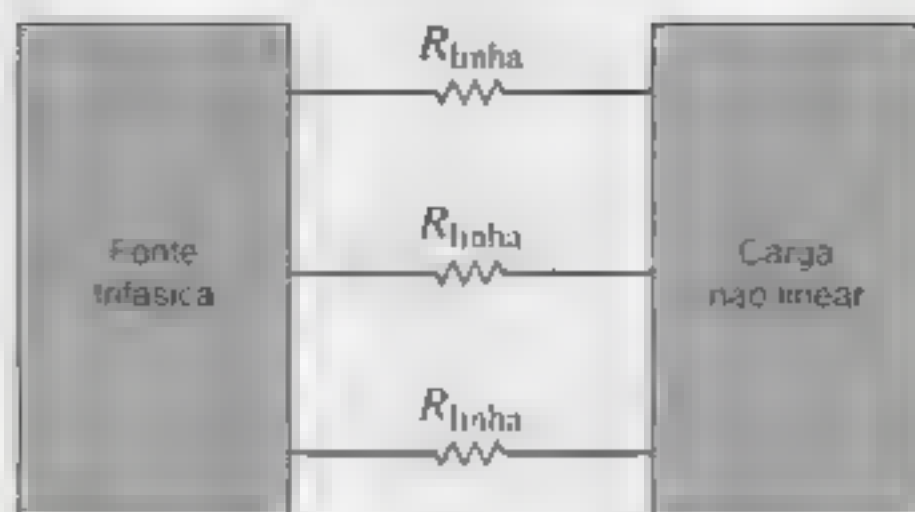


Figura 15.20 Modelo simples de um sistema de distribuição trifásico conectado a uma carga não linear.

culo são mostrados na Tabela 15.5. A potência perdida em cada linha é simplesmente a soma das potências mostradas na Tabela 15.5. Como este é um sistema trifásico, a potência total perdida nas linhas será, simplesmente,

$$P_{\text{total}} = 3[1000 + 0.5 + 90 + 0.1 + 10] = 3301.8 \text{ W}$$

Observe que a participação dos harmônicos é de 301,8 W, ou seja, 9,14% da potência total perdida.

TABELA 15.4 Harmônicos presentes na corrente da linha de uma carga não linear

Harmônico	Magnitude da corrente (A)
Fundamental	100
1st	5
2nd	30
3rd	1
4th	10

TABELA 15.5 Potência perdida na linha para a frequência fundamental e para cada harmônico

Harmônico	Potência
Fundamental	1000
1st	0,5
2nd	90
3rd	0,1
4th	10

EXEMPLO DE APLICAÇÃO 15.16

As fontes elétricas, como baterias, painéis solares e células combustíveis produzem uma tensão de saída CC. Uma carga elétrica que requer uma tensão CA pode ser alimentada a partir de uma fonte CC por meio de um dispositivo denominado inversor, que converte uma tensão CC em uma tensão CA. Os inversores podem produzir tensões CA monofásicas ou trifásicas. Geralmente, os inversores monofásicos são classificados como inversores de onda senoidal puros ou verdadeiros, ou inversores de onda senoidal modificado. A saída de um inversor de onda senoidal puro é mostrada na Fig. 15.21. Essa forma de onda foi discutida no Capítulo 8 e poderia ser descrita por $v(t) = 170 \sin 377t$ volts. A Fig. 15.22 mostra a tensão de saída de um inversor de onda senoidal modificado. Note que essa forma de onda é mais próxima de uma onda quadrada que de uma onda senoidal.

Determine as componentes de Fourier da tensão de saída do inversor de onda senoidal modificado utilizando a forma de onda mostrada na Fig. 15.23. Observe que essa forma de onda consiste em um pulso positivo de largura t_b centrado próximo a $T/4$ e um pulso negativo de mesma largura centrado próximo a $3T/4$. Uma análise mais minuciosa dessa forma de onda revela sua natureza ímpar com simetria de meia-onda. Portanto,

$$a_0 = 0$$

$$a_n = 0 \text{ para todo } n$$

$$b_n = 0 \text{ para } n \text{ par}$$

Os coeficientes b_n para n ímpar podem ser obtidos utilizando

$$b_n = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(t) \sin n\omega_0 t \, dt$$

A forma de onda possui um valor V_c entre $t = T/4 - \delta/2$ e $t = T/4 + \delta/2$, e zero para qualquer outro tempo entre 0 e $T/2$. Portanto,

$$b_n = \frac{4}{T} \int_{T/4 - \delta/2}^{T/4 + \delta/2} V_c \sin n\omega_0 t \, dt$$

$$b_n = \frac{4V_c}{T} \int_{T/4 - \delta/2}^{T/4 + \delta/2} \sin n\omega_0 t \, dt$$

A integração dessas expressões fornece

$$b_n = \frac{4V_c}{n\omega_0 T} \left[-\cos n\omega_0 t \right]_{T/4 - \delta/2}^{T/4 + \delta/2}$$

Lembrando que $\omega_0 T = 2\pi$ e calculando a função nos limites, tem-se

$$b_n = \frac{2V_c}{\pi} \left[-\cos \left(\frac{n\omega_0 T}{4} + \frac{n\omega_0 \delta}{2} \right) + \cos \left(\frac{n\omega_0 T}{4} - \frac{n\omega_0 \delta}{2} \right) \right]$$

A expressão entre colchetes pode ser escrita como $-\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)$. Utilizando as identidades trigonométricas apropriadas, tem-se

$$-\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta) = -\cos \alpha \cos \beta$$

$$+ \sin \alpha \sin \beta + \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta) = 2 \sin \alpha \sin \beta$$

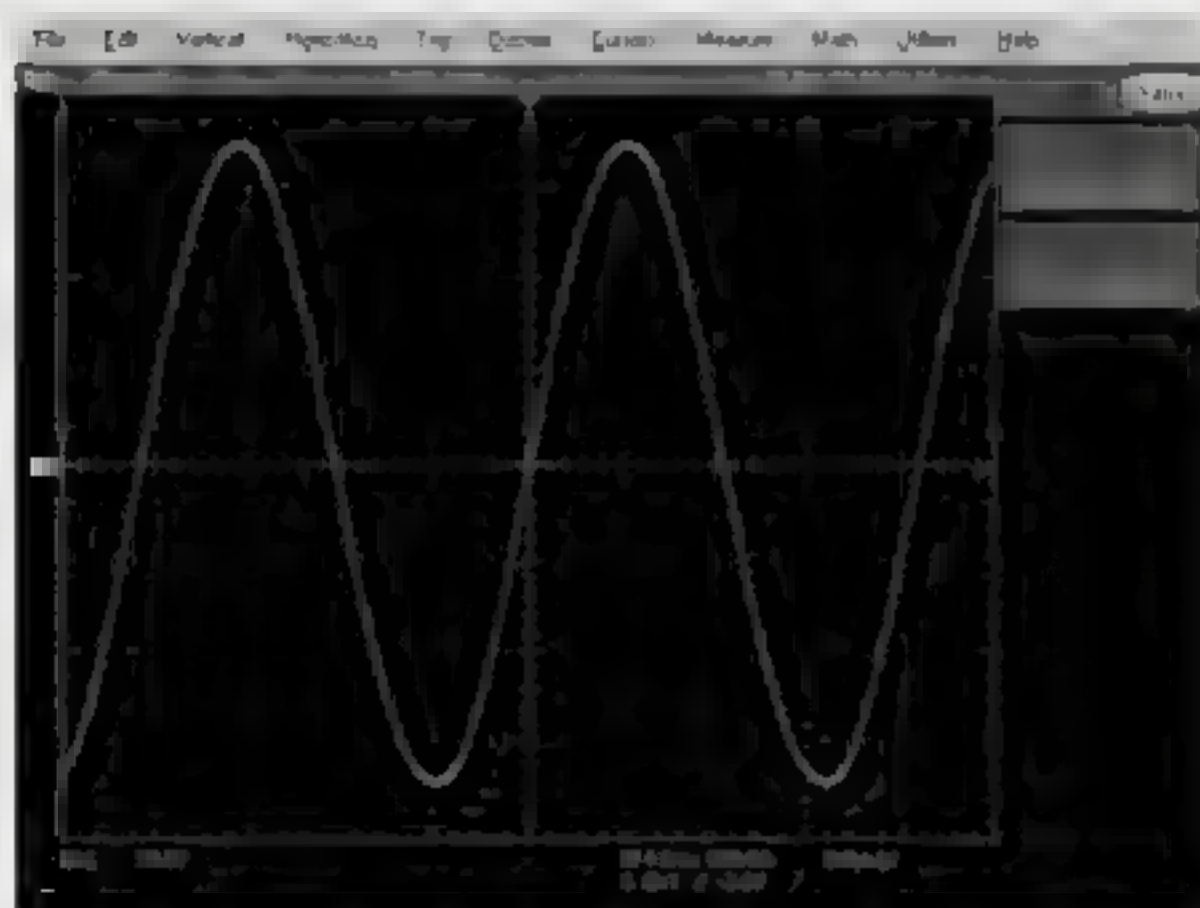


Figura 15.21 Tensão de saída de um inversor de onda senoidal puro.

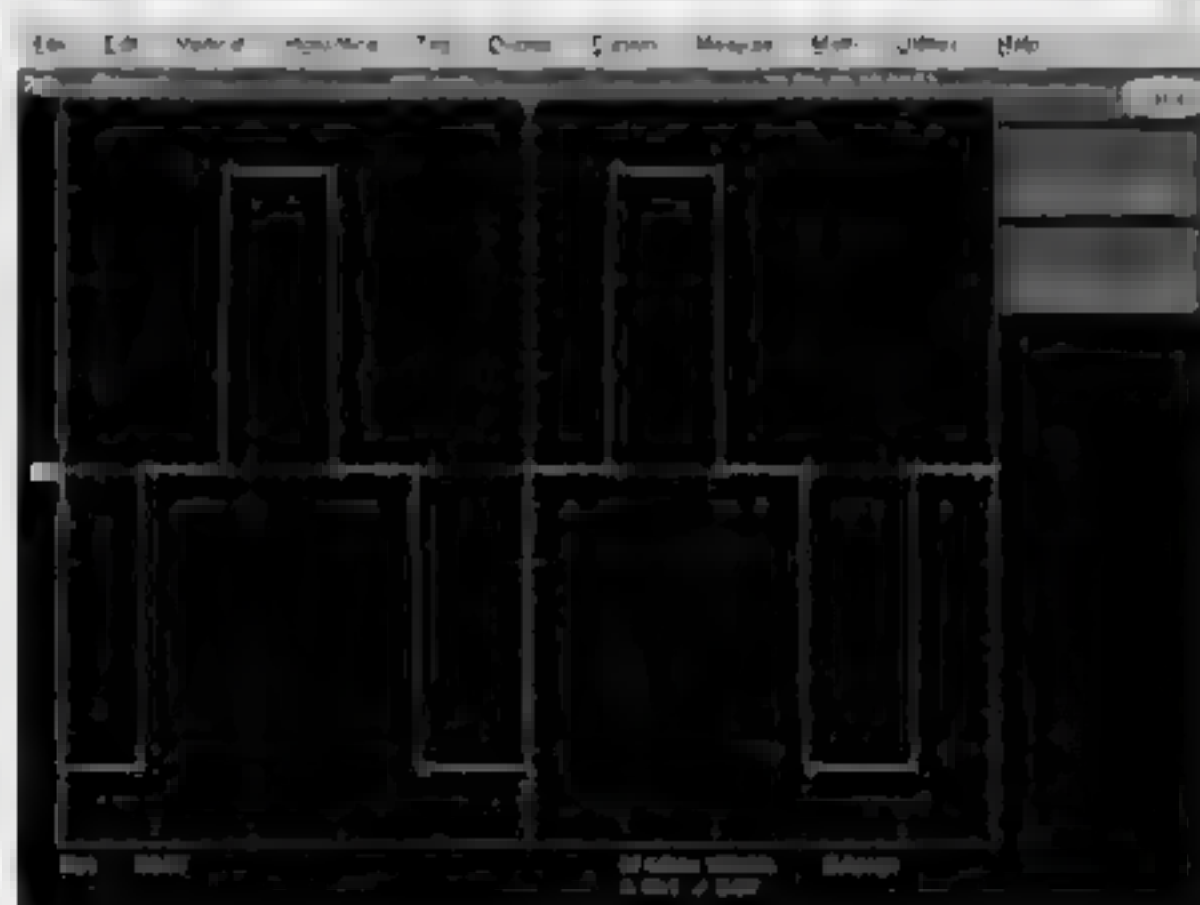


Figura 15.22 Tensão de saída de um inversor de onda senoidal modificado.

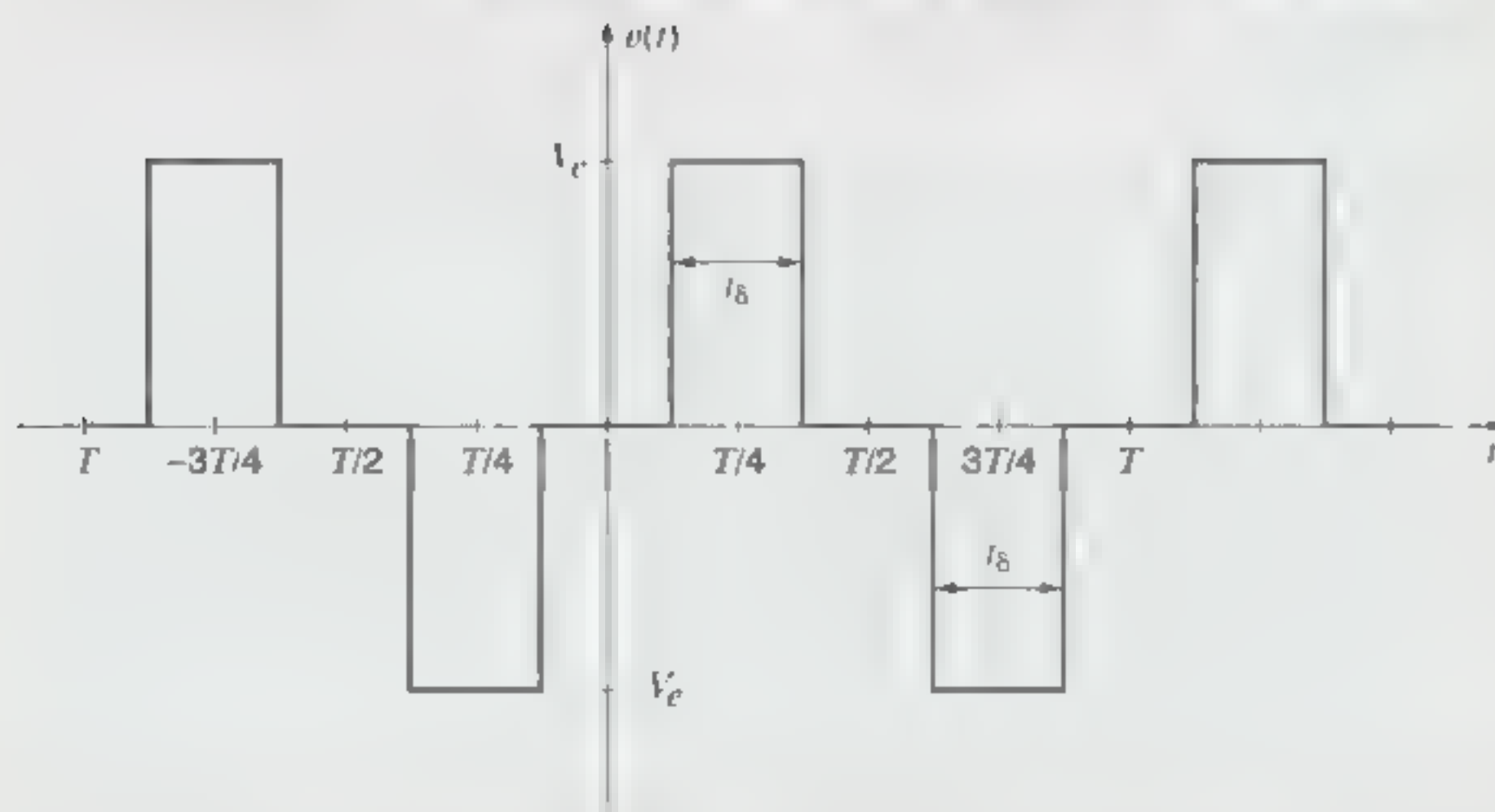


Figura 15.23 Forma de onda para a determinação das componentes de Fourier da tensão de saída do inversor de onda senoidal modificado.

A expressão de b_n , válida para n ímpar, fica

$$b_n = \frac{4V}{n\pi} \left[\sin\left(\frac{n\omega_1 T}{4}\right) \sin\left(\frac{n\omega_1 t_2}{2}\right) \right]$$

Definindo $\omega_1 t_2 = \delta$ e, novamente, utilizando $\omega_1 T = 2\pi$, obtém-se

$$b_n = \frac{4V_c}{n\pi} \left[\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \sin\left(\frac{n\delta}{2}\right) \right]$$

Utilizando essa expressão, tem-se

$$b_1 = \frac{4V_c}{\pi} \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \sin\left(\frac{\delta}{2}\right) = \frac{4V_c}{\pi} \sin\left(\frac{\delta}{2}\right)$$

$$b_3 = \frac{4V}{3\pi} \sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) \sin\left(\frac{3\delta}{2}\right) = -\frac{4V}{3\pi} \sin\left(\frac{3\delta}{2}\right)$$

$$b_5 = \frac{4V}{5\pi} \sin\left(\frac{5\pi}{2}\right) \sin\left(\frac{5\delta}{2}\right) = \frac{4V}{5\pi} \sin\left(\frac{5\delta}{2}\right)$$

Os valores absolutos de b_1 , b_3 e b_5 são agora representados graficamente fazendo δ variar entre 0° e 180° para $V_c = 1$ volt, conforme mostrado na Fig. 15.24. Note que b_1 – o coeficiente do primeiro harmônico, ou harmônico fundamental – é nulo para $\delta = 0^\circ$ e atinge um valor máximo de $4/\pi = 1,273$ volt para $\delta = 180^\circ$. A análise desse gráfico revela que o valor absoluto do terceiro harmônico é igual a zero para $\delta = 120^\circ$. A expressão de b_3 contém o termo $\sin(3\delta/2)$, que possui o valor zero para $\delta = 120^\circ$. Escolhendo-se $\delta = 72^\circ$, a amplitude do quinto harmônico será igual a zero. Esse exemplo ilustra a possibilidade de se eliminar um harmônico da série de Fourier da tensão de saída pela seleção apropriada do ângulo δ .

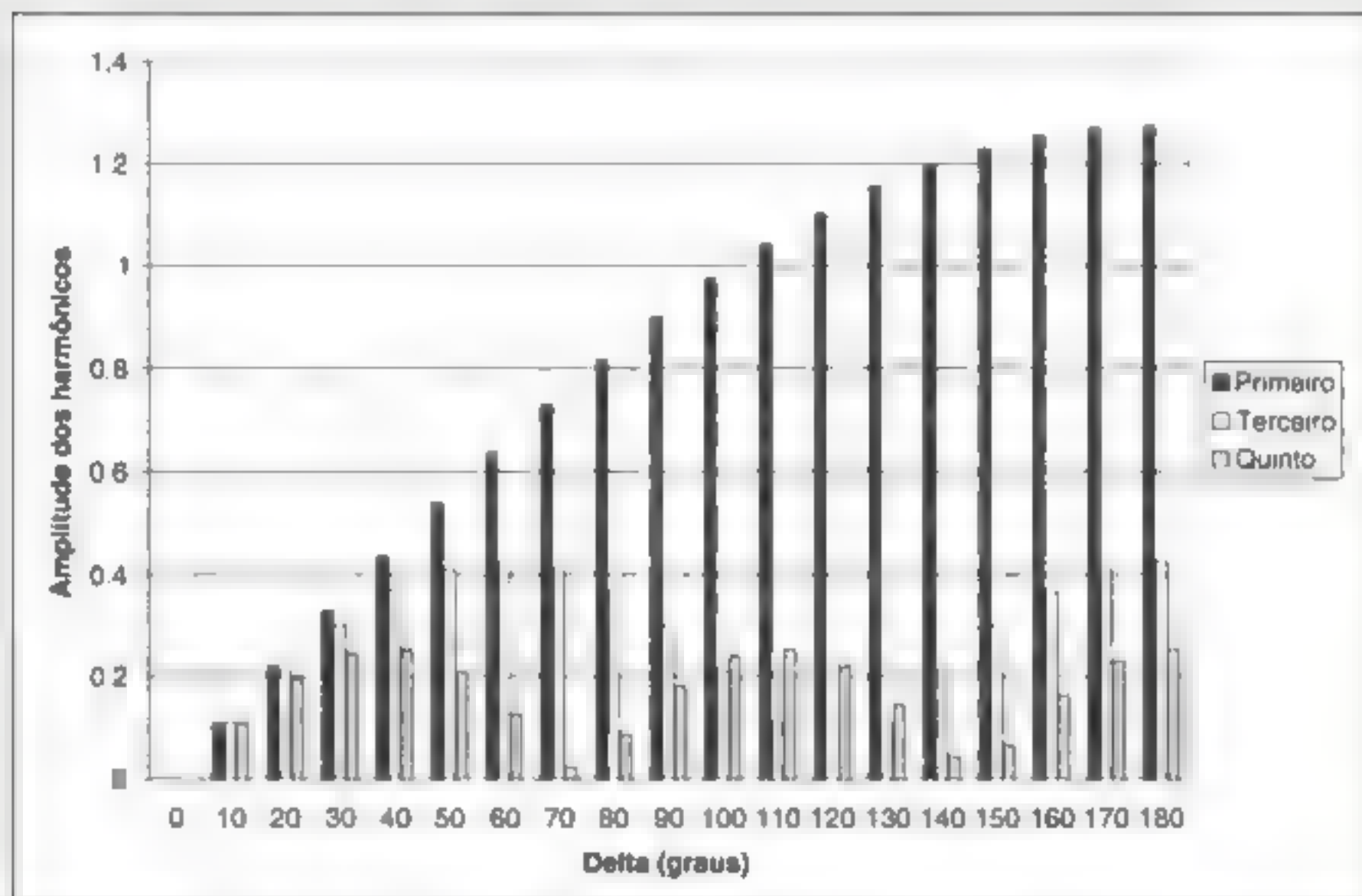


Figura 15.24 Gráfico das amplitudes dos harmônicos em função do ângulo δ .

15.4 Exemplos de Projeto

EXEMPLO DE PROJETO 15.17

Duas estações de rádio AM fazem suas transmissões com frequências portadoras de

$$f_1 = 900 \text{ kHz}$$

$$f_2 = 960 \text{ kHz}$$

Para simplificar a análise, admite-se que os sinais de transmissão, $s_1(t)$ e $s_2(t)$, sejam idênticos. Dentro dessas premissas, as

transformadas de Fourier $S_1(\omega)$ e $S_2(\omega)$ serão também idênticas, e um esquema de como devem ser seus comportamentos é mostrado na Fig. 15.25.

As formas de onda dos sinais a serem transmitidos são

$$v_1(t) = [1 + s_1(t)] \cos(\omega_1 t)$$

e

$$v_2(t) = [1 + s_2(t)] \cos(\omega_2 t)$$

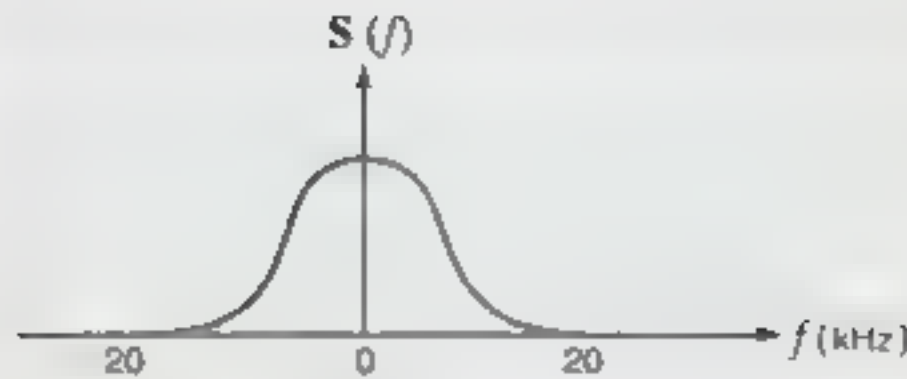


Figura 15.25 Esquema da transformada de Fourier de uma estação AM arbitrária.

Uma antena nas vizinhanças “captará” ambos os sinais transmitidos. Admitindo que $v_1(t)$ e $v_2(t)$ possuam a mesma intensidade na antena, a tensão recebida será

$$v_r(t) = K[v_1(t) + v_2(t)]$$

em que K é uma constante muito menor que 1. (As tensões típicas associadas a uma antena estão na faixa de μV a mV .) Um esquema da transformada de Fourier de $v_r(t)$ é mostrado na Fig. 15.26.

Antes de passar $v_r(t)$ em um circuito amplificador e decodificador, deve-se empregar um sintonizador para que uma estação específica seja selecionada. Pode-se, assim, projetar um filtro RLC passa-banda contendo um capacitor variável que servirá como sintonizador. Um circuito com essa característica é mostrado na Fig. 15.27.

SOLUÇÃO

A função de transferência pode ser obtida facilmente e expressa como

$$G_v(s) = \frac{V_r(s)}{V(s)} = \frac{s \left(\frac{R}{L} \right)}{s^2 + s \left(\frac{R}{L} \right) + \frac{1}{LC}}$$

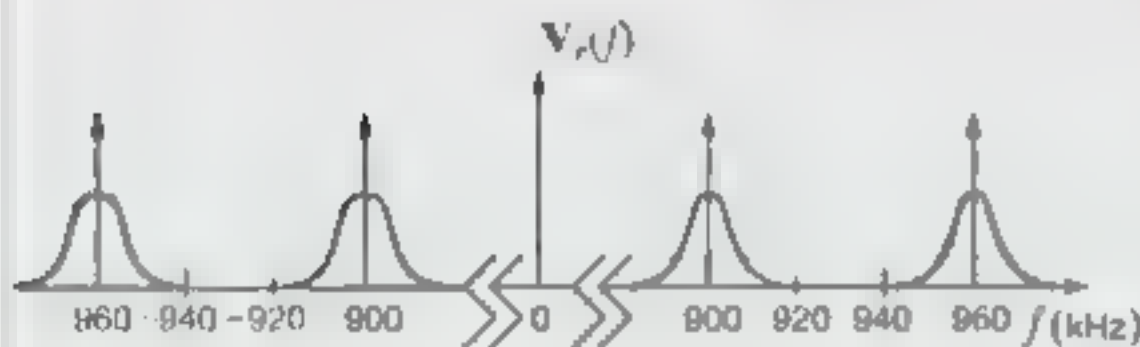


Figura 15.26 Transformada de Fourier da forma de onda na antena, $v_r(t)$.

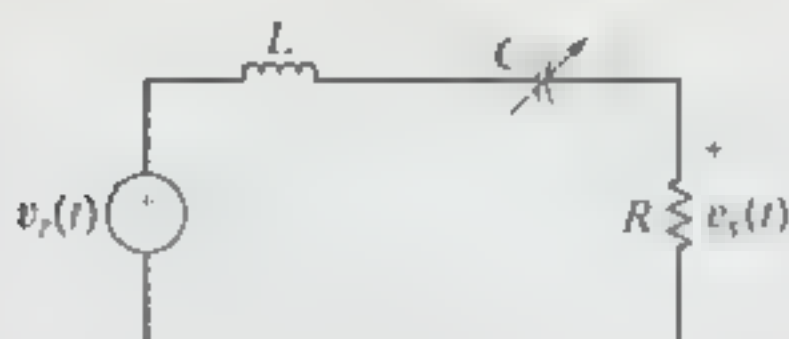


Figura 15.27 Circuito sintonizador do filtro passa-banda RLC .

Conforme mostrado no Capítulo 12, a frequência de centro e a banda passante podem ser expressas em hertz como

$$f_o = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$

e

$$BP = \frac{1}{2\pi} \frac{R}{L}$$

Uma vez que as duas frequências portadoras estão separadas de apenas 60 kHz, a banda passante do filtro deve ser inferior a 60 kHz. Podem-se escolher, arbitrariamente, uma banda passante de 10 kHz e um resistor $R = 10 \Omega$. Com base nessa seleção, o projeto envolve a determinação dos valores correspondentes para o indutor L e para o capacitor C . Utilizando a expressão da banda passante, tem-se

$$L = \frac{1}{2\pi} \frac{R}{BP}$$

ou

$$L = 159,2 \mu\text{H}$$

Colocando-se a frequência de centro em 900 kHz, obtém-se o valor de C pela expressão

$$C = \frac{1}{L(2\pi f_o)^2}$$

ou

$$C = 196,4 \text{ pF}$$

Para sintonizar a frequência de 960 kHz, necessita-se apenas alterar o valor de C para 172,6 pF e mantendo-se a banda passante inalterada. O diagrama de Bode da intensidade de $G_v(s)$ para o filtro sintonizado em 960 kHz é mostrado na Fig. 15.28. Observe que a transmissão a 900 kHz, embora atenuada, não é completamente eliminada. Caso isso seja um problema, pode-se tanto estreitar a banda passante através do resistor R e/ou do indutor L , ou projetar um filtro sintonizador mais complexo.

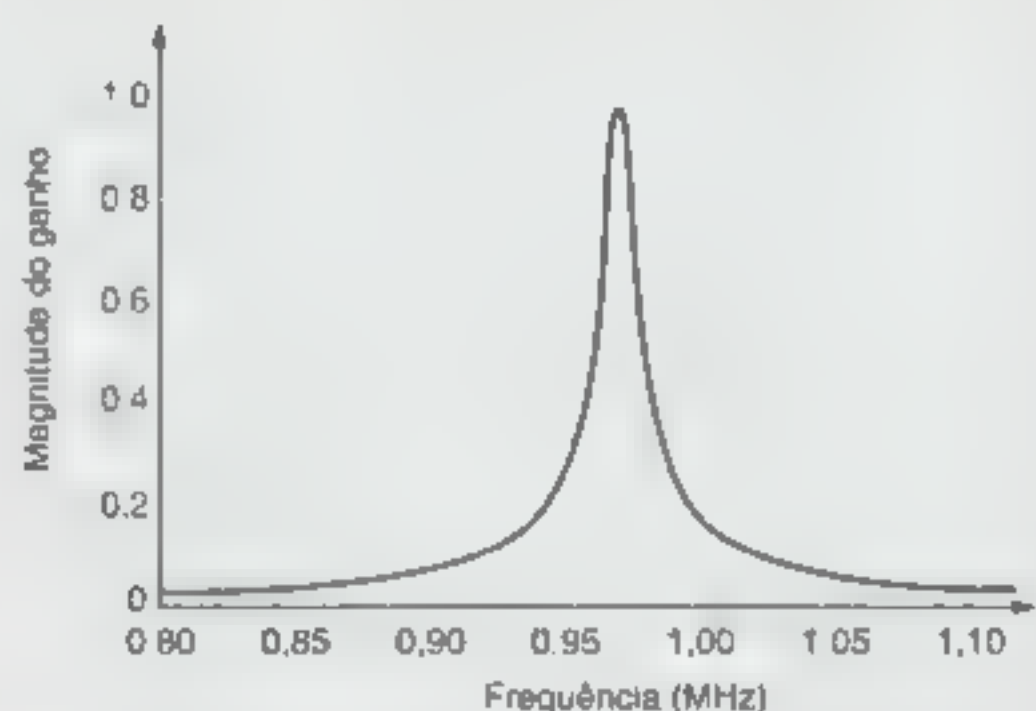


Figura 15.28 Diagrama de Bode do circuito sintonizador RLC da Fig. 15.27.

EXEMPLO DE PROJETO 15.18

A tensão expressa pela Eq. (15.47) descreve um sinal de 10 kHz corrompido por um ruído que possui duas componentes de frequências – 1 kHz e 100 kHz. Com base nessa equação, pode-se perceber que a amplitude do sinal é de apenas 1/10 da amplitude das componentes do ruído. Use o circuito mostrado na Fig. 15.29 para projetar um filtro passa-banda de modo que a amplitude do sinal seja 100 vezes superior à amplitude das componentes do ruído. Admita que os op-amps sejam ideais.

$$v_F(t) = 0,1 \sin[(2\pi)10^4 t] + 0,01 \sin[(2\pi)10^3 t] + 0,1 \sin[(2\pi)10^5 t] \text{ V} \quad 15.47$$

SOLUÇÃO

Observe que o filtro passa-banda mostrado na Fig. 15.29 consiste em dois estágios idênticos em cascata. Deve-se, assim, apenas determinar o ganho de um único estágio, $A_1(j\omega)$, uma vez que o ganho total será

$$A(j\omega) = A_1(j\omega)A_1(j\omega) = [A_1(j\omega)]^2$$

Aplicando a LKC à entrada do primeiro op-amp inversor, tem-se

$$V_A j\omega C = \frac{-V_i}{R_2}$$

ou

$$V_A = \frac{-V_i}{j\omega C R_2} \quad 15.48$$

A utilização da LKC ao nó A fornece

$$\frac{V_F - V_A}{R} = (V_A - V_i)j\omega C + V_A j\omega C$$

Multiplicando ambos os lados dessa equação por R , e agrupando os termos tem-se

$$V_F = V_A[2j\omega C R + 1] - V_i j\omega C R,$$

Substituindo a Eq. (15.48) e resolvendo para o ganho, $A_1(j\omega) = V_F/V_i$, obtém-se

$$A_1(j\omega) = \frac{V_F}{V_i} = \frac{j\omega C R_2}{-\omega^2 C^2 R_1 R_2 + j\omega 2C R_1 + 1}$$

Finalmente, rearranja-se a expressão do ganho na forma

$$\frac{V_F}{V_i} = \frac{\left[\frac{1}{C R} \right] j\omega}{-\omega^2 + \left[\frac{2}{C R_2} \right] j\omega + \frac{1}{C R_1 R_2}} \quad 15.49$$

que é a forma geral de um filtro passa-banda dado pela expressão

$$\frac{V_F}{V_i} = \frac{A_c \left[\frac{\omega_0}{Q} \right] j\omega}{\omega^2 - \left[\frac{\omega_0}{Q} \right] j\omega + \omega_0^2} \quad 15.50$$

Comparando-se as Eqs. (15.49) e (15.50), verifica-se que

$$\begin{aligned} \omega_0 &= \frac{1}{C \sqrt{R_1 R_2}} & \frac{\omega_0}{Q} &= \frac{2}{C R_2} \\ Q &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{R_2}{R_1}} & A_c &= \frac{-R_2}{2R} \end{aligned} \quad 15.51$$

Existem dois requisitos para o desempenho do filtro. Primeiro, dadas as amplitudes do sinal e do ruído na entrada do filtro, a obtenção da razão desejada entre as componentes do sinal e do ruído na saída requer que a razão do ganho na frequência de centro, A_c , para os ganhos nas frequências de 1 kHz e 100 kHz, seja de 1000/1. Uma vez que, em um sistema de eixos logarítmicos, o ganho do filtro passa-banda é simétrico em relação à frequência de centro, os ganhos a 1 kHz e 100 kHz serão idênticos. Assim, os cálculos serão realizados considerando apenas o ganho na frequência de 1 kHz. Pela

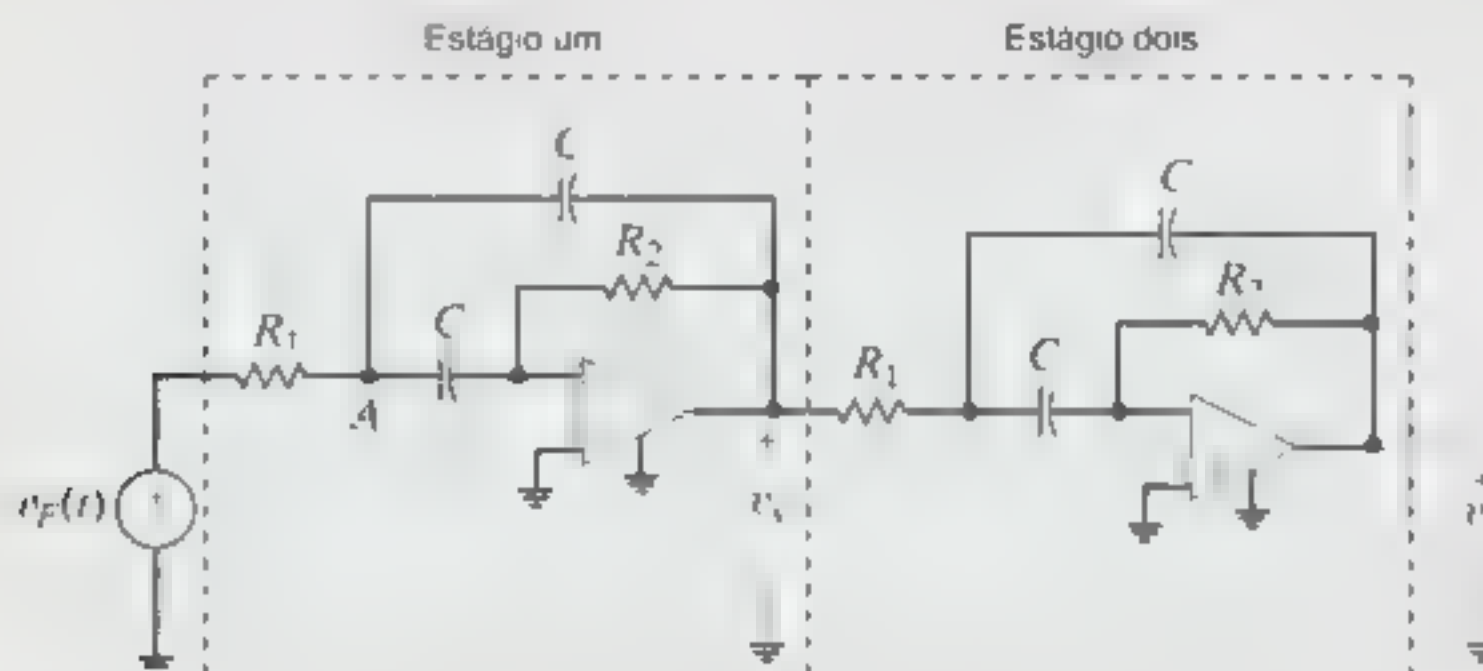


Figura 15.29 Filtro passa-banda de quarta ordem com dois estágios.

Eq. (15.50) a razão para o ganho de um único estágio às frequências ω_0 e $\omega_0/10$ é

$$\frac{A(\omega_c)}{A(\omega_0/10)} = \frac{A_c}{A(\omega_0^2/100)} = \frac{10Q}{\left| \omega_0^2 - \frac{\omega_0^2}{100} + j \frac{\omega_0^2}{10Q} \right|} = \frac{\omega_0^2}{\left| \omega_0^2 - \frac{\omega_0^2}{100} + j \frac{\omega_0^2}{10Q} \right|} \sqrt{1000}$$

Por simplicidade, admite-se que $\omega_0 = \omega_0/100$. A solução para Q fornece

$$\sqrt{100Q^2 + 1} = \sqrt{1000}$$

ou, empregando a Eq. (15.51),

$$Q \approx \sqrt{10} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{R_2}{R_1}}$$

Assim, o requisito do ganho impõe a condição $R_2 = 40R_1$. Escolhendo, arbitrariamente, $R_1 = 1 \text{ k}\Omega$, tem-se que $R_2 = 40 \text{ k}\Omega$. O segundo requisito é que $\omega_0/2\pi$ deve ser igual a 10 kHz. Pela Eq. (15.51) e com os valores para os resistores, tem-se

$$\omega_0 = (2\pi)10^4 = \frac{1}{C\sqrt{R_1 R_2}} = \frac{1}{10^{-8}\sqrt{40}}$$

que conduz a uma capacitância $C = 2,5 \text{ nF}$.

O diagrama de Bode resultante é mostrado na Fig. 15.30a, em que a frequência de centro é de 10 kHz, o ganho a 10 kHz é de aproximadamente 400, e os ganhos nas frequências de 1 kHz e 100 kHz são de 0,4, isto é, uma razão de 1000:1. Os resultados para a tensão de saída, utilizando a análise transiente, são mostrados na Fig. 15.30b para 10 ciclos de um sinal de

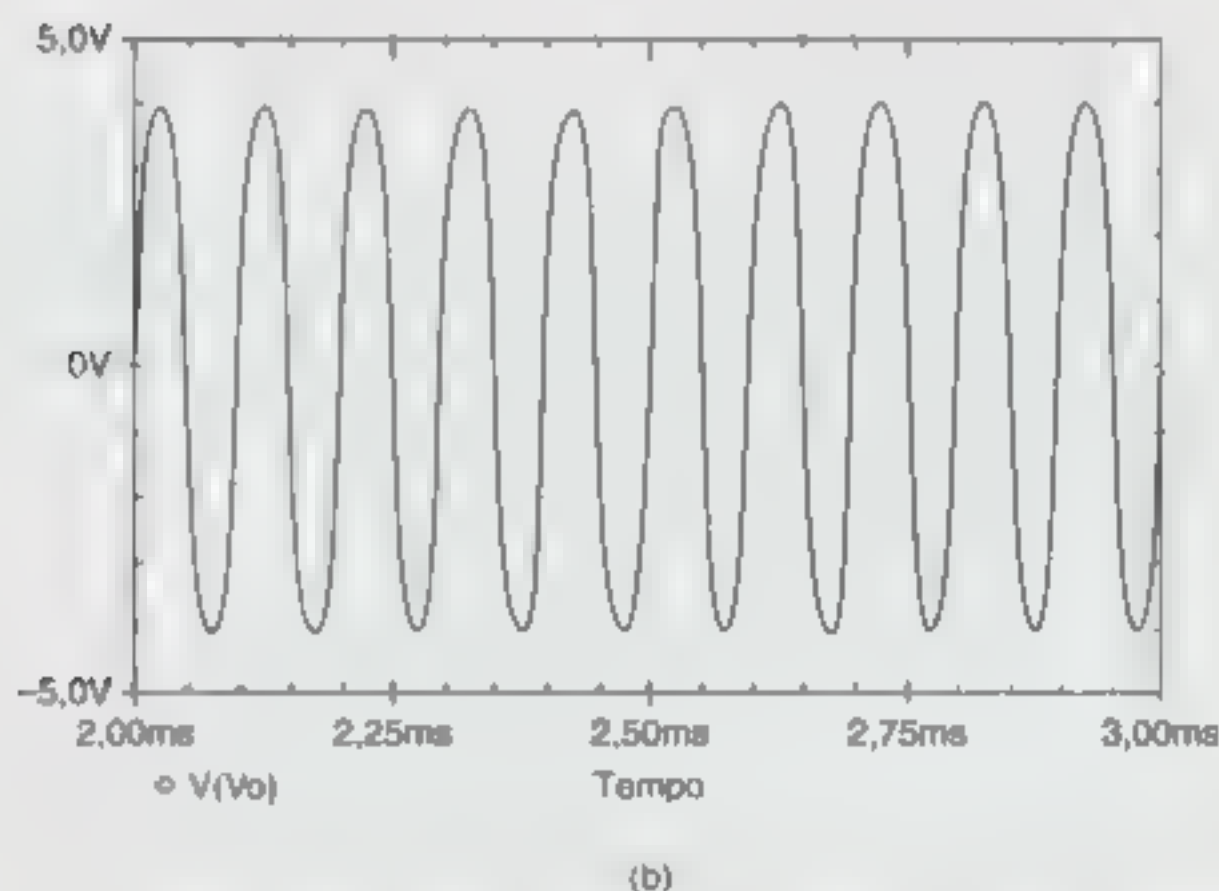
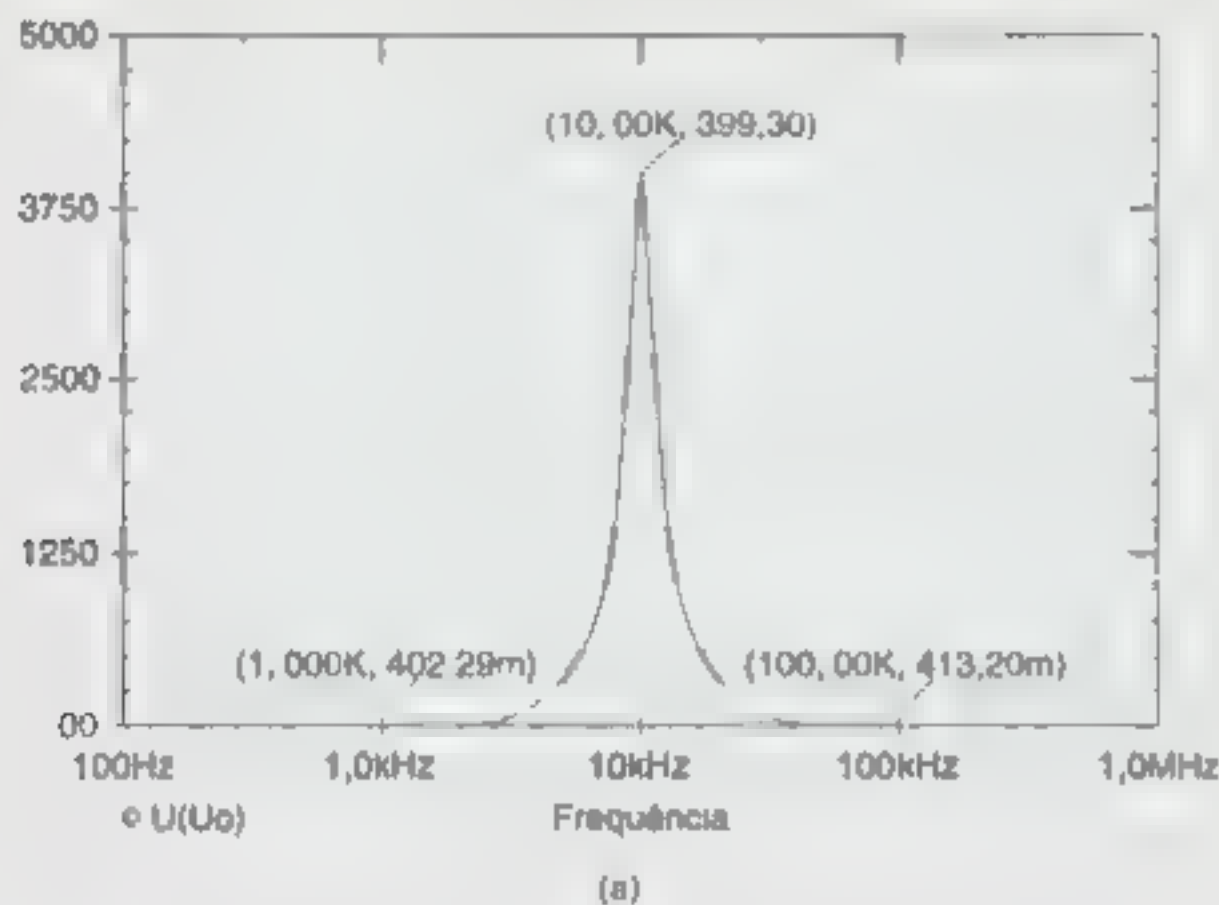


Figura 15.30 (a) Resultados de uma análise de frequência mostrando a amplificação do sinal em relação ao ruído, (b) resultados da simulação transiente e (c) a FFT correspondente.

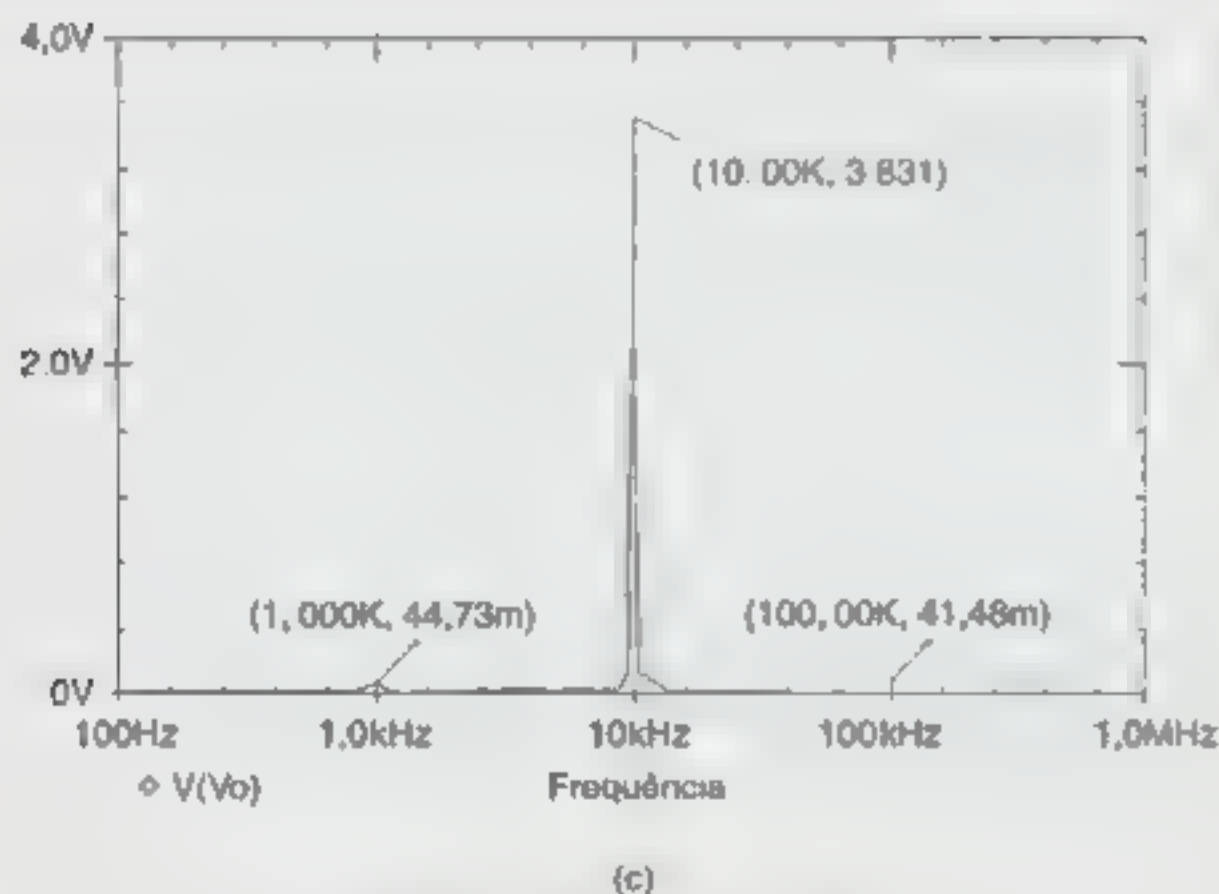


Figura 15.30 (Continuação)

10 kHz. Conforme pode ser observado, a forma de onda é uma onda senoidal com amplitude de 4 V a 10 kHz, com distorções quase imperceptíveis.

As componentes da saída são obtidas pelo uso da transformada rápida de Fourier (FFT – *Fast Fourier Transform*) e, pelo gráfico resultante, mostrado na Fig. 15.30c, pode-se confirmar que a amplitude do sinal é 1000 vezes maior que

as amplitudes das componentes do ruído. Deve-se mencionar que a FFT mostrada na Fig. 15.30c é o resultado de uma simulação transitente de 5 ms. (isto é, 50 ciclos a 10 kHz.) Em geral, quanto maior o número de ciclos na análise transitente, melhor será a solução no domínio da frequência da FFT. Foram utilizados na simulação op-amps com ganhos de 10^6 e fontes com valores de ± 15 V.

EXEMPLO DE PROJETO 15.19

O circuito mostrado na Fig. 15.31 é um filtro supressor. Em sua frequência de ressonância, o circuito L – C em série possui impedância efetiva nula e, como resultado, qualquer sinal naquela frequência é curto-circuitado. Por essa razão, o filtro é algumas vezes referido como filtro de bloqueio.

Considere o cenário descrito a seguir. Um sistema operando a 1 kHz capta um ruído na frequência fundamental de 10 kHz, bem como alguma perturbação no segundo e terceiro harmônicos. Dadas essas informações, projete um filtro

que elimine tanto o ruído quanto as perturbações dos harmônicos.

SOLUÇÃO

A solução para se obter o bloqueio é ajustar a frequência de ressonância do ramo L – C em série à frequência do sinal que se deseja eliminar. Como existem três componentes de frequência a serem removidas, 10 kHz, 20 kHz e 30 kHz, simplesmente são utilizados três diferentes ramos L – C , conforme mostrado na Fig. 15.32 e ajusta-se L_1C_1 para bloquear o sinal

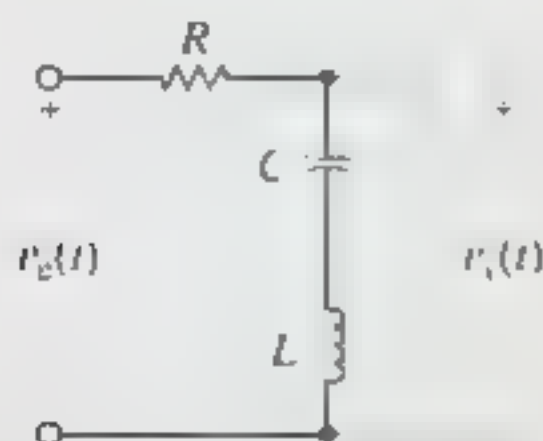
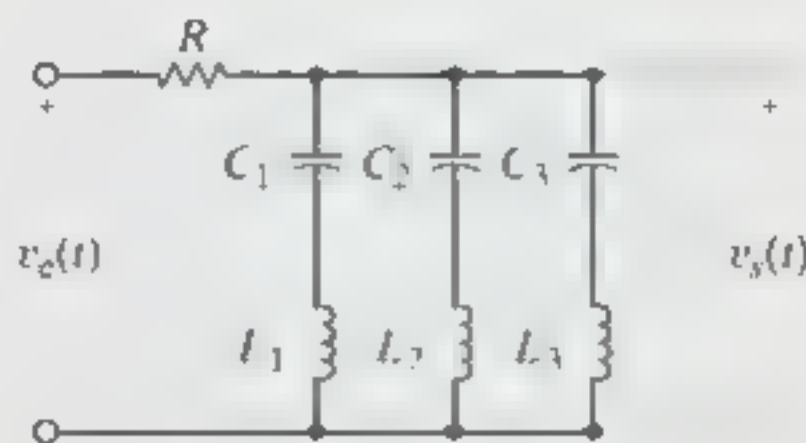
Figura 15.31 Filtro supressor, ou de bloqueio, utilizando um ramo L – C em série.

Figura 15.32 O filtro supressor da Fig. 15.31 é expandido para remover três componentes de frequências distintas.

de 10 kHz, L_2C_2 para bloquear o sinal de 20 kHz e L_3C_3 para bloquear o sinal de 30 kHz. Arbitrando-se os valores de todos os indutores em 10 μH e calculando-se o valor de cada capacitor, obtém-se

$$C_1 = \frac{1}{(2\pi)^2 f^2 L} = \frac{1}{(2\pi)^2 (10^3)(10^{-5})} = 25,3 \mu\text{F}$$

$$C_2 = \frac{1}{(2\pi)^2 (4 \times 10^4)(10^{-5})} = 6,34 \mu\text{F}$$

$$C_3 = \frac{1}{(2\pi)^2 (9 \times 10^4)(10^{-5})} = 2,81 \mu\text{F}$$

Os três bloqueios mostrados na Fig. 15.32 eliminarão o ruído e as perturbações dos harmônicos.

RESUMO

- Uma função periódica, sua representação através de uma série de Fourier e algumas das principais propriedades de uma série de Fourier são resumidas a seguir.

- **Uma função periódica**

$$f(t) = f(t + nT_0), \quad n = 1, 2, 3, \dots \text{ e } T_0 \text{ é o período}$$

- **Série de Fourier exponencial de uma função periódica**

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega_0 t}, \quad c_n = \frac{1}{T_0} \int_{t_1}^{t_1+T_0} f(t) e^{-jn\omega_0 t} dt$$

- **Série de Fourier trigonométrica de uma função periódica**

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t)$$

$$a_n = \frac{2}{T_0} \int_{t_1}^{t_1+T_0} f(t) \cos n\omega_0 t dt$$

$$b_n = \frac{2}{T_0} \int_{t_1}^{t_1+T_0} f(t) \sin n\omega_0 t dt,$$

e

$$a_0 = \frac{1}{T_0} \int_{t_1}^{t_1+T_0} f(t) dt$$

- **Simetria par de uma função periódica**

$$f(t) = f(-t)$$

$$a_n = \frac{4}{T_0} \int_0^{T_0/2} f(t) \cos n\omega_0 t dt,$$

$$b_n = 0,$$

e

$$a = \frac{2}{T_0} \int_0^{T_0/2} f(t) dt$$

- **Simetria ímpar de uma função periódica**

$$f(t) = -f(-t)$$

$$a_n = 0, \quad b_n = \frac{4}{T_0} \int_0^{T_0/2} f(t) \sin n\omega_0 t dt, \quad \text{e} \quad a_0 = 0$$

- **Simetria de meia-onda de uma função periódica**

$$f(t) = -f(t - T_0/2)$$

$$a_n = b_n = 0, \quad \text{para } n \text{ par}$$

$$a_n = \frac{4}{T_0} \int_0^{T_0/2} f(t) \cos n\omega_0 t dt \quad \text{para } n \text{ ímpar}$$

$$b_n = \frac{4}{T_0} \int_0^{T_0/2} f(t) \sin n\omega_0 t dt \quad \text{para } n \text{ ímpar e } a_0 = 0$$

- **Defasagem no tempo de uma função periódica**

$$f(t - t_0) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (c_n e^{-jn\omega_0 t_0}) e^{jn\omega_0 t}$$

- **Espectro de frequências de uma função periódica** O gráfico representativo de uma série de Fourier que contém componentes discretas de frequências é chamado de espectro de linha.

- **Resposta em regime estacionário de uma entrada representada por uma função periódica** A entrada na forma de uma função periódica é expressa como uma série de Fourier, e a análise fasorial é utilizada para determinar a resposta de cada componente da série. Cada componente é transformada para o domínio do tempo e o princípio da superposição é utilizado na determinação da saída total.

A transformada de Fourier, suas características e propriedades, bem como sua utilização na análise de circuitos, são resumidas a seguir.

- **Transformada de Fourier para uma função aperiódica**

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt \quad \text{e} \quad f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

- **Pares de transformadas de Fourier e suas propriedades** Os pares de transformadas de Fourier mostrados na Tabela 15.2 e suas propriedades listadas na Tabela 15.3 podem ser utilizados em conjunto na transformação de funções escritas no domínio do tempo para o domínio da frequência e vice-versa.

- **Teorema de Parseval utilizado na determinação da energia contida em um sinal**

$$\int_{-\infty}^{\infty} f^2(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2 d\omega$$

- **Resposta de uma rede a uma entrada aperiódica** Uma entrada aperiódica $x(t)$ pode ser transformada para o domínio da frequência como $X(\omega)$. Em seguida, utilizando a função de transferência da rede, $H(\omega)$, pode-se calcular a saída como $Y(\omega) = H(\omega)X(\omega)$. A saída $y(t)$ pode ser obtida transformando-se $Y(\omega)$ para o domínio do tempo

PROBLEMAS

- 15.1** Determine a série de Fourier exponencial para o trem de pulsos periódico mostrado na Fig. P15.1.

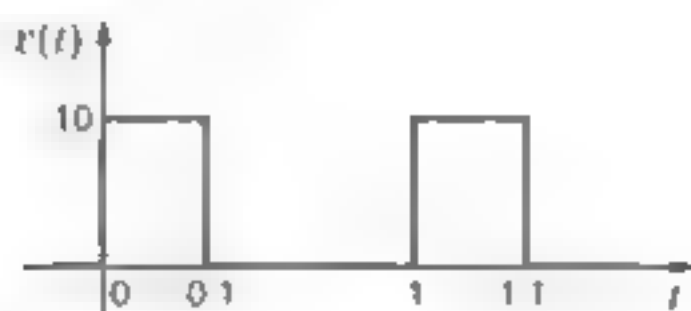


Figura P15.1

- 15.2** Determine a série de Fourier exponencial para o sinal periódico mostrado na Fig. P15.2.

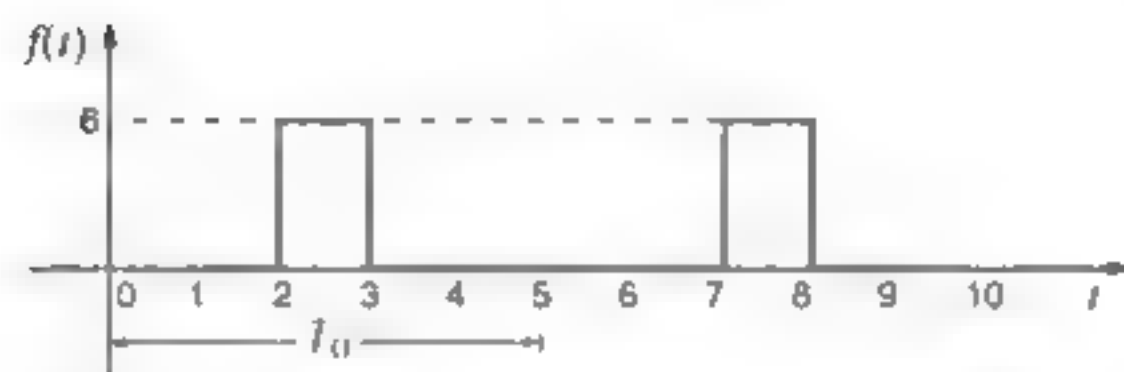


Figura P15.2

- 15.3** Determine a série de Fourier exponencial para o sinal mostrado na Fig. P15.3.

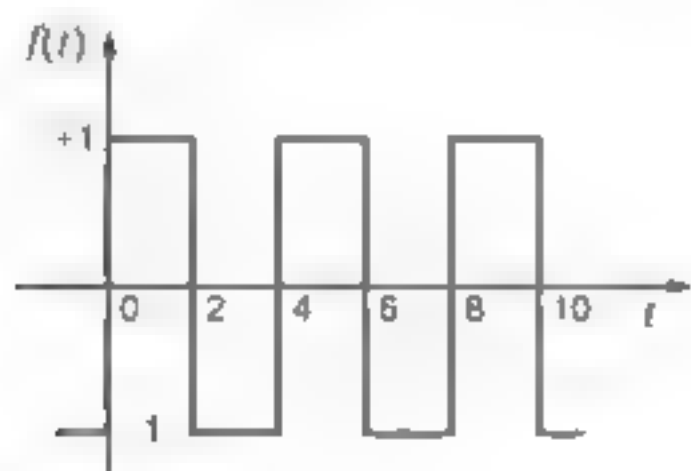


Figura P15.3

- 15.4** Determine a série de Fourier exponencial para o sinal mostrado na Fig. P15.4.

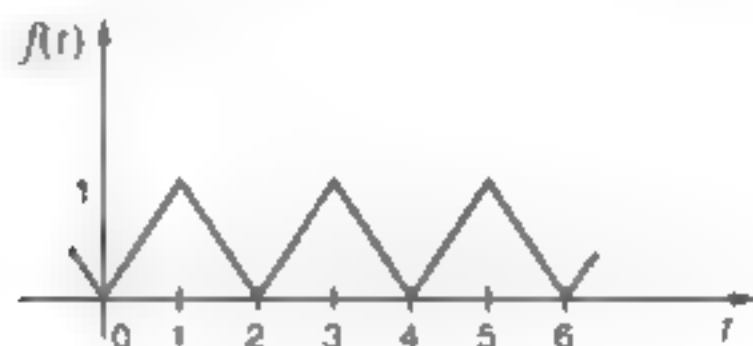


Figura P15.4

- 15.5** Calcule a série de Fourier exponencial para a forma de onda resultante da soma das duas formas de onda mostradas na Fig. P15.5, calculando a série de Fourier exponencial das duas formas de onda e somando-as.

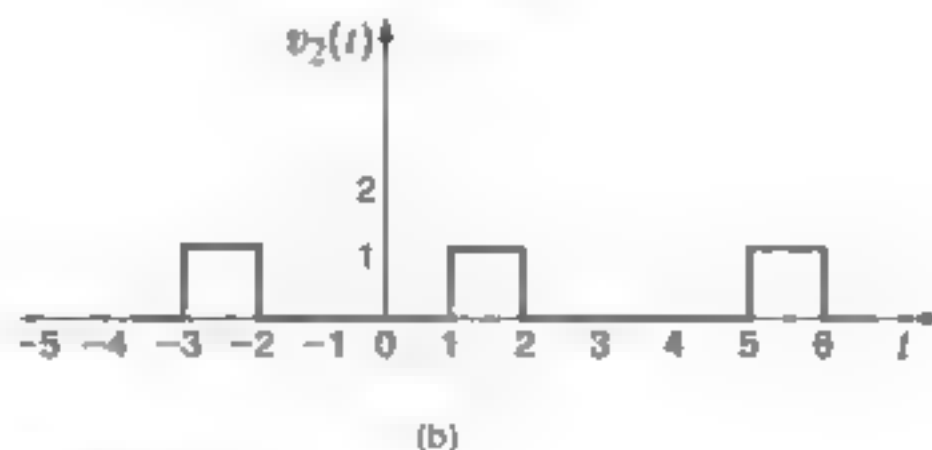
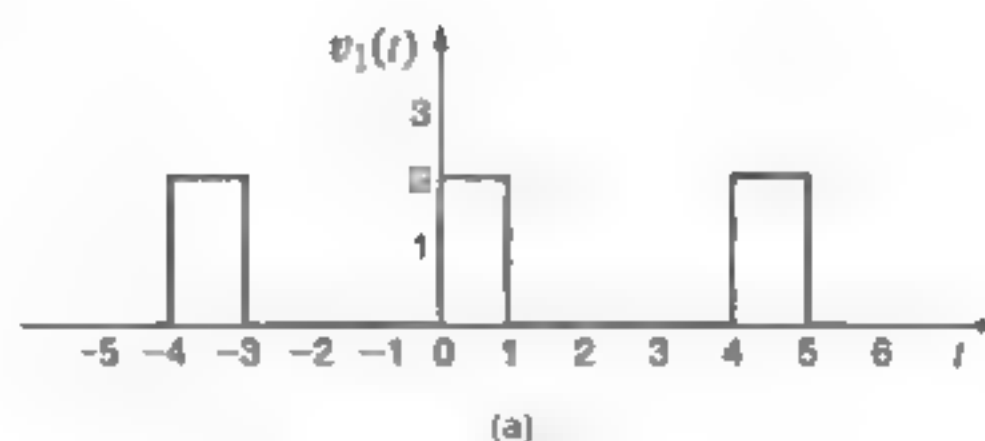


Figura P15.5

- 15.6** Dada a forma de onda mostrada na Fig. P15.6, determine o tipo de simetria existente caso a origem seja selecionada em (a) t_1 e (b) t_2 .

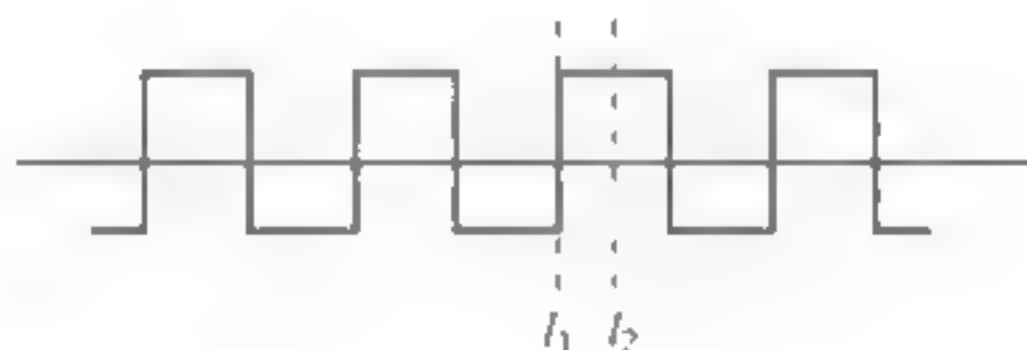


Figura P15.6

- 15.7** Qual o tipo de simetria apresentada pelas duas formas de onda mostradas na Fig. P15.7?

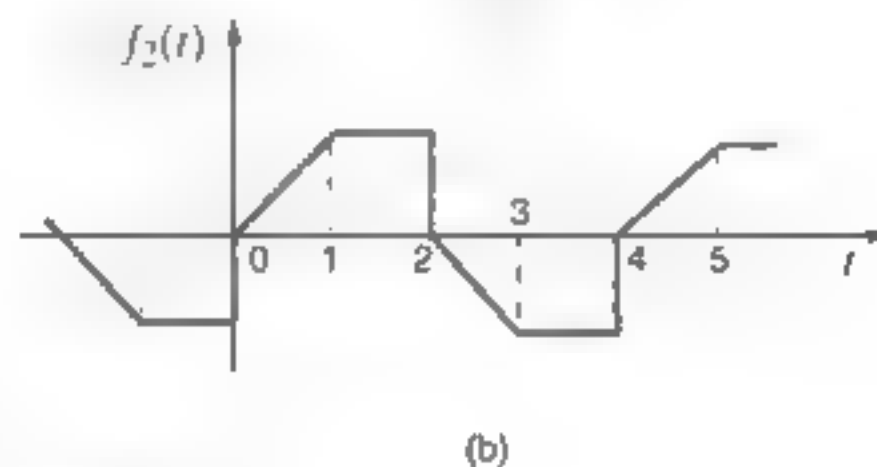
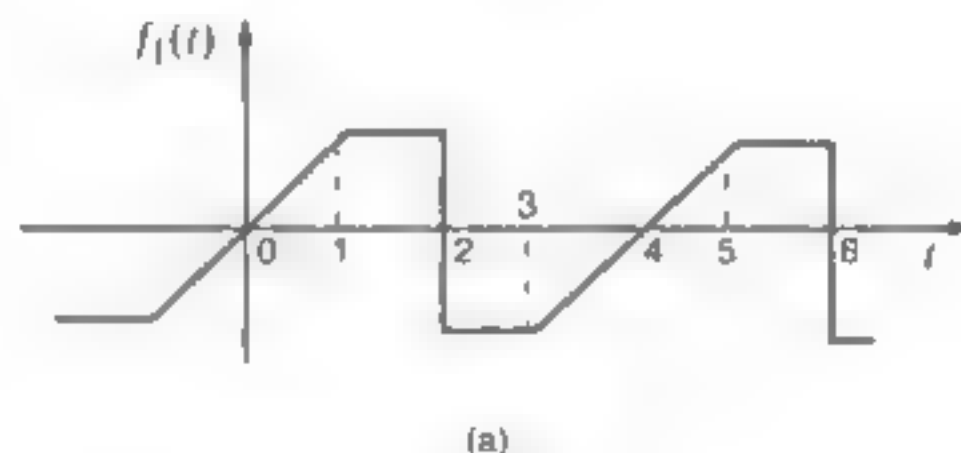


Figura P15.7

- 15.8** Obtenha a série de Fourier trigonométrica para a forma de onda periódica mostrada na Fig. P15.8.

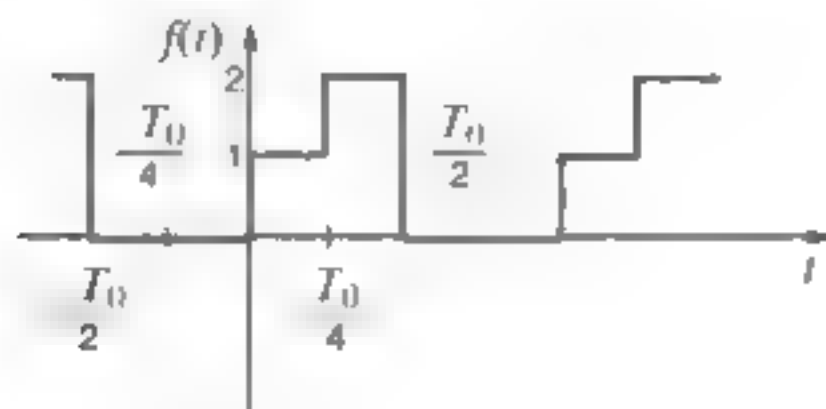


Figura P15.8

- 15.9** Obtenha a série de Fourier trigonométrica para a forma de onda mostrada na Fig. P15.9.

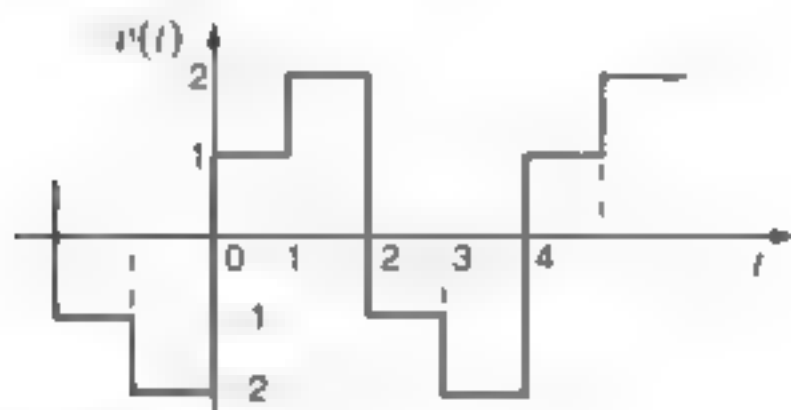


Figura P15.9

- 15.10** Dada a forma de onda da Fig. 15.10, mostre que

$$f(t) = \frac{A}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-A}{n\pi} \sin \frac{2n\pi}{T_0} t$$

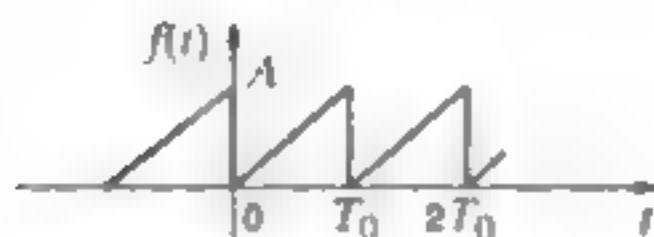


Figura P15.10

- 15.11** Obtenha os coeficientes da série de Fourier trigonométrica para a forma de onda mostrada na Fig. P15.11.

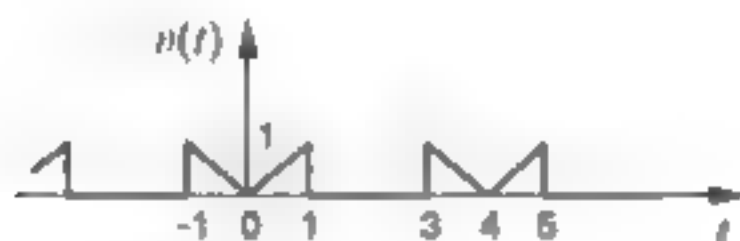


Figura P15.11

- 15.12** Obtenha os coeficientes da série de Fourier trigonométrica para a forma de onda mostrada na Fig. P15.12.

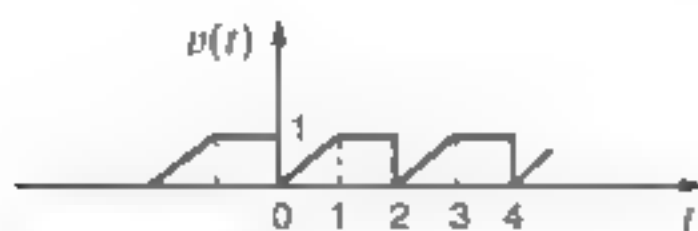


Figura P15.12

- 15.13** Obtenha os coeficientes da série de Fourier trigonométrica para a forma de onda mostrada na Fig. P15.13.

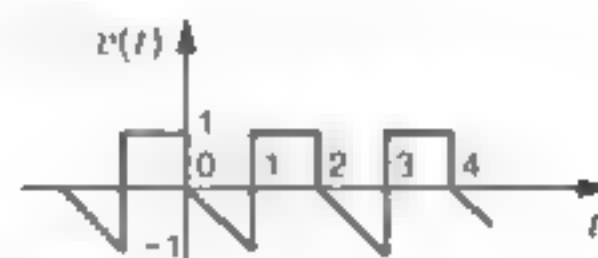


Figura P15.13

- 15.14** Obtenha os coeficientes da série de Fourier trigonométrica para a forma de onda mostrada na Fig. P15.14.

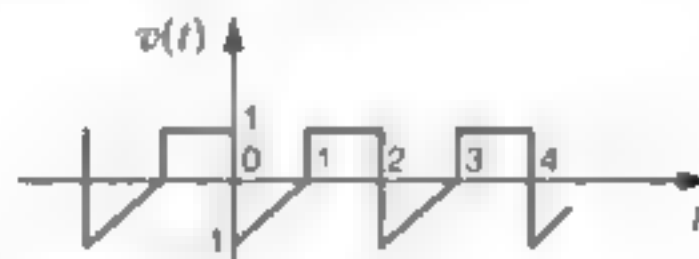


Figura P15.14

- 15.15** Deduza a série de Fourier trigonométrica para a forma de onda mostrada na Fig. P15.15.

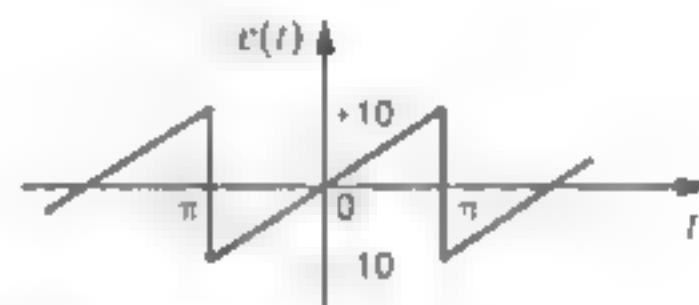


Figura P15.15

- 15.16** Obtenha os coeficientes da série de Fourier trigonométrica para a forma de onda mostrada na Fig. P15.16.

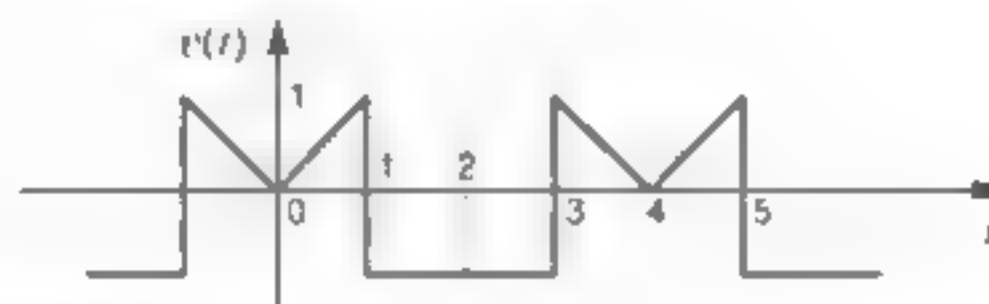


Figura P15.16

- 15.17** Obtenha a série de Fourier trigonométrica para a forma de onda mostrada na Fig. P15.17.

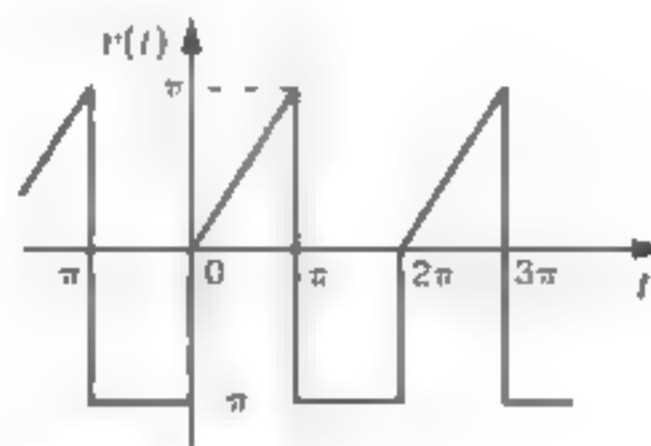


Figura P15.17

- 15.18** Obtenha os coeficientes da série de Fourier trigonométrica para a forma de onda mostrada na Fig. P15.18.

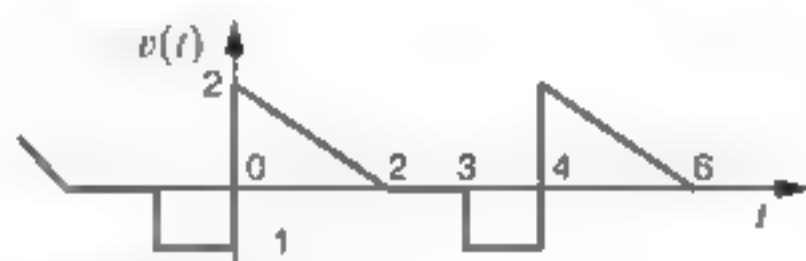


Figura P15.18

- 15.19** Deduza a série de Fourier trigonométrica para a função mostrada na Fig. P15.19.

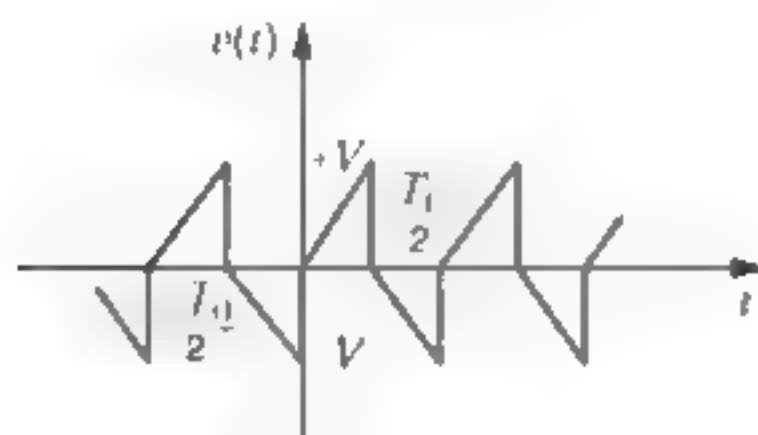


Figura P15.19

- 15.20** Deduza a série de Fourier trigonométrica da forma de onda mostrada na Fig. P15.20.

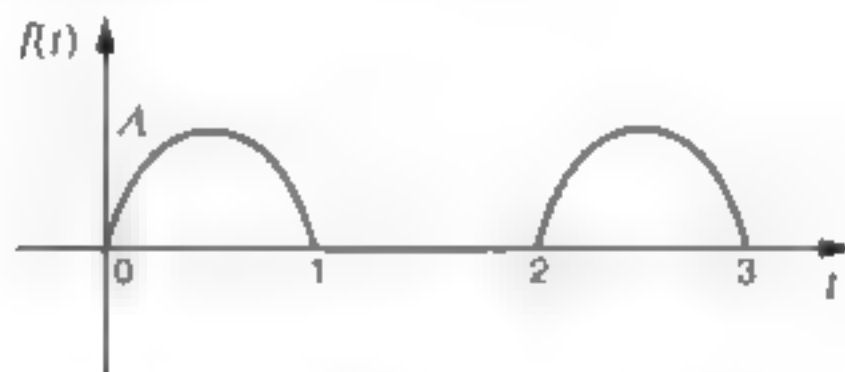


Figura P15.20

- 15.21** Deduza a série de Fourier trigonométrica para a função $v(t) = A|\sin t|$, conforme mostrado na Fig. P15.21.

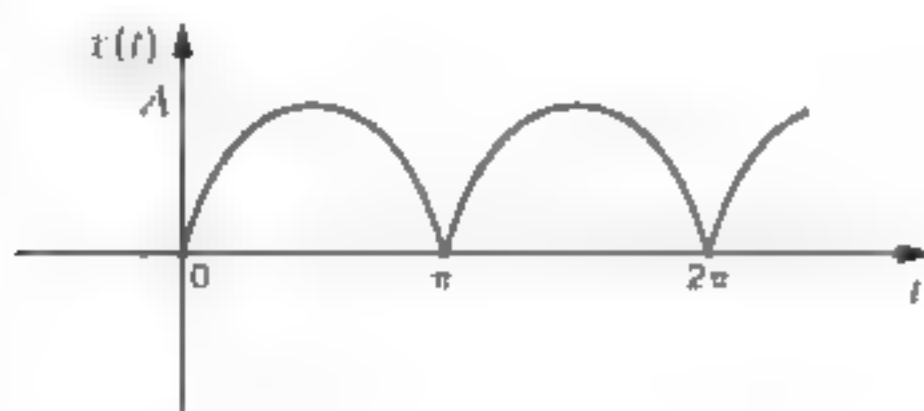


Figura P15.21

- 15.22** Os espectros de amplitude e fase de uma função periódica $u(t)$ que possui apenas um número reduzido de termos são mostrados na Fig. P15.22. Determine a expressão de $u(t)$ se $T_0 = 0,1$ s

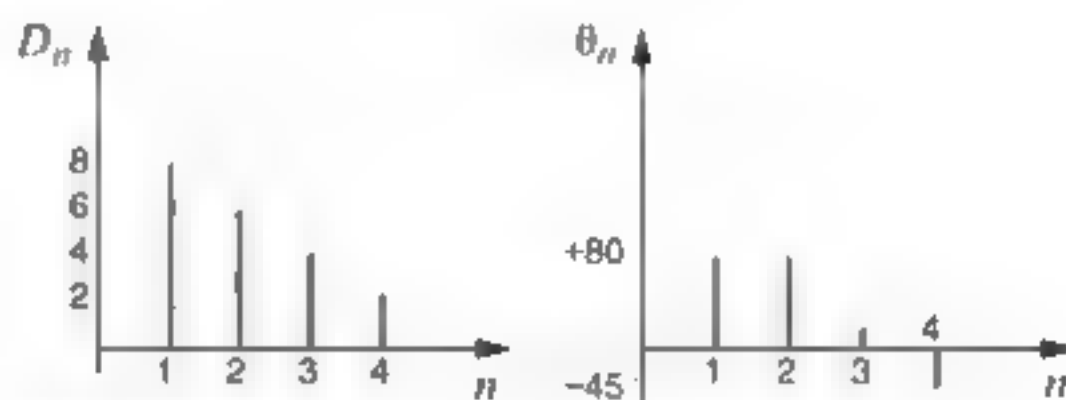


Figura P15.22

- 15.23** O espectro de linha discreto para uma função periódica $f(t)$ é mostrado na Fig. P15.23. Determine a expressão de $f(t)$.

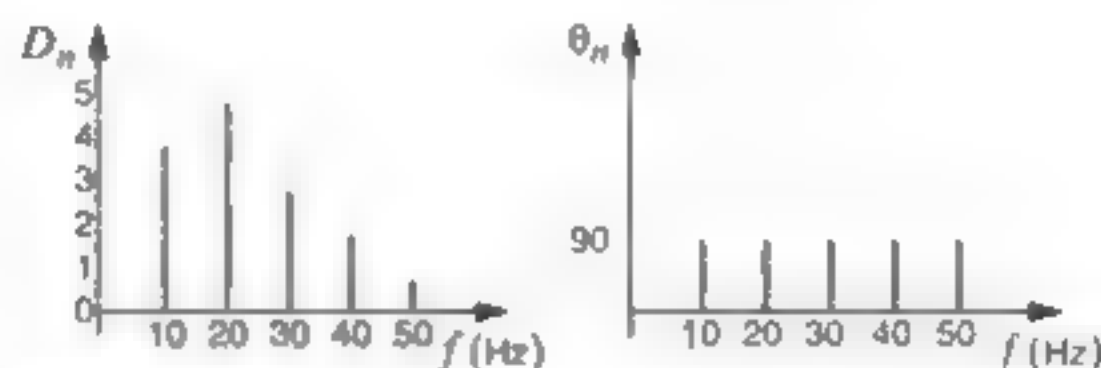


Figura P15.23

- 15.24** Represente graficamente os quatro primeiros termos dos espectros da amplitude e da fase para o sinal

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-2}{n\pi} \sin \frac{n\pi}{2} \cos n\omega_0 t + \frac{6}{n\pi} \sin n\omega_0 t$$

- 15.25** Determine a resposta em regime estacionário da corrente $i_s(t)$ do circuito mostrado na Fig. P15.25 considerando que a tensão de entrada seja descrita pela forma de onda apresentada no Problema 15.15.

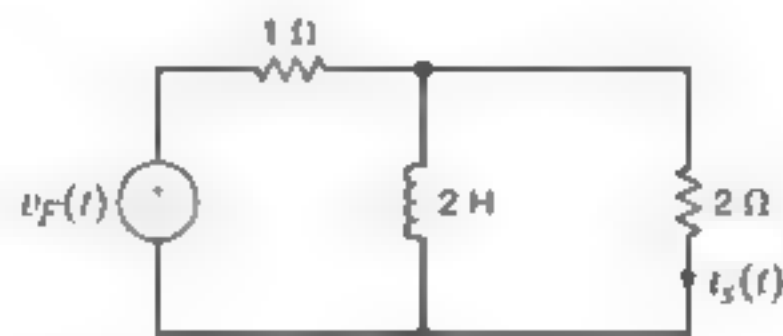


Figura P15.25

- 15.26** Se a tensão de entrada do circuito mostrado no Prob.ema 15.25 for expressa por

$$v_F(t) = 1 - \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin n \cdot 2\pi n t \text{ V}$$

obtenha a expressão da corrente $i_s(t)$ no regime estacionário.

- 15.27** Obtenha a corrente $i(t)$ no regime estacionário do circuito mostrado na Fig. 15.27a, considerando que o sinal de entrada seja o mostrado na Fig. 15.27b.

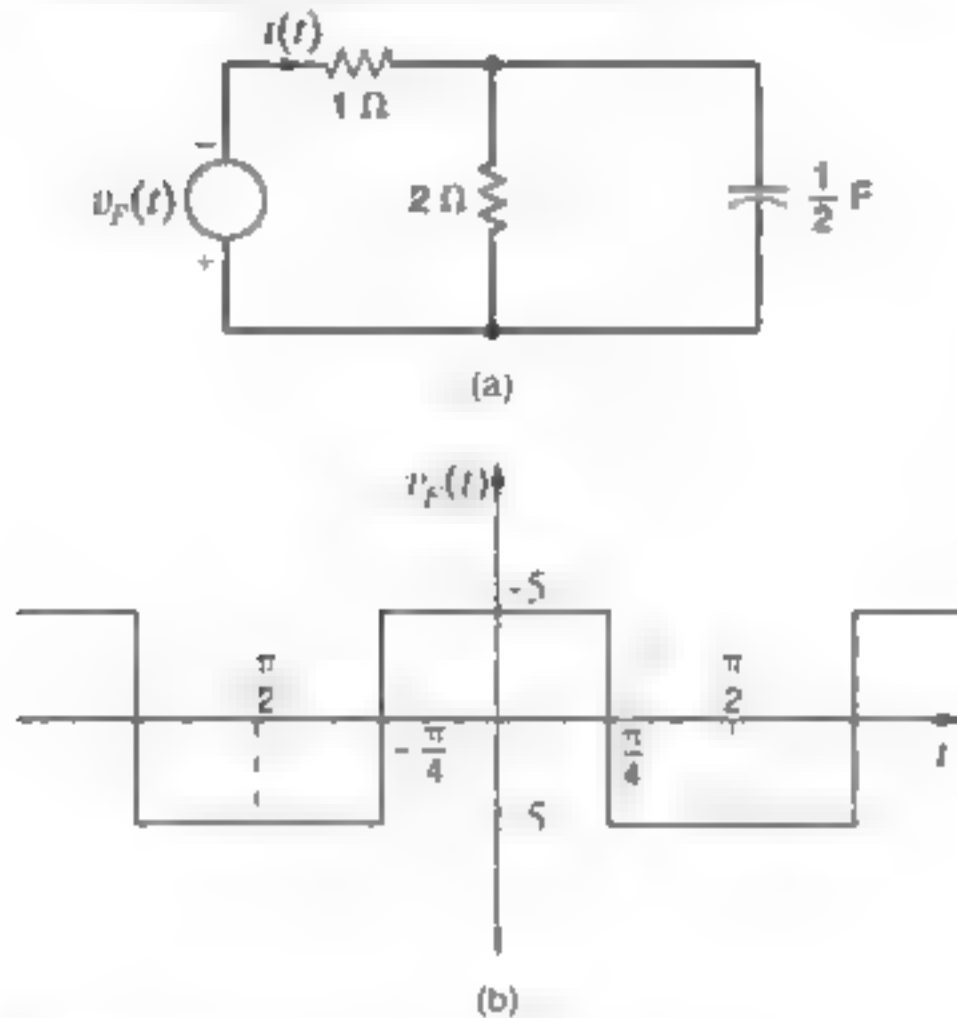


Figura P15.27

- 15.28** Determine os três primeiros termos da tensão $v_s(t)$ no regime estacionário do circuito mostrado na Fig. P15.28, considerando que a tensão de entrada seja um sinal periódico da forma

$$v(t) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\pi} (\cos n\pi - 1) \sin n\pi t \text{ V}$$

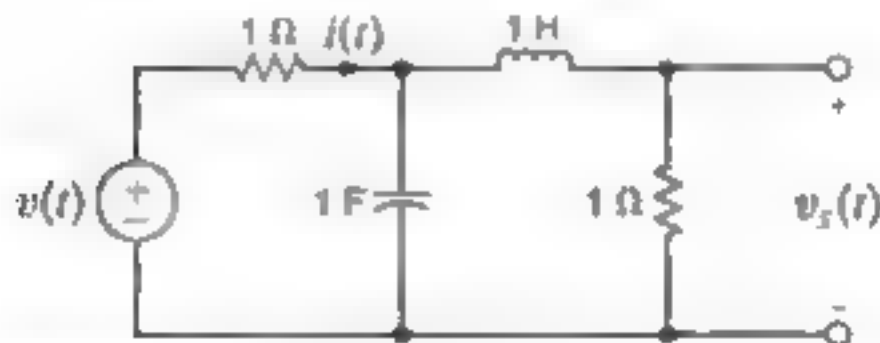


Figura P15.28

- 15.29** Determine a resposta em regime estacionário para a tensão $v_s(t)$ da rede mostrada na Fig. P15.29a, considerando que a corrente de entrada seja definida pela curva do gráfico da Fig. P15.29b.

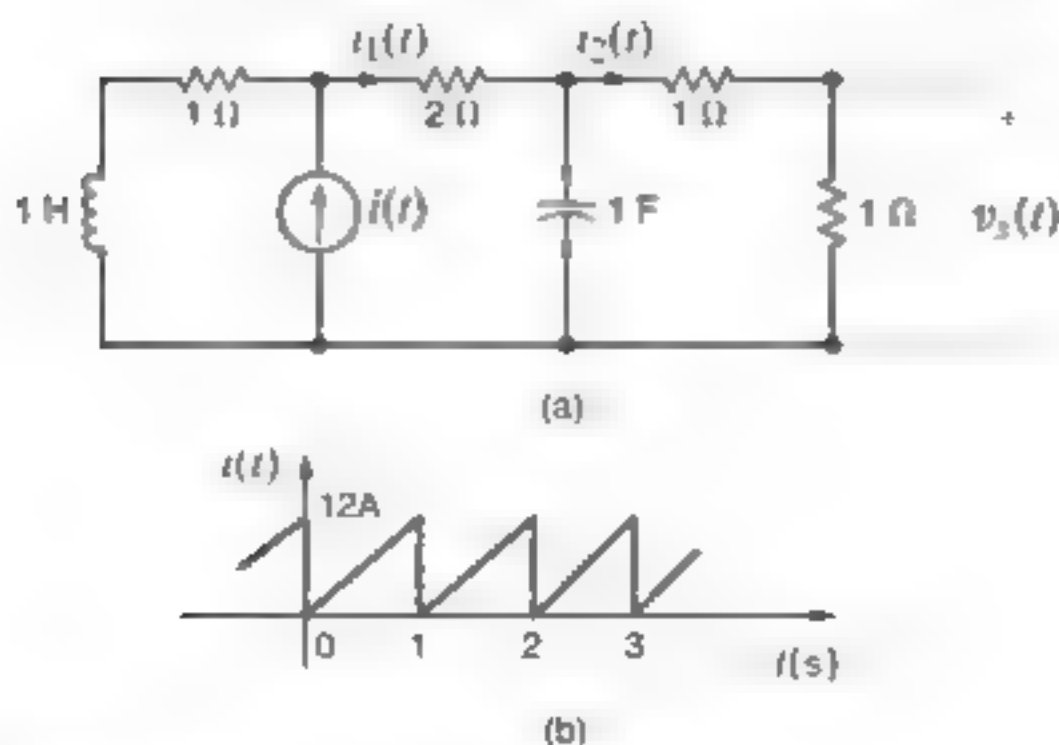


Figura P15.29

- 15.30** Determine a resposta em regime estacionário para a tensão $v_s(t)$ do circuito mostrado na Fig. P15.30a, considerando que o sinal de entrada seja definido pela curva do gráfico da Fig. P15.30b.

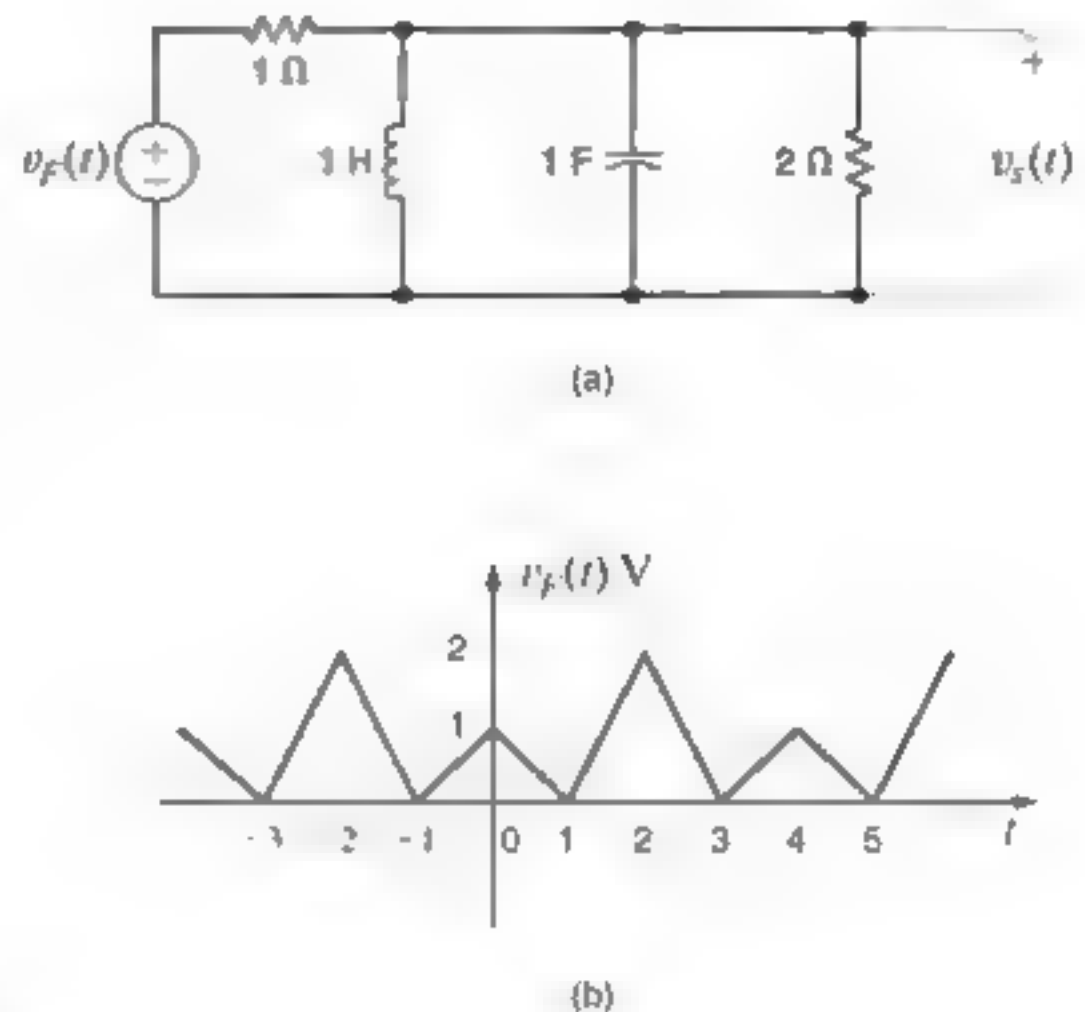


Figura P15.30

- 15.31** A corrente $i_s(t)$ mostrada na Fig. P15.31a é aplicada ao circuito da Fig. P15.31b. Determine a expressão para a corrente $i_s(t)$ no regime estacionário utilizando os primeiros quatro harmônicos.

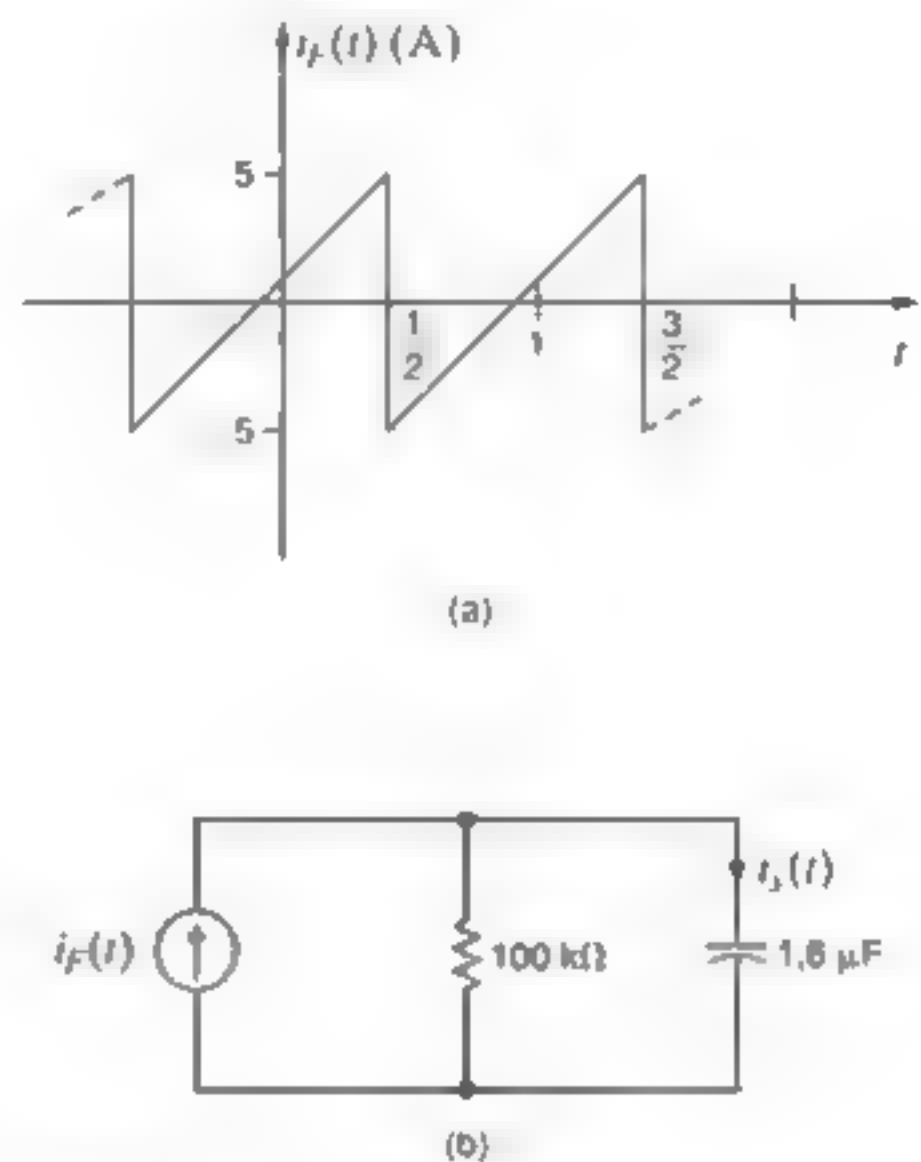


Figura P15.31

- 15.32** Obtenha a potência média absorvida pela rede mostrada na Fig. P15.32 considerando que

$$v(t) = 12 + 6 \cos(377t - 10^\circ) + 4 \cos(754t - 60^\circ) \text{ V}$$

$$i(t) = 0.2 + 0.4 \cos(377t - 150^\circ) - 0.2 \cos(754t - 80^\circ) + 0.1 \cos(1131t - 60^\circ) \text{ A}$$

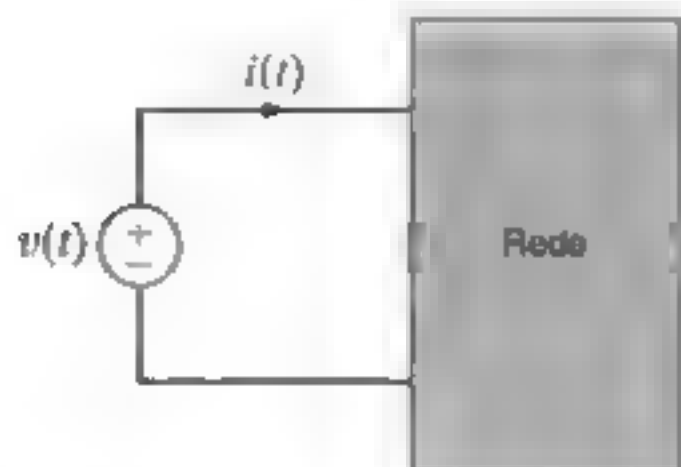


Figura P15.32

- 15.33** Obtenha a potência média absorvida pela rede mostrada na Fig. P15.33 considerando que

$$v(t) = 60 + 36 \cos(377t + 45^\circ) + 24 \cos(754t - 60^\circ) \text{ V}$$

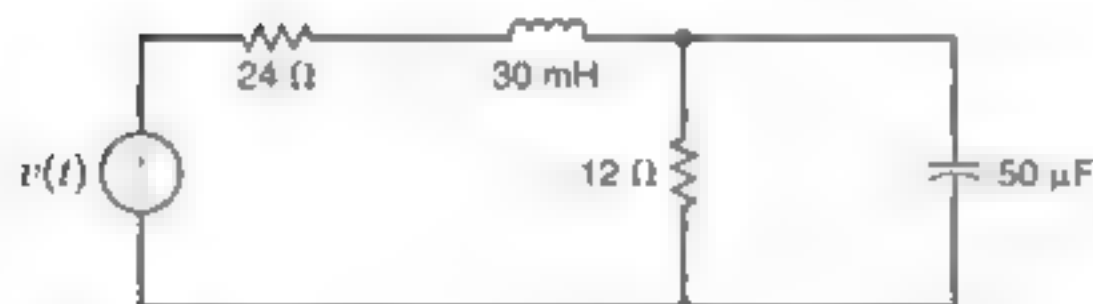


Figura P15.33

- 15.34** Determine a potência média absorvida pelo resistor de 12Ω da rede mostrada na Fig. P15.33 se

$$v(t) = 50 + 25 \cos(377t + 45^\circ) + 12.5 \cos(754t - 45^\circ) \text{ V.}$$

- 15.35** Determine a transformada de Fourier da forma de onda mostrada na Fig. P15.35.

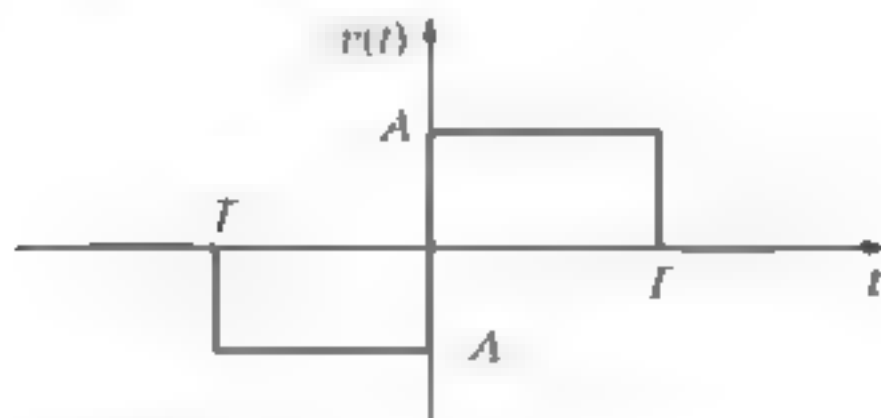


Figura P15.35

- 15.36** Deduza a transformada de Fourier para as seguintes funções:

- (a) $f(t) = e^{-2t} \cos 4t u(t)$
 (b) $f(t) = e^{-2t} \sin 4t u(t)$

- 15.37** Mostre que

$$\mathcal{F}[f_1(t)f_2(t)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F_1(x)F_2(\omega - x)dx$$

- 15.38** Obtenha a transformada de Fourier da função

$$f(t) = 12e^{-2t} \cos 4t$$

- 15.39** Utilize a técnica da transformada para obter a tensão $v_s(t)$ da rede mostrada na Fig. P15.29a considerando que (a) $i(t) = 4(e^{-t} - e^{-2t})u(t)$ A e (b) $i(t) = 12 \cos 4t$ A.

- 15.40** O sinal de entrada de uma rede é $v_e(t) = e^{-3t} u(t)$. A função de transferência da rede é $H(j\omega) = 1/(j\omega + 4)$. Obtenha a tensão de saída da rede, $v_s(t)$, considerando que as condições iniciais sejam nulas.

- 15.41** Determine a tensão $v_s(t)$ do circuito mostrado na Fig. P15.41, utilizando a transformada de Fourier, considerando que o sinal de entrada é $i_F(t) = (e^{-2t} + \cos t) u(t)$ A.

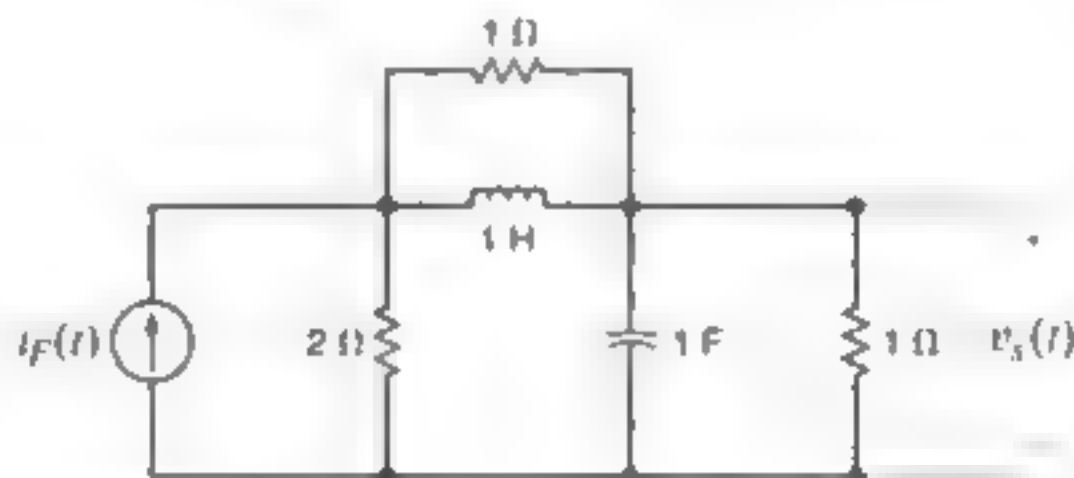


Figura P15.41

- 15.42** Utilize a transformada de Fourier para determinar a corrente $i(t)$ da rede mostrada na Fig. P15.42 considerando que $v_F(t) = 2e^{-t} u(t)$.

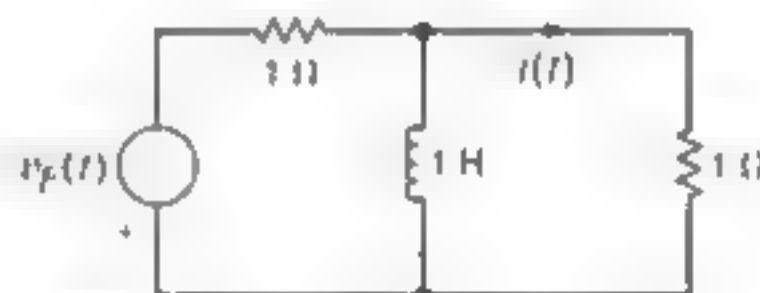


Figura P15.42

- 15.43** Utilize a técnica da transformada para obter a tensão $v_s(t)$ da rede mostrada na Fig. P15.43 considerando que (a) $v_e(t) = 4e^{-t} u(t)$ V e (b) $v_e(t) = 4(e^{-2t} + 2e^{-3t})u(t)$ V

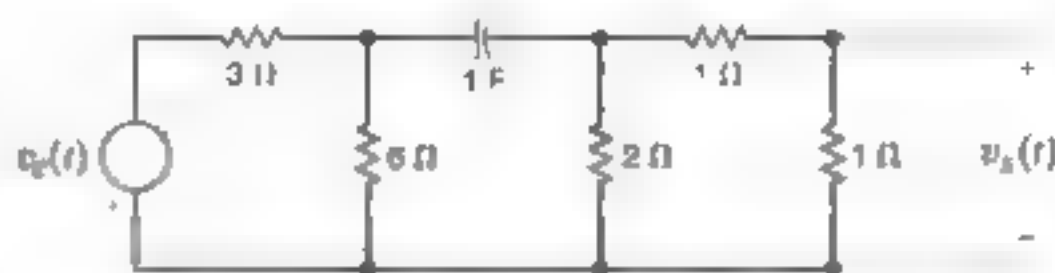


Figura P15.43

- 15.44** O sinal de entrada da rede mostrada na Fig. P15.44 é $v_e(t) = 10e^{-5t}u(t)$ V. Determine a energia normalizada (energia por unidade de resistência) total contida no sinal de saída $v_s(t)$

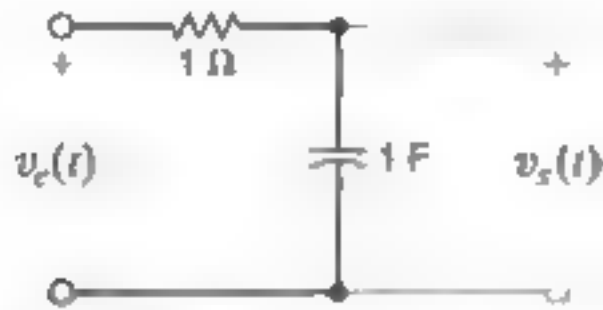


Figura P15.44

- 15.45** Calcule a energia normalizada contida no sinal $v_s(t)$ do circuito mostrado na Fig. P15.44 na faixa de frequências de $\omega = 2$ a $\omega = 4$ rad/s.

- 15.46** Determine a energia normalizada contida no sinal $v_s(t)$ do circuito mostrado na Fig. P15.44 na faixa de frequências de 0 a 1 rad/s.

- 15.47** Compare os valores da energia normalizada na entrada e na saída da rede mostrada na Fig. P15.47 considerando uma função forçamento de entrada expressa por $i_e(t) = 2e^{-4t}u(t)$ A.

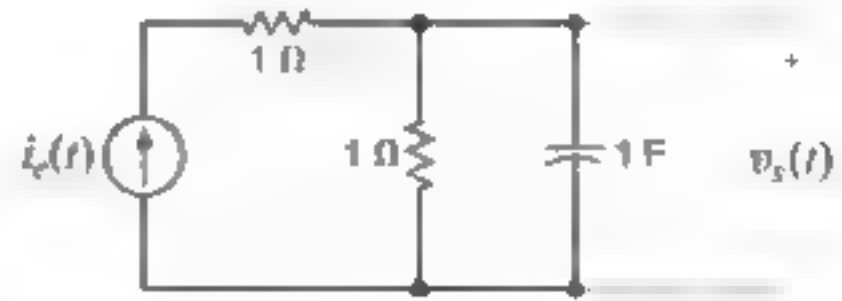


Figura P15.47

- 15.48** A forma de onda mostrada na Fig. 15.49 ilustra o que é chamado de ciclo ativo. Neste ciclo, D define a fração do período total que é ocupada pelo pulso. Determine o valor médio dessa forma de onda.

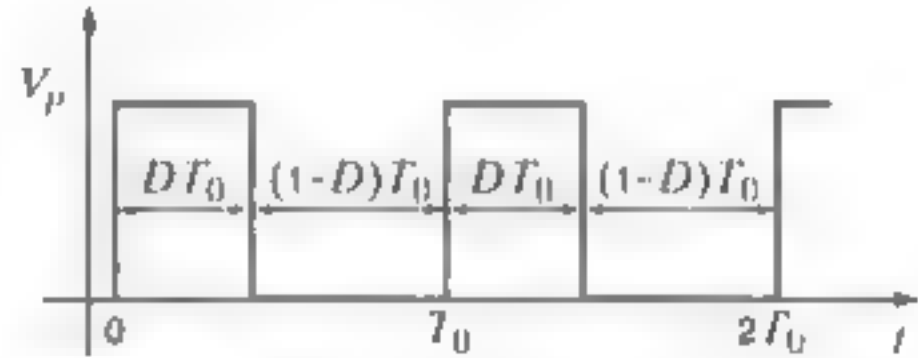


Figura P15.48

PROBLEMAS TÍPICOS DE EXAMES PROFISSIONAIS DE ENGENHARIA

- 15PEP-1** Dada a forma de onda mostrada na Fig. 15PEP-1, determine se o coeficiente a_n da série de Fourier trigonométrica possui valor nulo ou não nulo e por quê?

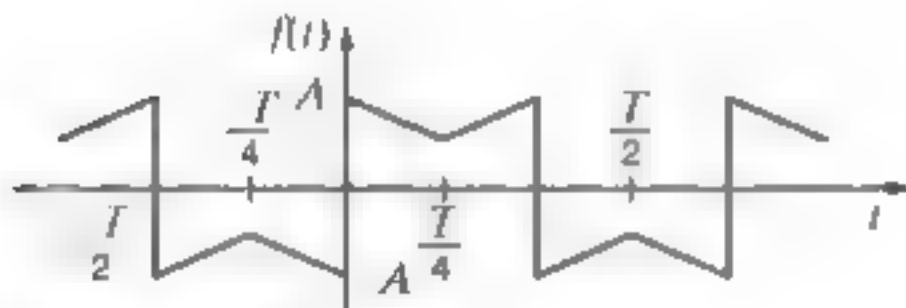


Figura 15PEP-1

- $a_n = 0$ para n par devido à simetria de meia-onda
- $a_n = 0$ para todo n devido à simetria ímpar
- a_n é um número finito e não nulo para todo n
- a_n é um número finito e não nulo para n par

- 15PEP-2** Dada a forma de onda mostrada na Fig. 15PEP-2, descreva o tipo de simetria e seu impacto no coeficiente trigonométrico b_n da série de Fourier.

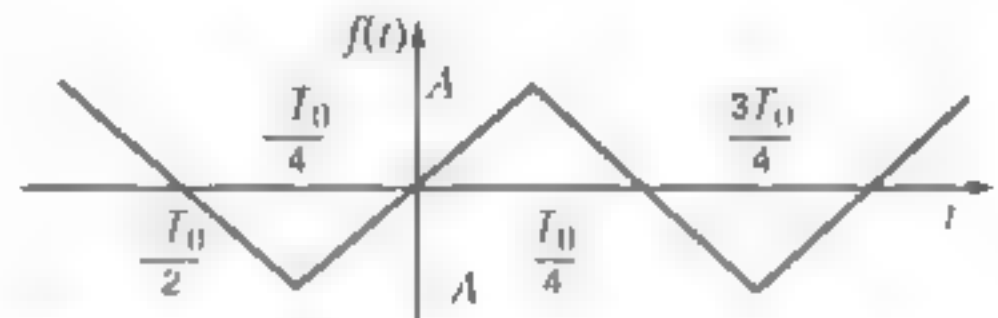


Figura 15PEP-2

- $b_n = 0$ para n par devido à simetria ímpar e b_n é um número não nulo para n ímpar
- b_n é um número não nulo para todo n
- $b_n = 0$ para todo n devido à simetria de meia-onda
- $b_n = 0$ para n par devido à simetria de meia-onda e b_n é um número não nulo para n ímpar

15PEP-3 Determine os três primeiros termos não nulos da tensão $v_s(t)$ do circuito mostrado na Fig. 15PEP-3 considerando que a tensão de entrada $v_F(t)$ seja expressa por

$$v_F(t) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{30}{n\pi} \cos 2nt \text{ V}$$

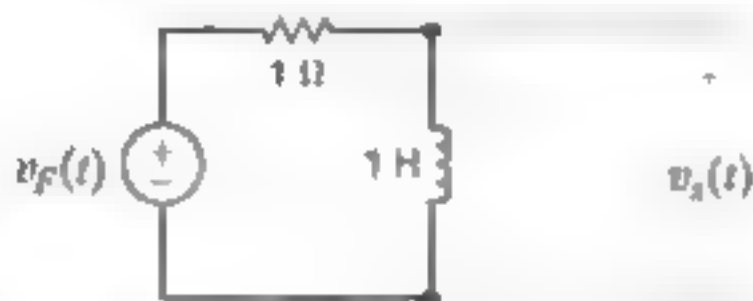


Figura 15PEP-3

- $8,54 \cos(2t + 26,57^\circ) + 4,63 \cos(4t + 14,04^\circ) + 3,14 \cos(6t + 9,46^\circ) + \dots \text{ V}$
- $10,82 \cos(2t + 35,63^\circ) + 6,25 \cos(4t + 18,02^\circ) + 2,16 \cos(6t + 30,27^\circ) + \dots \text{ V}$
- $4,95 \cos(2t - 25,43^\circ) + 3,19 \cos(4t + 60,34^\circ) + 1,78 \cos(6t - 20,19^\circ) + \dots \text{ V}$
- $7,35 \cos(2t + 50,12^\circ) + 4,61 \cos(4t + 21,24^\circ) + 2,28 \cos(6t - 10,61^\circ) + \dots \text{ V}$

15PEP-4 Determine a potência média absorvida pela rede mostrada na Fig. 15PEP-4, se

$$v_s(t) = 20 + 10 \cos(377t + 60^\circ) + 4 \cos(1131t + 45^\circ) \text{ V}$$

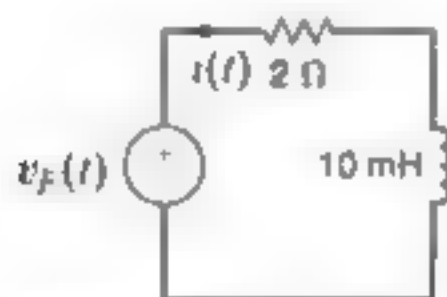


Figura 15PEP-4

- 175,25 W
- 205,61 W
- 150,36 W
- 218,83 W

15PEP-5 Determine o valor médio da forma de onda mostrada na Fig. 15PEP-5.

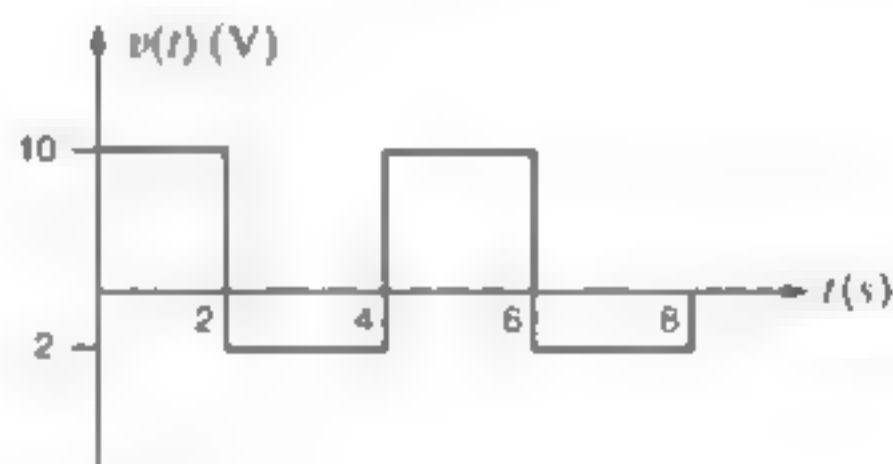


Figura 15PEP-5

- 6 V
- 4 V
- 8 V
- 2 V

QUADRIPOLOS



Cortesia de Kyu Oh/IStockphoto

Televisões de Alta Definição (HDTV) Agora você pode enxergar com mais nitidez – mais de cinco vezes mais nítido. É o que você consegue com as televisões de alta definição atualmente no mercado, as quais possuem de um a dois milhões de elementos de imagem (pixels) por quadro. Retornando um pouco no tempo, quando você viu pela primeira vez uma HDTV, certamente, ficou surpreso ao imaginar como você podia ficar satisfeito com uma televisão padrão – imagine ainda que essa mesma TV representou um salto de qualidade em relação à televisão preto e branco de seus avós, que recebia a programação apenas durante umas poucas horas do dia.

A resolução é a principal razão de uma HDTV propiciar uma imagem de alta definição. A alta resolução é conseguida nos sistemas de teledifusão das HDTV pela alta taxa de transmissão de milhões de pixels. Você aprecia uma HDTV não apenas por causa do sistema de transmissão de programas de TV em alta resolução, mas também porque sua HDTV possui uma eletrônica interna sofisticada que converte os sinais digitais de vídeo comprimidos recebidos em uma qualidade de imagem superior. Esse é um sis-

**AS METAS DE APRENDIZAGEM
DESTE CAPÍTULO SÃO:**

- Saber como calcular os parâmetros de admitância, impedância e híbridos e de transmissão das redes de duas portas ou quadripolos
- Ser capaz de realizar a conversão entre os parâmetros de admitância, impedância, híbridos e de transmissão
- Compreender a interconexão das redes de duas portas para formar redes mais complexas

tema de entrada e saída de última geração dedicado ao entretenimento.

Neste capítulo, as redes de duas portas (quadripolos) são descritas em termos das tensões e correntes de entrada e de saída. São examinados quatro conjuntos de parâmetros dos quadripolos, incluindo um conjunto híbrido especialmente útil para a descrição das características eletrônicas do dispositivo. Mostraremos o procedimento de solução para cada conjunto utilizando as operações em circuito aberto e em curto-circuito, e apresenta-se uma tabela para a fácil conversão de um conjunto para outro. As interconexões de redes em série, em paralelo e em cascata são analisadas em termos desses conjuntos de parâmetros. Uma televisão de alta definição pode ser vista como uma rede de duas portas – as variáveis internas não ficam aparentes. Você foca nos sinais de recepção dos programas como entradas em seu HDTV e na qualidade da imagem como saídas. Mais tarde, você aprenderá esses detalhes eletrônicos, porém, desde já você pode começar a trabalhar com os quadripolos simples apresentados neste capítulo – uma abertura importante para o mundo da eletrônica utilizada nos HDTVs.

16.1 Parâmetros de Admitância

Diz-se que uma rede linear possui uma única *porta* (acesso) quando apresenta a disposição mostrada na Fig. 16.1a, isto é, um único par de terminais. O par de terminais (dipolo) $A-B$ que constitui esta porta poderia representar um único componente (por exemplo, R , L ou C) ou alguma interconexão desses componentes. O circuito linear da Fig. 16.1b, com duas portas, é chamado de quadripolo. Como regra geral, os terminais $A-B$ representam o acesso de entrada (porta de entrada) e os terminais $C-D$ representam o acesso de saída (porta de saída).

No circuito de duas portas mostrado na Fig. 16.2, é usual designar as tensões e as correntes como indicado; isto é, os terminais superiores são positivos em relação aos terminais inferiores, as correntes entram no quadripolo pelos terminais superiores e, como a lei de Kirchhoff das correntes deve ser atendida em cada uma das portas, as correntes saem pelo terminal inferior dessas portas. Como o circuito é linear e não possui fontes independentes, o princípio da superposição pode ser aplicado na determinação da corrente I_1 , que pode ser escrita como a soma de duas correntes, uma devida a V_1 e uma devida a V_2 . Usando este princípio, pode-se escrever

$$I_1 = y_{11}V_1 + y_{12}V_2$$

em que y_{11} e y_{12} são basicamente constantes de proporcionalidade com unidades em siemens. De modo semelhante, a corrente I_2 pode ser escrita como

$$I_2 = y_{21}V_1 + y_{22}V_2$$

Portanto, as duas equações que descrevem o quadripolo são

$$\begin{aligned} I_1 &= y_{11}V_1 + y_{12}V_2 \\ I_2 &= y_{21}V_1 + y_{22}V_2 \end{aligned} \quad 16.1$$

ou, na forma matricial,

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix}$$

Observe que o subscrito 1 se refere à porta de entrada e o subscrito 2, à porta de saída, e as equações descrevem o que pode ser chamado de *parâmetros Y* da rede. Se esses parâmetros, y_{11} , y_{12} , y_{21} e y_{22} , forem conhecidos, a operação entrada/saída do quadripolo será completamente definida.

Com base na Eq. (16.1) pode-se determinar os parâmetros Y do seguinte modo. Observe que, a partir das equações, y_{11} é igual a I_1 dividido por V_1 com a saída curto-circuitada (isto é, $V_2 = 0$)

$$y_{11} = \left. \frac{I_1}{V_1} \right|_{V_2=0} \quad 16.2$$

Como y_{11} é uma admitância medida em siemens na entrada com a saída curto-circuitada, ela é chamada de *admitância de entrada de curto-circuito*. As equações indicam que os outros parâmetros Y podem ser determinados de modo semelhante:

$$\begin{aligned} y_{12} &= \left. \frac{I_1}{V_2} \right|_{V_1=0} \\ y_{21} &= \left. \frac{I_2}{V_1} \right|_{V_2=0} \\ y_{22} &= \left. \frac{I_2}{V_2} \right|_{V_1=0} \end{aligned} \quad 16.3$$

y_{12} e y_{21} são chamadas de *transadmitâncias de curto-circuito* e y_{22} é chamada de *admitância de saída de curto-circuito*. Em conjunto, os parâmetros Y são referidos como *parâmetros de admitância de curto-circuito*. Convém notar que, por meio da aplicação das definições precedentes, esses parâmetros podem ser determinados experimentalmente para a rede de um quadripolo cuja configuração real seja desconhecida.

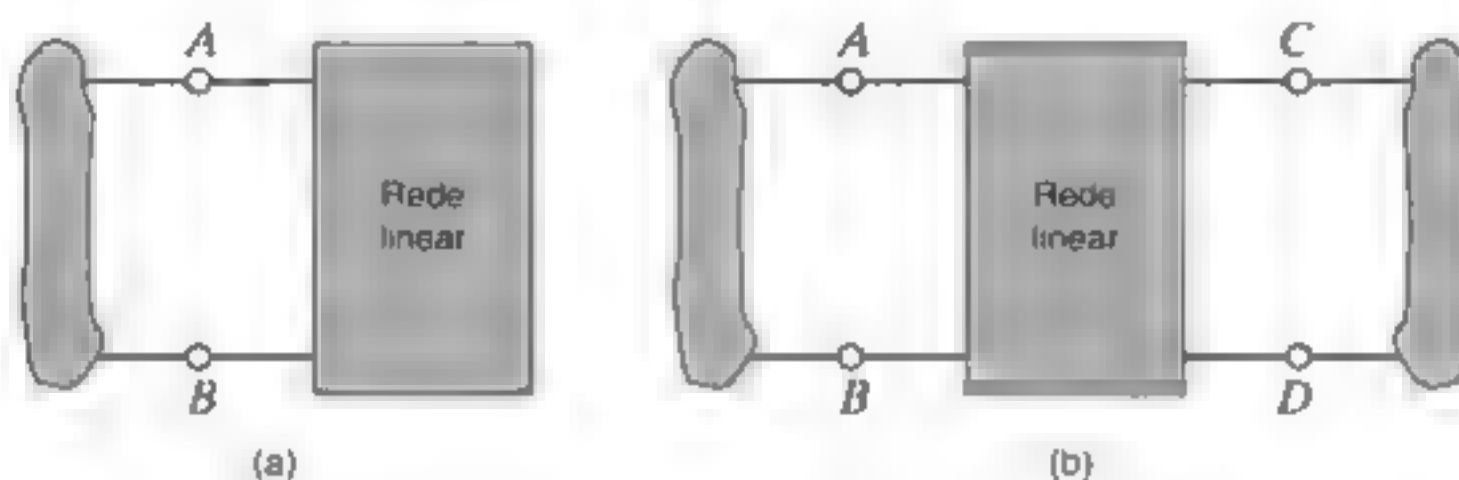


Figura 16.1 (a) Dipolo (rede de uma única porta), (b) quadripolo (rede de duas portas).

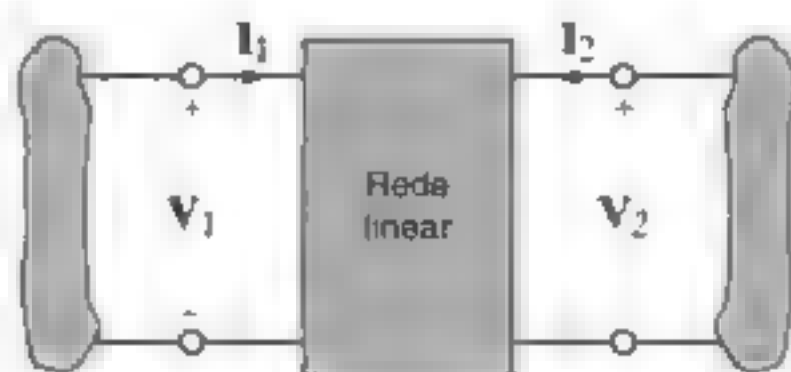


Figura 16.2 Quadripolo genérico.

EXEMPLO 16.1

Determine os parâmetros Y do quadripolo mostrado na Fig. 16.3a. Uma vez conhecidos esses parâmetros, será determinada a corrente que circula em uma carga de $4\ \Omega$ conectada à porta de saída quando uma fonte de corrente de 2 A é instalada na porta de entrada.

SOLUÇÃO

Com base na Fig. 16.3b, observa-se que

$$I_1 = V_1 \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} \right)$$

Portanto,

$$y_{11} = \frac{3}{2}\text{ S}$$

Como mostrado na Fig. 16.3c,

$$I_1 = -\frac{V_1}{2}$$

e, assim,

$$y_{12} = \frac{1}{2}\text{ S}$$

O parâmetro y_{21} também é calculado a partir da Fig. 16.3b usando a equação

$$I_2 = \frac{V_1}{2}$$

e, portanto,

$$y_{21} = \frac{1}{2}\text{ S}$$

Finalmente, pode-se obter o parâmetro y_{22} a partir da Fig. 16.3c usando

$$I_2 = V_2 \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2} \right)$$

e

$$y_{22} = \frac{5}{6}\text{ S}$$

Portanto, as equações que descrevem o quadripolo são

$$I_1 = \frac{3}{2}V_1 - \frac{1}{2}V_2, \quad I_2 = -\frac{1}{2}V_1 + \frac{5}{6}V_2$$

Essas equações podem, agora, ser empregadas na determinação da operação do quadripolo com relação a um dado conjunto de condições dos terminais. As condições nos terminais que serão examinadas estão mostradas na Fig. 16.3d. Com base nessa figura observa-se que

$$I_1 = 2\text{ A} \quad \text{e} \quad V_2 = -4I_2$$

A combinação desses resultados com as equações precedentes do quadripolo fornece

$$\begin{aligned} 2 &= \frac{3}{2}V_1 - \frac{1}{2}V_2 \\ 0 &= -\frac{1}{2}V_1 + \frac{13}{12}V_2 \end{aligned}$$

ou, na forma matricial,

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Observe com atenção que essas equações são simplesmente as equações nodais da rede mostrada na Fig. 16.3d. Resolvendo-as, obtém-se a tensão $V_2 = 8/11\text{ V}$ e, portanto, a corrente $I_2 = -2/11\text{ A}$.

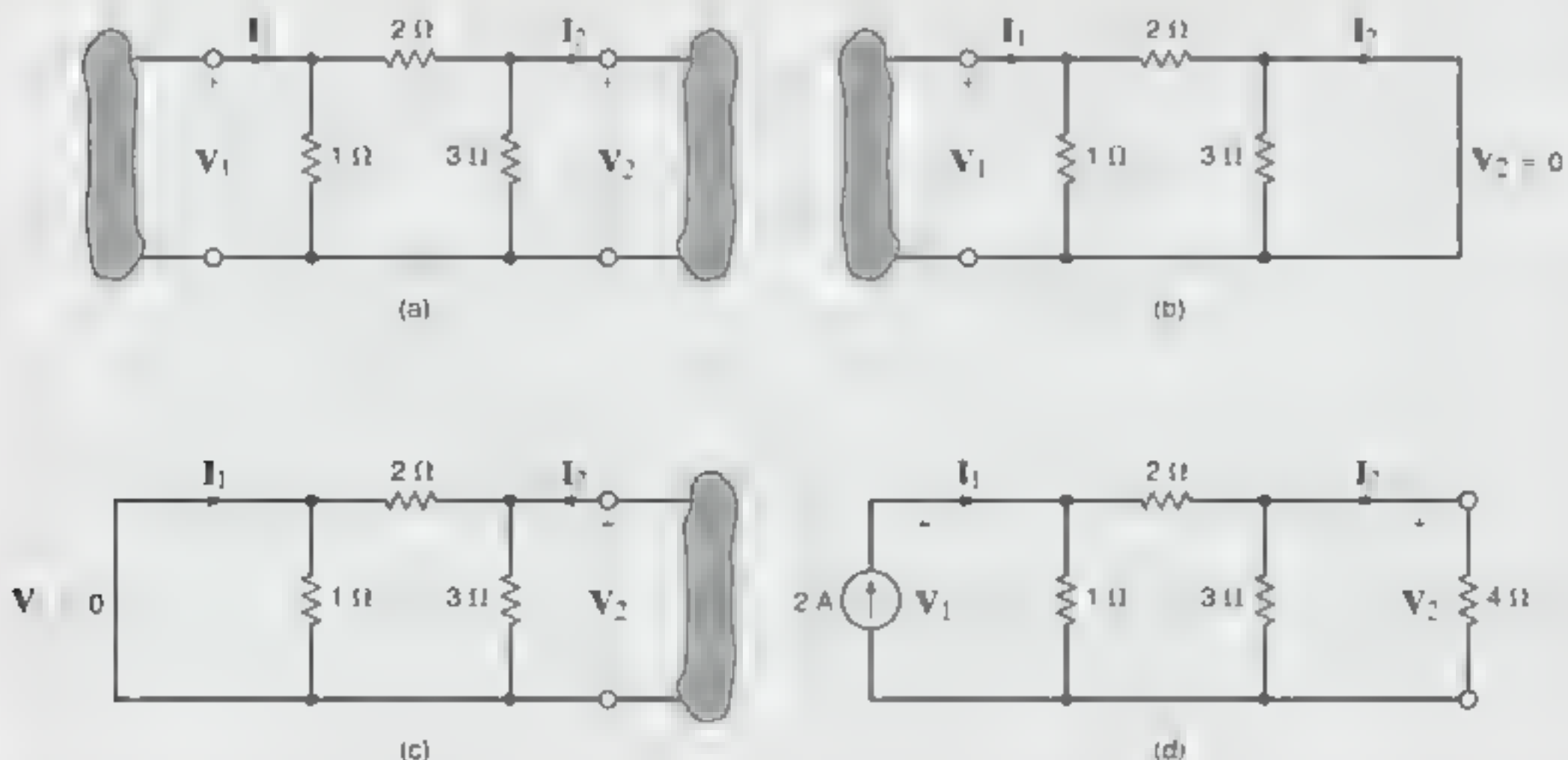


Figura 16.3 Redes utilizadas no Exemplo 16.1.

Avaliação do Aprendizado

E16.1 Determine os parâmetros Y do quadripolo mostrado na Fig. E16.1.

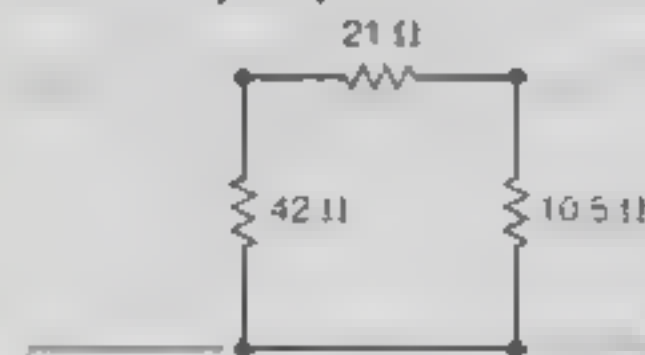


Figura E16.1

RESPOSTA:

$$y_{11} = \frac{1}{14} \text{ S},$$

$$y_{12} = y_{21} = -\frac{1}{21} \text{ S}; y_{22} = \frac{1}{7} \text{ S}.$$

E16.2 Se uma fonte de corrente de 10 A for conectada à entrada do quadripolo da Fig. E16.1, determine a corrente que passa pelo resistor de 5 Ω conectado à porta de saída.

RESPOSTA: $I_2 = -4,29 \text{ A}$.

E16.3 Determine os parâmetros Y do quadripolo mostrado na Fig. E16.3.

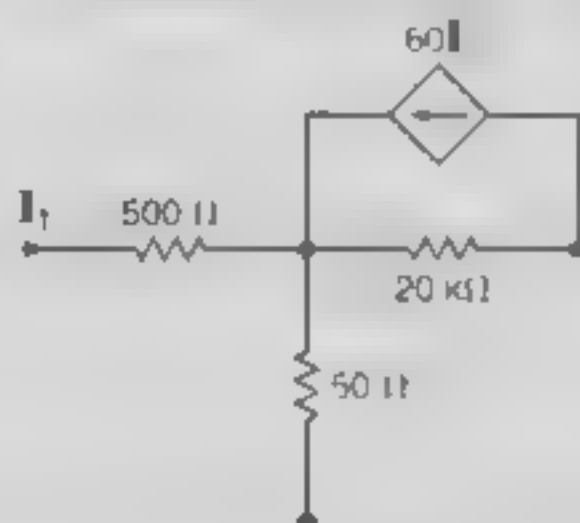


Figura E16.3

RESPOSTA:

$$y_{11} = 282,2 \text{ } \mu\text{S}; y_{12} = -704 \text{ nS},$$

$$y_{21} = 16,9 \text{ mS}; y_{22} = 7,74 \text{ } \mu\text{S}.$$

16.2 Parâmetros de Impedância

Admitindo novamente que o quadripolo seja uma rede linear que não contenha fontes independentes, o princípio da superposição de efeitos pode ser utilizado para escrever as tensões de entrada e de saída como a soma de duas componentes, uma devido à corrente I_1 e outra devido à corrente I_2 , ou seja,

$$\begin{aligned} V_1 &= z_{11} I_1 + z_{12} I_2 \\ V_2 &= z_{21} I_1 + z_{22} I_2 \end{aligned} \quad 16.4$$

Essas equações, que descrevem o quadripolo, também podem ser escritas na forma matricial como

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} \quad 16.5$$

Da mesma forma que os parâmetros Y , estes *parâmetros Z* podem ser obtidos como

$$\begin{aligned} z_{11} &= \left. \frac{V_1}{I_1} \right|_{I_2=0} \\ z_{12} &= \left. \frac{V_1}{I_2} \right|_{I_1=0} \\ z_{21} &= \left. \frac{V_2}{I_1} \right|_{I_2=0} \\ z_{22} &= \left. \frac{V_2}{I_2} \right|_{I_1=0} \end{aligned} \quad 16.6$$

Nas equações precedentes, fazer $I_1 = 0$ ou $I_2 = 0$ é equivalente a interromper o circuito na porta de entrada ou na porta de saída. Por isso, os parâmetros Z são chamados de *parâmetros de impedância de circuito aberto*. O coeficiente z_{11} é chamado de *impedância de entrada de circuito aberto*, z_{22} é chamado de *impedância de saída de circuito aberto* e z_{12} e z_{21} são designados por *transimpedâncias de circuito aberto*.

EXEMPLO 16.2

Deseja-se obter os parâmetros Z referentes à rede da Fig. 16.4a. Uma vez conhecidos, os parâmetros serão utilizados na determinação da corrente que passa por um resistor de 4 Ω conectado aos terminais de saída, quando se conecta aos terminais de entrada uma fonte de $12/0^\circ \text{ V}$ com impedância interna de $1 + j0 \text{ } \Omega$.

SOLUÇÃO

Na Fig. 16.4a observa-se que

$$z_{11} = 2 + j4 \text{ } \Omega$$

$$z_{12} = j4 \text{ } \Omega$$

$$z_{21} = -j4 \text{ } \Omega$$

$$z_{22} = -j4 + j2 = -j2 \text{ } \Omega$$

As equações do quadripolo são, portanto,

$$V_1 = (2 - j4)I_1 - j4I_2$$

$$V_2 = -j4I_1 - j2I_2$$

As condições nos terminais da rede mostrada na Fig. 16.4b são

$$V_1 = 12 \angle 0^\circ - (1)I_1$$

$$V_2 = -4I_2$$

A combinação destes resultados com as equações do quadripolo fornece

$$12 \angle 0^\circ = (3 - j4)I_1 - j4I_2$$

$$0 = j4I_1 + (4 - j2)I_2$$

É interessante observar que essas são as equações de malha da rede. Ao resolver as equações em termos da corrente I_2 , obtém-se $I_2 = 1,61 \angle 137,73^\circ$ A que é a corrente na carga de 4Ω .

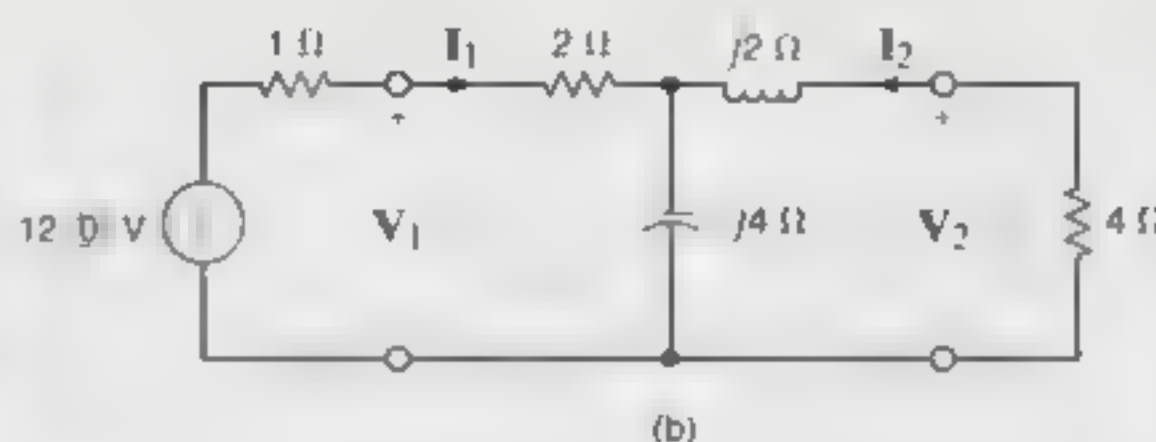
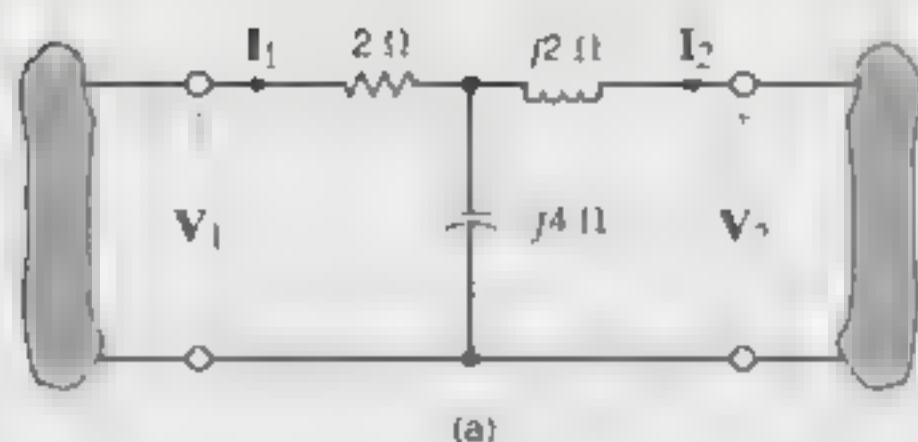
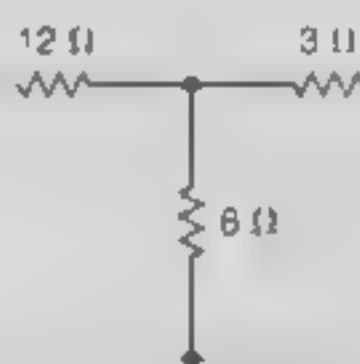


Figura 16.4 Circuitos empregados no Exemplo 16.2.

Avaliação do Aprendizado

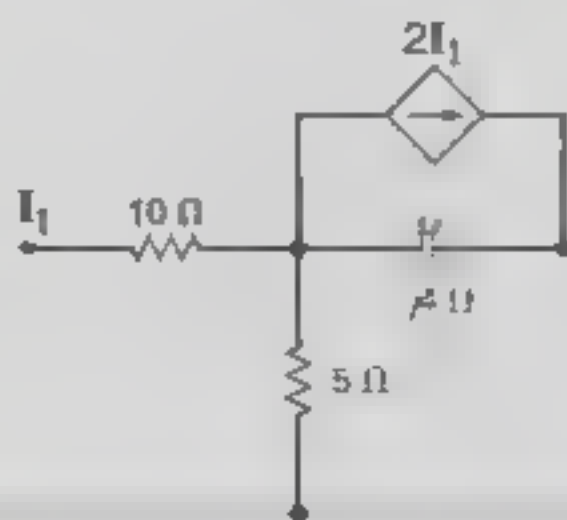
E16.4 Determine os parâmetros Z da rede mostrada na Fig. E16.4. Em seguida, calcule a corrente através de uma carga de 4Ω quando uma fonte de $12 \angle 0^\circ$ V é conectada aos terminais de entrada.



RESPOSTA: $I_2 = -0,73$ A.

Figura E16.4

E16.5 Determine os parâmetros Y do quadripolo mostrado na Fig. E16.5.



RESPOSTAS:

$$z_{11} = 15 \Omega$$

$$z_{12} = 5 \Omega \quad z_{21} = 5 - j8 \Omega$$

$$z_{22} = 5 - j4 \Omega$$

Figura E16.5

16.3 Parâmetros Híbridos

Admitindo as mesmas hipóteses utilizadas para desenvolver os parâmetros Y e Z , pode-se obter o que se chama comumente de *parâmetros híbridos*. No par de equações que define esses parâmetros, a tensão V_1 e a corrente I_2 são as variáveis independentes. Por conseguinte, as equações do quadripolo em função dos parâmetros híbridos são

$$\begin{aligned} V_1 &= h_{11}I_1 + h_{12}V_2 \\ I_2 &= h_{21}I_1 + h_{22}V_2 \end{aligned} \quad 16.7$$

ou, na forma matricial,

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ V_2 \end{bmatrix} \quad 16.8$$

Esses parâmetros são particularmente importantes na análise de circuitos com transistores. Os parâmetros são determinados por meio das seguintes equações:

$$h_{11} = \left. \frac{V_1}{I_1} \right|_{V_2=0}$$

$$h_{12} = \left. \frac{V_1}{V_2} \right|_{I_1=0}$$

$$h_{21} = \left. \frac{I_2}{I_1} \right|_{V_2=0}$$

$$h_{22} = \left. \frac{I_2}{V_2} \right|_{I_1=0}$$

16.9

Os parâmetros h_{11} , h_{12} , h_{21} e h_{22} representam, respectivamente, a *impedância de entrada de curto-circuito*, o *ganho inverso de tensão de circuito aberto*, o *ganho direto de corrente de curto-circuito* e a *admitância de saída de circuito aberto*. Por causa da diversidade de parâmetros, eles são chamados de *parâmetros híbridos*. Na análise de circuitos com transistores, os parâmetros h_{11} , h_{12} , h_{21} e h_{22} são normalmente rotulados como h_i , h_r , h_f e h_o .

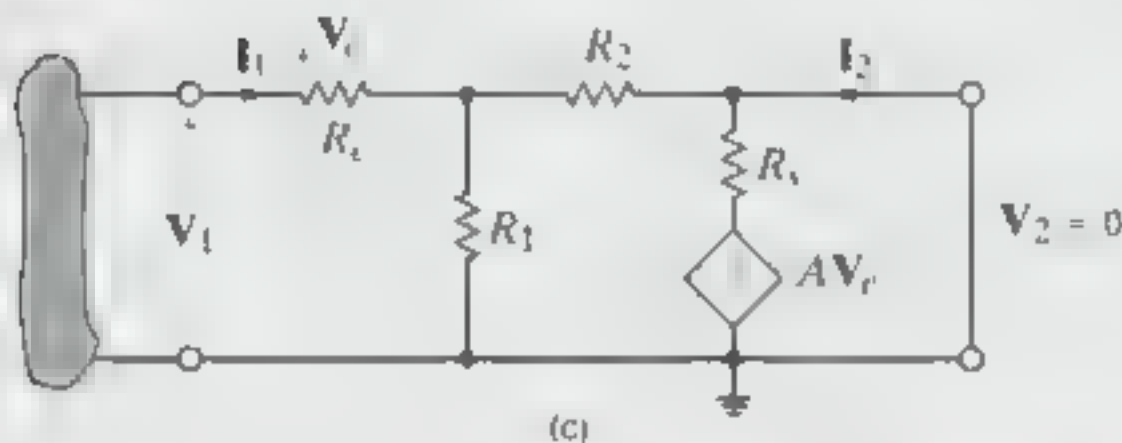
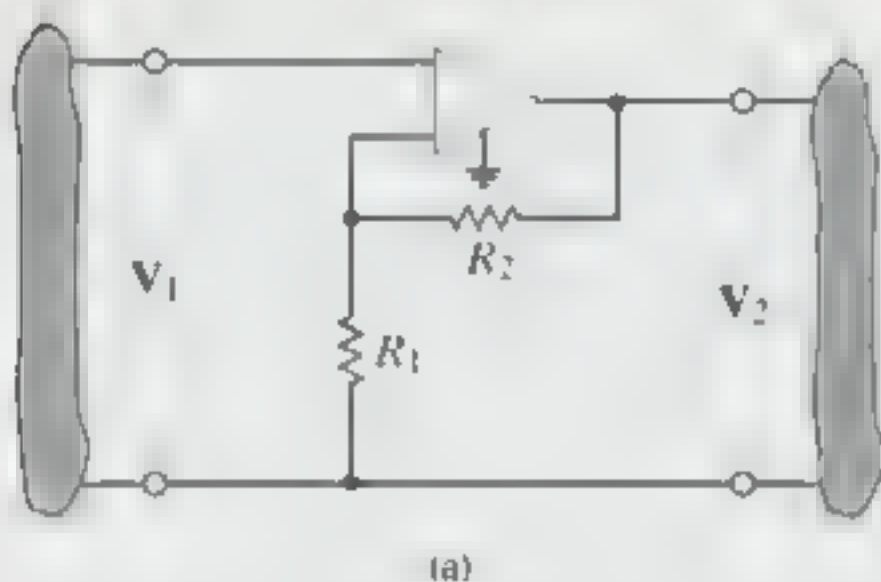
EXEMPLO 16.3

Um circuito equivalente para o amplificador operacional da Fig. 16.5a está mostrado na Fig. 16.5b. Determine os parâmetros híbridos dessa rede.

SOLUÇÃO

O parâmetro h_{11} é deduzido com base na Fig. 16.5c. Com a saída curto-circuitada, h_{11} é uma função apenas das resistências R_i , R_1 e R_2 , e

$$h_{11} = R_i + \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$



A Fig. 16.5d é usada para se deduzir h_{12} . Como $I_1 = 0$, $V_1 = 0$ e a relação entre V_1 e V_2 é a de um divisor de tensão simples.

$$V_1 = \frac{V_2 R}{R_1 + R_2}$$

Portanto,

$$h_{12} = \frac{R_1}{R_1 + R_2}$$

A LKT e a LKC podem ser aplicadas à Fig. 16.5c para determinar h_{21} . As duas equações que relacionam a corrente I_2 à corrente I_1 são

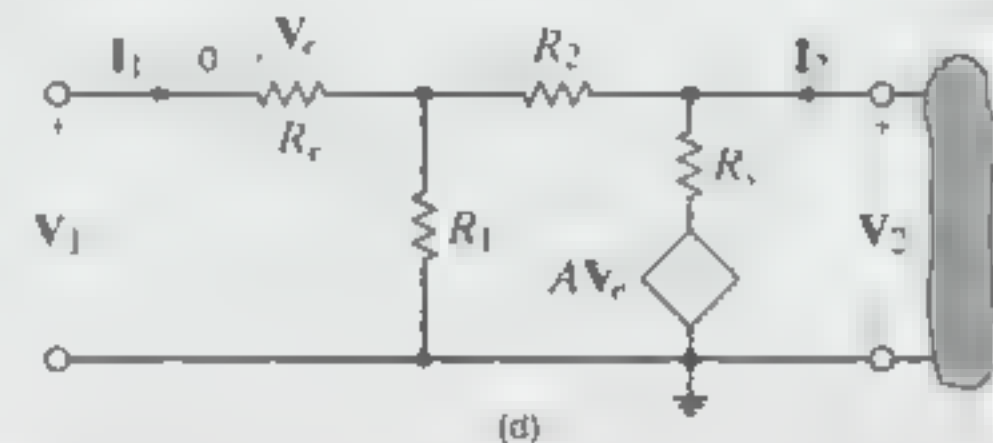
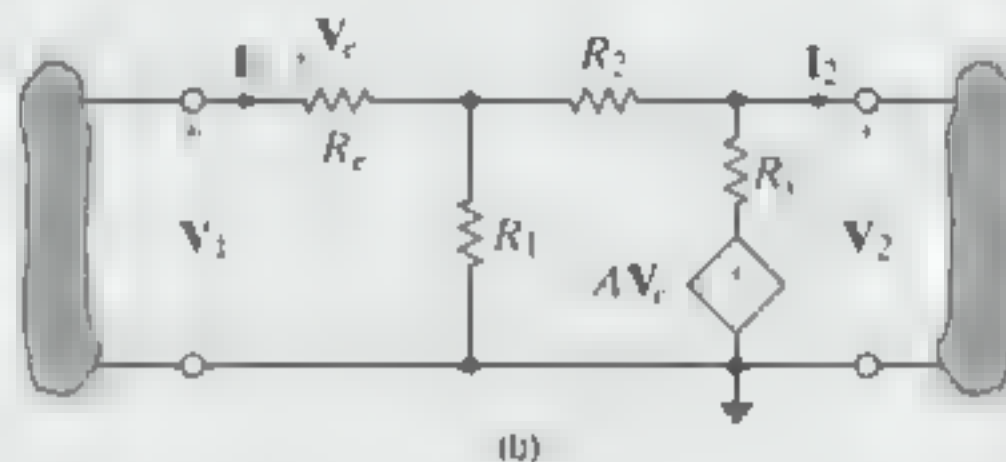


Figura 16.5 Circuitos empregados no Exemplo 16.3.

$$V_1 = I_1 R_1$$

$$I_1 = \frac{-AV_1}{R_1} = \frac{I_1 R_1}{R_1 + R_2}$$

Portanto,

$$h_{21} = -\left(\frac{AR_1}{R_2} + \frac{R_2}{R_1 + R_2}\right)$$

Finalmente, a relação entre I_2 e V_2 na Fig. 16.5d é

$$\begin{aligned} V_1 &= R_1(R_1 + R_2) \\ I_1 &= R_1 + R_1 + R_2 \end{aligned}$$

e, assim,

$$h_{22} = \frac{R_2 + R_1 + R_2}{R_1(R_1 + R_2)}$$

As equações da rede são, portanto,

$$V_1 = \left(R + \frac{R R_1}{R_1 + R_2}\right) I_1 + \frac{R}{R_1 + R_2} V_2$$

$$I_1 = \left(\frac{AR}{R_1} + \frac{R}{R_1 + R_2}\right) I_1 + \frac{R + R_1 + R_2}{R_1(R_1 + R_2)} V_2$$

Avaliação do Aprendizado

E16.6 Determine os parâmetros híbridos associados à rede mostrada na Fig. E16.4.

RESPOSTAS:

$$h_{11} = 14 \, \Omega.$$

$$h_{12} = \frac{2}{3}; h_{21} = -\frac{2}{3} \text{ e } h_{22} = \frac{1}{9} \text{ S}$$

E16.7 Se uma carga de $4 \, \Omega$ for conectada aos terminais de saída do circuito analisado no exercício de Avaliação do Aprendizado E16.6, determine a impedância de entrada do quadripolo com a carga conectada.

RESPOSTA: $Z_i = 15,23 \, \Omega$.

E16.8 Determine os parâmetros híbridos associados ao quadripolo mostrado na Fig. E16.3

RESPOSTAS:

$$h_{11} = 3543,6 \, \Omega,$$

$$h_{12} = 2,49 \times 10^{-3}; h_{21} = 59,85 \text{ e}$$

$$h_{22} = 49,88 \, \mu\text{S}.$$

16.4 Parâmetros de Transmissão

Os últimos parâmetros a serem discutidos são os *parâmetros de transmissão*. Eles são definidos por meio das equações

$$\begin{aligned} V_1 &= AV_2 - BI_2 \\ I_1 &= CV_2 - DI_2 \end{aligned} \quad 16.10$$

ou, na forma matricial,

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_2 \\ -I_2 \end{bmatrix} \quad 16.11$$

Esses parâmetros são muito úteis na análise de circuitos conectados em cascata, conforme será mostrado adiante. Os parâmetros são determinados por meio das seguintes equações:

$$\begin{aligned} A &= \left. \frac{V_1}{V_2} \right|_{I_2=0} \\ B &= \left. \frac{V_1}{-I_2} \right|_{V_2=0} \\ C &= \left. \frac{I_1}{V_2} \right|_{I_2=0} \\ D &= \left. \frac{I_1}{-I_2} \right|_{V_2=0} \end{aligned} \quad 16.12$$

Os parâmetros A , B , C e D representam, respectivamente, a *razão de tensão de circuito aberto*, o *negativo da transimpedância de curto-circuito*, a *transadmitância de circuito-aberto* e o *negativo da razão de corrente de curto-circuito*. Por motivos óbvios, os parâmetros de transmissão são habitualmente referidos como *parâmetros ABCD*.

EXEMPLO 16.4

Serão agora determinados os parâmetros de transmissão da rede mostrada na Fig. 16.6.

SOLUÇÃO

Considere a relação entre as variáveis nas condições estabelecidas pela Eq. (16.12) em função dos parâmetros. Por exemplo, com a corrente $I_2 = 0$, a tensão V_2 pode ser escrita como

$$V_2 = \frac{V_1}{1 + 1/j\omega} \left(\frac{1}{j\omega} \right)$$

ou

$$A = \frac{V_1}{V_2} \Big|_{I_2=0} = 1 + j\omega$$

Da mesma forma, com a tensão $V_2 = 0$, a relação entre a corrente I_2 e a tensão V_1 é

$$I_2 = \frac{V_1}{1 + \frac{1}{j\omega}} \left(\frac{1/j\omega}{1 + 1/j\omega} \right)$$

ou

$$B = \frac{V_1}{I_2} = 2 + j\omega$$

Analogamente, pode-se mostrar que $C = j\omega$ e $D = 1 + j\omega$.

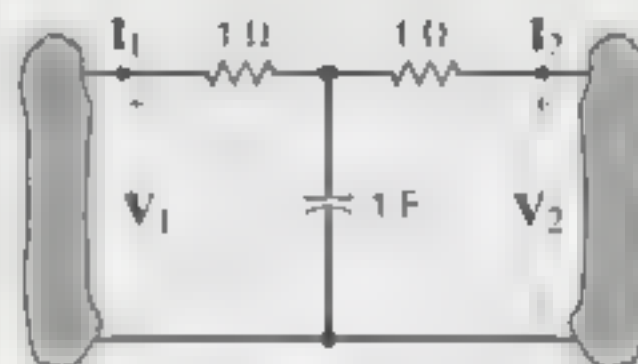


Figura 16.6 Rede utilizada no Exemplo 16.4.

Avaliação do Aprendizado

E16.9 Calcule os parâmetros de transmissão do quadripolo mostrado na Fig. E16.1.

RESPOSTAS:

$$A = 3, B = 31 \Omega,$$

$$C = \frac{1}{6} \text{ S e } D = \frac{3}{2}$$

E16.10 Obtenha os parâmetros de transmissão do quadripolo mostrado na Fig. E16.5.

RESPOSTAS:

$$A = 0,843 + j1,348; B = 4,61 + j3,37 \Omega;$$

$$C = 0,056 + j0,09 \text{ S e } D = 0,64 + j0,225$$

E16.11 Determine a tensão V_F , considerando que $V_2 = 220 \angle 0^\circ \text{ V rms}$ para o quadripolo mostrado na Fig. E16.11

RESPOSTA:

$$V_F = 1015,9 \angle -137,63^\circ \text{ V rms.}$$

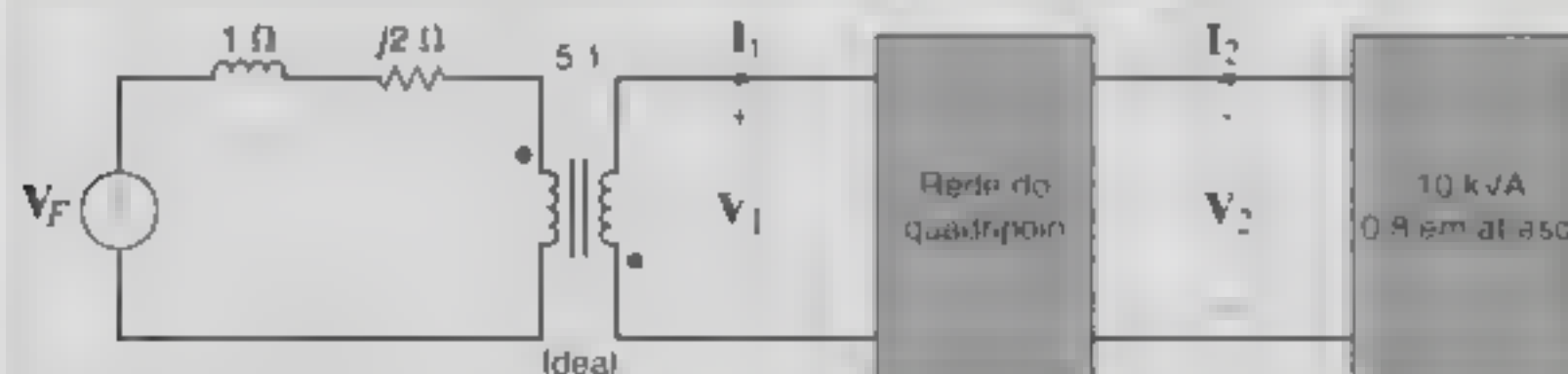


Figura E16.11

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,333 + j0,333 & 1,333 + j6 \\ j0,1667 & (0,333 + j0,333) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_2 \\ I_2 \end{bmatrix}$$

16.5 Conversão de Parâmetros

Se todos os parâmetros de um quadripolo forem definidos, será possível relacionar um conjunto de parâmetros com outro uma vez que os parâmetros estabelecem relações entre as variáveis V_1, I_1, V_2 e I_2 .

A Tabela 16.1 lista todas as expressões de conversão que relacionam um conjunto de parâmetros a outro. Observe que $\Delta_Z, \Delta_Y, \Delta_H$ e Δ_T são, respectivamente, os determinantes das matrizes de parâmetros Z, Y , híbridos e ABCD. Portanto, dado o conjunto de parâmetros de uma rede, pode-se utilizar a Tabela 16.1 para obter outros conjuntos.

TABELA 16.1 Fórmulas para conversão de parâmetros dos quadripolos

$\begin{bmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \frac{y_{22}}{\Delta_y} & \frac{y_{12}}{\Delta_y} \\ \frac{y_{21}}{\Delta_y} & \frac{y_{11}}{\Delta_y} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \frac{A}{C} & \frac{\Delta_T}{C} \\ \frac{1}{C} & \frac{D}{C} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \frac{\Delta_H}{h_{22}} & \frac{h_{12}}{h_{22}} \\ \frac{-h_{21}}{h_{22}} & \frac{1}{h_{22}} \end{bmatrix}$
$\begin{bmatrix} \frac{z_{22}}{\Delta_z} & \frac{-z_{12}}{\Delta_z} \\ -\frac{z_{21}}{\Delta_z} & \frac{z_{11}}{\Delta_z} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} D & -\Delta_T \\ B & B \\ 1 & A \\ B & B \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & h_{12} \\ h_{11} & h_{21} \\ h_{21} & \Delta_H \\ h_{11} & h_{21} \end{bmatrix}$
$\begin{bmatrix} z_{11} & \Delta_z \\ z_{21} & z_{21} \\ \frac{1}{z_{21}} & \frac{z_{22}}{z_{21}} \\ z_{21} & z_{21} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -y_{22} & -1 \\ y_{21} & y_{21} \\ -\Delta_y & y_{11} \\ y_{21} & y_{21} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -\Delta_H & h_{11} \\ h_{21} & h_{21} \\ -h_{22} & -1 \\ h_{21} & h_{21} \end{bmatrix}$
$\begin{bmatrix} \Delta_z & z_{12} \\ z_{22} & z_{22} \\ z_{22} & 1 \\ z_{22} & z_{22} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \frac{1}{y_{11}} & \frac{y_{12}}{y_{11}} \\ y_{11} & y_{11} \\ y_{21} & \frac{\Delta_y}{y_{11}} \\ y_{11} & y_{11} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} B & \Delta_T \\ D & D \\ \frac{1}{D} & \frac{C}{D} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{bmatrix}$

Avaliação do Aprendizado

E16.12 Determine os parâmetros Y de um quadripolo cujos parâmetros Z são

$$Z = \begin{bmatrix} 18 & 6 \\ 6 & 9 \end{bmatrix}$$

RESPOSTAS:

$$y_{11} = \frac{1}{14} \text{ S.}$$

$$y_{12} = y_{21} = \frac{1}{21} \text{ S. e}$$

$$y_{22} = \frac{1}{7} \text{ S.}$$

16.6 Interconexão de Quadripolos

A interligação de quadripolos é importante porque ao se projetarem sistemas complexos é geralmente mais fácil projetar um certo número de subsistemas mais simples que possam ser interligados para formar o sistema completo. Se cada subsistema for tratado como um quadripolo, as técnicas de interconexão descritas nesta seção fornecerão uma visão abrangente segundo a qual o sistema pode ser analisado e/ou projetado. Dessa forma, serão agora ilustradas as técnicas de abordagem de uma rede como uma combinação de sub-redes. Portanto, os quadripolos serão analisados como uma interligação de quadripolos mais simples. Embora os quadripolos possam ser interconectados de diversas formas, apenas três tipos de conexão serão apresentados: paralela, em série e em cascata.

Para que as interligações de quadripolos sejam válidas, elas devem satisfazer a determinados requisitos específicos, os quais podem ser encontrados no livro *Network Analysis and Synthe-*

sis de L. Weinberg (McGraw-Hill, 1962). Os exemplos a seguir servirão para ilustrar as técnicas de interconexão.

No caso da interconexão em paralelo, um quadripolo Q é constituído de dois quadripolos, Q_a e Q_b , interligados como mostrado na Fig. 16.7. Desde que as características dos terminais dos dois quadripolos Q_a e Q_b não sejam alteradas pela interligação mostrada na figura, os parâmetros Y da rede como um todo serão

$$\begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_{11a} + y_{11b} & y_{12a} + y_{12b} \\ y_{21a} + y_{21b} & y_{22a} + y_{22b} \end{bmatrix} \quad 16.13$$

e, portanto, para se determinar os parâmetros Y de toda a rede, simplesmente adicionam-se os parâmetros Y dos dois quadripolos Q_a e Q_b .

De modo semelhante, se o quadripolo Q for obtido pela conexão em série de dois quadripolos Q_a e Q_b , conforme mostrado na Fig. 16.8, então, novamente, desde que as características

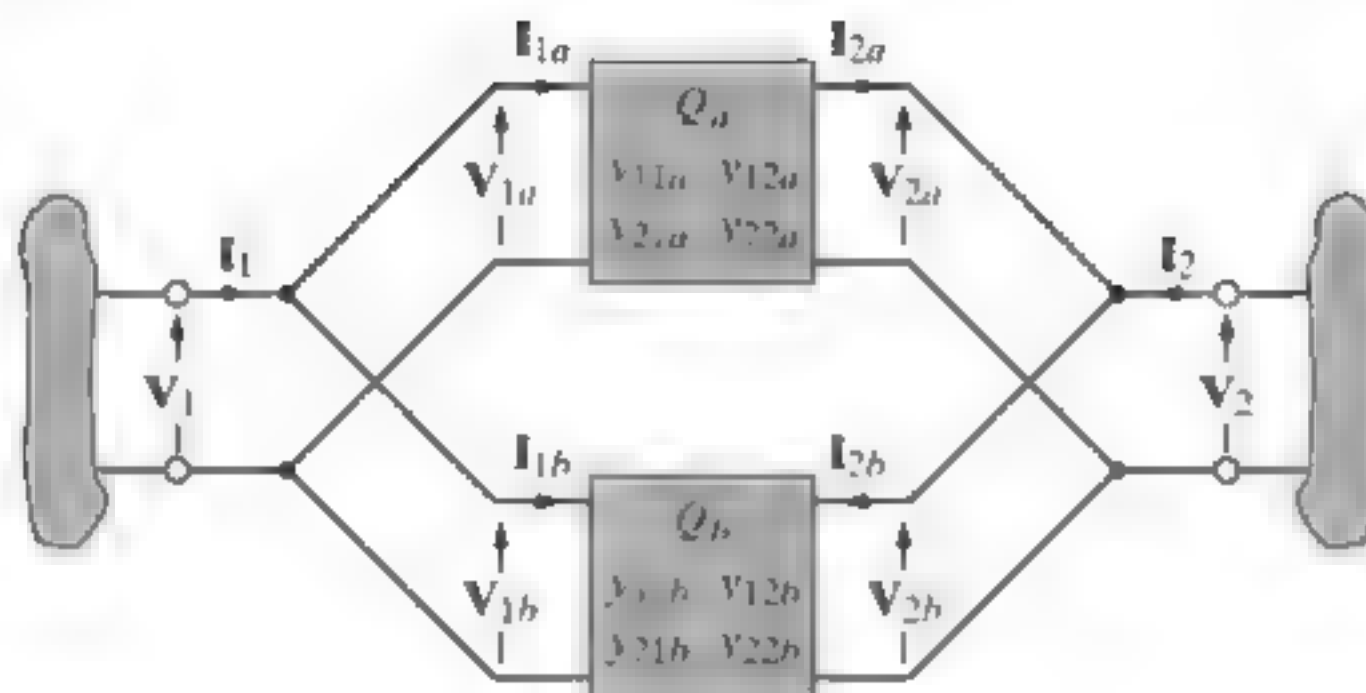


Figura 16.7 Interconexão de quadripolos em paralelo.

dos terminais dos dois quadripolos Q_a e Q_b não sejam alteradas com a interligação em série, os parâmetros Z da rede como um todo serão

$$\begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{11a} + Z_{11b} & Z_{12a} + Z_{12b} \\ Z_{21a} + Z_{21b} & Z_{22a} + Z_{22b} \end{bmatrix} \quad 16.14$$

Portanto, os parâmetros Z da rede como um todo são iguais à soma dos parâmetros dos quadripolos Q_a e Q_b .

Finalmente, se um quadripolo Q for constituído por uma interconexão em cascata de Q_a e Q_b , conforme mostrado na Fig. 16.9, as equações da rede como um todo serão

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_a & B_a \\ C_a & D_a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_b & B_b \\ C_b & D_b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_2 \\ -I_2 \end{bmatrix} \quad 16.15$$

Logo, os parâmetros de transmissão do circuito total são obtidos pela multiplicação de matrizes conforme indicado anteriormente. A ordem de multiplicação das matrizes é importante e realizada na sequência em que os quadripolos são interligados.

A interligação em cascata é muito útil. Diversos sistemas de grande porte podem ser modelados, convenientemente, como a interconexão em cascata de um certo número de estágios. Por exemplo, o sinal de rádio muito fraco captado por uma antena

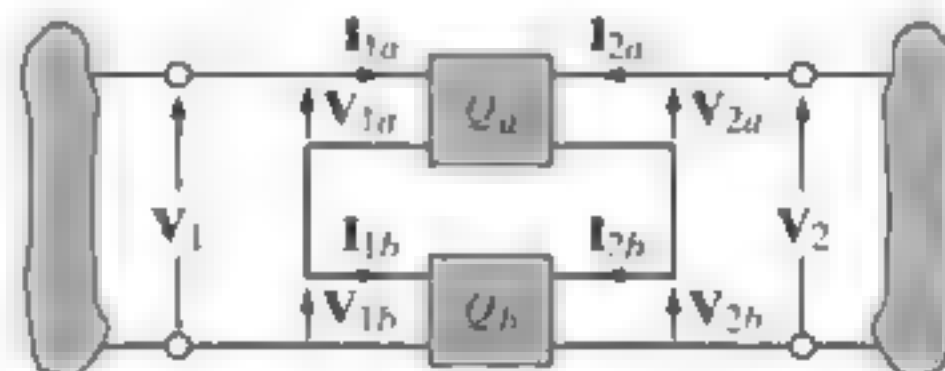


Figura 16.8 Interconexão de quadripolos em série.

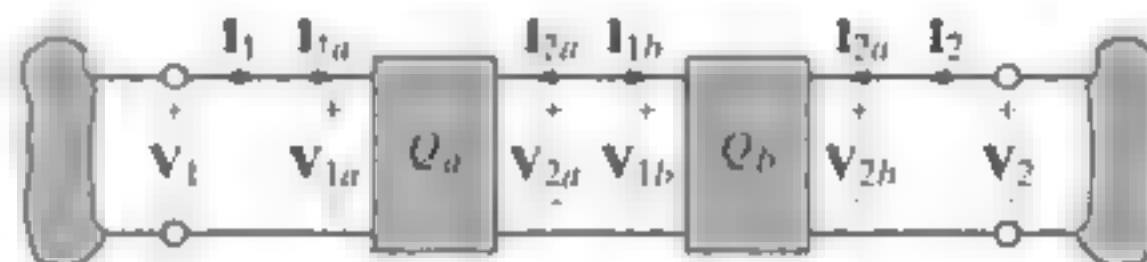


Figura 16.9 Interconexão de redes em cascata.

passa por um certo número de estágios sucessivos de amplificação – cada um deles podendo ser modelado como uma sub-rede de quadripolo. Além disso, ao contrário do que ocorre com os outros esquemas de interconexão, não há restrições quanto aos parâmetros de Q_a e Q_b na obtenção dos parâmetros do quadripolo resultante da interligação.

EXEMPLO 16.5

Determine os parâmetros Y da rede mostrada na Fig. 16.10a considerando-a como uma combinação em paralelo de duas redes conforme ilustrado na Fig. 16.10b. A rede capacitiva será designada por Q_a e a rede resistiva, por Q_b .

SOLUÇÃO

Os parâmetros Y de Q_a são

$$\begin{aligned} y_{11a} &= j\frac{1}{2} \text{ S} & y_{12a} &= -j\frac{1}{2} \text{ S} \\ y_{21a} &= -j\frac{1}{2} \text{ S} & y_{22a} &= j\frac{1}{2} \text{ S} \end{aligned}$$

e os parâmetros Y de Q_b são

$$\begin{aligned} y_{11b} &= \frac{3}{5} \text{ S} & y_{12b} &= \frac{1}{5} \text{ S} \\ y_{21b} &= -\frac{1}{5} \text{ S} & y_{22b} &= \frac{2}{5} \text{ S} \end{aligned}$$

Assim, os parâmetros Y da rede da Fig. 16.10 são

$$\begin{aligned} y_{11} &= \frac{3}{5} + j\frac{1}{2} \text{ S} & y_{12} &= \left(\frac{1}{5} + j\frac{1}{2} \right) \text{ S} \\ y_{21} &= -\left(\frac{1}{5} + j\frac{1}{2} \right) \text{ S} & y_{22} &= \frac{2}{5} + j\frac{1}{2} \text{ S} \end{aligned}$$

Para que se possa apreciar a simplicidade dessa abordagem, basta tentar obter diretamente os parâmetros Y da rede mostrada na Fig. 16.10a.

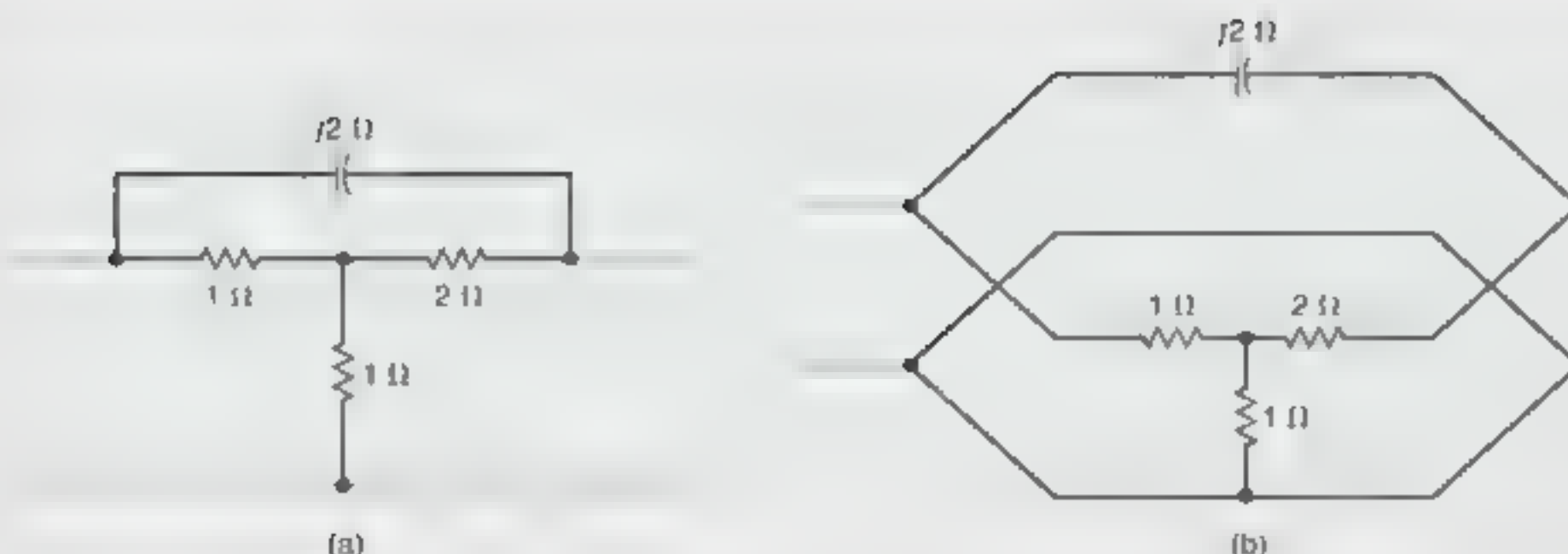


Figura 16.10 Rede formada pela associação em paralelo de duas sub-redes.

EXEMPLO 16.6

Determine os parâmetros Z do quadripolo mostrado na Fig. 16.10a. O circuito é redesenhado na Fig. 16.11, ilustrando a interconexão em série. O quadripolo superior será referido como Q_a e o inferior, por Q_b .

SOLUÇÃO

Os parâmetros Z de Q_a são

$$\begin{aligned} z_{11a} &= \frac{2 - 2j}{3 - 2j} \Omega & z_{12a} &= \frac{2}{3 - 2j} \Omega \\ z_{21a} &= \frac{2}{3 - 2j} \Omega & z_{22a} &= \frac{2 - 4j}{3 - 2j} \Omega \end{aligned}$$

e os parâmetros Z de Q_b são

$$z_{11b} = z_{12b} = z_{21b} = z_{22b} = 1 \Omega$$

Portanto, os parâmetros Z da rede como um todo são

$$\begin{aligned} z_{11} &= \frac{5 - 4j}{3 - 2j} \Omega & z_{12} &= \frac{5 - 2j}{3 - 2j} \Omega \\ z_{21} &= \frac{5 - 2j}{3 - 2j} \Omega & z_{22} &= \frac{5 - 6j}{3 - 2j} \Omega \end{aligned}$$

Poder-se-iam verificar facilmente esses resultados comparando-os aos obtidos no Exemplo 16.5 por meio das fórmulas de conversão da Tabela 16.1.

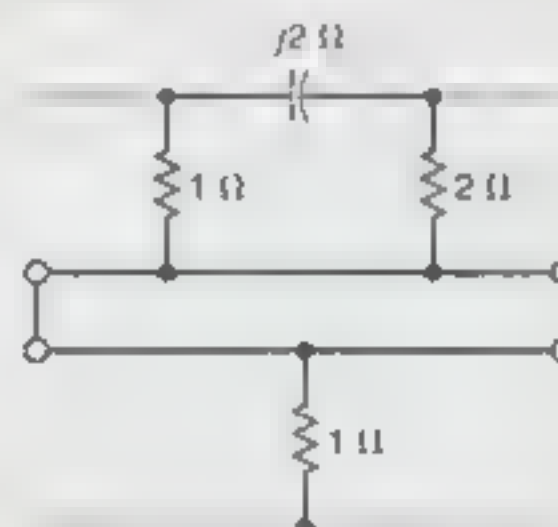


Figura 16.11 Rede mostrada na Fig. 16.10a redesenhada como uma associação em série de duas redes.

EXEMPLO 16.7

Determine os parâmetros de quadripolo da rede mostrada na Fig. 16.12 considerando-a como uma conexão em cascata de dois quadripolos conforme mostrado na Fig. 16.6.

SOLUÇÃO

Os parâmetros ABCD de duas redes T idênticas foram calculados no Exemplo 16.4 como

$$\begin{aligned} A &= 1 + j\omega & B &= 2 + j\omega \\ C &= j\omega & D &= 1 + j\omega \end{aligned}$$

Portanto, os parâmetros de transmissão da rede como um todo são

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + j\omega & 2 + j\omega \\ j\omega & 1 + j\omega \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 + j\omega & 2 + j\omega \\ j\omega & 1 + j\omega \end{bmatrix}$$

Realizando a multiplicação de matrizes, obtém-se

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + 4j\omega & 2\omega^2 + 4 + 6j\omega & 2\omega^2 \\ 2j\omega - 2\omega^2 & 1 + 4j\omega & 2\omega^2 \end{bmatrix}$$

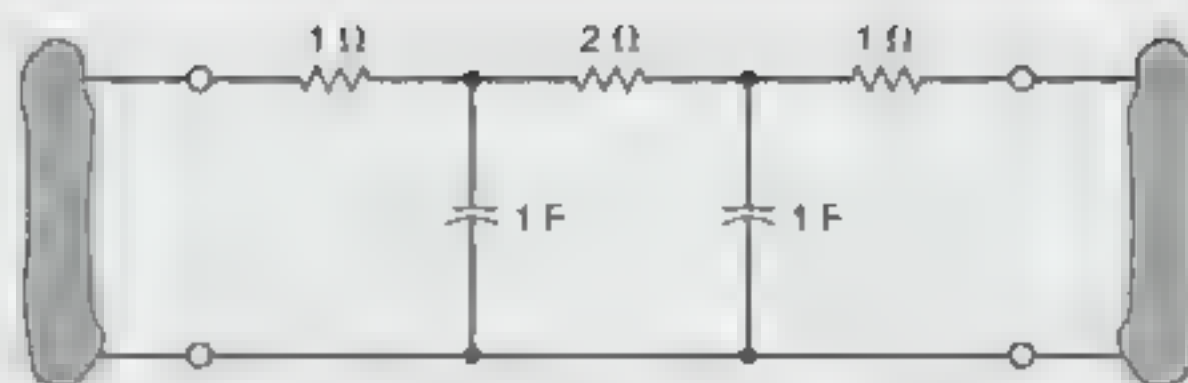


Figura 16.12 Circuito utilizado no Exemplo 16.7.

16.7 Exemplos de Aplicação

EXEMPLO DE APLICAÇÃO 16.8

A Fig. 16.13 é um modelo monofásico utilizado na análise de linhas de transmissão trifásicas de alta tensão. Como regra geral, nesses sistemas são conhecidas a tensão e a corrente na estação receptora, e o que se deseja calcular são as condições nos terminais da transmissora. Os parâmetros de transmissão são os adequados a esse cenário. Assim, podem ser determinados os parâmetros de transmissão de um modelo de linha de transmissão razoável e, em seguida, dados os valores de tensão, potência e fator de potência na receptora, são determinadas a corrente na receptora, a tensão e a corrente na transmissora e a eficiência da transmissão. Finalmente, traça-se o gráfico da eficiência em função do fator de potência.

SOLUÇÃO

Para uma linha de transmissão com aproximadamente 240 km de comprimento, os valores razoáveis para os componentes de circuito do modelo π da linha são: $C = 1,326 \mu\text{F}$, $R = 9,0 \Omega$ e $L = 264,18 \text{ mH}$. Os parâmetros de transmissão podem ser obtidos facilmente utilizando os circuitos da Fig. 16.14. Para uma frequência de 60 Hz, os parâmetros de transmissão são

$$\begin{aligned} A &= 0,9590 / 0,27^\circ & C &= 975,10 / 90,13^\circ \mu\text{S} \\ B &= 100,00 / 84,84^\circ \Omega & D &= 0,9590 / 0,27^\circ \end{aligned}$$

Para se empregar os parâmetros de transmissão, deve-se conhecer a corrente na extremidade receptora, I_2 . Utilizando a

análise-padrão de circuitos trifásicos apresentada no Capítulo 11, determina-se a corrente de linha como

$$I_2 = \frac{600 / \cos^{-1}(fp)}{\sqrt{3}(300)(fp)} = -1,215 / -18,19^\circ \text{ kA}$$

em que a fase da tensão entre fase e neutro na estação receptora, isto é, a fase V_2 , é admitida como nula. Agora, os parâmetros de transmissão podem ser utilizados para determinar a tensão e a potência na transmissora. Como a tensão fase-neutro na receptora é de $300 / \sqrt{3} = 173,21 \text{ kV}$ os resultados são

$$\begin{aligned} V_1 &= AV_2 - BI_2 = (0,9590 / 0,27^\circ)(173,21 / 0^\circ) \\ &\quad + (100,00 / 84,84^\circ)(1,215 / -18,19^\circ) \\ &= 241,92 / 27,67^\circ \text{ kV} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_1 &= CV_2 - DI_2 = (975,10 \times 10^{-6} / 90,13^\circ)(173,21 / 0^\circ) \\ &\quad + (0,9590 / 0,27^\circ)(1,215 / -18,19^\circ) \\ &= 1,12 / -9,71^\circ \text{ kA} \end{aligned}$$

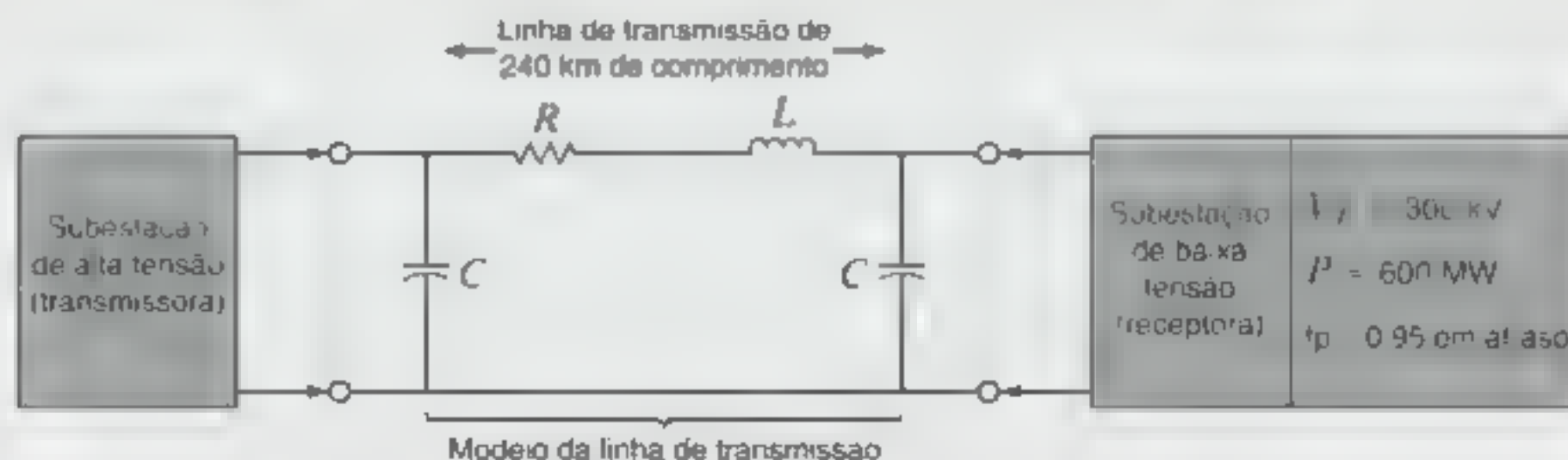
Na transmissora, o fator de potência e a potência são

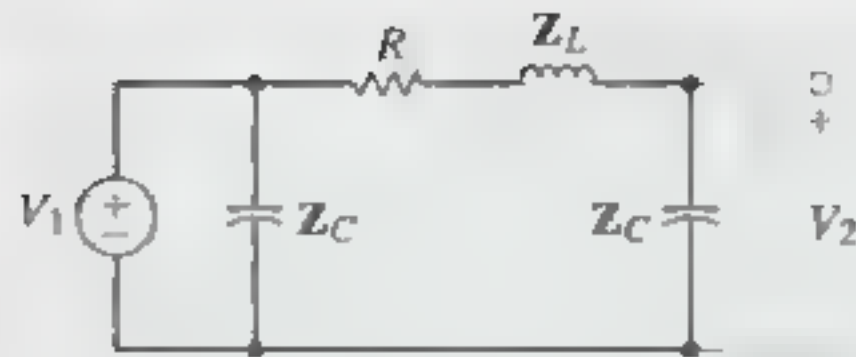
$$fp = \cos(27,67 - (-9,71)) = \cos(37,38) = 0,80 \text{ em atraso}$$

$$P_1 = 3V_1 I_1 (fp) = (3)(241,92)(1,12)(0,80) = 650,28 \text{ MW}$$

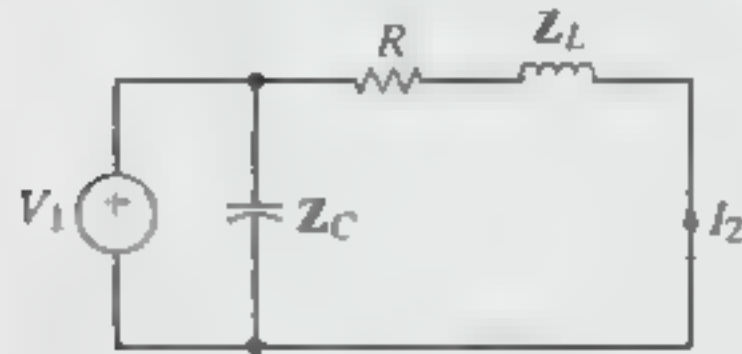
Finalmente, a eficiência da transmissão é

$$\eta = \frac{P_2}{P_1} = \frac{600}{650,28} = 92,3\%$$

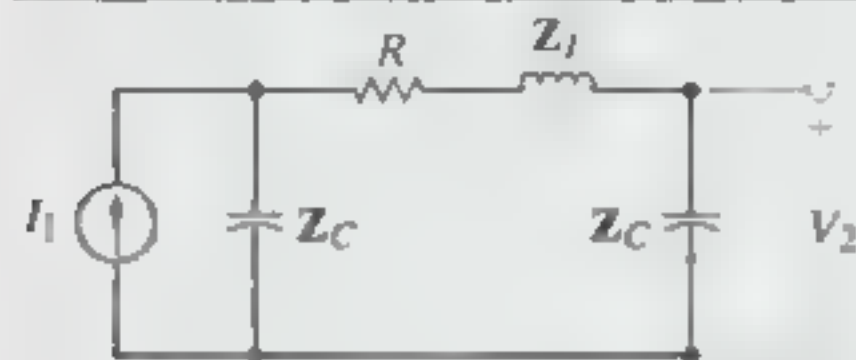
Figura 16.13 Um modelo de circuito π para linhas de transmissão de potência.



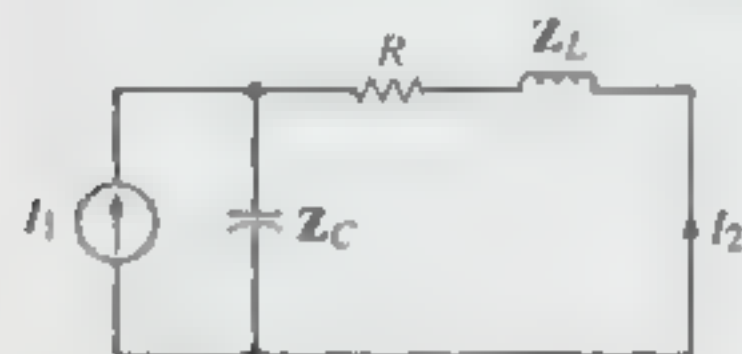
$$A = \left. \frac{V_2}{V_1} \right|_{I_2=0} = \frac{Z_C}{Z_C + Z_L + R} = 0,9590 \angle 0,27^\circ$$



$$B = \left. \frac{V_1}{-I_2} \right|_{V_2=0} = Z_L + R = 100,00 \angle 84,84^\circ \Omega$$



$$C = \left. \frac{V_2}{I_1} \right|_{V_2=0} = \frac{Z_C^2}{2Z_C + Z_L + R} = 975,10 \angle 90,13^\circ \mu S$$



$$D = \left. \frac{I_1}{-I_2} \right|_{V_2=0} = \frac{Z_C + Z_L + R}{Z_C} = 0,950 \angle 0,27^\circ$$

Figura 16.14 Circuitos equivalentes utilizados para se determinar os parâmetros de transmissão.

Essa análise completa pode ser facilmente programada em uma planilha de Excel. A Fig. 16.15 mostra um gráfico da eficiência da transmissão em função do fator de potência na receptora. Pode-se perceber que, à medida que o fator de potência diminui, a eficiência cai, o que aumenta o custo de

produção da fornecedora de energia. Essa é a razão pela qual as fornecedoras de energia encorajam os consumidores industriais a operar com fator de potência o mais próximo possível da unidade.

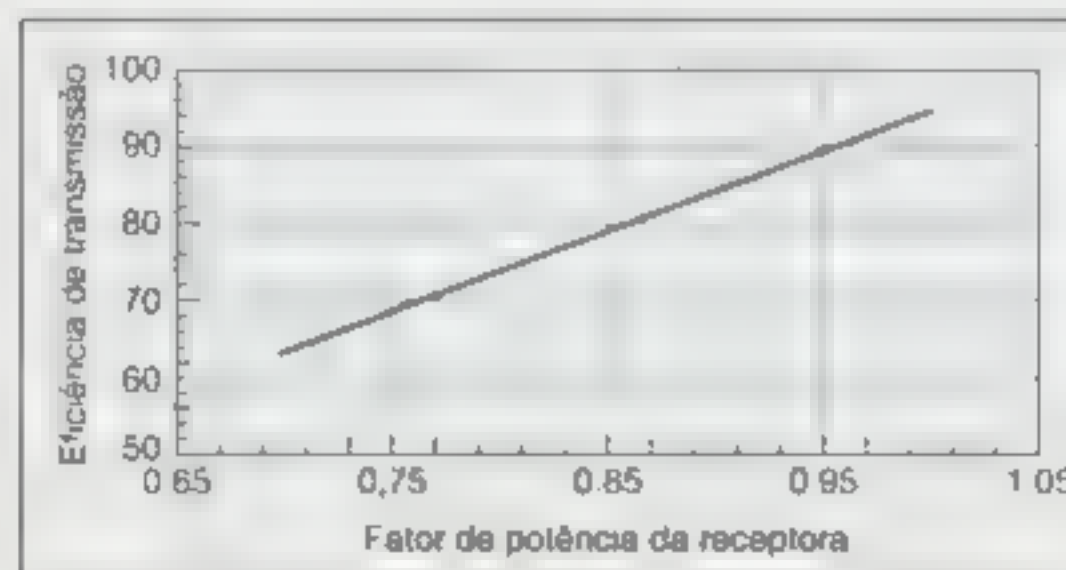


Figura 16.15 Resultados de uma simulação em Excel mostrando o efeito do fator de potência do terminal receptor sobre a eficiência da transmissão. Como a simulação em Excel utilizou mais algarismos significativos, verificam-se pequenas discrepâncias entre os valores do gráfico e os do texto.

EXEMPLO DE APLICAÇÃO 16.9

Dispõe-se do circuito não inversor com amplificador operacional mostrado na Fig. 16.16, com os seguintes parâmetros: $A = 20.000$, $R_o = 1 \text{ M}\Omega$, $R_s = 500 \Omega$, $R_1 = 1 \text{ k}\Omega$ e $R_2 = 49 \text{ k}\Omega$. Para determinar as possíveis aplicações dessa configuração de rede, determina-se o efeito da carga R_L sobre o ganho e o erro no ganho (uma comparação entre os valores real e ideal do ganho).

SOLUÇÃO

No Exemplo 16.3, os parâmetros híbridos do circuito não inversor foram determinados como

$$h_{11} = R_s + \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \quad h_{12} = \frac{R_1}{R_1 + R_2}$$

$$h_{21} = \left[\frac{A R_o}{R_o + R_1 + R_2} + \frac{R}{R_o + R_1 + R_2} \right] \quad h_{22} = \frac{R_o + R_1 + R_2}{R_o (R_1 + R_2)}$$

Ao se resolver as Eqs. (16.7) do quadripolo de parâmetros híbridos para V_2 , obtém-se

$$V_2 = \frac{-h_{21} V_1 + h_{11} I_2}{h_{11} h_{22} - h_{12} h_{21}}$$

Como o op-amp está conectado a uma carga R_L , tem-se

$$I_2 = \frac{V_2}{R_L}$$

Combinando essas expressões, obtém-se a equação do ganho,

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{h_{11}}{h_{11} h_{22} - h_{12} h_{21} + \frac{h_{11}}{R_L}}$$

Utilizando os valores dos parâmetros, a equação se torna

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{4 \times 10^7}{8,02 \times 10^5 + \frac{10^6}{R_L}} = \frac{49,88}{1 + \frac{1,247}{R_L}} \quad 16.16$$

Se o termo envolvendo R_L permanecer pequeno em relação à unidade, então o ganho do amplificador será praticamente independente de R_L .

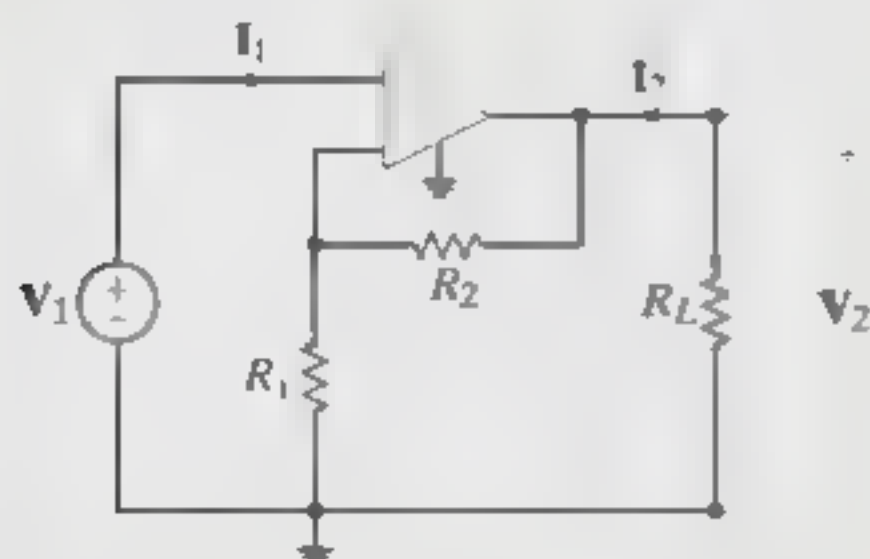


Figura 16.16 Configuração clássica de ganho não inversor com carga.

É conveniente observar o ganho do amplificador em comparação com seu valor ideal de

$$A_{ideal} = \frac{V_2}{V_1} \Big|_{\text{op-amp ideal}} = 1 + \frac{R_2}{R_1} = 1 + \frac{49}{1} = 50$$

Com base na Eq. (16.16), se R_L for infinito, o ganho será de apenas 49,88. Essa discrepância da eficiência ideal é causada por valores não ideais do ganho do op-amp, da resistência de entrada e da resistência de saída. Define-se o erro no ganho

$$\text{Erro no ganho} = \frac{A_{real} - A_{ideal}}{A_{ideal}} = \frac{0,998}{1 + \frac{1,247}{R_L}} - 1 \quad 16.17$$

Um gráfico do ganho e do erro no ganho em função de R_L é mostrado na Fig. 16.17. Observe que, à medida que a resistência de carga diminui, o ganho também diminui e o erro aumenta – consistente com a Eq. (16.17). Além disso, à medida que R_L aumenta, o ganho se aproxima assintoticamente do valor ideal embora nunca o alcance.

Para identificar usos específicos desse amplificador, há de se considerar que, com um ganho de 50, um sinal de 0,1 V na entrada produzirá 5 V na saída. Três possíveis aplicações são:

1. Pré-amplificador de áudio de baixo custo – Amplifica valores baixos de tensão provenientes de cabeças leitoras de fitas e de captos fonográficos para níveis adequados de amplificação de potência para acionar alto-falantes.
2. Amplificador para sensores – Em muitos sensores – por exemplo, resistores dependentes da temperatura – alterações na característica elétrica (resistência) podem ser bem inferiores às alterações no parâmetro ambiental (temperatura). As alterações resultantes na tensão de saída também podem ser pequenas e usualmente requerem amplificação.
3. Sensores de corrente – A monitoração de grandes correntes pode ser feita a baixo custo usando resistores sensíveis de baixa resistência e um voltímetro. De acordo com a lei de Ohm, a tensão resultante é IR_{sensor} em que I é a corren-

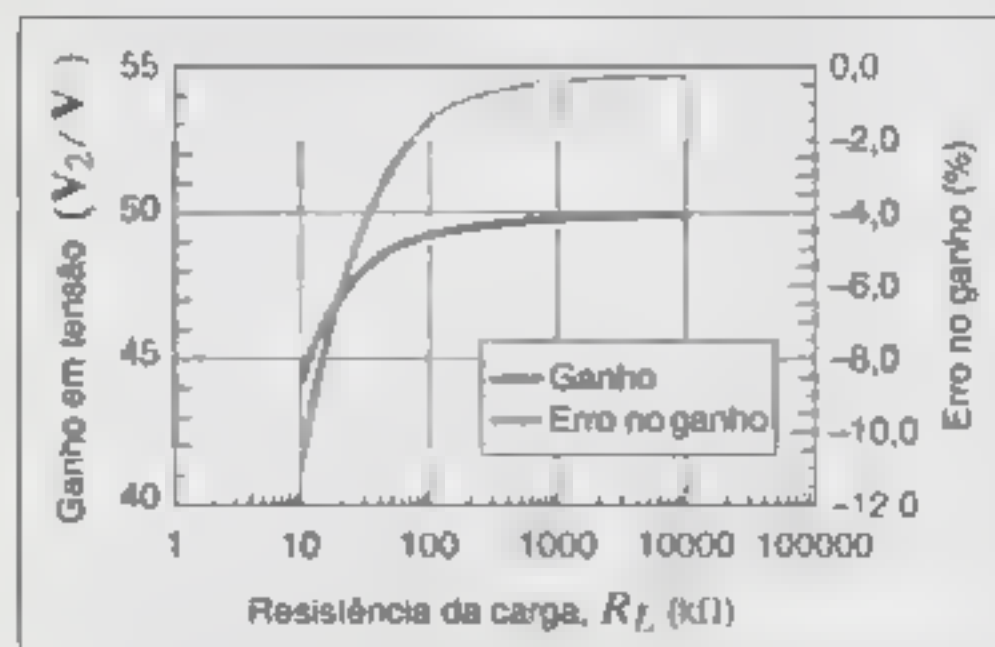


Figura 16.17 Ganho e erro no ganho da configuração não inversora descrita no Exemplo 16.9.

te de interesse. Um voltímetro pode ser usado para medir a tensão e, sabendo-se o valor de R_{sensor} , a corrente pode ser determinada. A potência perdida no resistor sensível é $I^2 R_{\text{sensor}}$. Portanto, pequenas perdas implicam em valores

baixos de tensão no sensor. Esses valores não podem ser medidos com exatidão utilizando voltímetros de baixo custo. O amplificador simples aqui apresentado pode reforçar a tensão do sensor elevando-a a valores razoáveis

16.8 Exemplos de Projeto

EXEMPLO DE PROJETO 16.10

Em uma aplicação particular, necessita-se de um amplificador com ganho de 10.000 quando conectado a uma carga de 1 k Ω . Dispõe-se de alguns op-amps não inversores que poderiam ser utilizados nessa aplicação.

SOLUÇÃO

O amplificador operacional não inversor, juntamente com alguns componentes que, com base nos resultados do exemplo anterior (isto é, expressão do ganho ideal), poderia fornecer um ganho de 10.000, está mostrado na Fig. 16.18. A utilização das equações dos parâmetros híbridos do amplificador, como descrito no exemplo anterior, fornece

$$\begin{aligned} h_{11} &= 1,001 \text{ M}\Omega & h_{12} &= 1,000 \times 10^{-4} \\ h_{21} &= -4,000 \times 10^7 & h_{22} &= 2,000 \text{ mS} \end{aligned}$$

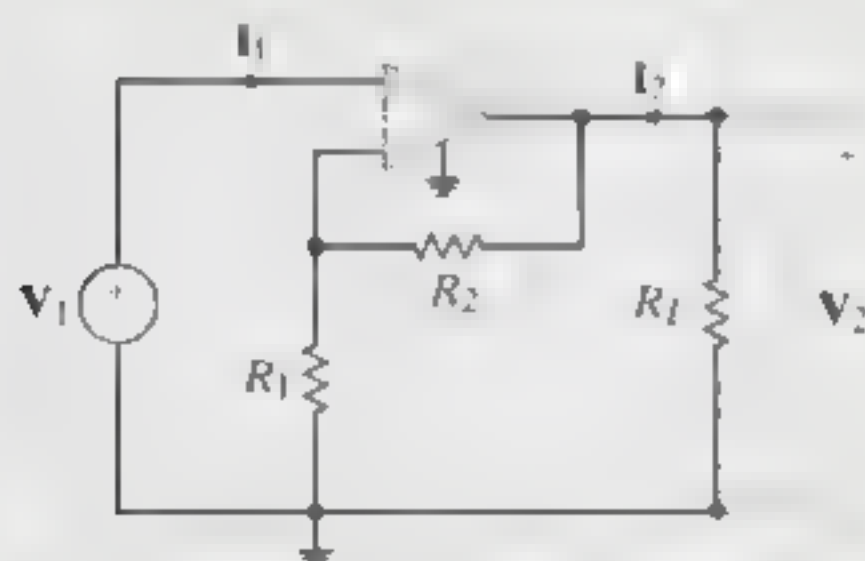


Figura 16.18 Amplificador de um único estágio que deveria apresentar um ganho de 10.000.

ESPECIFICAÇÕES DO OP-AMP	COMPONENTES
$A = 20.000$	$R_2 = 1 \text{ k}\Omega$
$R_s = 1 \text{ M}\Omega$	$R_L = 9,999 \text{ M}\Omega$
$R_1 = 500 \Omega$	

Utilizando a Tabela 16.1, os parâmetros híbridos podem ser convertidos em parâmetros de transmissão:

$$\begin{aligned} A &= \frac{\Delta_{22}}{h_{21}} = \frac{h_{11} h_{22} - h_{12} h_{21}}{h_{21}} & B &= \frac{h_{11}}{h_{21}} \\ C &= \frac{h_{22}}{h_{21}} & D &= \frac{-1}{h_{21}} \end{aligned}$$

Com base nesses valores de parâmetros híbridos, obtém-se

$$\begin{aligned} A &= 1,901 \times 10^{-4} & B &= 2,502 \times 10^{-2} \\ C &= 5,000 \times 10^{-11} & D &= 2,500 \times 10^{-4} \end{aligned}$$

O circuito é modelado agora por meio das equações de quadripolo

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_2 \\ -I_2 \end{bmatrix}$$

Uma vez que a tensão $V_2 = -I_2 R_L$, pode-se escrever a equação para V_1 como

$$V_1 = AV_2 + \frac{B}{R_L} V_2$$

e o ganho como

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{1}{A + \frac{B}{R_L}} = \frac{6667}{1 + \frac{166,7}{R_L}}$$

Embora o modelo ideal faça previsão de um ganho de 10.000, o ganho real para um valor infinito de R_L é de apenas 6667 – uma discrepância considerável! Uma análise cuidadosa dos parâmetros indica dois problemas: (1) o ganho do op-amp é da mesma ordem do ganho do circuito, e (2) R_2 é realmente muito maior que R_s . Lembre-se de que as hipóteses de op-amp ideal previam que ambos os valores de A e de R_s tendessem a infinito, isto é, essencialmente, A deveria ser muito maior que o ganho global e R_s deveria ser o maior resistor do circuito – nenhuma dessas condições está sendo atendida. Contornam-se essas dificuldades colocando dois op-amps em cascata. Cada estágio será projetado para um ganho de 100 selecionando-se o resistor R_2 com 99 k Ω , atenuando assim as duas restrições anteriores. Como os estágios são dispostos em cascata, o ganho global ideal deverá ser de $100 \times 100 = 10.000$.

Os parâmetros de transmissão com os novos valores de R_2 ficam

$$\begin{aligned} A &= 1,005 \times 10^{-2} & B &= 2,502 \times 10^{-2} \\ C &= 5,025 \times 10^{-11} & D &= 2,500 \times 10^{-4} \end{aligned}$$

Uma vez que os dois estágios estão em cascata, as equações dos parâmetros de transmissão que descrevem o circuito como um todo são

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_a & B_a \\ C_a & D_a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_b & B_b \\ C_b & D_b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_2 \\ -I_2 \end{bmatrix}$$

ou

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_a A_b & B_a C_b & A_a B_b & B_a D_b \\ C_a A_b - D_a C_b & C_a B_b - D_a D_b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_2 \\ -I_2 \end{bmatrix}$$

em que os subscritos *a* e *b* indicam o primeiro e o segundo estágios. Como os estágios são idênticos, podem-se utilizar simplesmente *A*, *B*, *C* e *D*. Continua valendo, $V_2 = -I_2 R_L$, e o ganho é

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{1}{A^2 - BC + \frac{AB - BD}{R_L}}$$

Utilizando os valores dos parâmetros de transmissão, quando R_L for infinito, o ganho será de 9900,75, um erro inferior a 1%. Essa condição representa uma melhoria significativa sobre o amplificador de um único estágio. A Fig. 16.19 mostra os valores de ganho dos amplificadores de um e de dois estágios em função da resistência de carga, R_L . À medida que o valor da resistência de carga R_L diminui, fica ainda mais marcante a superioridade do amplificador de dois estágios.

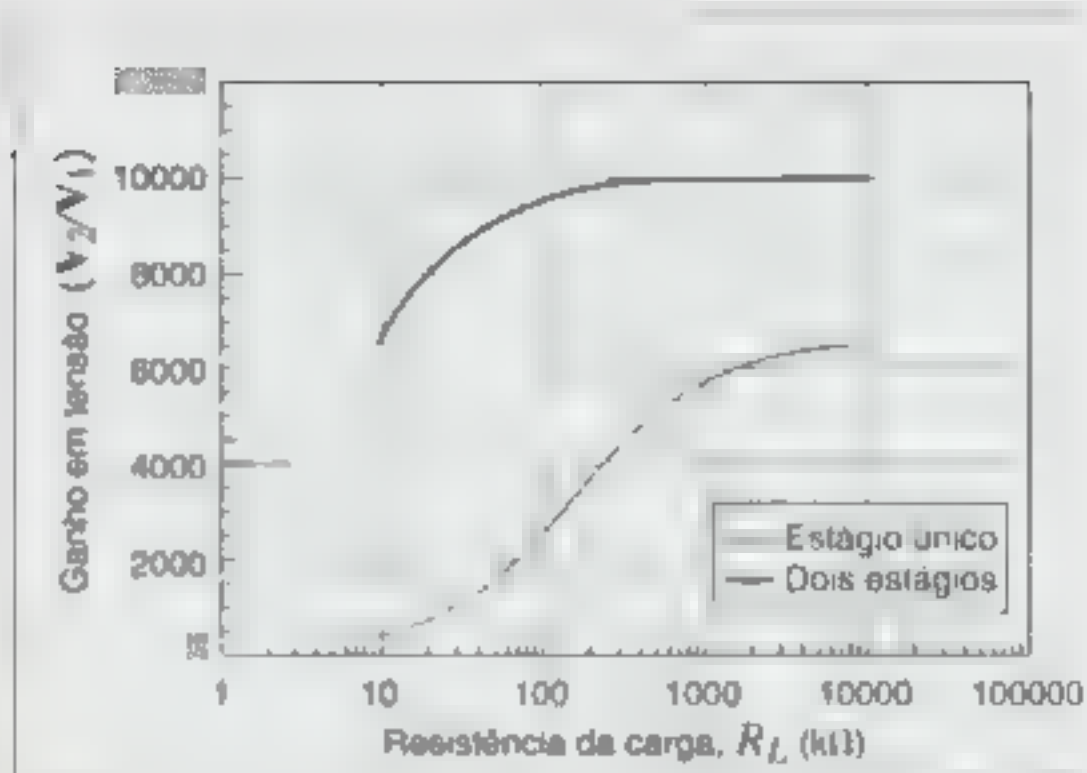


Figura 16.19 Ganho em tensão de circuitos com amplificador operacional de um e dois estágios em função da resistência de carga.

RESUMO

- Os quatro tipos de parâmetros mais comuns utilizados para descrever um quadripolo são os parâmetros de admitância, os parâmetros de impedância, os parâmetros híbrdos e os parâmetros de transmissão.
- Se todos os parâmetros de um quadripolo forem definidos, será possível utilizar expressões de conversão que relacionam um conjunto de parâmetros a outro.
- Ao se interconectar quadripolos, os parâmetros *Y* são adicionados na conexão em paralelo, os parâmetros *Z* são adicionados na conexão em série e os parâmetros de transmissão, sob forma de matrizes, são multiplicados na conexão em cascata.

PROBLEMAS

16.1 Dados o quadripolo da Fig. P16.1, determine os parâmetros *Y* do circuito em (a) e os parâmetros *Z* do circuito em (b).

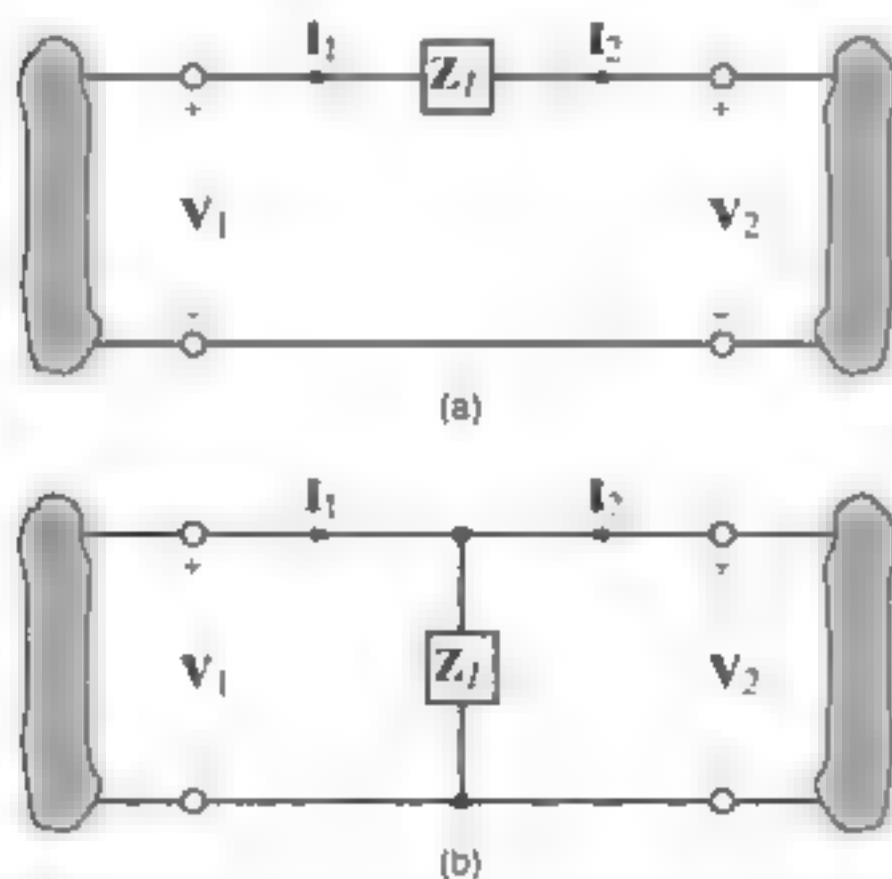


Figura P16.1

16.2 Determine os parâmetros *Y* do quadripolo mostrado na Fig. P16.2.

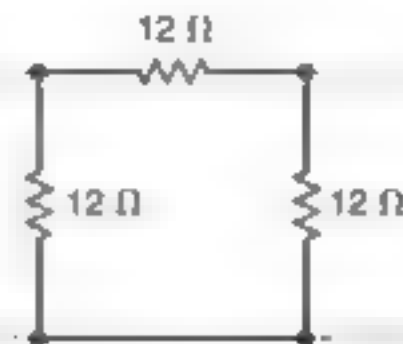


Figura P16.2

16.3 Determine os parâmetros *Y* do quadripolo mostrado na Fig. P16.3

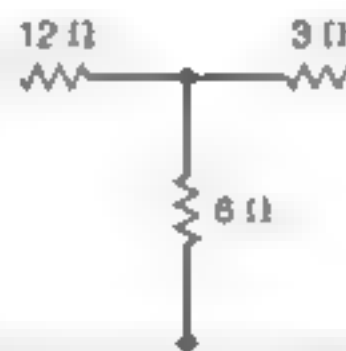


Figura P16.3

- 16.4 Determine os parâmetros Y do quadripolo mostrado na Fig P16.4.

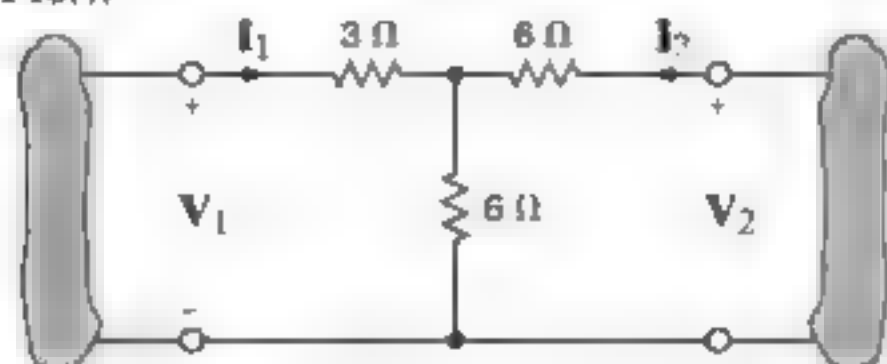


Figura P16.4

- 16.5 Determine os parâmetros de admitância da rede mostrada na Fig. P16.5.

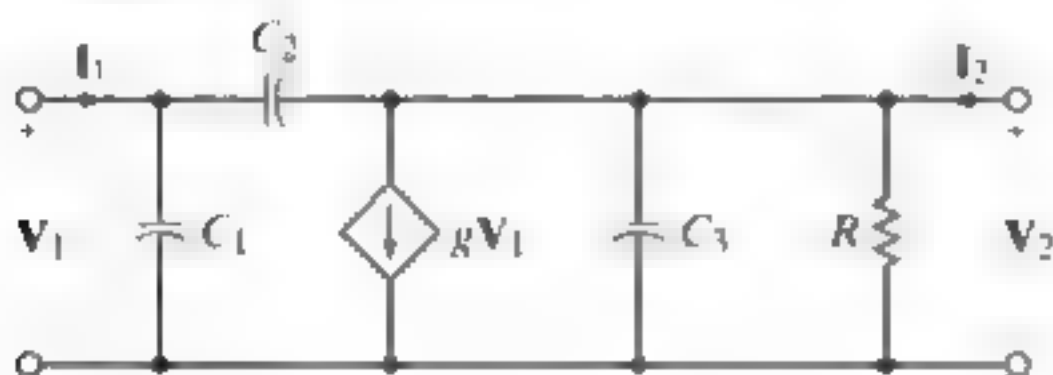


Figura P16.5

- 16.6 Determine os parâmetros Y do quadripolo mostrado na Fig. P16.6.

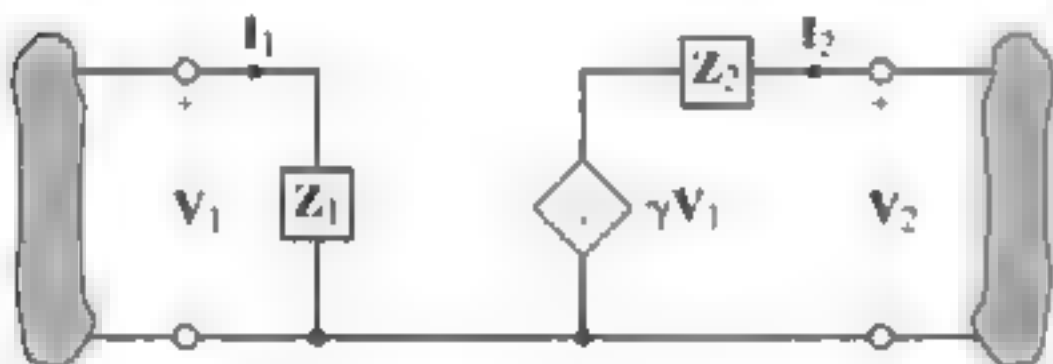


Figura P16.6

- 16.7 Determine os parâmetros Z da rede mostrada na Fig P16.6.

- 16.8 Determine os parâmetros Z do quadripolo mostrado na Fig. P16.8.

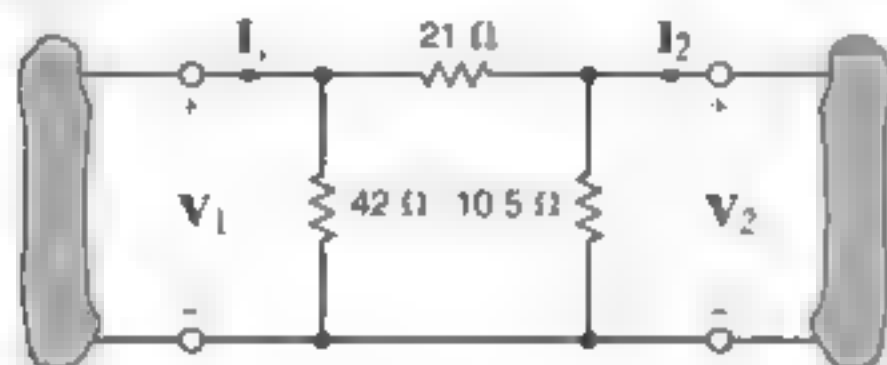


Figura P16.8

- 16.9 Obtenha os parâmetros Z do quadripolo mostrado na Fig. P16.9 e determine o ganho em tensão do circuito total com uma carga de $4\text{ k}\Omega$ conectada na saída.

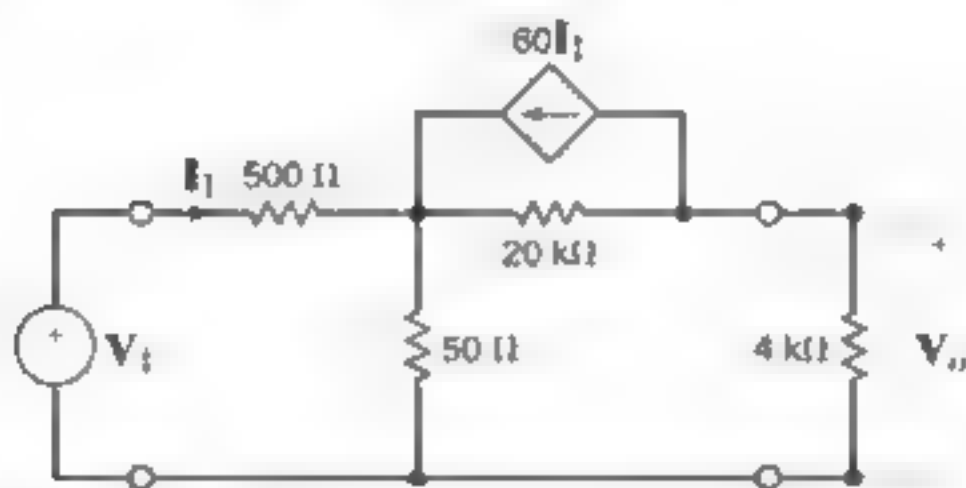


Figura P16.9

- 16.10 Determine a impedância de saída da rede mostrada na Fig P16.10 em função dos parâmetros Z e da impedância Z da carga.

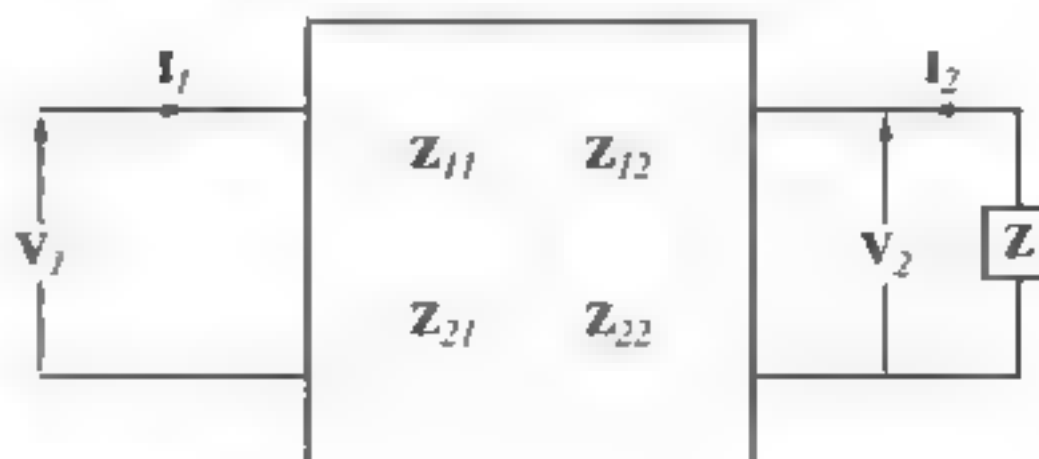


Figura P16.10

- 16.11 Determine o ganho em tensão do quadripolo mostrado na Fig. P16.10 se uma carga de $12\text{ k}\Omega$ for conectada aos terminais de saída.

- 16.12 Determine a impedância de entrada da rede mostrada na Fig. P16.10.

- 16.13 Determine os parâmetros Y da rede mostrada na Fig. P16.13.

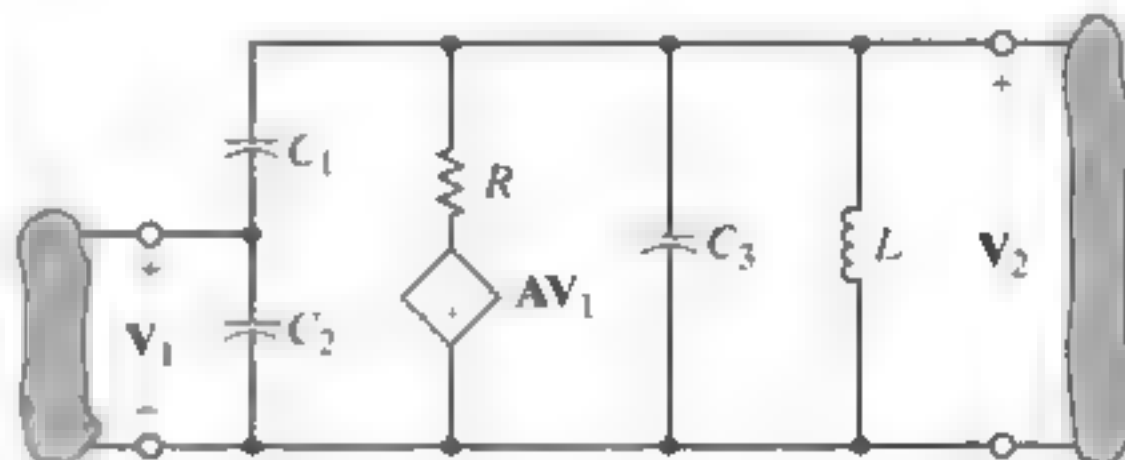


Figura P16.13

- 16.14 Determine os parâmetros Z da rede mostrada na Fig P16.14.

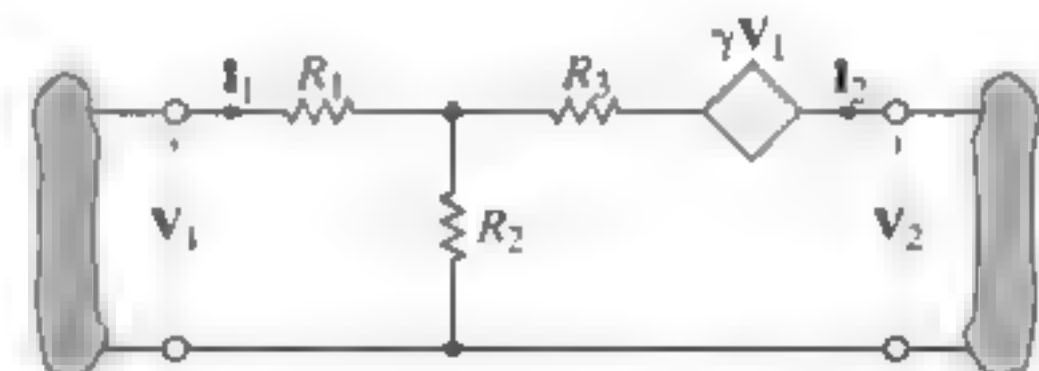


Figura P16.14

- 16.15 Determine os parâmetros Z do quadripolo mostrado na Fig P16.15.

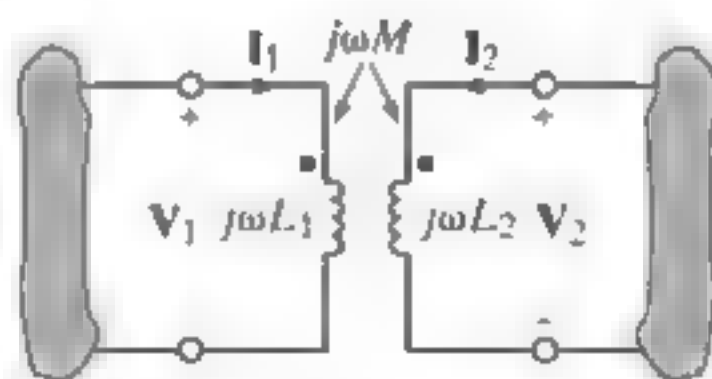


Figura P16.15

- 16.16** Dada a rede mostrada na Fig. P16.16, (a) determine os parâmetros Z do transformador, (b) escreva a equação terminal para cada extremidade do quadripolo e (c) utilize as informações obtidas para determinar V_2 .

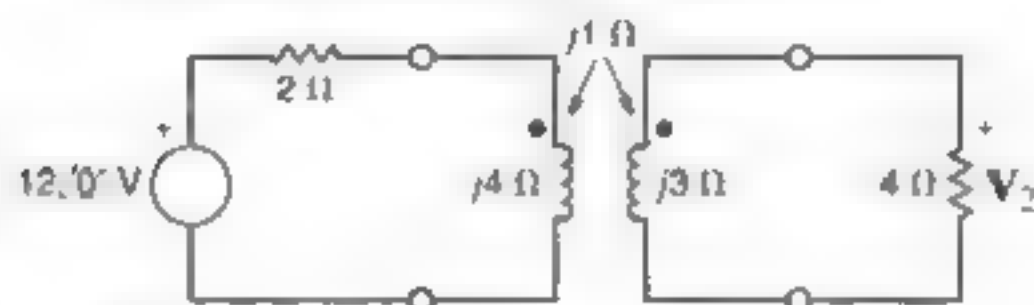


Figura P16.16

- 16.17** Determine os parâmetros Z da rede mostrada na Fig. P16.17.

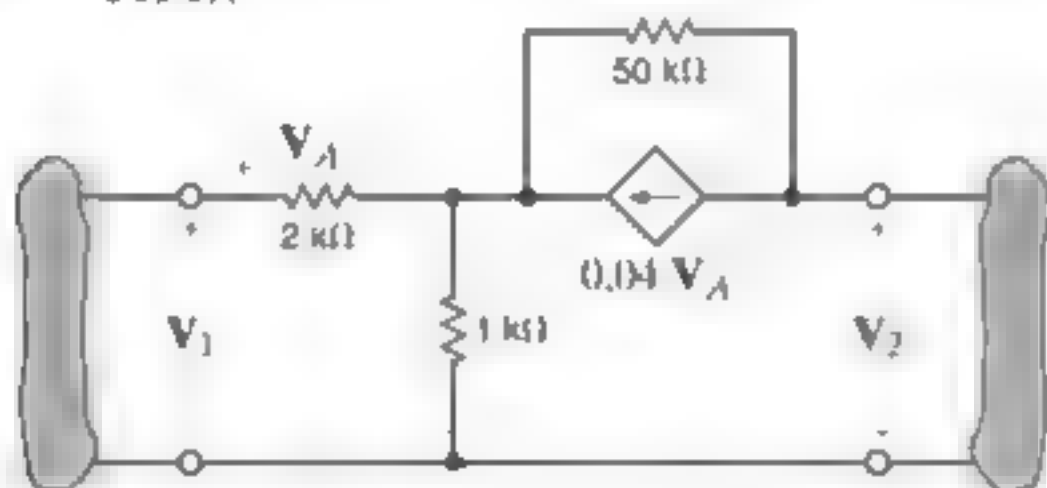


Figura P16.17

- 16.18** Determine os parâmetros Z do quadripolo mostrado na Fig. P16.18.

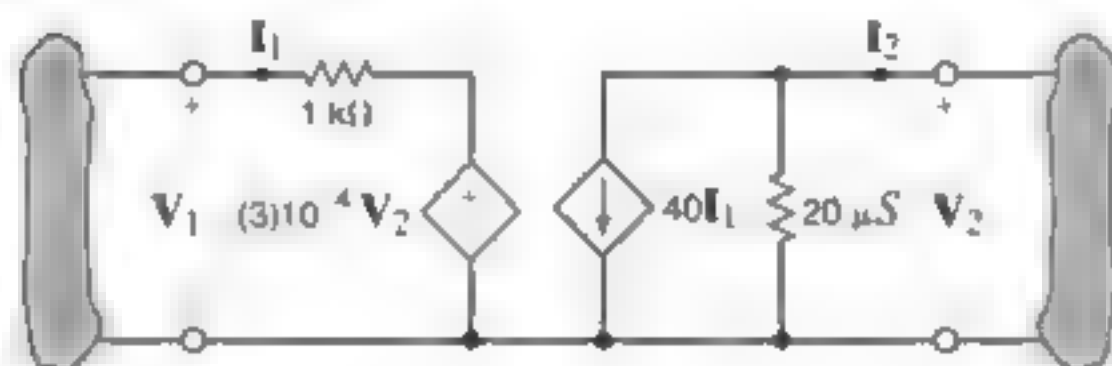


Figura P16.18

- 16.19** Determine os parâmetros Z do quadripolo mostrado na Fig. P16.19.

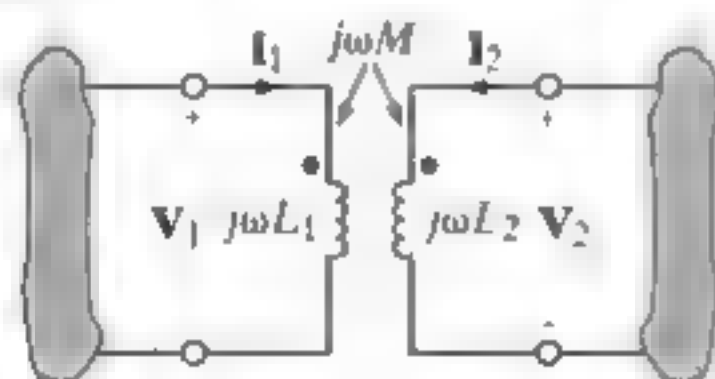


Figura P16.19

- 16.20** Determine os parâmetros Z do quadripolo mostrado na Fig. P16.20.

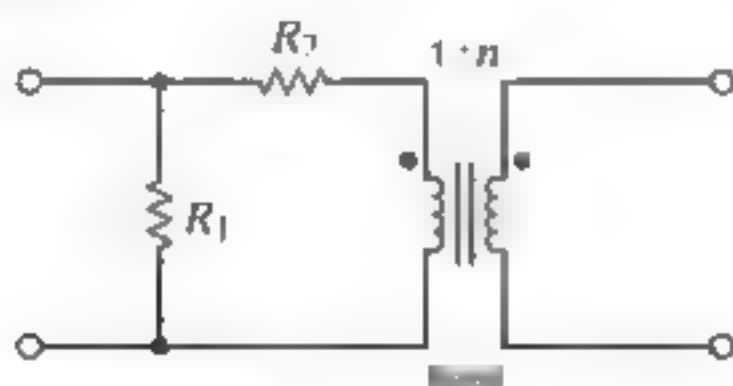


Figura P16.20

- 16.21** Desenhe o diagrama de circuito (com todos os componentes passivos em ohms) para uma rede que tenha os seguintes parâmetros Y :

$$Y = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \\ 1 & 5 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$$

- 16.22** Desenhe o diagrama de circuito para a rede que possui os seguintes parâmetros Z :

$$Z = \begin{bmatrix} 6 - j2 & 4 & j6 \\ 1 - j6 & 7 + j2 \end{bmatrix}$$

- 16.23** Mostre que a rede da Fig. P16.23 não possui um conjunto de parâmetros Y , a menos que a fonte tenha uma impedância interna.

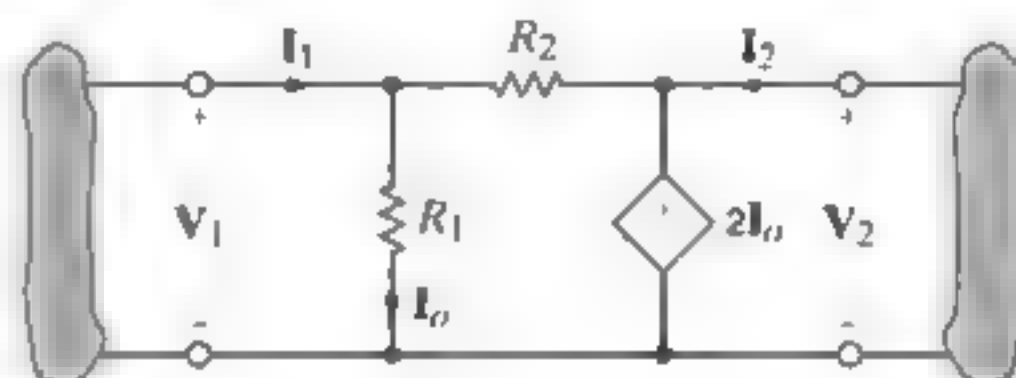


Figura P16.23

- 16.24** Calcule os parâmetros híbridos do quadripolo da Fig. E16.1.

- 16.25** Determine os parâmetros híbridos da rede mostrada na Fig. P16.2.

- 16.26** Determine os parâmetros híbridos da rede mostrada na Fig. P16.26.

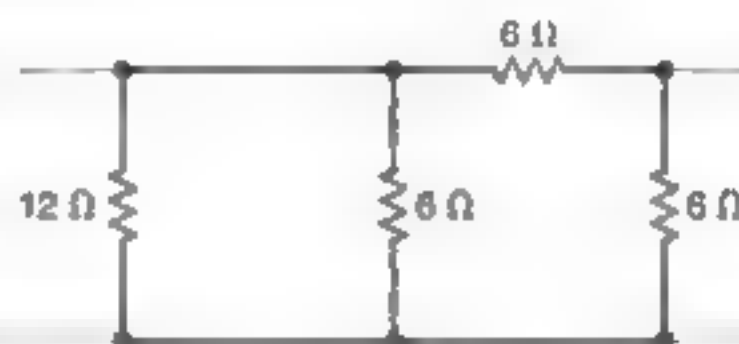


Figura P16.26

- 16.27** Considere o circuito mostrado na Fig. P16.27. O quadripolo é um modelo híbrido de um transistor simples. Determine o ganho em tensão do circuito completo, V_2/V_F , se uma fonte V_F com resistência interna R_i for aplicada à entrada do quadripolo e uma resistência de carga R_L for conectada aos terminais de saída.

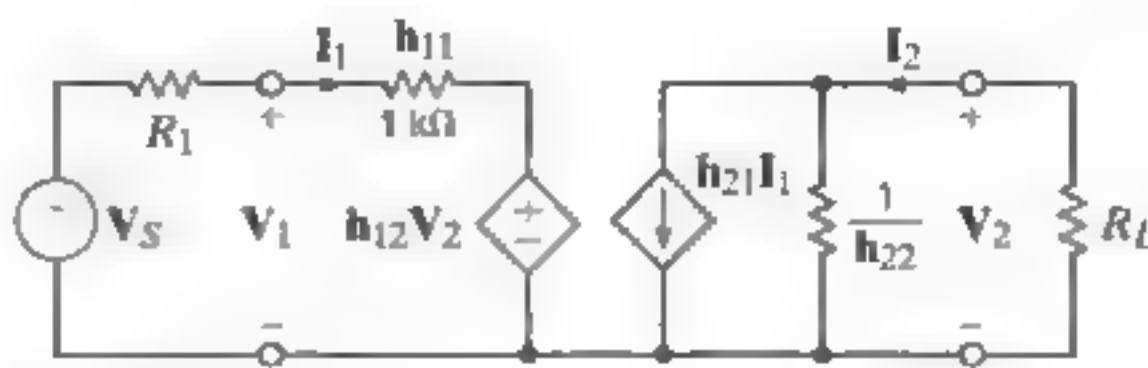


Figura P16.27

- 16.28** Determine os parâmetros híbridos da rede mostrada na Fig. P16.28

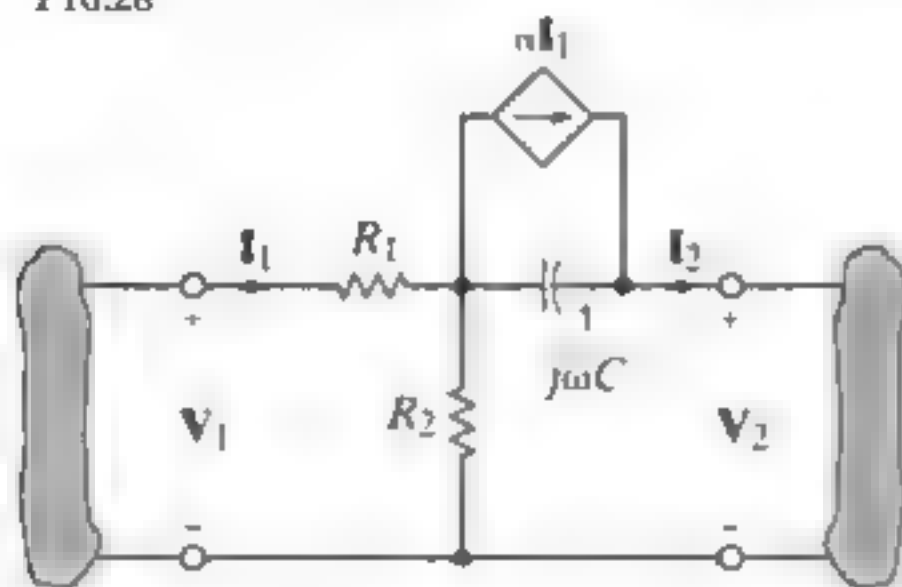


Figura P16.28

- 16.31** Dada a rede mostrada na Fig. P16.31, obtenha os parâmetros de transmissão do quadripolo e, em seguida, determine a corrente I_x utilizando as condições nos terminais de saída

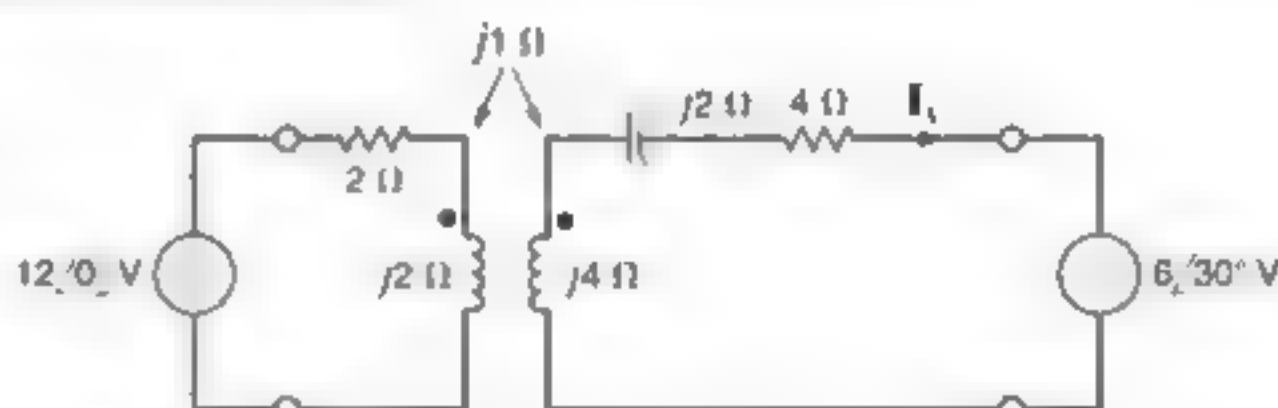


Figura P16.31

- 16.32** Obtenha o ganho em tensão V_2/V_1 da rede mostrada na Fig. P16.32 utilizando os parâmetros ABCD.

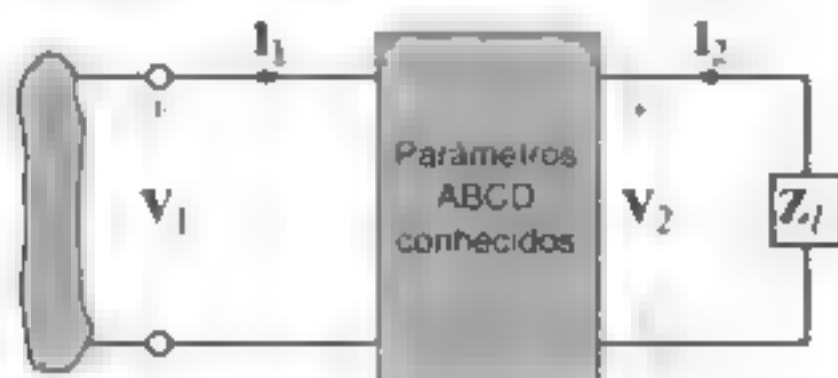


Figura P16.32

- 16.33** Determine a admitância de entrada do quadripolo mostrado na Fig. P16.33 em função dos parâmetros Y e a carga Y_L .



Figura P16.33

- 16.34** Obtenha o ganho em tensão V_2/V_1 da rede mostrada na Fig. P16.34 utilizando os parâmetros Z.

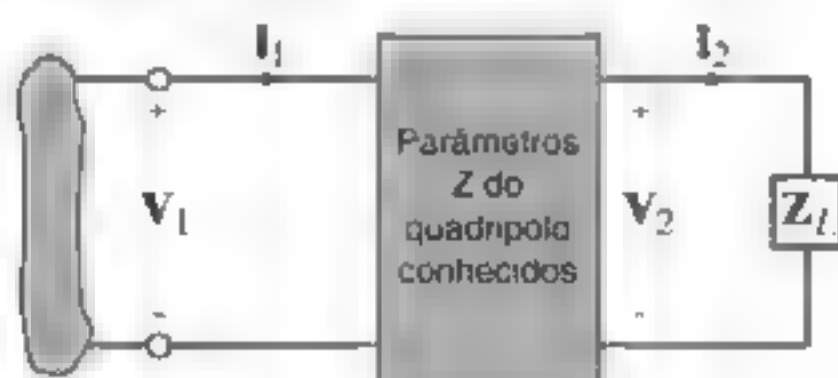


Figura P16.34

- 16.29** Determine os parâmetros ABCD das redes mostradas na Fig. P16.1.

- 16.30** Determine os parâmetros de transmissão da rede mostrada na Fig. P16.30.

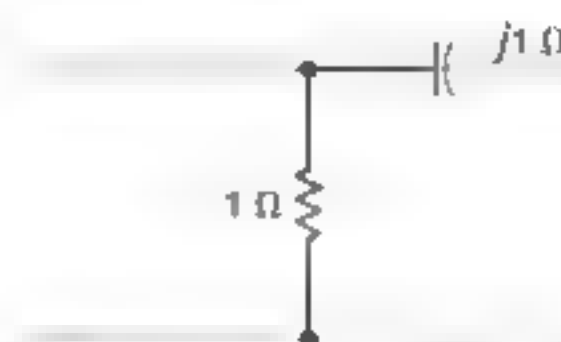


Figura P16.30

- 16.35** Desenhe o diagrama de circuito (com todos os componentes passivos em ohms) para uma rede que possua os seguintes parâmetros Y:

$$Y = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 11 & 11 \\ 2 & 3 \\ 11 & 11 \end{bmatrix}$$

- 16.36** Desenhe o diagrama de circuito para uma rede que apresente os seguintes parâmetros Z.

$$[Z] = \begin{bmatrix} 6 + j4 & 4 + j6 \\ 4 + j6 & 10 + j6 \end{bmatrix}$$

- 16.37** A seguir são dados os parâmetros híbridos de uma rede.

$$\begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & 2 \\ 5 & 5 \\ 2 & 1 \\ 5 & 5 \end{bmatrix}$$

Determine os parâmetros Y da rede.

- 16.38** Se os parâmetros Y de uma rede forem conhecidos como

$$\begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 11 & 11 \\ 2 & 3 \\ 11 & 11 \end{bmatrix}$$

obtenha os parâmetros Z.

- 16.39** Determine os parâmetros Z em função dos parâmetros ABCD.

16.40 Determine os parâmetros híbridos em função dos parâmetros Z .

16.41 Determine os parâmetros de transmissão do quadripolo mostrado na Fig. P16.41

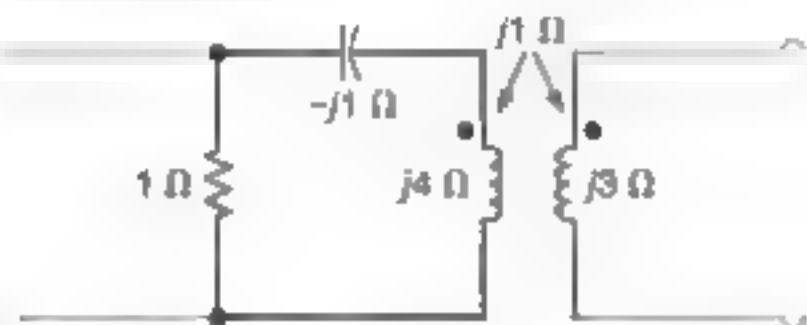


Figura P16.41

16.42 Determine os parâmetros de transmissão do quadripolo mostrado na Fig. P16.42.

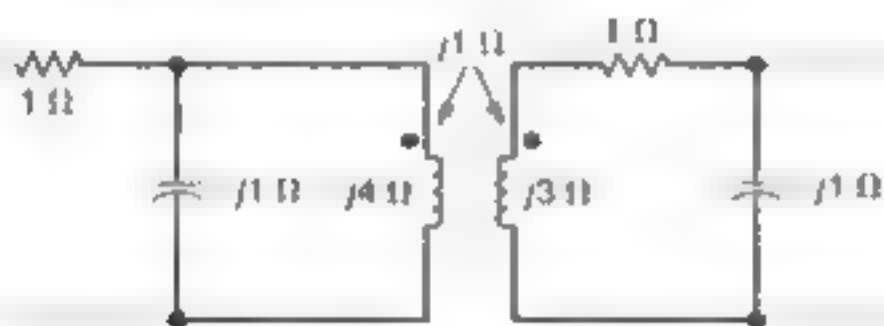


Figura P16.42

16.43 Determine os parâmetros de transmissão do quadripolo mostrado na Fig. P16.43 e, em seguida, utilize as condições terminais para calcular a corrente I_x .

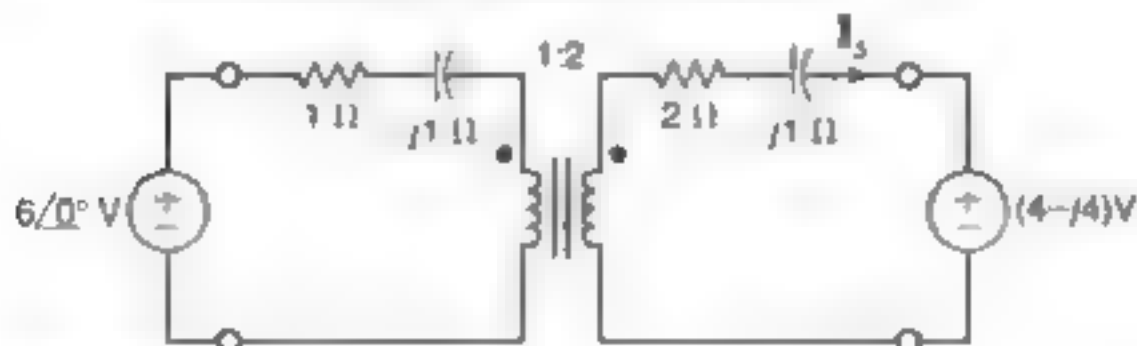


Figura P16.43

16.44 Determine os parâmetros Y da rede mostrada na Fig. P16.44.

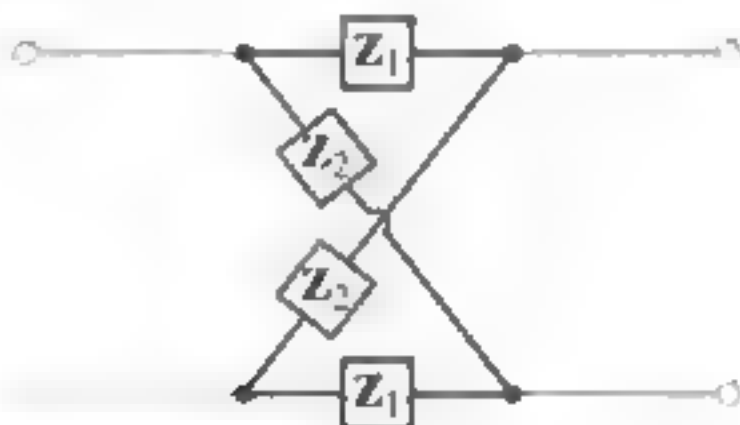


Figura P16.44

16.45 Determine os parâmetros Y da rede mostrada na Fig. P16.45

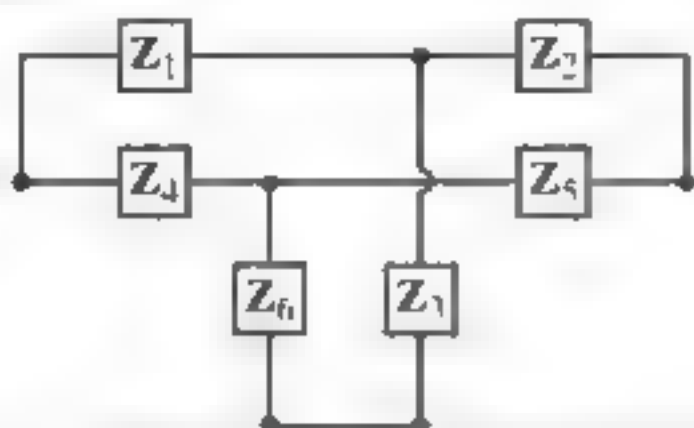


Figura P16.45

16.46 Determine os parâmetros Y do quadripolo mostrado na Fig P16.46.

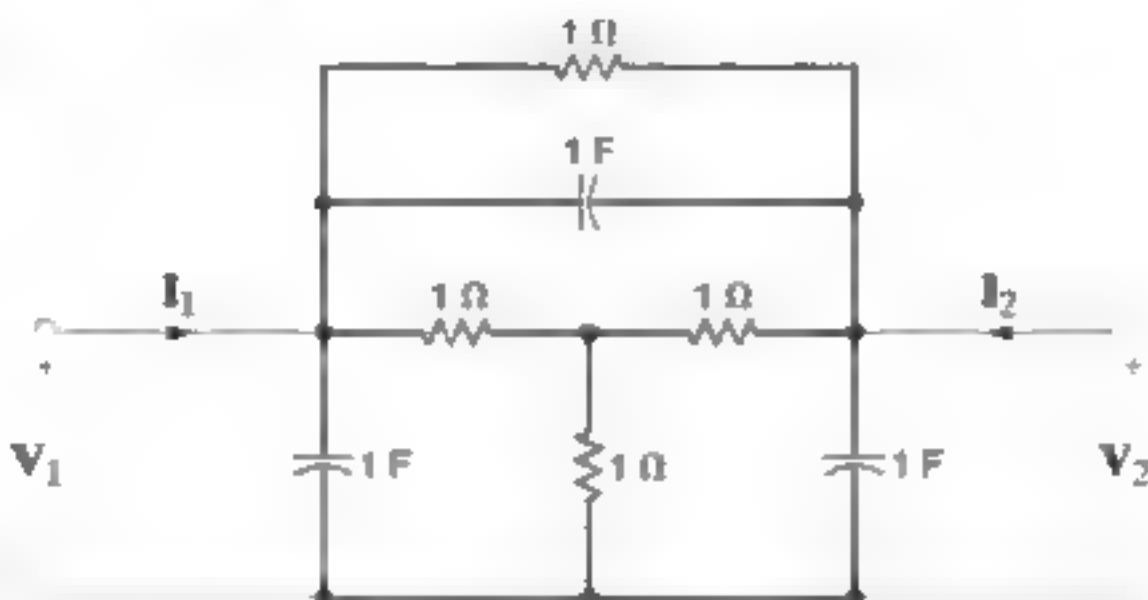


Figura P16.46

16.47 Determine os parâmetros Y do quadripolo mostrado na Fig. P16.47. Obtenha, também, a admitância de entrada da rede quando o capacitor for conectado à porta de saída.

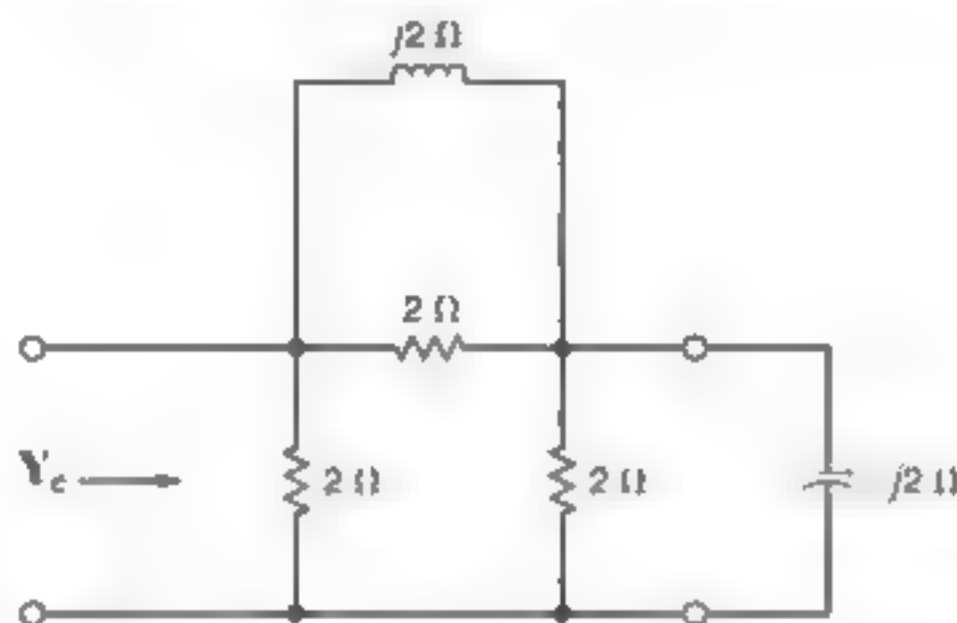


Figura P16.47

16.48 Determine os parâmetros Y do quadripolo mostrado na Fig P16.48

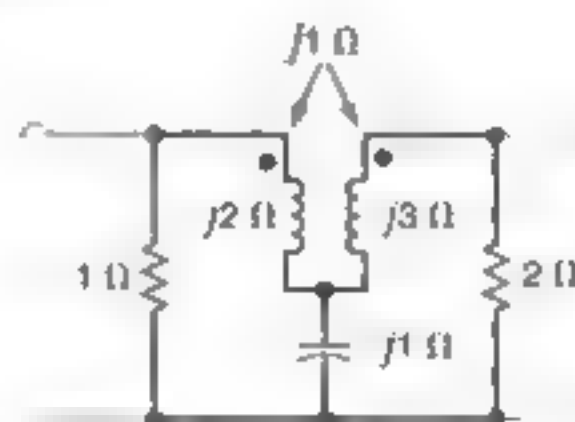


Figura P16.48

16.49 Determine os parâmetros de transmissão da rede mostrada na Fig. E16.4 considerando uma interconexão em cascata de três quadripolos, conforme mostrado na Fig P16.49.

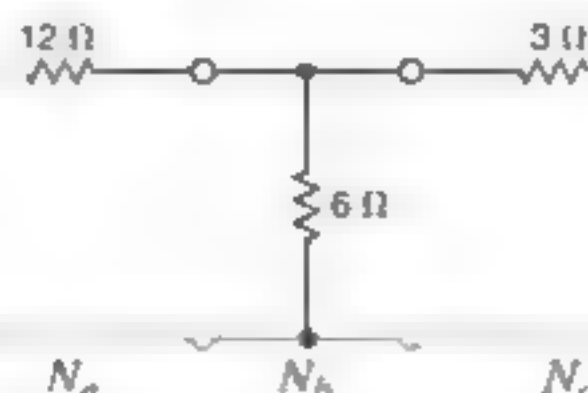


Figura P16.49

- 16.50 Determine os parâmetros ABCD do circuito mostrado na Fig. P16.50.

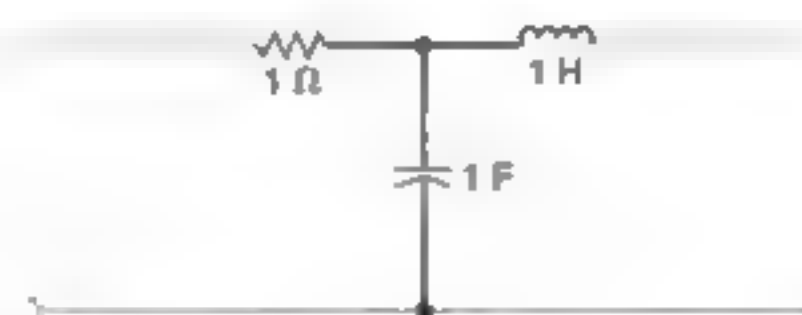


Figura P16.50

- 16.51 Determine os parâmetros Y do quadripolo mostrado na Fig. P16.51.

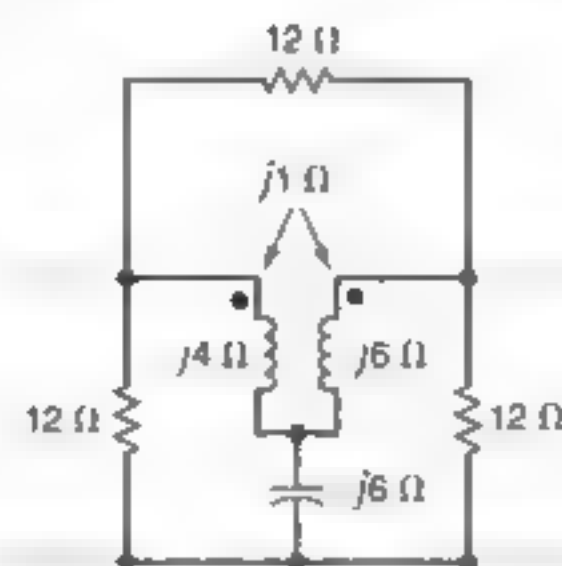


Figura P16.51

- 16.52 Determine os parâmetros Z do quadripolo mostrado na Fig. P16.52 e, em seguida, determine a corrente I_x para as condições especificadas nos terminais.

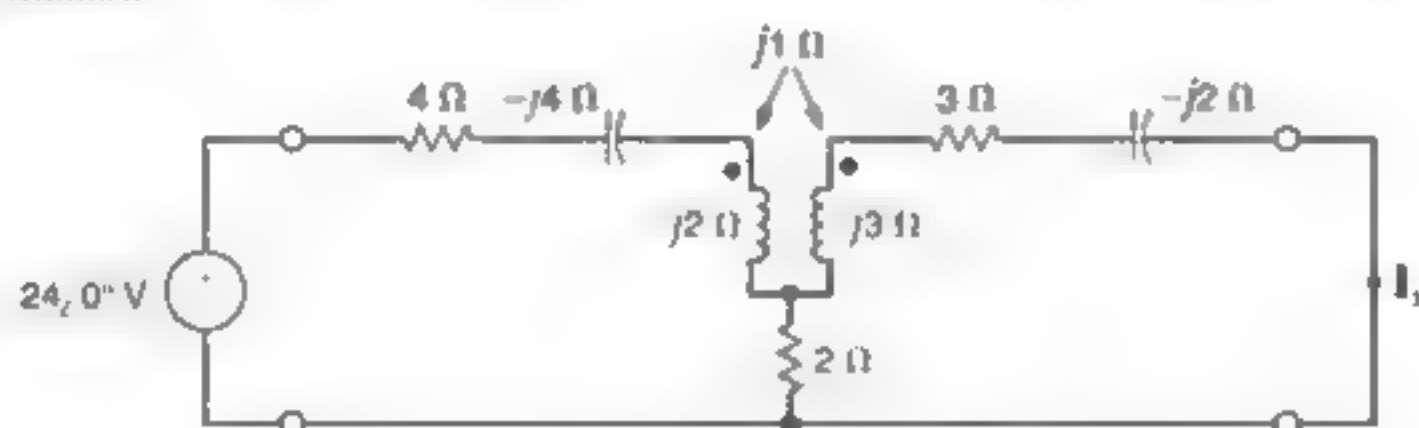


Figura P16.52

- 16.53 Determine a tensão de saída V_x da rede mostrada na Fig. P16.53 considerando que os parâmetros Z do quadripolo são

$$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

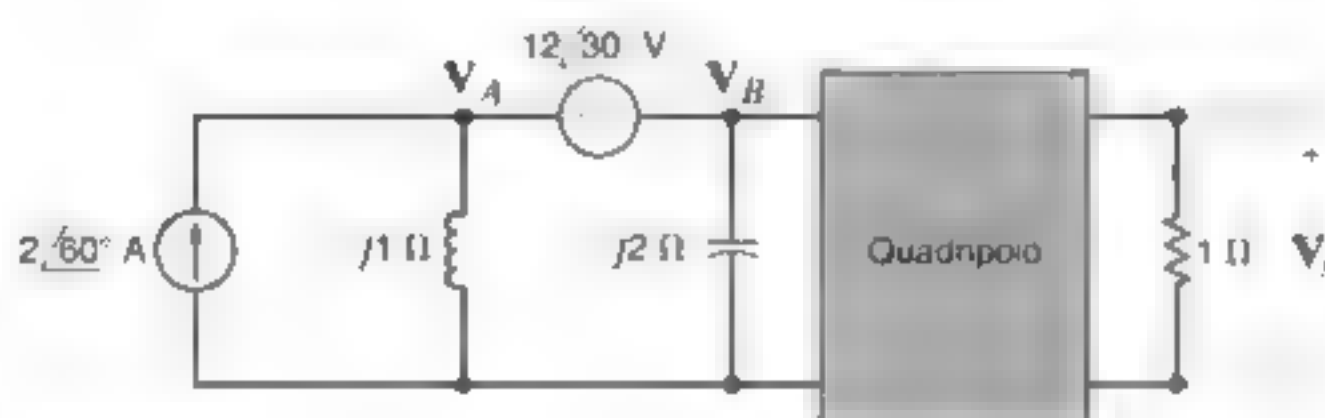


Figura P16.53

- 16.54 Determine a tensão de saída V_x da rede mostrada na Fig. P16.54 considerando que os parâmetros Z do quadripolo são

$$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 12 \end{bmatrix}$$

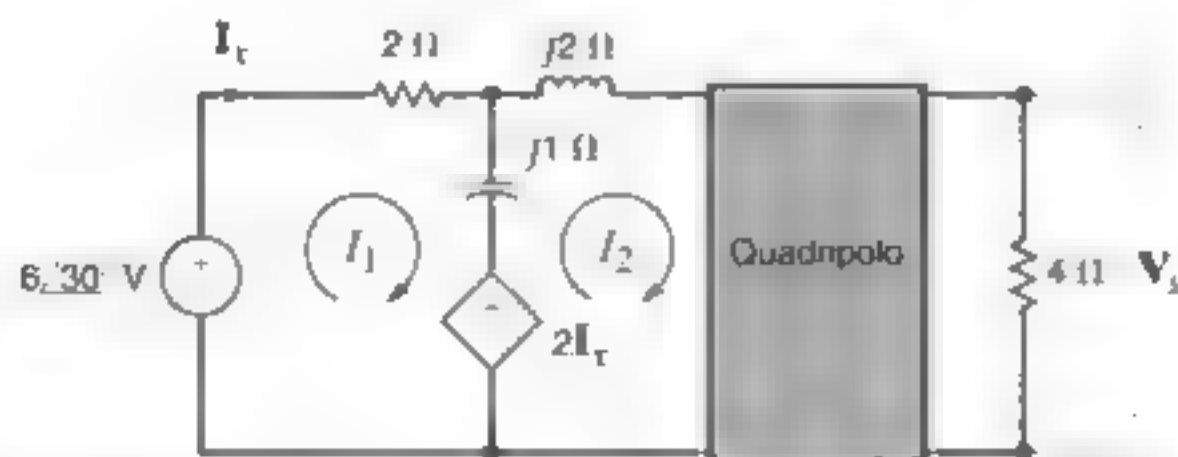


Figura P16.54

- 16.55** Determine os parâmetros de transmissão do quadripolo mostrado na Fig. P16.55 e, em seguida, utilize as condições dos terminais para calcular a corrente I_x .

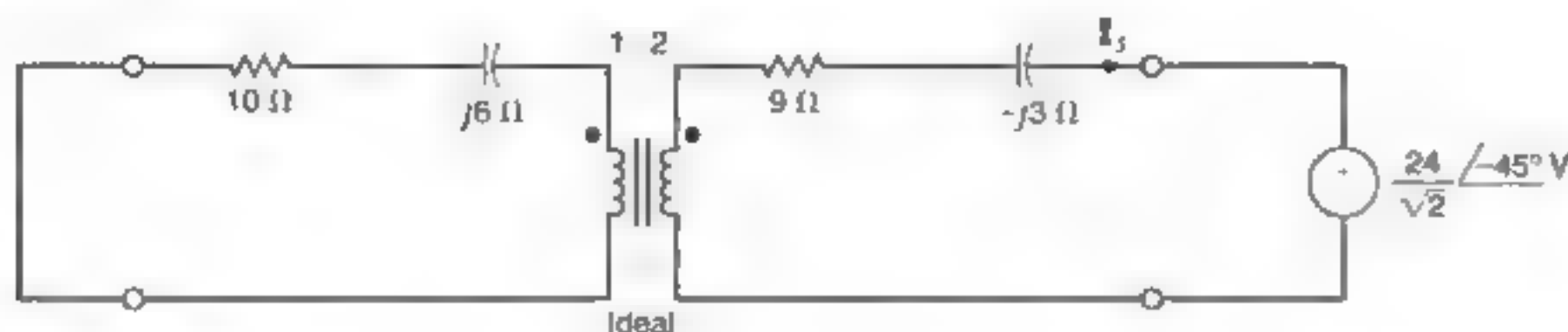


Figura P16.55

PROBLEMAS TÍPICOS DE EXAMES PROFISSIONAIS DE ENGENHARIA

- 16PEP-1** Sabe-se que um quadripolo possui os seguintes parâmetros.

$$y_{11} = \frac{1}{14} \text{ S}, y_{12} = y_{21} = -\frac{1}{21} \text{ S}, y_{22} = \frac{1}{7} \text{ S}$$

Se uma fonte de corrente de 2 A é conectada aos terminais de entrada, conforme mostrado na Fig. 16PEP-1, determine a tensão nos terminais dessa fonte de corrente.

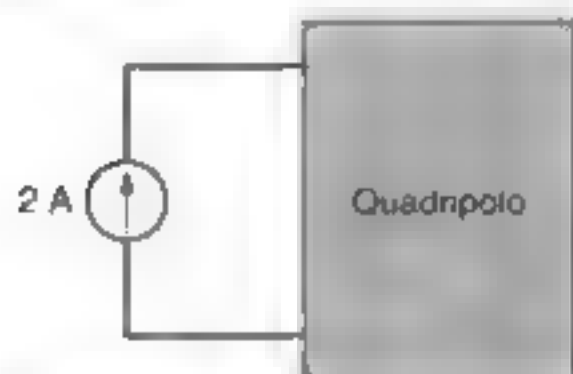


Figura 16PEP-1

- 16PEP-2** Determine a resistência equivalente de Thévenin nos terminais de saída da rede mostrada na Fig. 16PEP-1.

- 3 Ω
- 9 Ω
- 12 Ω
- 6 Ω

- 16PEP-3** Determine os parâmetros Y do quadripolo mostrado na Fig. 16PEP-3

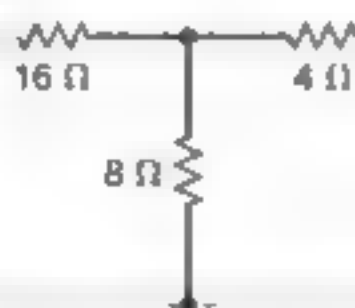


Figura 16PEP-3

- $y_{11} = \frac{5}{32} \text{ S}, y_{12} = y_{21} = \frac{5}{14} \text{ S}, y_{22} = \frac{9}{14} \text{ S}$
- $y_{11} = \frac{7}{48} \text{ S}, y_{12} = y_{21} = -\frac{3}{16} \text{ S}, y_{22} = \frac{7}{16} \text{ S}$

$$\text{c. } y_{11} = \frac{3}{25} \text{ S}, y_{12} = y_{21} = -\frac{1}{15} \text{ S}, y_{22} = \frac{4}{15} \text{ S}$$

$$\text{d. } y_{11} = \frac{3}{56} \text{ S}, y_{12} = y_{21} = -\frac{1}{28} \text{ S}, y_{22} = \frac{3}{28} \text{ S}$$

- 16PEP-4** Determine os parâmetros Z da rede mostrada na Fig. 16PEP-4.

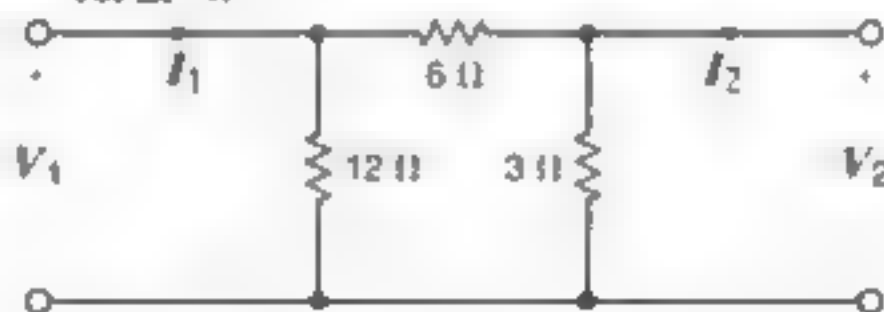


Figura 16PEP-4

$$\text{a. } z_{11} = \frac{19}{3} \Omega, z_{12} = z_{21} = \frac{5}{3} \Omega, z_{22} = \frac{7}{3} \Omega$$

$$\text{b. } z_{11} = \frac{22}{5} \Omega, z_{12} = z_{21} = \frac{7}{5} \Omega, z_{22} = \frac{9}{5} \Omega$$

$$\text{c. } z_{11} = \frac{36}{7} \Omega, z_{12} = z_{21} = \frac{12}{7} \Omega, z_{22} = \frac{18}{7} \Omega$$

$$\text{d. } z_{11} = \frac{27}{6} \Omega, z_{12} = z_{21} = \frac{7}{6} \Omega, z_{22} = \frac{13}{6} \Omega$$

- 16PEP-5** Calcule os parâmetros híbridos da rede da Fig. 16PEP-5.

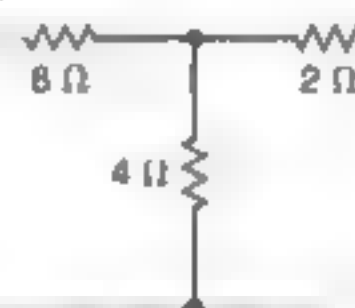


Figura 16PEP-5

$$\text{a. } h_{11} = \frac{28}{3} \Omega, h_{12} = \frac{2}{3}, h_{21} = \frac{2}{3}, h_{22} = \frac{1}{6} \text{ S}$$

$$\text{b. } h_{11} = \frac{16}{5} \Omega, h_{12} = \frac{1}{5}, h_{21} = \frac{1}{5}, h_{22} = \frac{3}{10} \text{ S}$$

$$\text{c. } h_{11} = \frac{19}{4} \Omega, h_{12} = \frac{3}{4}, h_{21} = \frac{3}{4}, h_{22} = \frac{5}{8} \text{ S}$$

$$\text{d. } h_{11} = \frac{32}{9} \Omega, h_{12} = \frac{2}{9}, h_{21} = \frac{2}{9}, h_{22} = \frac{1}{18} \text{ S}$$

NÚMEROS COMPLEXOS

Os números complexos são tipicamente representados de três formas: exponencial, polar, ou retangular. Na forma exponencial um número complexo A é expresso como

$$A = ze^{j\theta} \quad 1$$

A grandeza real z é conhecida como amplitude ou magnitude, a grandeza real θ é chamada de *ângulo* e é indicada conforme mostrado na Fig. 1, e j é o operador imaginário $j = \sqrt{-1}$. O ângulo θ , que é medido entre o eixo real e A , pode ser expresso tanto em radianos quanto em graus.

A forma polar de um número complexo A , que é simbolicamente equivalente à forma exponencial, é escrita como

$$A = z/\theta \quad 2$$

e a representação retangular de um número complexo é expressa como

$$A = x + jy \quad 3$$

em que x é a parte real de A e y é a parte imaginária de A .

A relação existente entre as várias representações de A pode ser definida por meio da identidade de Euler, na qual

$$e^{j\theta} = \cos \theta + j \sin \theta \quad 4$$

A Fig. 2 mostra que essa função na forma retangular é um número complexo com amplitude unitária.

Utilizando essa identidade, o número complexo A pode ser escrito como

$$A = ze^{j\theta} = z \cos \theta + jz \sin \theta \quad 5$$

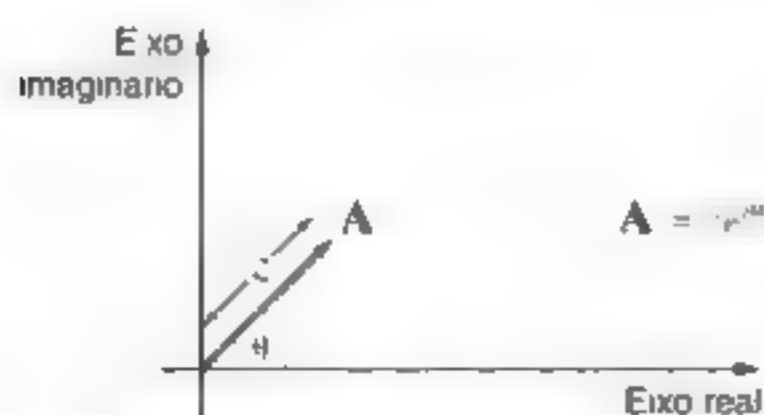


Figura 1 Forma exponencial de um número complexo.

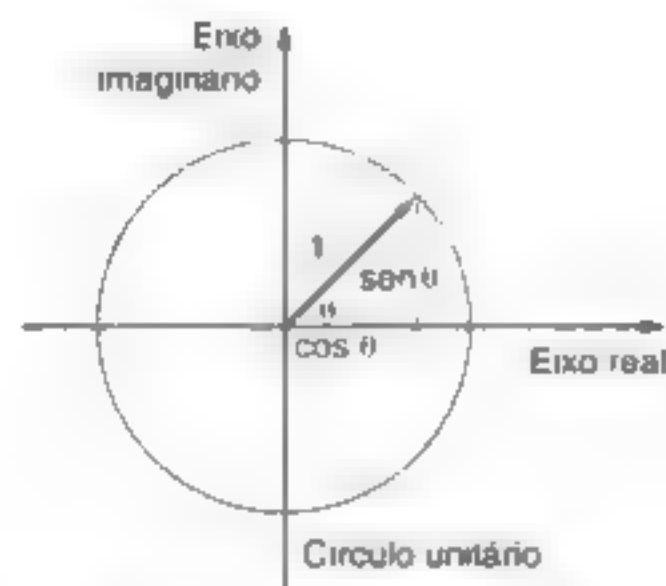


Figura 2 Interpretação gráfica da identidade de Euler.

que, conforme mostrado na Fig. 3, pode ser expresso como

$$A = x + jy$$

Igualando-se as partes real e imaginária dessas duas equações obtém-se

$$\begin{aligned} x &= z \cos \theta \\ y &= z \sin \theta \end{aligned} \quad 6$$

A partir dessas equações obtém-se

$$x^2 + y^2 = z^2 \cos^2 \theta + z^2 \sin^2 \theta = z^2 \quad 7$$

Portanto,

$$z = \sqrt{x^2 + y^2} \quad 8$$

Além disso,

$$\frac{z \sin \theta}{z \cos \theta} = \tan \theta = \frac{y}{x}$$

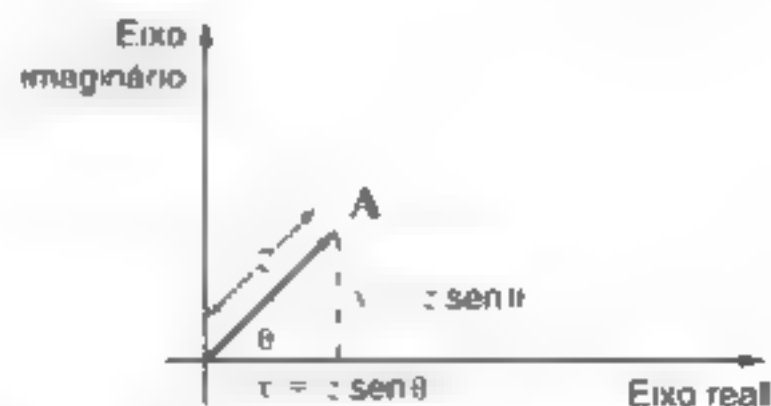


Figura 3 Relação entre as representações exponencial e retangular de um número complexo.

e, portanto,

$$\theta = \tan^{-1} \frac{y}{x} \quad 9$$

As inter-relações entre as três representações de um número complexo são mostradas na tabela a seguir.

EXPONENCIAL	POLAR	RETANGULAR
$ze^{j\theta}$	z/θ	$x+jy$
$\theta = \tan^{-1} y/x$	$\theta = \tan^{-1} y/x$	$x = z \cos \theta$
$z = \sqrt{x^2 + y^2}$	$z = \sqrt{x^2 + y^2}$	$y = z \sin \theta$

EXEMPLO 1

Suponha que se deseje calcular a soma dos números $A + B$ se $A = 5 \angle 36,9^\circ$ e $B = 5 \angle 53,1^\circ$.

SOLUÇÃO

Deve-se, inicialmente, fazer a conversão da forma polar para a forma retangular, isto é,

$$A = 5 \angle 36,9^\circ = 4 + j3$$

$$B = 5 \angle 53,1^\circ = 3 + j4$$

A diferença entre dois números complexos $A = x_1 + jy_1$ e $B = x_2 + jy_2$ é

$$\begin{aligned} A - B &= (x_1 + jy_1) - (x_2 + jy_2) \\ &= (x_1 - x_2) + j(y_1 - y_2) \end{aligned} \quad 11$$

EXEMPLO 2

Seja o cálculo da diferença $A - B$ se $A = 5 \angle 36,9^\circ$ e $B = 5 \angle 53,1^\circ$.

SOLUÇÃO

Convertendo-se ambos os números da forma polar para a forma retangular, tem-se

$$A = 5 \angle 36,9^\circ = 4 + j3$$

$$B = 5 \angle 53,1^\circ = 3 + j4$$

Assim,

$$A - B = (4 + j3) - (3 + j4) = 1 - j1 = \sqrt{2} \angle -45^\circ$$

O produto entre dois números complexos $A = z_1 \angle \theta_1 = x_1 + jy_1$ e $B = z_2 \angle \theta_2 = x_2 + jy_2$ é

$$AB = (z_1 e^{j\theta_1})(z_2 e^{j\theta_2}) = z_1 z_2 \angle \theta_1 + \theta_2 \quad 12$$

Mostraremos, agora, que as operações de adição, subtração, multiplicação e divisão são aplicáveis aos números complexos da mesma maneira que são aplicadas aos números reais.

A soma de dois números complexos $A = x_1 + jy_1$ e $B = x_2 + jy_2$ é

$$\begin{aligned} A + B &= (x_1 + jy_1) + (x_2 + jy_2) \\ &= (x_1 + x_2) + j(y_1 + y_2) \end{aligned} \quad 10$$

Isto é, simplesmente, são somadas as partes reais e as partes imaginárias individualmente, para se obter as componentes do número complexo resultante.

Portanto,

$$\begin{aligned} A + B &= 4 + j3 + 3 + j4 = 7 + j7 \\ &= 9,9 \angle 45^\circ \end{aligned}$$

[atenção]

As operações de soma e subtração de números complexos são realizadas mais facilmente quando os números estão na forma retangular.

Isto é, as partes reais e imaginárias simplesmente são subtraídas individualmente para se obter as componentes do número complexo resultante.

EXEMPLO 3

Dados os números $A = 5 \angle 36,9^\circ$ e $B = 5 \angle 53,1^\circ$ deseja-se calcular o resultado de seu produto nas formas polar e retangular.

SOLUÇÃO

$$\begin{aligned} AB &= (5 \angle 36,9^\circ)(5 \angle 53,1^\circ) = 25 \angle 90^\circ \\ &= (4 + j3)(3 + j4) \\ &= 12 + j16 + j9 + j^2 12 \\ &= 25j \\ &= 25 \angle 90^\circ \end{aligned}$$

[atenção]

As operações de multiplicação e divisão de números complexos são realizadas mais facilmente quando os números estão na forma polar ou exponencial.

EXEMPLO 4

Dados os números complexos $A = 2 + j2$ e $B = 3 + j4$, deseja-se calcular o produto AB .

SOLUÇÃO

$$\begin{aligned} A &= 2 + j2 = 2,828 \angle 45^\circ \\ B &= 3 + j4 = 5 \angle 53,1^\circ \end{aligned}$$

c

$$AB = (2,828 \angle 45^\circ)(5 \angle 53,1^\circ) = 14,14 \angle 98,1^\circ$$

A divisão entre dois números complexos $A = z_1 \angle \theta_1 = x_1 + jy_1$ e $B = z_2 \angle \theta_2 = x_2 + jy_2$ é

$$\frac{A}{B} = \frac{z_1 e^{j\theta_1}}{z_2 e^{j\theta_2}} = \frac{z_1}{z_2} e^{j(\theta_1 - \theta_2)} = \frac{z_1}{z_2} \angle \frac{\theta_1 - \theta_2}{1} \quad 13$$

EXEMPLO 5

Dados os números $A = 10 \angle 30^\circ$ e $B = 5 \angle 53,1^\circ$, deseja-se determinar o quociente A/B nas formas polar e retangular.

SOLUÇÃO

$$\begin{aligned} \frac{A}{B} &= \frac{10 \angle 30^\circ}{5 \angle 53,1^\circ} \\ &= 2 \angle -23,1^\circ \\ &= 1,84 - j0,79 \end{aligned}$$

EXEMPLO 6

Dados os números complexos $A = 3 + j4$ e $B = 1 + j2$, deseja-se calcular o quociente A/B .

SOLUÇÃO

$$\begin{aligned} A &= 3 + j4 = 5 \angle 53,1^\circ \\ B &= 1 + j2 = 2,236 \angle 63^\circ \end{aligned}$$

c

$$\frac{A}{B} = \frac{5 \angle 53,1^\circ}{2,236 \angle 63^\circ} = 2,236 \angle -9,9^\circ$$

EXEMPLO 7

Se $A = 3 + j4$, seja o cálculo de $1/A$.

SOLUÇÃO

$$A = 3 + j4 = 5 \angle 53,1^\circ$$

e

$$\frac{1}{A} = \frac{1}{5 \angle 53,1^\circ} = 0,2 \angle -53,1^\circ$$

ou

$$\begin{aligned} \frac{1}{A} &= \frac{1}{3 + j4} = \frac{3 - j4}{(3 + j4)(3 - j4)} \\ &= \frac{3 - j4}{25} = 0,12 - j0,16 \end{aligned}$$

ÍNDICE



Admitância, 315
 Amplificadores)
 buffer, 134
 operacionais, 128-154
 circuitos básicos que utilizam op-amps, 134
 com transcondutância, 521
 comparadores, 141
 exemplos
 de aplicação, 142
 de projeto, 145
 modelos de op-amps, 129
 Análise
 através da energia, 416
 da potência no regime estacionário, 359-405
 circuitos monofásicos com três condutores, 379
 considerações sobre segurança, 382
 correção do fator de potência, 376
 exemplos
 de aplicação, 388
 de projeto, 392
 o fator de potência, 371
 potência
 complexa, 373
 instantânea, 360
 média, 361
 transferência máxima de potência
 média, 364
 valores efetivos ou rms, 368
 da resposta no domínio da frequência, 479
 de circuitos, aplicação da transformada de Laplace na, 568-611
 do regime estacionário dos circuitos
 CA, 304-358
 básica de circuitos utilizando as leis de Kirchhoff, 322
 diagramas de fasores, 320
 exemplos
 de aplicação, 334
 de projeto, 336
 fasores, 309
 funções de forçamento senoidais e complexas, 307
 impedância e admitância, 315
 procedimentos de análise, 325
 relações entre fasores dos componentes de um circuito, 311
 senoides, 305
 dos laços, 100
 nodal, 86
 transiente dos circuitos de primeira e segunda ordens, 245-303
 circuitos
 de primeira ordem, 247
 de segunda ordem, 263
 exemplos de aplicação e de projeto, 273
 Ângulo de fase, 305
 do fator de potência, 371
 Autotransformador, 432

B

Banco de capacitores, 378
 Bobinas mutuamente acopladas, 412

Bode, diagramas de, 484
 Boeing Dreamliner, 85
 Buffer, 132



Caminho fechado, 27
 Capacitância e indutância, 203-244
 capacitores, 204
 combinações de capacitores e indutores, 219
 indutores, 210
 Capacitor(es)
 banco de, 378
 de chips, 224
 em paralelo, 220
 em série, 219
 especificações, 216
 valores padronizados, 216
 Carga(s)
 conectadas na configuração
 delta, 453
 estrela, 563
 elétrica, 2
 Casamento de impedância, 365
 Choque elétrico, efeitos, 382
 Circuito(s)
 aberto, descrições para a condução de um, 24
 análise de, aplicação da transformada de Laplace na, 568-611
 buffer, 132
 com amplificadores operacionais RC, 225
 com as tensões nodais conhecidas, 86
 com combinações de resistores em série e em paralelo, 46
 com fontes dependentes, 53
 com múltiplas fontes
 e com um único par de nós, 38
 e múltiplos resistores, 36
 com quatro nós, 89
 com três nós, 87
 com um único laço, 34
 componentes de um, 6
 contendo
 apenas fontes de corrente independente, 87
 transformadores ideais, 423
 conversor de 12 V para 9 V, 63
 de parâmetros concentrados, 27
 de potência CA trifásicos em equilíbrio, 457
 de primeira ordem, 247
 de segunda ordem, 263
 de uma lanterna elétrica, 4
 defeituoso, 383
 do transformador ideal, 419
 em cascata, análise, 47
 equação básica do, 263
 equivalentes, 41
 formas de, 156
 interruptor de falha do terra, 384
 magneticamente acoplado, 417
 monofásicos com três condutores, 379
 polifásicos, 448-477
 conexões
 fonte/carga, 454
 trifásicas, 453

correção do fator de potência, 463
 exemplos
 de aplicação, 465
 de projeto, 467
 relações de potência, 461
 que utilizam op-amps, 134
 RC, 249
 resistivos, 22-84
 ressonantes, 493
 RL, 249
 RLC, 263
 seletor do aquecedor resistivo simples, 60
 simples com componente em paralelo, 39
 somador passivo simples, 337
 trifásico(s), 449
 balanceado, 450
 em equilíbrio, 450
 utilizando as leis de Kirchhoff, análise básica de, 322
 Cirurgia robótica, 128
 Combustível fóssil, unidade de geração operada por, 450
 Comparadores, 141
 Componentes sem perdas, 36
 Conceitos básicos
 componentes de um circuito, 6
 grandezas básicas, 2
 sistemas de unidades, 2
 Condutores de cobre maciços, resistência por pé dos, 217
 Conexão(ões)
 fonte/carga, 453, 454
 trifásicas, 453
 Constante de tempo, 248
 Convenção
 de sinais para potência, 5
 passiva de sinais, 5, 87
 Convolução, integral de, 556
 Corrente(s)
 alternada, 2
 contínua, 3
 elétrica, 2
 tipos comuns, 3
 valores típicos de algumas, 3
 Curto-circuito, descrições para a condução de, 24

D

Defasagem do tempo, 619
 Desempenho das redes em função da frequência, 478-545
 escalonamento, 508
 exemplos
 de aplicação, 527
 de projeto, 531
 filtros, 509
 Diagrama
 de Bode, 484
 determinação de transferência a partir do, 492
 de circuito para bobinas magneticamente acopladas, 409
 de corpo avir, 246
 de fasores, 312, 320

Dispositivo
de monitoração, 155
para detecção de falhas, moderno, 388

Divisão
de corrente, 381
de tensão, 34

Divisor de tensão, planilha eletrônica de cálculos de um simples, 65

E

Efetividade, 368

Energia, 3

Equação
básica do circuito, 263
de respostas, 264
para resistências em paralelo, 39

Equivalência, 156

Escalonamento, 508

Espectro(s)
de fases, 624
de frequências, 624
de linha, 624

Estreito de Tacoma, colapso da ponte sobre o, 587

F

Fase
adiantada, 305
atrasada, 305

Fasores, 309
análise por meio de, 311
diagrama de, 312, 320
dos componentes de um circuito, relações entre os, 311
representação por meio de, 311

Fator
de potência, 371
correção do, 376
de qualidade Q , 494

Fazendas côlicas, 448

Filtro(s)
ativos, 514
biquad, 526
de dois estágios com buffer, 531
OTA-C biquad Tow-Thomas, 526
OTA-C passa-banda de primeira ordem, 525
passa
-alta, 514
-baixa, 514
-banda, 514, 519
passivos, 509
rejeita-banda, 514

Fluxo de corrente, convenção para, 2

Fonte(s)
conectada em delta, 456
dependentes, 8
independentes, 7

Força
eletromotriz, 3
potencial, 3

Frequência(s)
de corte, 486
desempenho das redes em função da, 478-545
domínio da, análise da resposta no, 479
espectros de, 624
ideais, 634
música e, 478

Função(ões)
complexas, 307
de forçamento senoidais, 307
de grau unitário, 547
de rede, 483
de transferência, 483, 581

impulso unitário, representação, 548
singulares, 260
duas importantes, 547

G

Ganho de tensão, 483
Geló presente nas águas do mar, medição do, 245
Grandezas básicas, 2

H

Harmônicos, 636

I

Identidade de Euler, interpretação gráfica, 67

Impedância, 315
dependente de frequência para um(a)
capacitor, 480
indutor, 479
rede RLC em série, 480
resistor, 479
independente de frequência para um
resistor, 479

Indutância mútua, 407

Indutor(es)
em chips, 224
em paralelo, 222
em série, 222
ideal, 407
valores padronizados, 217

Integral de convolução, 556

Interconexão de redes
em cascata, 660
em série, 660

Interruptor de falha do terra, 383

K

Kirchhoff, leis de, 27

L

Laço(s), 27
análise dos, 100

Lei(s)
de Ampère, 407
de Faraday, 407
de Kirchhoff, 27
de Ohm, 23
circuitos utilizados para explicar, 33

Linearidade, 156

Linhas de transmissão de energia, 451

M

Marca-passos artificiais para o coração, 612

Medidores de energia elétrica, 381

Micro UAVs, 546

Microrrobôs aéreos, 546

MOSFET (*metal-oxide-semiconductor field-effect transistors*), 8

Multiplicador analógico de dois quadrantes, 524

Música e frequência, 478

N

Nó terra, 86

Norton, teorema de, 162, 331

Números complexos, 673-676

O

Ohm, lei de, 23

Onda, geração da forma de, 621

Op-amps

circuito de um, rede, 131

curvas características, 131

ideal, 133

LM₃₂₄ quad, diagrama dimensional, 130

modelos de, 129

relação de, 131

OTA (*operational transconductance amplifier*), 521
integrador, 522
op-amps ideais e, comparação entre, 522
resistor simulado através de um, 522
símbolo esquemático, 522
somador de tensões, 523

Overshoot, 582

P

Painel de circuito impresso, 58

Parâmetros

conversão de, 658
de admitância, 652
de transmissão, 657
híbridos, 656

Parseval, teorema de, 632

Plano complexo, 582

Polo(s), 483
complexos conjugados, 554
múltiplos, 555
na origem, 485
quadráticas, 486
simples, 485, 553

Ponte sobre o Estreito de Tacoma, 502

Potência

aparente, 371

complexa, 373

em quadratura, 373

fator de, 371
correção do, 463

instantânea, 360

máxima, transferência de, 177

média, 361
transferência máxima de, 364

no regime estacionário, análise da, 359-405

reativa, 373

relações de, 461

Princípio da superposição, 158, 326

Procedimento

da variável de estado, 248

de análise, 325

passo a passo, 252

Propriedade de amostragem, 548

Pulso(s)

aspectos dos, 629

resposta ao, 260

Q

Quadripolo(s), 651-672
conversão de parâmetros, 658
exemplos
de aplicação, 662
de projeto, 665
genérico, 652
interconexão, 659
parâmetros de
admitância, 652
híbridos, 656
impedância, 654
transmissão, 657

R

Rail-to-rail, 131

Ramo, 27

Rede(s)

- CA simples, 360
- criticamente amortecida, 582
- de transmissão de potência, inteligente, 304
- em função da frequência, desempenho das, 478-545
- equivalente de um amplificador, 482
- magneticamente acopladas, 406-447
 - análise através da energia, 416
 - exemplo
 - de aplicação, 426
 - de projeto, 430
 - indutância mútua, 407
 - transformador ideal, 418
- residencial de três condutores, 381
- resposta de uma, 265
- subamortecida, 582
- superamortecida, 582
- trifásicas, terminologia das, 470

Relações de potência, 461

Resistor(es)

- de chip de filme espesso, dimensões, 57
- de filme
 - espesso, 57
 - fino, 58
- de silício difuso, 58
- em série e em paralelo, combinações de, 42
- especificação dos, 45
- símbolo, 23
- tecnologia dos, 57
- tipos, características dos diversos, 59
- valores, 45

Resposta

- criticamente amortecida, 269
- de uma rede, 265
- subamortecida, 268
- superamortecida, 267

Ressonância de redes com componentes em paralelo, 503

série, 493

rms (*root mean square*), 368, 369

Rotomoldagem, processo de fabricação por, 378

S

- Segurança, considerações sobre, 382
- Semicondutor metal-óxido, 8
- Senoides, 305
- Sequência de espelhos solares, 359

Série(s) de Fourier

- de algumas formas de ondas, 622
- exponencial, 614
- técnicas de análise através das, 612-650
- trigonométrica, 616

Símbolo(s)

- de um resistor, 23
- de uma fonte de tensão independente, 7

Simetria, 616

Simplificação das combinações de resistores, 43

Sinais em fase e fora de fase, 305

Sistema(s)

- de unidades, 2
- Internacional de Unidades, 2
- monofásico com três condutores, 380

Sobrevalor, 582

Solução

- complementar, 247
- do regime estacionário, 248
- particular, 247

Soma algébrica das correntes, 27

Superposição, 157

princípio da, 158, 327

Système International des Unités, 2

T

Técnica(s)

- adicionais de análise, 155-202
 - exemplo(s)
 - de aplicação, 181
 - de projeto, 182
 - superposição, 157
 - teoremas de Thévenin e de Norton, 162
 - transferência de potência máxima, 177
- de análise nodal e de laços, 85-127

Telescópio espacial Hubble, 1

Televisões de alta definição, 651

Tensão(ões)

- corrente, 4
- de um resistor linear, 24
- de uma lâmpada, 24
- para um resistor, relação, 312
- divisão de, 34
- fontes de, 7
- lei de Kirchhoff das, 32
- nodais, ilustração, 87
- representações da, 3
- trifásicas balanceadas, 452
- valores típicos de algumas, 4

Teorema

- de Norton, 162, 331
 - análise pelo, 327
- de Parseval, 632
- de Thévenin, 162
 - análise pelo, 326
 - circuito utilizado no desenvolvimento do, 163

Terminais de saída, 130

Terminologia das redes trifásicas, 470

Tesla Roadster, 22

Thévenin, teorema de, 162

Tomada residencial com pino terra, 383

Trabalho, 3

Transferência

- de potência máxima, 177
- máxima de potência média, 364

Transformação(ões)

- de fonte, 1741
- Y, 51

Transformada

- de Fourier, 628
 - propriedades da, algumas, 630, 631
- de Laplace, 546-567
 - definição, 547
 - exemplos de aplicação, 559
 - integral de convolução, 556
 - inversa, 552
 - na análise de circuitos, aplicação da, 568-611
 - pares da, 550
 - propriedades, 550, 551
 - teoremas do valor inicial e do valor final, 591
- rápida de Fourier, 642

Transformador

- de potência trifásico, 451
- diferencial linear variável, 430
- empregando um núcleo magnético, 419
- ideal, 418
 - símbolo de um, 419

Transistor(es)

- com efeito de campo, 53
- de junção bipolar, 53

Transmissão de energia, linhas de, 451

Trem de levitação magnética, 406

Troca de fonte, 174, 326

U

Unidade de geração

- hidrelétrica, 449
- nuclear, 451

V

Valores efetivos, 368

Z

Zero(s), 483

- origem, 485
- quadráticos, 486
- simples, 485

Crítérios de Credenciamento Cobertos Neste Texto

Os professores das áreas de Engenharia estão cada vez mais atentos aos resultados do aprendizado dos alunos. Em um mundo no qual as mudanças tecnológicas caminham a passos rápidos, é quase impossível aos estudantes dominar, em um programa de graduação, todos os assuntos que precisarão conhecer para serem bem-sucedidos em suas carreiras. Aproximadamente, metade do conhecimento adquirido pelos estudantes é construída lentamente, dia após dia. Mais do que tudo, os engenheiros de aplicação precisam estar preparados para serem eternos aprendizes, adaptáveis às novas tecnologias e aos novos desafios, aplicando seu conhecimento e sua habilidade às novas situações. O que se mantém na essência é que os estudantes de graduação devem desenvolver uma base sólida sobre os conceitos específicos de engenharia associados às suas áreas. Também de grande importância é o desenvolvimento de suas habilidades com o objetivo de aplicar esses conceitos para solucionar problemas reais e se tornarem aptos à adaptação de soluções e abordagens a desafios não triviais.

Os empresários, as sociedades profissionais e os órgãos de credenciamento cada vez mais procuram avaliar o aprendizado dos estudantes em termos das habilidades que possam demonstrar. Nos Estados Unidos, o Conselho de Credenciamento para Engenharia e Tecnologia descreve essas habilidades por meio de uma lista de critérios utilizados na avaliação periódica dos programas de engenharia. Este livro foi desenvolvido para dar suporte, da melhor forma possível, aos resultados de aprendizado dos estudantes que estejam alinhados com esses critérios. O material impresso e digital apresentado neste livro foi elaborado de modo a estabelecer um sistema integrado de ensino e aprendizado no apoio dos seguintes objetivos de aprendizado aos quais os estudantes deverão estar aptos a demonstrar após sua graduação:

Habilidade em aplicar os conhecimentos de matemática, ciência básica e engenharia na solução de problemas envolvendo diversas áreas básicas, dentre as quais a dos circuitos elétricos.

Por meio deste texto, o estudante é solicitado a aplicar os conceitos de matemática para resolver uma grande variedade de problemas de circuitos. Dentre as ferramentas matemáticas empregadas destacam-se: álgebra, trigonometria, determinantes, matrizes, equações diferenciais e modelos de transformadas – Laplace e Fourier. Uma novidade desta edição está no conjunto de avaliações das habilidades matemáticas, as quais desenvolvem nos estudantes a aptidão com as ferramentas de acesso aos conceitos matemáticos básicos. Além disso, os estudantes podem utilizar esses módulos para definir sua própria limitação e dar apoio às áreas nas quais são mais fracos.

Habilidade em projetar um componente ou sistema elétrico de modo a atender uma demanda.

Diversos exemplos e problemas de projeto são empregados ao longo do texto. As especificações desejadas são fornecidas, e os estudantes devem aplicar o conhecimento

por eles adquirido até aquele ponto para determinar uma estratégia de ataque que resultará em uma solução viável. Esses são problemas interessantes que, com frequência, possuem mais de uma solução e, portanto, o estudante fica informado sobre os tipos de situação que os engenheiros se deparam na prática de seu dia a dia.

Habilidade em identificar e formular um problema quando se depara com uma situação que requer uma solução de engenharia.

O texto contém inúmeros exemplos e problemas de aplicação que requerem uma solução de engenharia. Tanto os exemplos quanto os problemas se estendem por um amplo espectro e abrangem desde características muito simples até situações que são bastante complexas. A profundidade e abrangência desses exemplos e problemas fornecem aos estudantes o tipo de experiência necessária para identificar e formular problemas que requerem uma solução de engenharia.

Competência no uso de computadores e equipamentos modernos, e habilidades para resolver problemas de circuitos.

Uma aplicação das leis fundamentais da análise e do projeto de circuitos, inevitavelmente, resultará em um conjunto de equações matemáticas. Embora seja sempre possível resolver essas equações utilizando desenvolvimentos exaustivos, a aplicação de modernas ferramentas matemáticas será, tipicamente, muito mais eficiente e menos sujeita a erros. Essas ferramentas, basicamente, são implementadas em um programa e, assim, a imensa capacidade de processamento de um computador digital pode ser aplicada de modo a se obter a solução. Diversas ferramentas novas e eficientes são empregadas nesta obra para resolver rapidamente um amplo espectro de problemas. Por exemplo, este livro oferece material suplementar sobre o emprego de três modernas ferramentas computacionais comumente utilizadas na indústria – PSPICE, MATLAB e Multisim – as quais podem ser acessadas online ou integradas na versão customizada do texto. O conhecimento adquirido com o uso de uma ou mais dessas ferramentas neste momento em um currículo de engenharia será extremamente valioso, uma vez que essas ferramentas são empregadas em diversas disciplinas que, sem dúvida, se seguirão ao curso de circuitos.

Reconhecimento da necessidade e habilidade de compreender conceitos novos como necessários para a prática contínua da profissão.

É fácil de perceber que os conceitos aprendidos no início deste livro são aplicados posteriormente para resolver problemas mais complexos. Além disso, o material aprendido inicialmente representa a base para o desenvolvimento de novos conceitos e técnicas necessárias para apoiar o crescimento requerido para um avanço continuado. Uma extensão natural desse processo é, certamente, a melhoria continuada dos conhecimentos e das habilidades do estudante, que deverá lograr seu sucesso como um profissional de engenharia.